Analisi Reale

2006 / 2007

Lezioni V. I. BURENKOV

Appunti G. FRANZINA

Premessa

Contenuto del corso

Parte 1. Misure

Parte 2. Integrazione

Parte 3. Spazi L^p

Parte 4. Decomposizione e differenziazione delle misure

Le lezioni si basano sulla presentazione di

[F] G. Folland: Real Analysis, Modern techniques and their applications, John Wiley & Sons (1984).

cui ci si riferisce costantemente. Altri testi consigliati

[D2/1] G. De Marco: Analisi due/1, Decibel-Zanichelli (1993).

[D2/2] G. De Marco: Analisi due/2, Decibel-Zanichelli (1993).

[B] V. Burenkov: Introduction to the theory of L_p-spaces. Lecture notes, Segreteria Didattica (2006).

Capitolo I - MISURE. σ-algebre

ESEMPI. Volendo definire una funzione $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0,+\infty]$ che traduca significato intuitivo di misura, spereremmo che

i se $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ è una successione di parti a 2 a 2 disgiunte, allora

$$\mu\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j\Big) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu(E_j)$$

ii se $E, F \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ differiscono per una rototraslazione allora

$$\mu(E) = \mu(F)$$

iii $$\mu(]0,1]^n) = 1$$

Purtroppo tali condizioni risultano incompatibili per ogni $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,+\infty]$ se si vede in ([F], C.I, §1). Considerando pertanto ragionevoli le 3 richieste sopra domandiamo se esse diventino compatibili restringendo il dominio di μ, ad opportuno $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

I.1 - σ-algebre

DEFINIZIONE 1. Sia X un insieme. Si dice algebra di parti di X un insieme $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ che gode delle seg. proprietà:

i $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

ii $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

L'ovvia conseguenza della prima è la chiusura di $\mathcal{A}$ per unione finita:

i' $A_j \in \mathcal{A},\ j=1,\dots,m \Rightarrow \bigcup_{j=1}^m A_j \in \mathcal{A}$

Se poi $\mathcal{A}$ gode di

iii $A_j \in \mathcal{A},\ j \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$

diremo allora che $\mathcal{A}$ è una σ-algebra di parti di X.

LEMMA 1 Se $\mathcal{A}$ è algebra di parti di X, allora valgono le seg. proprietà

i $\quad \emptyset, X \in \mathcal{A}$

ii $\quad A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

iii $\quad A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$

iv $\quad$ se $\mathcal{A}$ è pure σ-algebra, è chiuso per intersezione numerabile:

$$\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$$

Dim

i. Poiché $\mathcal{A} \neq \emptyset$, sia $A \in \mathcal{A}$; per def., $\mathcal{A} \ni A^c$, dunque anche $X = A \cup A^c \in \mathcal{A}$ e $\emptyset = (A \cup A^c)^c \in \mathcal{A}$.

ii. Siano $A, B \in \mathcal{A}$. Allora anche $A^c, B^c \in \mathcal{A}$ e pure $A^c \cup B^c \in \mathcal{A}$. Allora anche $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A}$.

iii Siano $A, B \in \mathcal{A}$; allora anche $B^c \in \mathcal{A}$ e, per (ii) pure $B^c \cap A = A \setminus B \in \mathcal{A}$

iv. Sia $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$; allora pure $\{A_j^c\}_j \subset \mathcal{A}$; e perciò $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j = \left(\bigcup_j A_j^c\right)^c \in \mathcal{A}$. $\square$

OSSERVAZIONE La <u>def 1</u> non richiede per una σ-alg chiusura rispetto all'union arbitraria.

ESEMPI. Sia X un insieme

i $\quad \{\emptyset, X\}$ è una σ-alg. di $\mathcal{P}(X)$, e la minima possibile

ii $\quad \mathcal{P}(X)$ è una σ-alg di $\mathcal{P}(X)$

iii $\quad$ Sia $A \subset X$; $\{\emptyset, A, A^c, X\}$ è una σ-alg. di $\mathcal{P}(X)$.

LEMMA 2 Sia X un insieme. Se $\mathcal{F}$ è una famiglia arbitraria di σ-alg. di $\mathcal{P}(X)$, allora

$$\bigcap_{\mathcal{A}\in\mathcal{F}} \mathcal{A}$$

è una σ-alg. di $\mathcal{P}(X)$.

Dim

ii. Se $A \in \bigcap_{\mathcal{A}\in\mathcal{F}} \mathcal{A}$, allora $A \in \mathcal{A}\ \forall \mathcal{A} \in \mathcal{F}$, quindi $A^c \in \mathcal{A}\ \forall \mathcal{A} \in \mathcal{F}$.

iii. Sia $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \bigcap_{\mathcal{A}\in\mathcal{F}} \mathcal{A}$; allora $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}\quad \forall \mathcal{A} \in \mathcal{F}$

e, per def, anche $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$ $\forall \mathcal{A}\in\mathcal{F}$ quindi $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \bigcap_{\mathcal{A}\in\mathcal{F}} \mathcal{A}$. $\square$

DEFINIZIONE 2 Sia X un insieme, e sia $\mathcal{E}$ contenuto in $\mathcal{P}(X)$.
Si dice σ-algebra di $\mathcal{P}(X)$ generata da $\mathcal{E}$ la σ-algebra

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \bigcap_{\mathcal{A}\in\mathcal{F}} \mathcal{A}$$

ove $\mathcal{F} = \{\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(X) : \mathcal{A}$ è una σ-alg., $\mathcal{A}\supset\mathcal{E}\}$

NOTA: $\mathcal{F}\neq\phi$, perché almeno $\mathcal{P}(X)\in\mathcal{F}$; infatti $\mathcal{E}\subset\mathcal{P}(X)$ e $\mathcal{P}(X)$ è σ-alg (ES. ii).
Quindi $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ così def. è una σ-alg (Lemma 2).
In altre parole è la minima σ-alg. contenente $\mathcal{E}$.

DEFINIZIONE 3. Sia (X, τ_X) uno sp. top. Diremo σ-alg. dei boreliani di X e scriveremo $\mathcal{B}_X$, la σ-alg. di $\mathcal{P}(X)$ generata dalla topologia di X, cioè

$$\mathcal{B}_X := \mathcal{M}(\tau_X)$$

NOTA. Come conseguenza, se X è un insieme, la σ-alg. dei suoi boreliani contiene

- tutti gli aperti di X
- tutti i chiusi di X
- tutte le intersezioni o unioni, finite o numerabili, di aperti e chiusi di X
- " " " " " " " " di insiemi ottenute da tutte le...
- etc.

ESEMPIO. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ è la σ-alg dei boreliani di $\mathbb{R}$ generata dalla topologia standard.
NOTA:

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

il che sarà chiaro in seguito.

LEMMA 3. Sia X un insieme, siano $\mathcal{E}, \mathcal{F}\subset\mathcal{P}(X)$.

i $\quad \mathcal{E}\subset\mathcal{M}(\mathcal{E})$

ii $\quad \mathcal{M}(\mathcal{M}(\mathcal{E})) = \mathcal{M}(\mathcal{E})$

iii $\quad \mathcal{E}\subset\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{E})\subset\mathcal{M}(\mathcal{F})$

iv $\quad \mathcal{E}\subset\mathcal{M}(\mathcal{F}) \Rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{E})\subset\mathcal{M}(\mathcal{F})$

Dim

i. Segue da def. 2

ii Da (i) segue $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{M}(\mathcal{E}))$. Poiché poi $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \supset \mathcal{M}(\mathcal{E})$ applicando (i) si ha $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \supset \mathcal{M}(\mathcal{M}(\mathcal{E}))$.

iv. $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ è una σ-alg (e è la minima a contenere $\mathcal{F}$); ma contiene pure $\mathcal{E}$, quindi $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$ altrimenti $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ sarebbe una σ-alg. contenente $\mathcal{E}$, e più piccola.

iii da (i) si ha $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$ quindi $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}(\mathcal{F}) \overset{(iv)}{\Longrightarrow} \mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$.

□

LEMMA 4 Le famiglie

$$\mathcal{E}_1 = \{]a,b[\; : \; a,b \in \mathbb{R}, \; a<b \}$$

$$\mathcal{E}_2 = \{ [a,b[\; : \quad " \quad \}$$

$$\mathcal{E}_3 = \{]a,b] \; : \quad " \quad \}$$

$$\mathcal{E}_4 = \{]a,+\infty[\; : \; a \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathcal{E}_5 = \{ [a,+\infty[\; : \; a \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathcal{E}_6 = \{]-\infty,a[\; : \; a \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathcal{E}_7 = \{]-\infty,a] \; : \; a \in \mathbb{R} \}$$

generano la σ-algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Dim

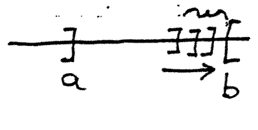
i. Ogni aperto di $\mathbb{R}$ è unione finita o numerabile di intervalli aperti quindi

$$\tau_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_1) \underset{iv}{\overset{\text{Lemma 3}}{\Longrightarrow}} \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{M}(\tau_{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{E}_1).$$

d'altra parte $\mathcal{E}_1 \subset \tau_{\mathbb{R}} \underset{iii}{\overset{\text{Lemma 3}}{\Longrightarrow}} \mathcal{M}(\mathcal{E}_1) \subset \mathcal{M}(\tau_{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

ii. Essendo $]a,b] =]a,b[\cup \{b\}$, ove $]a,b[$ e $\{b\}$ è chiuso, si ha $]a,b] \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ $\forall \,]a,b] \in \mathcal{E}_2$, cioè $\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \underset{iii}{\overset{\text{Lemma 3}}{\Longrightarrow}} \mathcal{M}(\mathcal{E}_2) \subset \mathcal{M}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \underset{\text{Lemma 3, ii}}{=} \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Viceversa, essendo $]a,b[= \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ 2^{-n} < b-a}}]a, b-2^{-n}]$



e, dunque, $]a,b[\in \mathcal{M}(\mathcal{E}_2)\quad \forall\,]a,b[\in\mathcal{E}_1$: cioè $\mathcal{E}_1\subset\mathcal{M}(\mathcal{E}_2)$

$$\overset{\text{Lemma }3}{\underset{iv}{\Longrightarrow}}\qquad \mathcal{B}_{\mathbb{R}}=\mathcal{M}(\mathcal{E}_1)\subset\mathcal{M}(\mathcal{E}_2).$$

Quindi $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}=\mathcal{M}(\mathcal{E}_2)$.

iii. analogamente.

iv. Si ha $\mathcal{E}_4\subset\tau_{\mathbb{R}}\overset{\text{Lemma }3}{\underset{iii}{\Longrightarrow}}\mathcal{M}(\mathcal{E}_4)\subset\mathcal{M}(\tau_{\mathbb{R}})=\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

d'altra parte
$$]a,b[\;=\;]a,+\infty[\setminus\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]b-2^{-n},+\infty[\Big)\in\mathcal{M}(\mathcal{E}_4)$$
$\forall\,]a,b[\in\mathcal{E}_1$,
quindi $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}=\mathcal{M}(\mathcal{E}_1)\subset\mathcal{M}(\mathcal{E}_4)$.

v. Essendo $[a,+\infty[\;=\{a\}\cup]a,+\infty[$ con $\{a\}$ chiuso e $]a,+\infty[$ aperto si ha
$\mathcal{E}_5\subset\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\overset{\text{Lemma }3}{\underset{iii}{\Longrightarrow}}\mathcal{M}(\mathcal{E}_5)\subset\mathcal{M}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}})\overset{L3}{\underset{ii}{=}}\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

Viceversa, essendo $\quad]a,+\infty[\;=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[a+2^{-n},+\infty[\;\in\mathcal{M}(\mathcal{E}_5)$
$\forall\,]a,+\infty[\in\mathcal{E}_4$ si ha $\mathcal{E}_4\subset\mathcal{M}(\mathcal{E}_5)$
da cui $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}=\mathcal{M}(\mathcal{E}_4)\subset\mathcal{M}(\mathcal{E}_5)$.

vi. analogamente. □

<u>DEFINIZIONE 4</u> Si dice spazio misurabile una coppia $(X,\mathcal{A})$ ove X è un insieme e $\mathcal{A}$ è una σ-algebra di $\mathcal{P}(X)$.

RICHIAMO SUL PRODOTTO CARTESIANO. Sia $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una famiglia non vuota di insiemi non vuoti. Diremo <u>prodotto cartesiano della famiglia $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$</u> l'insieme

$$\prod_{\alpha\in A}X_\alpha=\Big\{f:A\longrightarrow X_\alpha\;\Big|\;f(\alpha)\in X_\alpha\;\forall\alpha\in A\Big\}$$

Per ciascun $\beta\in A$ diremo <u>PROIEZIONE CANONICA di INDICE</u> β la funzione che associa, ad $f\in\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$, $f(\beta)\in X_\beta$.

Notare che, per l'assioma della scelta, $\prod_{\alpha\in A}X_\alpha\neq\phi$.

no che questa definizione è in accordo con quella nota nel
di famiglie finite di insiemi.

e già parlato di prodotto cartesiano degli insiemi $X_1,\dots,X_n$

$$X_1\times\cdots\times X_n = \{(x_1,\dots,x_n) \mid x_i\in X_i\ ,\ i=1,\dots,n\}$$

invece abbiamo definito che per prodotto cartesiano della famiglia $\{X_j\}_{j\in\{1,\dots,n\}}$
diamo

$$\prod_{j\in\{1,\dots,n\}} X_j = \Big\{ f:\{1,\dots,n\}\longrightarrow \bigcup_{j\in\{1,\dots,n\}} X_j \ \Big|\ f(j)\in X_j\ \ \forall\, j=1,\dots,n\Big\}$$

è immediato riconoscere che (♣) si può identificare con (♡) associando ad
n-uple $(f(1),\dots,f(n))$.

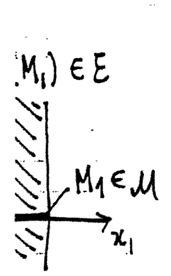
urremo ora delle particolari σ-alg. su prodotti cartesiani di spazi misurabili.

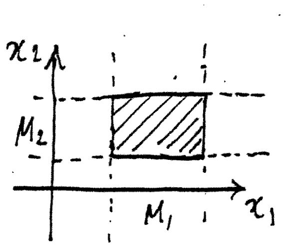
IIZIONE 5. Sia $\{(X_\alpha,\mathcal{M}_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ una famiglia non vuota di spazi
abili non vuoti. Diremo σ-algebra prodotto, e scriveremo

$$\bigotimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha=\mathcal{M}$$

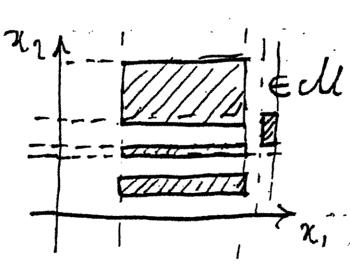
alg. $\mathcal{M}$ di $\mathcal{P}(\prod_{\alpha\in A}X_\alpha)$ generata da

$$\{\overleftarrow{\pi_\alpha}(M_\alpha)\mid M_\alpha\in\mathcal{M}_\alpha\ ,\ \alpha\in A\}=\mathcal{E}$$





$M_1=\pi_1(M_1\times M_2)$



LEMMA 5 Sia $\{(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ una famiglia non vuota di sp. mis. non vuoti. Se $\mathcal{E}_\alpha \subset \mathcal{P}(X_\alpha)$ e se $\mathcal{E}_\alpha$ genera $\mathcal{M}(\mathcal{E}_\alpha) = \mathcal{M}_\alpha$ allora $\bigotimes_{\alpha\in A} \mathcal{M}_\alpha$ è generato da

$$\{\overleftarrow{\pi}_\alpha(E_\alpha) : E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha, \alpha \in A\}$$

Dim

Detta $\mathcal{M}$ la σ-algebra generata da $\{\overleftarrow{\pi}_\alpha(E_\alpha) : E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha; \alpha\in A\}$, vogliamo mostrare che $\mathcal{M} = \bigotimes_{\alpha\in A} \mathcal{M}_\alpha$. Ovviamente, da $\{\overleftarrow{\pi}_\alpha(E_\alpha) : E_\alpha\in\mathcal{E}_\alpha, \alpha\in A\} \subset$ $\subset \{\overleftarrow{\pi}_\alpha(M_\alpha) : M_\alpha\in\mathcal{M}_\alpha, \alpha\in A\}$ (perché $\mathcal{E}_\alpha\subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_\alpha) = \mathcal{M}_\alpha$) segue che $\mathcal{M}\subset \bigotimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha$

Proviamo l'inclusione inversa. Fissiamo $\beta\in A$. Ovviamente, la collezione $\mathcal{M}'_\beta = \{V\in\mathcal{P}(X_\beta) : \overleftarrow{\pi}_\beta(V)\in\mathcal{M}\}$ è una σ-alg. di $\mathcal{P}(X_\beta)$ contenente $\mathcal{E}_\beta$, quindi $\mathcal{M}_\beta\subset\mathcal{M}'_\beta$ (Lemma 3). Ma allora se $M_\beta\in\mathcal{M}_\beta$ si ha $\overleftarrow{\pi}_\beta(M_\beta)\in\mathcal{M}$ e, per l'arbitrarietà di β, significa che $\mathcal{M}$ contiene la famiglia

$$\{\overleftarrow{\pi}_\alpha(M_\alpha) : M_\alpha\in\mathcal{M}_\alpha, \alpha\in A\} \text{ che genera } \bigotimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha$$

ma, essendo $\mathcal{M}$ σ-alg., questo implica che $\mathcal{M}\supset\bigotimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha$. □

LEMMA 6. Sia $\{(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ una famiglia non vuota di spazi misurabili non vuoti. Allora si ha quanto segue:

i la famiglia $\{\prod_{\alpha\in A} M_\alpha : M_\alpha\in\mathcal{M}_\alpha\}$ genera una σ-algebra

$$\bigotimes^S_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha$$

che contiene $\bigotimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha$ e che diremo delle scatole.

ii se $|A|\leq\aleph_0$, allora

$$\bigotimes^S_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha = \bigotimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha$$

dimostrazione: cfr [F], c.I, §2

LEMMA 7 Siano $X_1, \dots, X_n$ spazi metrici e $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$

allora

i $$\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}_{X_i} \subset \mathcal{B}_X$$

ii se $X_1, \dots, X_n$ sono separabili (hanno sottoinsiemi numerabili densi) allora

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}_{X_i} = \mathcal{B}_X$$

dim cfr [F], C.I, §2

COROLLARIO. $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$

I.2. misure

DEFINIZIONE 6 Sia X un insieme, $\mathcal{A}$ una σ-algebra di $\mathcal{P}(X)$. Diremo misura una funzione $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ t.c.

i $\mu(\emptyset) = 0$

ii μ è numerabilmente additiva ($\Leftrightarrow$ σ-add.)

ovv.

$\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è succ. in $\mathcal{A}$ di el. a due a due disg. $\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu(A_j)$

DEFINIZIONE 7 Diremo spazio misurato una tripla $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ove X è un insieme, $\mathcal{A}$ una σ-algebra di $\mathcal{P}(X)$, μ una misura su $\mathcal{A}$.

DEFINIZIONE 8. Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio misurato; diremo

i) diremo che μ è finita su un elemento E di $\mathcal{A}$ (ovv. che E è di mis. finita) se $\mu(E) < +\infty$

e che μ è finita se $\mu(X) < +\infty$

ii) Diremo che μ è σ-finita su un elemento E di $\mathcal{A}$

se esiste una successione $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ di elementi di misura finita ($\Leftrightarrow \mu(E_j)<+\infty$) tale che $E=\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j$. Diremo che μ è <u>σ-finita su X</u> se $X=\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j$, con $E_j\in\mathcal{A}$ e $\mu(E_j)<+\infty$.

OSSERVAZIONI. Oss. ogni misura è finitamente additiva.

Siano $A_1,\dots,A_n$ elementi di $\mathcal{A}$ a 2 a 2 disgiunti. Poniamo $A_j=\emptyset\ \forall j>n$

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big)=\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big)\overset{\sigma}{=}\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_j)\overset{\bullet}{=}\sum_{j=1}^{n}\mu(A_j)$$

• perché $\mu(A_i)=0\ \forall i>n$.

ESEMPI.

(i) Sia X un insieme, $x_0\in X$. La funzione $\delta_{x_0}:\mathcal{P}(X)\to[0,+\infty]$ definita da

$$\delta_{x_0}(A)=\begin{cases}1 & \text{se } x_0\in A\\ 0 & \text{se } x_0\notin A\end{cases}$$

è una misura su X, è una misura finita su X, detta la misura di Dirac con massa concentrata in x_0.

Infatti

$$\mu(\emptyset)=0 \qquad \text{perché } x_0\notin\emptyset$$

e, se $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{P}(X)$ è una succ. di el. a 2 a 2 disgiunti, allora

- se $x_0\notin A_j\ \forall j\in\mathbb{N}$ allora $\mu\Big(\bigcup_{j=0}^{\infty} A_j\Big)=0=\sum_{j=0}^{\infty}\mu(A_j)$
  ($\Leftrightarrow x_0\notin\bigcup_j A_j$)

- se $x_0\in A_{j_0}$, $\exists j_0\in\mathbb{N}$ allora $j\neq j_0\Rightarrow x_0\notin A_j$ cioè $\mu(A_j)=\begin{cases}1 & \text{se } j=j_0\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$

$$\mu\Big(\underset{\substack{\cup\!\!\!\!\cdot\\ x_0}}{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j}\Big)=1=\Big[\sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ j\neq j_0}}\mu(A_j)\Big]+\mu(A_{j_0})=0+1=1$$

$$\Big[\sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ j\neq j_0}}\mu(A_j)\Big]+\mu(A_{j_0})=\sum_{j=0}^{\infty}\mu(A_j)$$

$\square$

ii) Sia X un insieme; la funzione $c : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,+\infty]$ definita da

$$c(A) = +\infty \quad \text{se} \quad |A| \notin \mathbb{N}$$
$$c(A) = |A| \quad \text{se} \quad |A| \in \mathbb{N}$$

è una misura su $\mathcal{P}(X)$.

Infatti

$$\mu(\phi) = |\phi| = 0.$$

e, se $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$ è succ. disg.,

$$\mu\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\Big) = \Big|\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\Big| = \sum_{j=0}^{\infty} |A_j| = \sum_{j=0}^{\infty} \mu(A_j) \quad \text{ove} \quad |E| = \infty \text{ se } |E| \notin \mathbb{N}$$

TEOREMA 1 Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio misurato. Valgono

i (monotonia) se $A, B \in \mathcal{A}$ con $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

ii (subadd. num.) se $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ allora

$$\mu\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\Big) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \mu(A_j)$$

e l'uguaglianza vale se gli el. sono a 2 a 2 disg.

iii (continuità dal basso). Se $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \nearrow$ (risp. all'inclusione) allora

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$$

iv (Cont. dall'alto). Se $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \downarrow$ (idem) e con almeno un elemento di misura finita, allora

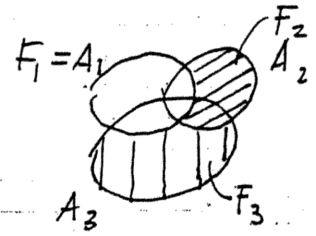
$$\mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$$

ı additività finita di μ si ha

$$\mu(B) = \mu((B\setminus A)\cup A) = \mu(\overset{\geqslant 0}{B\setminus A}) + \mu(A) \geqslant \mu(A)$$

pone $F_1 = A_1$

$$F_k = A_k \setminus \Big(\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\Big)$$



ora $\{F_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una succ. di el. di $\mathcal{A}$ a due a due disgiunti con

proprietà: $$\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = \lim_{N\to\infty} \bigcup_{k=1}^{N} F_k = \lim_{N\to\infty} \bigcup_{j=1}^{N} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

nque

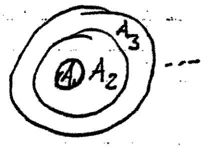
$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

ché $\mu(F_k) \leqslant \mu(A_k)$ $\forall k\in\mathbb{N}$ essendo $F_k \subset A_k$ $\forall k\in\mathbb{N}$.

ha $A_1 \subset A_2 \subset \cdots\cdots$. Poniamo $A_0 = \phi$. Osserviamo che gli elementi

di $A_j \setminus A_{j-1}$ sono a 2 a 2 disgiunti e si ha

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j \setminus A_{j-1})$$



nque

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j\setminus A_{j-1})\Big) \overset{\sigma}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j\setminus A_{j-1})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j\setminus A_{j-1}) \overset{\text{add}}{=} \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{n} (A_j\setminus A_{j-1})\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

COROLLARIO Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sp. misurato.

i. se $\{N_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ è una successione di elementi di misura nulla allora $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} N_j$ ha misura nulla

ii. se $A \in \mathcal{A}$ ha misura nulla e $B \subset A$ allora $\mu(B) = 0$.

Dim

i. $\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} N_j\right) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \mu(N_j) = 0$ (subadd.)

ii $0 \leq \mu(B) \leq \mu(A) = 0$ (monot) $\square$

Ora, se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è spazio misurato e $P(x)$ è una proprietà associata al generico elemento $x \in X$, che può essere vera o falsa, diremo che P è vera (q.o.) quasi ovunque in X se $\exists\, N \in \mathcal{A}$ di misura nulla t.c.

$$\{x \in X : P(x) \text{ è falsa}\} \subset N.$$

DEFINIZIONE 8 Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ spazio misurato. Diremo che la misura μ è completa se dato $B \in \mathcal{P}(X)$ t.c. $\exists\, N \in \mathcal{A}$ con $B \subset N$, $\mu(N) = 0$, si ha $B \in \mathcal{A}$ (e, dunque, dal corollario, che $\mu(B) = 0$).

Capitolo II – misure esterne

Per costruire una misura ci serviremo della nozione di 'misura esterna su $\mathcal{P}(X)$ che ora introduciamo.

DEFINIZIONE 1 Sia X un insieme. Diremo misura esterna su $\mathcal{P}(X)$ una funzione $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ tale che

i $\mu^*(\emptyset) = 0$

ii (monot) $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ se $A, B \in \mathcal{P}(X)$ con $A \subset B$

iii (subadd) $\mu^*\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \mu^*(A_j)$ se $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$

A partire da una sottofamiglia di $\mathcal{P}(X)$ si può costruire una misura esterna.

<u>LEMMA 1.</u> Sia X un insieme. Siano $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, con $\emptyset, X \in \mathcal{E}$, e $\rho : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$, con $\rho(\emptyset) = 0$, allora la posizione

(1) $$\rho^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \rho(A_j) \,\middle|\, A_j \in \mathcal{E}\ \forall j \in \mathbb{N},\ \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \supset A \right\}$$

per ogni $A \in \mathcal{P}(X)$, definisce una misura esterna su $\mathcal{P}(X)$.

<u>Dim</u> L'ipotesi che $\rho(\emptyset) = 0$ e che $\emptyset \in \mathcal{E}$ garantisce che $\rho^*(\emptyset) = 0$, mentre l'ipotesi $X \in \mathcal{E}$ garantisce che l'insieme di cui si piglia l'inf in (1) è non vuoto, perciò ρ^* è ben definita. La monotonia è chiara da (1); per la sub-add. cfr. [F, C.I, p. 28].

ESEMPIO. Sia X un insieme, $\mathcal{E} = \{\emptyset, X\}$, $\rho(\emptyset) = 0$, $\rho(X) = 1$. Allora ρ^* sia definita come in (1) e si ha che $\rho^*(\emptyset) = 0$, e, per ogni $\emptyset \neq A \in \mathcal{P}(X)$ si ha

$$\rho^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \rho(A_j) \,\middle|\, A_j \in \{\emptyset, X\}\ \forall j,\ A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \right\}$$

poiché $A \neq \emptyset$ $\exists\, \bar{j}$ t.c. $A_{\bar{j}} = X$ (altrim. $\bigcup_j A_j = \emptyset \not\supset A$)
ma allora $\bigcup_j A_j = X$

$$= \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \rho(A_j) \,\middle|\, A_1 = \dots = A_k = X,\ k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \right\}$$

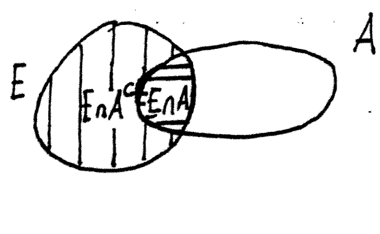
$$= \inf \left\{ \sum_{j=1}^{k} \rho(X) \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \right\} = \inf_{k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} k\rho(X) = \rho(X) = 1$$

Chiaro che ρ^* rispetta le (i)–(iii) della <u>def. 1</u>.

Ora, data una misura esterna su $\mathcal{P}(X)$, ci proponiamo di introdurre la nozione di "insieme misurabile (alla Carathéodory) risp. a tale misura esterna".

<u>DEFINIZIONE 2</u>. Siano X un insieme e μ^* una misura esterna su $\mathcal{P}(X)$. Diremo che $A \in \mathcal{P}(X)$ è misurabile alla Carathéodory per μ^* se

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$



per ogni $E \in \mathcal{P}(X)$

TEOREMA 1 (Carathéodory). Siano X un insieme e μ^* una misura esterna. Allora la collezione $\mathcal{M}$ dei misurabili alla Carathéodory per μ^* è una σ-algebra e $\mu^*_{|\mathcal{M}}$ è una misura completa.

Dimostrazione.

La dimostrazione che $\mathcal{M}$ è una σ-algebra è facoltativa (cfr. [F, C.I, p. 29]). Proviamo ora che $\mu^*_{|\mathcal{M}}$ è completa. Sia $F \in \mathcal{P}(X)$ ed esista $N \in \mathcal{M}$ con $F \subset N$, $\mu^*(N)=0$. Se $E \in \mathcal{P}(X)$, la monotonia di μ^* implica che

$$0=\mu^*(N) \geq \mu^*(F) \geq \underbrace{\mu^*(E\cap F) \geq 0}_{\mu^* \text{ a valori in } [0,+\infty]}$$

dunque che $\mu^*(E\cap F)=0$; e, sempre per monotonia, si ha

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E\cap F^c) = \mu^*(E\cap F^c)+\mu^*(E\cap F)$$

D'altra parte per subadditività di μ^* si ha

$$\mu^*(E) = \mu^*((E\cap F^c)\cup(E\cap F)) \leq \mu^*(E\cap F^c)+\mu^*(E\cap F)$$

quindi

$$\mu^*(E) = \mu^*(E\cap F^c)+\mu^*(E\cap F) \Rightarrow F \in \mathcal{M}. \qquad \square$$

Supporremo ora dato un insieme $\emptyset \neq X$ ed una fam. $\mathcal{E}$ di $\mathcal{P}(X)$ su cui è definita una funzione μ che ci aspettiamo estendibile ad una misura. Ci poniamo il problema di definire una misura su una σ-algebra che contenga $\mathcal{E}$, e lo faremo in 2 passi.

Passo 1 Formuleremo opportune ipotesi in modo che μ si estenda alla algebra $\mathcal{A}$ generata da $\mathcal{E}$ in modo tale da godere di opportune proprietà

Passo 2 Considereremo la misura ext μ^* che si ha a partire da μ su $\mathcal{A}$ (come in (1)) e mostreremo che μ^* estende μ alla σ-algebra generata da $\mathcal{A}$.

Al fine di procedere col passo 1 introduciamo le seg. def.

DEFINIZIONE 3. Siano X un insieme ed $\mathcal{A}$ un'algebra di $\mathcal{P}(X)$. Diremo premisura su $\mathcal{A}$ una funzione $\mu : \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ t.c.

i $\mu(\emptyset) = 0$

ii (preσ-add.): se $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, $A_j \cap A_i = \emptyset$, $i \neq j$, e $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$,

allora $\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu(A_j)$.

DEFINIZIONE 4 Sia X un insieme. Diremo una famiglia elementare di $\mathcal{P}(X)$ un sottoinsieme $\mathcal{E}$ di $\mathcal{P}(X)$ tale che

(i) $\emptyset \in \mathcal{E}$

(ii) $A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{E}$

(iii) $A \in \mathcal{E} \Rightarrow A^c$ è unione finita di elementi di $\mathcal{E}$

ESEMPIO. Siano $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{E} = \{\emptyset\} \cup \{]a,b] : a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a < b\}$
$\cup \{]-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}$
$\cup \{]a,+\infty[: a \in \mathbb{R}\}$

allora $\mathcal{E}$ è una famiglia elementare di $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Infatti $\emptyset \in \mathcal{E}$ e se $-\infty \leq a < c < b < d \leq +\infty$, allora $]a,b] \cap]c,b] =]c,b] \in \mathcal{E}$ e $]a,b]^c =]-\infty,a] \cup]b,+\infty[$, ovv. il complementare di un elemento di $\mathcal{E}$ è un elemento di $\mathcal{E}$ o l'unione di 2 elementi di $\mathcal{E}$.

LEMMA 2 Siano X un insieme ed $\mathcal{E}$ una famiglia elementare di $\mathcal{P}(X)$. Allora l'insieme delle unioni finite disgiunte degli elementi di $\mathcal{E}$ è un'algebra di $\mathcal{P}(X)$.

Dim: [F, cap. I, p. 23].

DEFINIZIONE 5. L'algebra del Lemma 2 si dice l'algebra di $\mathcal{P}(X)$ generata da $\mathcal{E}$.

Siamo pronti a fare il Passo 1, cioè ad estendere, sotto opp. condizioni, una funzione definita su una famiglia elementare ad una pre-misura sull'algebra da essa generata.

TEOREMA 2. Siano X un insieme, $\mathcal{E}$ una famiglia elementare di $\mathcal{P}(X)$ e $\mu : \mathcal{E} \longrightarrow [0,+\infty]$ soddisfacente alle seguenti proprietà:

(i) $\mu(\emptyset)=0$

(ii) μ è additiva: se $\{A_j\}_{j=1}^{n} \subset \mathcal{E}$ è famiglia di elementi a 2 a 2 disgiunti t.c. $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{E}$ allora $\mu(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$.

(iii) μ è subadd.: se $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ è fam. di el. a 2 a 2 disg. t.c. $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{E}$ allora $\mu(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j)$

allora esiste una ed una sola premisura $\tilde{\mu}$ sull'algebra $\mathcal{A}$ generata da $\mathcal{E}$ in $\mathcal{P}(X)$ che estenda μ e si ha

$$\tilde{\mu}\Big(\bigcup_{j=1}^{m} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{m} \tilde{\mu}(A_j)$$

per ogni famiglia finita $\{A_j\}_{j=1}^{m}$ di elementi di $\mathcal{E}$ a due a due disgiunti. $\square$

È così terminato il passo I; veniamo al II, provando che una premisura $\tilde{\mu}$ su una algebra può essere estesa ad una misura nella σ-algebra generata da tale algebra.

TEOREMA 3. Siano X un insieme, $\mathcal{A}$ un algebra di $\mathcal{P}(X)$ e μ una premisura su $\mathcal{A}$; sia μ^* la misura esterna su $\mathcal{P}(X)$ ottenuta a partire da μ su $\mathcal{A}$, come nel Lemma 1; siano infine $\mathcal{M}$ la σ-algebra dei μ^*-misurabili alla Carathéodory e $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ la σ-algebra generata da $\mathcal{A}$. Allora

(i) $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$

(ii) $\bar{\mu} := \mu^*|_{\mathcal{M}(\mathcal{A})}$ è una misura su $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ tale che

$$\bar{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu$$

(iii) se μ è σ-finita allora $\bar{\mu}$ è prolungamento unico di μ a misura su $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Dimostrazione

Per (i) e (iii) Cfr [F, C.I, p.30]

(ii) Ricordiamo che

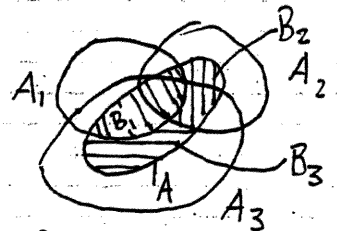
$$\mu^*(A) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \,\middle|\, \{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \text{ e } A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \right\}$$

a) Se $A \in \mathcal{A}$ prendiamo

$$A_1 = A$$
$$A_j = \emptyset \quad \text{per } j > 1$$

allora $\mu^*(A) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \mu(A_1) = \mu(A)$, insomma $\mu^*(A) \leqslant \mu(A)$

b) Sia $A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$; posto allora $B_1 = A \cap A_1$ e $B_j = A \cap \left(A_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i\right)$



$\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ risulta una famiglia di elementi di $\mathcal{A}$ a 2 a 2 disgiunti con

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j)$$

perché $A_j \supset B_j \quad \forall j \in \mathbb{N}$.

Poiché poi $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j = A \in \mathcal{A}$ e μ è pre σ-additiva su $\mathcal{A}$ allora

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

Dato ora che la famiglia $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ era arbitraria in $\mathcal{A}$, è

$$\mu(A) \leqslant \inf_{\substack{\{A_j\}_j \subset \mathcal{A} \\ \bigcup_j A_j \supset A}} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \mu^*(A)$$

insomma $\mu(A) \leqslant \mu^*(A)$. Quindi da a), b) segue $\mu(A) = \mu^*(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$.

Cioè $\mu^*_{|\mathcal{A}} \left(= \bar{\mu}_{|\mathcal{A}}\right) = \mu$.

$\square$

Capitolo III - misure di Borel.

Noi ora costruiremo delle misure su $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ a partire da opp. funzioni definite sulla famiglia elementare

$$\mathcal{E} = \{\emptyset\} \cup \{]a,b] : -\infty \leq a < b < +\infty\} \cup \{]a,+\infty[: a \in \mathbb{R}\}$$

Ci interessa soprattutto quella misura μ tale che

$$\mu(]a,b]) = b-a$$

Più in generale, considereremo una funzione crescente e continua a destra $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per poi definire una misura μ tale che

$$\mu(]a,b]) = F(b) - F(a)$$

RMK (Proprietà di funzioni : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescenti) Sia $a \in \mathbb{R}$. Allora esistono finiti i limiti

$$F(a^+) \equiv \lim_{x \to a^+} F(x) = \inf_{x>a} F(x)$$

$$F(a^-) \equiv \lim_{x \to a^-} F(x) = \sup_{x<a} F(x)$$

Inoltre esistono in $\overline{\mathbb{R}}$ i limiti

$$F(+\infty) \equiv \lim_{x \to +\infty} F(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}} F(x)$$

$$F(-\infty) \equiv \lim_{x \to -\infty} F(x) = \inf_{x \in \mathbb{R}} F(x)$$

La condizione di continuità da destra in un punto $a \in \mathbb{R}$ si esprime dicendo che $F(a) = F(a^+)$.

TEOREMA 1, Sia $F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione crescente e continua da destra. Supponiamo che $\mu_F(\emptyset) = 0$ e che, per ogni elemento $\emptyset \neq J \in \mathcal{E}$, sia

1) $\mu_F(J) = F(\sup J) - F(\inf J)$; in particolare, se $-\infty < a < b < +\infty$

2) $\mu_F(]a,b]) = F(b) - F(a)$;

3) $\mu_F\left(\bigcup_{i=1}^{n} J_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu_F(J_i) \quad \forall \{J_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{E}$ di el. disg.

Allora μ_F è una premisura nell'algebra $\mathcal{A}$ generata da $\mathcal{E}$.

ibile che per due famiglie $\{J_i\}_{i=1}^{n}$, $\{I_j\}_{j=1}^{m}$ di elementi a 2 a 2 disgiunti sia

$$\bigcup_{i=1}^{n} J_i = \bigcup_{j=1}^{m} I_j$$

caso

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_F(J_i) \overset{(3)}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu_F(J_i \cap I_j) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \mu_F(J_i \cap I_j) \overset{(3)}{=} \sum_{j=1}^{m} \mu_F(I_j)$$

$J_i = \bigcup_{j=1}^{m} (\underbrace{J_i \cap I_j}_{\mathcal{E}\text{ (fam. el.)}})$, $J_i \in \mathcal{E}$, $I_j \in \mathcal{E}$ analog

disg.: $\{J_i \cap I_j\}_{j=1}^{m} \subset \mathcal{E}$ disg. $\{J_i \cap I_j\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{E}$ disg.

i la (3) è ben posta.

Sia $\{J_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ successione di elementi di $\mathcal{E}$ a 2 a 2 disgiunti. Sia pure ... $\mathcal{A}$, cioè

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} J_i = \bigcup_{j=1}^{m} I_j \quad , \quad \exists \{I_j\}_{j=1}^{m} \subset \mathcal{E} \; ; m \in \mathbb{N}, \text{ di el. disg.}$$

, $\mathcal{A}$ è l'algebra generata da $\mathcal{E}$. Poiché $I_j \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} J_i$ $\forall j=1,\dots,m$ si ha

$$I_j = I_j \cap \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} J_i\right) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (J_i \cap I_j)$$

che $I_j \cap I_i \in \mathcal{E}$ (famiglia elementare) $\forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \{1,\dots,m\}$, e, poiché da (3)

$$\mu_F\left(\bigcup_{j=1}^{m} I_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \mu_F(I_j)$$

ente provare che

$$(4) \qquad \mu_F(I_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(I_j \cap J_i)$$

(4) è soddisfatta, (segue avanti)

$$\mu_F\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} J_i\Big) \overset{\heartsuit}{=} \mu_F\Big(\bigcup_{j=1}^{m} I_j\Big) = \mu_F\Big(\bigcup_{j=1}^{m}\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} J_i\cap I_j\Big)\Big)$$

$$\overset{(3)}{=} \sum_{j=1}^{m} \mu_F\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} J_i\cap I_j\Big) = \sum_{j=1}^{m} \mu_F(I_j)$$

$$\overset{(4)}{=} \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(J_i\cap I_j) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m} \mu_F(J_i\cap I_j)$$

$$\overset{(3)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F\Big(\bigcup_{j=1}^{m}(J_i\cap I_j)\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F\Big(J_i\cap \bigcup_{j=1}^{m} I_j\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F\Big(J_i\cap \bigcup_{i\in\mathbb{N}} J_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(J_i)$$

si ha che μ_F è preσ-additiva, e per ipotesi $\mu_F(\emptyset)=0$.

<u>Passo 3</u>: si dimostra la (4).

3a) Supponiamo che

$$I_j \equiv I \equiv \,]a,b]$$

ove $a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$, e denotiamo $I_j\cap J_i = G_i = \,]a_i,b_j]$ per $i\in\mathbb{N}$.
Allora, da (3), si ha

$$\mu_F(I) = \mu_F\Big(\bigcup_{i=1}^{n} G_i\Big) + \mu_F\Big(I\setminus\bigcup_{i=1}^{n} G_i\Big) \geq \mu_F\Big(\bigcup_{i=1}^{n} G_i\Big) \overset{(3)}{=} \sum_{i=1}^{n} \mu_F(G_i)$$

Dunque

$$(5)\qquad \mu_F(I) \geq \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu_F(G_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(G_i)$$

Proviamo l'inversa. Sia $\varepsilon>0$. Per continuità da destra di F in a e b_j esisteranno $\delta\in\,]0,b-a[$ t.c.

$$F(a+\delta)-F(a) \leq \varepsilon \qquad (\spadesuit)$$

e $\delta_j\in\,]0,b_j-a_j[$, $j=1,\dots,n$, t.c.

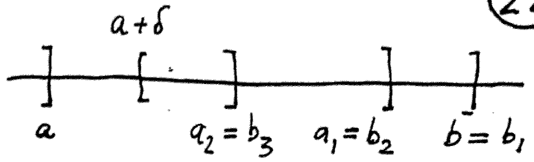
$$F(b_j+\delta_j)-F(b_j) \leq \varepsilon\cdot 2^{-j} \qquad (\spadesuit)$$

Ovviamente

$$[a+\delta,b] \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \,]a_j, b_j+\delta_j[$$

Dunque esisterà $n \in \mathbb{N}$ tale che

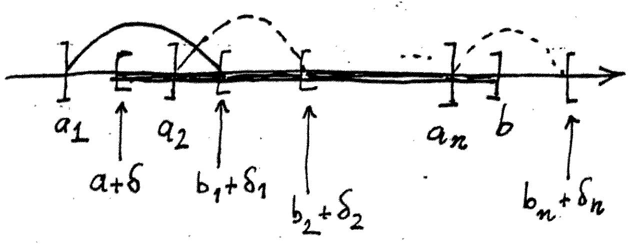
$$[a+\delta, b] \subset \bigcup_{j=1}^{n}]a_j, b_j+\delta_j[$$



Riarrangiando gli indici in modo che

(i) $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$

(ii) $a_{j+1} < b_j + \delta_j < b_{j+1} + \delta_{j+1}$



avremo quindi che

$$\mu_F(]a,b]) = F(b) - F(a) \le F(b_n+\delta_n) - \underbrace{F(a+\delta)}_{\le -F(a_1)} + \varepsilon$$

$\le F(b_n+\delta_n)$ (1) $\le -F(a+\delta)+\varepsilon$

$$\le F(b_n+\delta_n) - F(a_n) + F(a_n) \quad - F(a_1) + \varepsilon$$

$$\le F(b_n+\delta_n) - F(a_n) + \sum_{j=2}^{n} \left(F(a_j) - F(a_{j-1})\right) + \varepsilon$$

$$\le F(b_n+\delta_n) - F(a_n) + \sum_{j=2}^{n} \left[F(b_{j-1}+\delta_{j-1}) - F(a_{j-1})\right] + \varepsilon$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(F(b_j+\delta_j) - F(a_j)\right) + \varepsilon$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left[F(b_j+\delta_j) - F(b_j)\right] + \sum_{j=1}^{n} \left[F(b_j) - F(a_j)\right] + \varepsilon$$

$$\overset{(4)}{\le} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon \cdot 2^{-j} + \sum_{j=1}^{n} \left[F(\sup(]a_j,b_j])) - F(\inf]a_j - b_j])\right] + \varepsilon$$

$$\overset{(1)}{\le} 2\varepsilon + \sum_{j=1}^{n} \mu_F(]a_j, b_j])$$

Poiché $\varepsilon > 0$ è scelto arbitrariamente è

$$(6) \qquad \mu_F(]a,b]) \le \sum_{j=1}^{n} \mu_F(]a_j, b_j])$$

(5),(6) $\Rightarrow$ (4)

3b) i casi $]-\infty, b]$, $]a, +\infty[$: esercizio. $\square$

TEOREMA 2. Sia $F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\nearrow$ e continua a destra. Esiste una ed una sola premisura μ nell'algebra $\mathcal{A}$ generata da $\mathcal{E}$ tale che per $-\infty < a < b < +\infty$

$$(2') \qquad \mu(]a,b]) = F(b) - F(a)$$

Dim

L'esistenza la si è mostrata nel teorema 1.

2. Sia μ una premisura che soddisfa (2'). Allora $\mu(\emptyset) = 0$, e per $-\infty < a < b < \infty$

$$\mu(]a,b]) = F(\sup]a,b]) - F(\inf]a,b]).$$

inoltre per ogni $a \in \mathbb{R}$

$$\mu(]a, \infty]) = \mu(]a, \lfloor a \rfloor + 1]) + \sum_{j=\lfloor a \rfloor + 1}^{\infty} \mu(]j, j+1])$$

$$= F(\lfloor a \rfloor + 1) - F(a) + \sum_{j=\lfloor a \rfloor+1}^{\infty} [F(j+1) - F(j)]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[F(\lfloor a \rfloor + 1) + \sum_{j=\lfloor a \rfloor+1}^{n-1} F(j+1) - F(j) \right] - F(a)$$

$$= \lim_{n \to \infty} F(n) - F(a) = F(\infty) - F(a) = F(\sup]a, +\infty[) - F(\inf]a, +\infty[).$$

analogamente per ogni $b \in \mathbb{R}$

$$\mu(]-\infty, b]) = F(b) - F(-\infty) = F(\sup]-\infty, b]) - F(\inf]-\infty, b])$$

quindi vale (1).

3. Infine per ogni famiglia $\{J_i\}_{i=1}^{n}$ di elementi di $\mathcal{E}$ a due a due disgiunti, si ha

$$\bigcup_{i=1}^{n} J_i \in \mathcal{A}$$

dunque μ soddisfa (3). Quindi μ coincide con la premisura μ_F del Teor. 1 $\square$

TEOREMA 3. Sia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\nearrow$ cont. a destra e $\mathcal{A}$ l'algebra di $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generata da $\mathcal{E}$.

i) Esiste una ed una sola misura μ_F su $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ che soddisfa (2) per ogni $-\infty<a<b<\infty$.
Tale μ_F coincide con la restrizione su $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ della misura esterna μ_F^* generata dall'unica premisura su $\mathcal{A}$ per cui vale (2).

ii) Se F,G sono funzioni come nell'ipotesi e tali che $\mu_F=\mu_G$ su $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ allora F,G differiscono per una costante additiva

iii) Se μ è una misura su $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ finita negli intervalli limitati allora la funzione

$$F(x)=\begin{cases}\mu(]0,x]) & \text{se } x>0\\ 0 & \text{se } x=0\\ -\mu(]-x,0]) & \text{se } x<0\end{cases}$$

è crescente e continua a destra. Inoltre

$$\mu=\mu_F|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}$$

iv) Se μ è una misura su $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ finita negli intervalli limitati superiormente allora la funzione

$$G(x):=\mu(]-\infty,x]) \qquad x\in\mathbb{R}$$

è crescente e continua a destra. Inoltre $\mu=\mu_G|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}$
Diremo G funzione cumulativa di distribuzione di μ.

Dim.

i) Presa una misura esterna μ_F^* generata dall'unica premisura $\underline{\mu}_F$ del teorema 2, sappiamo che

$$\mathcal{A}\subset\mathcal{B}_{\mathbb{R}}=\mathcal{M}(\mathcal{A})\subset\mathcal{M}_F(\mathbb{R})$$

ove $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ è la σ-algebra generata da $\mathcal{A}$ e $\mathcal{M}_F(\mathbb{R})$ è la σ-algebra dei μ_F^*-misurabili (alla Carathéodory). Dal teorema 3 del Capitolo II segue che

$$\mu_F^*|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}$$ è misura.

Siccome poi
$$\mathbb{R} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}}]-j,j]$$
e $\mu_F(]-j,j]) < \infty \ \forall j \in \mathbb{N}$ ho che μ_F è σ-finita. Quindi in accordo con parte al teorema 3 del Cap II, $\mu^*_{F|\mathcal{B}_\mathbb{R}}$ è prolungamento unico di μ_F a misura su $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ = elle

ii) Dev'essere
$$\mu_F(]0,x]) = \mu_G(]0,x]) \quad \forall\, x>0$$
$$F(x) - F(0) = G(x) - G(0) \ \forall\, x>0$$
$$F(x) - G(x) = F(0) - G(0) \quad \forall x>0 \quad \text{analogam. } \forall\, x \leq 0$$

iii) Sia $-\infty < x < y < +\infty$. Allora

$$F\uparrow: \quad F(y) = \mu(]0,y]) = \mu(]0,x] \cup]x,y])$$
$$= \mu(]0,x]) + \underbrace{\mu(]x,y])}_{\geq 0} \geq \mu(]0,x]) = F(x)$$

dal teorema 1 del Cap. I
$$F(x) = \mu(]0,x]) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}]0, x+\tfrac{1}{n}]\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(]0,x+\tfrac{1}{n}])$$
$$= \lim_{n\to\infty} F(x+\tfrac{1}{n}) = F(x^+)$$

$$\mu_{F|\mathcal{B}_\mathbb{R}}(]a,b]) = F(b) - F(a) = \mu(]0,b]) - \mu(]0,a]) = \mu(]0,b] \setminus]0,a]) = \mu(]a,b])$$
$\square$

(iv) analogamente

DEFINIZIONE 1 Diremo $\mu_F^{(B)} \equiv \mu^*_{F|\mathcal{B}_\mathbb{R}}$ la misura boreliana associata ad F

Capitolo IV - misure di Stieltjes-Lebesgue.

TEOREMA 1 Siano $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ↑ e cont. a destra, $\mathcal{A}$ l'algebra generata da $\mathcal{E}$ e μ_F^* la misura esterna generata su $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dall'unica premisura $\underline{\mu}_F$ su $\mathcal{A}$ per cui vale

$$(2^*) \quad \underline{\mu}_F(]a,b])=F(b)-F(a)$$

Allora esiste una ed una sola misura μ_F sulla σ-algebra $\mathcal{M}_F(\mathbb{R})$ dei μ_F^*-misurabili (alla Carathéodory), tale che μ_F coincida con la restrizione a $\mathcal{M}_F(\mathbb{R})$ di μ_F^*:

$$\mu_F=\mu_F^*|_{\mathcal{M}_F(\mathbb{R})}$$

DIMOSTRAZIONE. Dal teorema di Carathéodory $\mu_F^*|_{\mathcal{M}_F(\mathbb{R})}$ è una misura. Siccome la premisura $\underline{\mu}_F$ è σ-finita, dal teorema 3 del Capitolo II segue che $\mu_F^*|_{\mathcal{M}_F(\mathbb{R})}$ è l'unico prolungamento di $\underline{\mu}_F$ ad una misura su $\mathcal{M}_F(\mathbb{R})$.
Ora basta porre $\mu_F\equiv\mu_F^*|_{\mathcal{M}_F(\mathbb{R})}$ □

DEFINIZIONE 1 Diremo $\mathcal{M}_F(\mathbb{R})$ la σ-algebra dei misurabili alla Stieltjes-Lebesgue associata ad F e $\mu_F^{(SL)}\equiv\mu_F^*|_{\mathcal{M}_F(\mathbb{R})}$ la misura di Stieltjes-Lebesgue associata ad F.

Ricordiamo che se $(X,\mathcal{A},\mu)$ è sp. mis., la misura μ si dice completa se, dato $B\in\mathcal{P}(X)$ tal che esiste $N\in\mathcal{A}$ con $\mu(N)=0$, $B\subset N$, si ha $B\in\mathcal{A}$.

DEFINIZIONE 2 Diremo l'insieme

$$\overline{\mathcal{A}}=\{A\cup B:\ A\in\mathcal{A},\ B\in\mathcal{P}(X)\text{ e }B\subset N\text{ ove }\mu(N)=0,\ \exists N\in\mathcal{A}\}$$

il completamento di $\mathcal{A}$ rispetto a μ

DEFINIZIONE 3 Diremo la misura $\overline{\mu}$ del seguente teorema il completamento di μ.

TEOREMA 2 Sia $(X,\mathcal{A},\mu)$ uno sp. misurato. Allora $\overline{\mathcal{A}}$ è una σ-alg. di $\mathcal{P}(X)$ contenente $\mathcal{A}$, ed esiste una e una sola misura completa $\overline{\mu}$ su $\overline{\mathcal{A}}$ che prolunga μ su $\mathcal{A}$.

TEOREMA 3. Sia $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e continua a destra.

(i) la misura boreliana $\mu_F^{(B)}$ è, in generale, non completa; in particolare non lo è quando $F = id_{\mathbb{R}}$.

(ii) la misura di Stieltjes-Lebesgue è completa $\mu_F^{(SL)}$

(iii) $\mathcal{M}_F(\mathbb{R}) = \overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}$

(iv) $\mu_F^{(SL)} = \overline{\mu_F^{(B)}}$

RIASSUNTO (Misure di Borel & Stieltjes-Lebesgue).

$\underline{\mu}_F : \mathcal{E} = \{]a,b] : -\infty < a \leq b \leq +\infty\} \to [0,+\infty]$

t.c. $\underline{\mu}_F\left(\bigcup_{i=1}^{n}]a_i,b_i]\right) \equiv \sum_{i=1}^{n}[F(b_i) - F(a_i)]$

per $]a_i,b_i] \cap]a_j,b_j] = \emptyset$ se $i \neq j$

$\Downarrow$

$\underline{\mu}_F$ è premisura sull'algebra

$\mathcal{A} = \{\bigcup_{i=1}^{n}]a_i,b_i] \mid]a_i,b_i] \cap]a_j,b_j] = \emptyset$ se $i \neq j\}$

generata da $\mathcal{E}$

$\Downarrow$

$\mu_F^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$

t.c. $\mu_F^*(A) \equiv \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \underline{\mu}_F(A_i) \mid \{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A},\ A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right\}$

per $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ è misura esterna

$\Downarrow$

μ_F^* è misura esterna generata da $\underline{\mu}_F$ su $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

(th. Carathéodory)

$\Downarrow$

L'insieme dei μ_F^*-misurabili alla Carathéodory

$\mathcal{M}_F(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{P}(X) : \mu_F^*(E) = \mu_F^*(E \cap A) + \mu_F^*(E \cap A^c)\ \forall E \subset X\}$

è σ-algebra

$\Downarrow$

$\mu_F^{(B)} \equiv \mu_F^*\vert_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}$ è misura boreliana sulla σ-algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$	$\mu_F^{(SL)} = \overline{\mu_F^{(B)}}$ $\Longrightarrow$	$\mu_F^{(SL)} \equiv \mu_F^*\vert_{\mathcal{M}_F(\mathbb{R})}$ è misura di Stieltjes-Lebesgue sulla σ-alg $\mathcal{M}_F(\mathbb{R})$

<u>TEOREMA 4</u> Siano $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ↑ e continua a destra, $\mathcal{M}_F(\mathbb{R})$ la σ-alg. dei misurabili alla Stieltjes-Lebesgue associata ad F. Se $A \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R})$

$$\mu_F^{(SL)}(A) = \inf\{\mu_F^{(SL)}(U) \mid U \text{ è aperto di } \mathbb{R},\ A \subset U\}$$

$$\mu_F^{(SL)}(A) = \sup\{\mu_F^{(SL)}(K) \mid K \text{ è compatto di } \mathbb{R},\ K \subset A\}$$

<u>DEFINIZIONE 3</u> Diremo $\mathcal{L}_{\mathbb{R}} \equiv \mathcal{M}_{id}(\mathbb{R})$ la σ-algebra dei misurabili alla Lebesgue (o degli m-misurabili) e

$$m \equiv \mu_{Id}^{(SL)}$$

la misura di Lebesgue.

<u>TEOREMA 4</u> Siano $s \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$. Allora

(i) $s + \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$
(ii) $r\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$
(iii) $s + \mathcal{L}_{\mathbb{R}} = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ e $m(s+E) = m(E)$ $\forall E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$
(iv) $r\mathcal{L}_{\mathbb{R}} = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ e $m(rE) = |r|\, m(E)$ $\forall E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$
in particolare $m(-E) = m(E)$

<u>Dimostrazione</u>

i) Poiché $s + (a,b) = (a+s, b+s)$, per $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, un $U \subseteq \mathbb{R}$ è aperto sse lo è $s+U$:

$$s + U = s + \bigcup_{\alpha \in A}]a_\alpha, b_\alpha[= \bigcup_{\alpha \in A} (a_\alpha + s, b_\alpha + s)$$

dunque $s + \tau_{\mathbb{R}} = \tau_{\mathbb{R}}$. Notiamo che $s + \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ è sempre σ-algebra. Infatti

1. $B \in s + \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \iff B = s + A$, $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$; allora
$$B^c = (s+A)^c = s + A^c \in s + \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

2. $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset s + \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \iff B_j = s + A_j$ $\forall j \in \mathbb{N}$, $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$; allora
$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (s + A_j) = s + \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in s + \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

Poiché $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{M}(\tau_{\mathbb{R}})$, si ha

$$\tau_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

$$\tau_{\mathbb{R}} + s \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}} + s$$

e $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{M}(\tau_{\mathbb{R}}) = \mathcal{M}(s+\tau_{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{M}(s+\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) = s+\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

Ma s era arbitrario in $\mathbb{R}$.

Quindi $\qquad \mathcal{B}_{\mathbb{R}}+s \supset \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \qquad$ e $\quad \mathcal{B}_{\mathbb{R}}-s \supset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

dunque $\quad s+\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset -s+(+s+\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

(iii)

a) Poniamo, per definizione, $m_s(E) \equiv m(s+E) \quad \forall E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

Allora m_s è misura su $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Inoltre

$$m_s((a,b]) = m(s+(a,b]) = m((s+a,s+b]) = b-a = m((a,b]).$$

Dunque $m_s \equiv m$ per l'unicità della misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$.

b) Sia $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e $m(A)=0$; $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ con $B \subset A$. Poiché dal teorema 2 $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ è il completamento di $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e la misura m su $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ è completamento di $m|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}$ si ha $B \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}} \Rightarrow m(B)=0$.

c) Sia $E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$. Allora $\exists\ F \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ con $m(A)=0$ e $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ $(B \subset A)$ t.c. $\quad E = F \cup B$.

$$\text{Allora}\quad s+E = s+F\cup B = \underbrace{(s+F)}_{\overset{(i)}{\in}\,\mathcal{B}_{\mathbb{R}}} \cup \underbrace{(s+B)}_{\subset\, s+A \,\overset{(i)}{\in}\, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}+s = \mathcal{B}_{\mathbb{R}},\ m(\text{—})=0\ (a)}$$

$\Rightarrow s+E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$.

Cioè $\quad s+\mathcal{L}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}} \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad$ e $\quad \mathcal{L}_{\mathbb{R}} \supset -s+\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$

dunque $\quad \mathcal{L}_{\mathbb{R}} = -s+(s+\mathcal{L}_{\mathbb{R}}) \subset s+\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$

Inoltre $m(F) \leq m(E) = m(F\cup B) \leq m(F)+m(B) = m(F)$

$$m(F) = m(s+F) \leq m(s+E) \leq m(s+E)+m(s+B) = m(s+F) = m(F)$$

$$\Rightarrow m(E) = m(F) = m(s+E).$$

$\amalg$

OSSERVAZIONE. La misura di Lebesgue m nella σ-algebra $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ $(\neq \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ soddisfa per $n=1$ le richieste (i)-(iii) fissate all'inizio del Cap. I, se $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ è sostituito con $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$.

LEMMA 1

i) I sottoinsiemi finiti o numerabili di $\mathbb{R}$ sono m-misurabili di misura 0
ii) Esistono sottoinsiemi non numerabili di $\mathbb{R}$ che sono m-misurabili di mis. 0.

Dim

i) $\{x\} = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} (x-2^{-j}, x]$ e $\{(x-2^{-j},x]\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ $\downarrow$

$$m(\{x\}) = \lim_{j\to\infty} m((x-2^{-j},x]) = \lim_{j\to\infty} 2^{-j} = 0$$

E, perciò, se $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{x_i\}$, $x_i \neq x_j$ per $i\neq j$, allora

$$m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(\{x_i\}) = 0$$

ii) P.e. C.

LEMMA 2 (Cardinalità di $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$).

i) $\operatorname{card} \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{c}$

ii) $\operatorname{card} \mathcal{L}_{\mathbb{R}} = \operatorname{card} \mathcal{P}(\mathbb{R}) = 2^{\mathfrak{c}}$ $(> \mathfrak{c})$

ove $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ è la cardinalità del continuo.

Dim

i) cf [F., C.1, p. 38-9]

ii) Poiché ogni sottoinsieme dell'insieme C di Cantor è misurabile alla Lebesgue

$$\mathcal{P}(C) \overset{\checkmark}{\subset} \mathcal{L}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$$
$$|\mathcal{P}(C)| \leq |\mathcal{L}_{\mathbb{R}}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$$
$$2^{\mathfrak{c}} \leq |\mathcal{L}_{\mathbb{R}}| \leq 2^{\mathfrak{c}}$$

perché pure $\operatorname{card} C = \operatorname{card} \mathbb{R}$. Quindi (C.S.B.), $\operatorname{card} \mathcal{L}_{\mathbb{R}} = 2^{\mathfrak{c}}$.

Capitolo V - misure prodotto, la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$

Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ spazi misurati. Consideriamo la σ-algebra

$$\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$$

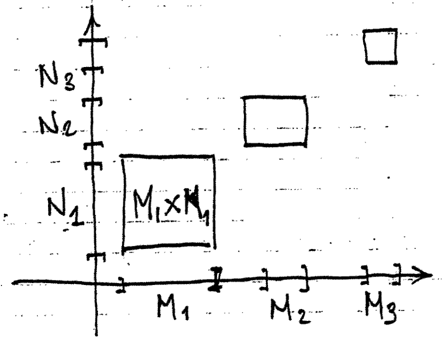
generata dalla famiglia $\subset \mathcal{M} \times \mathcal{N}$

$$\{M \times N : \quad M \in \mathcal{M}, N \in \mathcal{N}\}$$

Notiamo che

$$\mathcal{A} = \{\bigcup_{i=1}^{m} (M_i \times N_i) \,|\, m \in \mathbb{N}, M_i \in \mathcal{M}, N_i \in \mathcal{N}; \\ (M_i \times N_i) \cap (M_j \times N_j) = \emptyset \text{ se } i \neq j\}$$

è un'algebra e $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} = \mathcal{M}(\mathcal{A})$.



Sia, per ogni $A = \bigcup_{i=1}^{m} (M_i \times N_i) \in \mathcal{A}$

$$\pi(A) = \pi\left(\bigcup_{i=1}^{m} M_i \times N_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mu(M_i)\nu(N_i)$$

Allora $\pi : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ è una premisura su $\mathcal{A}$. Genera poi una misura esterna π^* che prolunga π su $\mathcal{P}(X \times Y)$.

<u>DEFINIZIONE 1</u> Diremo la restrizione della misura esterna π^* sulla σ-algebra $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ "misura prodotto" $\mu \times \nu$

$$\mu \times \nu \equiv \pi^* |_{\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}}$$

OSSERVAZIONE. Siano μ, ν σ-finite, ovvero $\exists \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$
$\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(Y)$

tali che
$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \qquad \mu(X_i) < \infty \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$$
$$Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i \qquad \mu(Y_i) < \infty \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$$

Allora
$$X \times Y = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} (X_i \times Y_j)$$

e noti che
$$\pi(X_i \times Y_j) = \mu(X_i)\,\nu(Y_j) < \infty \qquad \forall\, i,j = 1, \dots$$

quindi la premisura π su $\mathcal{A}$ è σ-finita. Dunque, dal Teorema 3 del Cap II, $\mu \times \nu$ è l'unica misura su $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ tale che
$$(\mu \times \nu)(M \times N) = \mu(M)\,\nu(N) \quad \forall\, (M,N) \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$$

Siano poi $(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)_{i=1,\dots,n}$ spazi misurati. La misura prodotto
$$\mu_1 \times \dots \times \mu_n$$
è quella definita da
$$\mu_1 \times \dots \times \mu_n = \pi^* \big|_{\mathcal{M}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{M}_n}$$

ove π^* è la misura esterna generata dalla premisura π per cui
$$\pi\left(\bigcup_{i=1}^{m} (M_{1i} \times \dots \times M_{ni}) \right) = \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} \mu_j(M_{ji})$$

con $(M_{1i} \times \dots \times M_{ni}) \cap (M_{1k} \times \dots \times M_{nk}) = \emptyset \quad i \neq k$

DEFINIZIONE 2 La misura di Lebesgue m^n su $\mathbb{R}^n$ è il completamento della misura prodotto $\underbrace{m\times\cdots\times m}_{n\text{-volte}}$, ove m è la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$:

$$m^n \equiv \overline{\underbrace{m\times\cdots\times m}_{n\text{-volte}}} \tag{33}$$

e la σ-algebra dei misurabili alla Lebesgue $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ è il completamento di $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}\otimes\cdots\otimes\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n} = \overline{\mathcal{L}_{\mathbb{R}}\otimes\cdots\otimes\mathcal{L}_{\mathbb{R}}}$$

OSSERVAZIONE. In effetti, per quanto μ, ν siano complete non è necessariamente completa per questo $\mu\otimes\nu$; supponiamo ad esempio

$$\mu = m = \nu$$

e sia $A\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ con $m(A)=0$; sia N l'insieme dei rappresentanti delle classi dell'equivalenza "$x\sim y \iff x-y\in\mathbb{Q}$" su $(0,1]$. Allora

$$(0,1]\supset N\in\mathcal{P}(\mathbb{R})\setminus\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$$

Dunque

$$A\times N\notin\mathcal{L}_{\mathbb{R}}\otimes\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$$

ma

$$(A\times N)\subset(A\times(0,1])$$

e

$$(m\times m)(A\times(0,1]) = m(A)\,m((0,1]) = 0$$

TEOREMA 1 Sia $A\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$. Allora

$$m^n(A) = \inf\{m^n(U) : A\subset U=\mathring{U}\subset\mathbb{R}^n\} = \sup\{m^n(K) : A\supset K\subset\subset\mathbb{R}^n\}$$

LEMMA 1 Per ogni $A=\mathring{A}\subset\mathbb{R}^n$ esistono dei parallelepipedi

$$A_i =]a_{1i},b_{1i}]\times]a_{2i},b_{2i}]\times\cdots\times]a_{ni},b_{ni}] \qquad i\in\mathbb{N}$$

a due a due disgiunti tali che

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$$

TEOREMA 2. Sia $s \in \mathbb{R}^n$. Allora si ha quanto segue

i. $s + \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$

ii $s + \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ e $m^n(s+E) = m^n(E) \quad \forall E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$.

TEOREMA 3 Sia r rotazione in $\mathbb{R}^n$. Allora, $\forall E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$,

$$m^n(rE) = m^n(E)$$

OSSERVAZIONE. La misura di Lebesgue m^n sulla σ-algebra $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ dei misurabili alla Lebesgue soddisfa per $n > 1$ le ragionevoli richieste (i)—(iii) fissate all'inizio del Cap I, se $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ è sostituito da $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$.

Capitolo VI - Funzioni misurabili

Siano (X, τ_X) uno spazio topologico e $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ ove $\tau_{\mathbb{R}}$ è la topologia standard, quella generata dalla base

$$\mathcal{B} = \{(a,b) : -\infty < a < b < +\infty\}$$

Una funzione $f: X \to \mathbb{R}$ è continua se $\overleftarrow{f}(U) \in \tau_X \ \forall U \in \tau_{\mathbb{R}}$. Questo equivale a dire che $\overleftarrow{f}((a,b)) \in \tau_X$ per ogni $-\infty < a < b < +\infty$, perché per ciascun $U \in \tau_{\mathbb{R}}$, $U = \bigcup_{\alpha \in A} (a_\alpha, b_\alpha)$ e

$$\overleftarrow{f}(U) = \overleftarrow{f}\Big(\bigcup_{\alpha \in A} (a_\alpha, b_\alpha)\Big) = \bigcup_{\alpha \in A} \overleftarrow{f}(a_\alpha, b_\alpha) \in \tau_X$$

se $\overleftarrow{f}((a_\alpha, b_\alpha)) \in \tau_X \ \forall \alpha \in A$.

DEFINIZIONE 1. Siano $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e $f: X \to \mathbb{R}$ funzione. Diremo che f è <u>$\mathcal{M}$-misurabile</u> se $\overleftarrow{f}(]a,b[) \in \mathcal{M}$ per $-\infty < a < b < +\infty$.

Se $f: X \to \mathbb{C}$ diremo che f è <u>$\mathcal{M}$-misurabile</u> se lo sono, nel senso di cui sopra, le funzioni $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$.

OSSERVAZIONE. Se $X = (X, \tau_X)$ è sp. top. e $\mathcal{M} = \mathcal{B}_X$; allora ogni funzione continua $f: X \to \mathbb{R}$ è $\mathcal{M}$-misurabile

Se $X = \mathbb{R}^n$ con la topologia generata dalla metrica euclidea e $\mathcal{M} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ oppure $\mathcal{M} = \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$, allora ogni funzione continua $f: X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ o $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$-misurabile.

TEOREMA 1. Siano $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione.

① Le seguenti affermazioni sono equivalenti

(i) f è $\mathcal{M}$-misurabile: $\overleftarrow{f}(]a,b[) \in \mathcal{M}$ per $-\infty < a < b < +\infty$

(ii) $\overleftarrow{f}(]a,+\infty[) \in \mathcal{M} \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(iii) $\overleftarrow{f}([a,+\infty[) \in \mathcal{M} \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(iv) $\overleftarrow{f}(]-\infty,a]) \in \mathcal{M} \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(v) $\overleftarrow{f}(]-\infty,a[) \in \mathcal{M} \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(vi) $\overleftarrow{f}(U) \in \mathcal{M} \quad \forall U \in \tau_{\mathbb{R}}$

(vii) $\overleftarrow{f}(U) \in \mathcal{M} \quad \forall U \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

② In generale l'affermazione (i) non è equivalente alla

(viii) $\overleftarrow{f}(U) \in \mathcal{M} \quad \forall U \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$

Dimostrazione ①

(i) $\Rightarrow$ (ii) Se $\overleftarrow{f}(]a,b[) \in \mathcal{M}$ per $-\infty < a < b < +\infty$ allora, $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\overleftarrow{f}(]a,+\infty[) = \overleftarrow{f}\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty}]a+n, a+n+2[\cup]a+n+1, a+n+3[\Big)$$

$$= \bigcup_{n=0}^{\infty} \overleftarrow{f}(]a+n, a+n+2[) \cup \overleftarrow{f}(]a+n+1, a+n+3[) \in \mathcal{M}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i)

$$\overleftarrow{f}(]a,b[) = \overleftarrow{f}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}]a, b+\tfrac{1}{n}]\Big) = \overleftarrow{f}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}(]a,+\infty[\setminus]b+\tfrac{1}{n},+\infty[)\Big)$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \overleftarrow{f}(]a,+\infty[\setminus]b+\tfrac{1}{n},+\infty[)$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big[\overleftarrow{f}(]a,+\infty[) \setminus \overleftarrow{f}(]b+\tfrac{1}{n},+\infty[)\Big] \in \mathcal{M}$$

(i) $\Rightarrow$ (vi): $\overleftarrow{f}(U) = \overleftarrow{f}\Big(\bigcup_{\alpha\in A}]a_\alpha,b_\alpha[\Big) = \bigcup_{\alpha\in A} \overleftarrow{f}(]a_\alpha,b_\alpha[) \in \mathcal{M}$ viceversa ovvio

(i) $\Rightarrow$ (vii). Dal lemma 4 del Cap I, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ è la σ-algebra generata da

$$\mathcal{E} = \{]a,b[: -\infty \leq a \leq b < +\infty \}$$

Si noti che $\mathcal{M}' \equiv \{A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} : \overleftarrow{f}(A) \in \mathcal{M}\}$ è pure σ-algebra di $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
Infatti

i $A, B \in \mathcal{M}'$

$$\overleftarrow{f}(A\setminus B) = \overset{\in\mathcal{M}}{\overleftarrow{f}(A)} \setminus \overset{\in\mathcal{M}}{\overleftarrow{f}(B)} \in \mathcal{M} \Rightarrow A\setminus B \in \mathcal{M}'$$

ii $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}'$

$$\overleftarrow{f}\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\Big) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \overset{\in\mathcal{M}}{\overleftarrow{f}(A_j)} \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{M}'$$

Inoltre contiene $\mathcal{E}$; quindi contiene $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. E per sua definizione, ogni suo elemento A è tale che $\overleftarrow{f}(A) \in \mathcal{M}$.

i) $\Rightarrow$ (iii) $\overleftarrow{f}([a,+\infty)) = \underset{\substack{\cap \\ \mathcal{M}\ (iv)}}{\overleftarrow{f}(\{a\})} \cup \underset{\substack{\cap \\ \mathcal{M}\ (ii)}}{\overleftarrow{f}(]a,+\infty[)} \in \mathcal{M}$

viceversa,

$$\overleftarrow{f}(]a,b[) = \overleftarrow{f}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} [a+\tfrac{1}{n},\infty) \setminus [b,+\infty)\Big) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overleftarrow{f}([a+\tfrac{1}{n},+\infty)) \setminus \overleftarrow{f}([b,+\infty)) \in \mathcal{M}$$

2) Ad esempio (i) $\not\Rightarrow$ (viii).
Siano $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{M} = \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$, C l'insieme di Cantor. Sia poi

$$g(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ f_c(x) + x & 0 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x \geq 1 \end{cases}$$

ove f_c è la funzione di Cantor. Posto $f = g^{-1}$, $V = g([0;1])$, $V \notin \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, $U = g^{-1}(V)$; allora f è $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$-misurabile perché $f^{-1}(]a,b[) = g(]a,b[) =]g(a), g(b)[$ $\forall\,]a,b[$; $U \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ perché $U \subset C$ e $m(C) = 0$, ma $f^{-1}(U) = g(U) = V \notin \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$. $\square$

TEOREMA 8 Sia $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile, e $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni $\mathcal{M}$-misurabili di X in $\mathbb{R}$. Allora le funzioni definite da (37)

$$f_1(x) = \sup_{j\in\mathbb{N}} f_j(x)$$

$$f_2(x) = \inf_{j\in\mathbb{N}} f_j(x)$$

$$f_3(x) = \limsup_{j\to\infty} f_j(x)$$

$$f_4(x) = \liminf_{j\to\infty} f_j(x)$$

$\forall x\in X$, sono $\mathcal{M}$-misurabili.

Dimostrazione.

Per la $\mathcal{M}$-misurabilità di f_1 basta provare che appartiene ad $\mathcal{M}$ l'insieme

$$\{x\in X : \sup_{j\in\mathbb{N}} f_j(x) > a\}$$

per ogni $a\in\mathbb{R}$, in virtù della proprietà (ii) del Teorema 2. Osserviamo a tal fine che tale insieme coincide con

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \{x\in X : f_j(x) > a\} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \overleftarrow{f_j}(]a, +\infty[) \in \mathcal{M}$$

Dall'uguaglianza $\inf_{j\in\mathbb{N}} f_j(x) = -\sup_{j\in\mathbb{N}}(-f_j(x))$ segue la $\mathcal{M}$-misurab. di f_2.

Per f_3 basterà notare che

$$\limsup_j f_j = \inf_n \overset{\mathcal{M}\text{-mis}}{\underbrace{\sup_{m\geq n} f_m}_{\mathcal{M}\text{-mis}}} \Rightarrow \mathcal{M}\text{-mis.}$$

Analogamente per f_4. $\square$

COROLLARIO. Sia $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile.

i) Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ sono funzioni $\mathcal{M}$-misurabili, tali sono anche quelle definite da

$$F(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad x\in X$$

$$G(x) = \min\{f(x), g(x)\} \quad x\in X.$$

ii) Se $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni $\mathcal{M}$-misurabili di X in $\mathbb{R}$ e la posizione $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$ definisce una funzione, allora f è $\mathcal{M}$-mis.

DEFINIZIONE 2. Sia $(X, \mathcal{M})$ spazio misurabile. Diremo che una funzione $\varphi : X \to \mathbb{C}$ è semplice se esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$, $M_1, \dots, M_m \in \mathcal{M}$ tali che

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \chi_{M_j}(x)$$

LEMMA 1. Sia $(X, \mathcal{M})$ spazio misurabile, $X \neq \emptyset$, $\varphi : X \to \mathbb{C}$ è $\mathcal{M}$-misurabile. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) $\varphi \in S(X)$ ove $S(X)$ è sp. vett. delle funzioni semplici

(ii) $\varphi(X)$ ha cardinalità finita.

Se $\varphi \in S(X)$ e $\varphi(X) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ con i $\{\lambda_j\}_{j=1}^{m}$ a due a due distinti, allora

$$\varphi = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \chi_{E_j}$$

ove $E_j = \overleftarrow{\varphi}(\lambda_j)$, $j = 1, \dots, m$, e gli insiemi $\{E_j\}_{j=1}^{m}$ sono elementi a 2 a 2 disgiunti di $\mathcal{M}$.

La rappresentazione di φ di cui in questo lemma è detta rappresentazione standard di φ.

TEOREMA 3. 1. Una funzione $f : X \to \mathbb{C}$ è $\mathcal{M}$-misurabile sse esiste una successione $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S(X)$ tale che

$$(1) \qquad f(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) \quad \forall x \in X$$

2. Una funzione $f : X \to [0, \infty)$ $\mathcal{M}$-mis. ammette una successione $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S(X)$ tale che valga (1) e si abbia pure

$$(2) \qquad 0 \leqslant \varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \dots \leqslant f(x) \quad \forall x \in X.$$

Dimostrazione.

Grazie alla def. 1 è sufficiente considerare $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.
Posto $\varphi_0(x) \equiv 0 \ \forall x \in X$ e

$$\varphi_n(x) \equiv \begin{cases} -n & \text{se } f(x) < -n \\ \varphi_{n-1}(x) + \dfrac{\lfloor n\cdot(f(x) - \varphi_{n-1}(x))\rfloor}{n} & \text{se } |f(x)| \leq n \\ n & \text{se } f(x) > n \end{cases}$$

$\forall x \in X$

Poiché $a - 1 < \lfloor a \rfloor \leq a \ \forall a \in \mathbb{R}$, si ha

$$\varphi_n(x) \leq \varphi_{n-1}(x) + \frac{n\,(f(x) - \varphi_{n-1}(x))}{n} = f(x)$$

$$\varphi_n(x) > \varphi_{n-1}(x) + \frac{n(f(x) - \varphi_{n-1}(x)) - 1}{n} = f(x) - \frac{1}{n}$$

se $|f(x)| \leq n$. Dunque

$$(3) \qquad f(x) - \frac{1}{n} < \varphi_n(x) \leq f(x) \qquad \text{se } |f(x)| \leq n$$

Se $x \in X$, esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $|f(x)| \leq m$ dunque la (3) è vera $\forall n \geq m$.
Ne segue subito (1).
Se poi $f(x) \geq 0 \ \forall x \in X$, allora $\varphi_n(x) \leq f(x) \ \forall x \in X$ poiché se $|f(x)| = f(x) \leq n$ allora $\varphi_n(x) = n \leq f(x)$, d'altra parte

$$0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \leq f(x) \quad \forall x \in X, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

TEOREMA 4 Siano $(X, \mathcal{M})$ spazio misurabile e $f, g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ funzioni $\mathcal{M}$-misurabili. Allora valgono le seguenti proprietà:

(i) le funzioni $f \pm g$ sono $\mathcal{M}$-misurabili

(ii) la funzione fg è $\mathcal{M}$-misurabile

(iii) se $g(x) \neq 0 \ \forall x \in X$, la funzione f/g è $\mathcal{M}$-misurabile.

Dimostrazione.
Dal Teorema 3, esistono due successioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S(X)$ taliche

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \forall x \in X$$
$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$$

Poiché $f_n \pm g_n \in S(X)$, $f_n \cdot g_n \in S(X)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, le affermazioni (i) e (ii) seguono dal Teorema 3. $\square$

NOTA. Se $a \in \mathbb{R}$, porremo

$$a^+ = \max\{a, 0\}$$
$$a^- = \min\{a, 0\}$$

ovviamente $a = a^+ - a^-$ e $|a| = a^+ + a^-$.

COROLLARIO Sia $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile, $f : X \to \mathbb{R}$ funzione $\mathcal{M}$-misurabile. Allora sono $\mathcal{M}$-misurabili pure $f^+, f^-, |f|$.

OSSERVAZIONE Talvolta è conveniente considerare funzioni a valori in $\overline{\mathbb{R}}$. Definiamo i boreliani in $[-\infty, +\infty]$ nel modo seguente:

$$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} \equiv \{E \subset \overline{\mathbb{R}} : E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$$

E diciamo che una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è $\mathcal{M}$-misurabile se

$$\overleftarrow{f}(U) \in \mathcal{M} \qquad \forall U \in \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$$

I teoremi 2, 3, 4 restano validi se evitiamo di considerare i casi indeterminati $0 \cdot (+\infty)$ $\infty + (-\infty)$.

TEOREMA 5. Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurato e $f: X \to \mathbb{C}$ funzione. Se la misura μ è completa allora

(a) Se f è $\mathcal{M}$-misurabile e $g = f$ q.o. su X allora g è $\mathcal{M}$-misurabile

(b) Se f_n è $\mathcal{M}$-misurabile per $n \in \mathbb{N}$ e $f_n \to f$ per $n \to \infty$ q.o. su X allora f è $\mathcal{M}$-misurabile

Se μ non è completa, (a) e (b) in generale sono false.

Capitolo VII - Integrazione di funzioni non negative

Dato uno spazio misurabile $(X, \mathcal{M})$, scriveremo

$$\mathcal{L}^+(X) = \{ f : X \to [0, +\infty] : f \text{ è } \mathcal{M}\text{-misurabile} \}$$

DEF 1 Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurato. Data $\varphi \in S(X) \cap \mathcal{L}^+(X)$ diremo integrale di φ rispetto a μ l'elemento di $[0, +\infty]$ definito da

$$\int_X \varphi \, d\mu \equiv \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mu(E_j)$$

ove $\varphi = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \chi_{E_j}$, con $E_j = \varphi^{-1}(\lambda_j)$ per $j = 1, \dots, m$, è la rappresentazione standard di φ.

Se $A \in \mathcal{M}$ porremo

$$\int_A \varphi \, d\mu \equiv \int_X \varphi \cdot \chi_A \, d\mu = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mu(E_j \cap A)$$

e, convenzionalmente, $0 \cdot (\pm\infty) = 0$.

LEMMA 1 Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurato, e $A \in \mathcal{M}$. Allora

(i) se $\varphi \in S(X) \cap \mathcal{L}^+(X)$ e $c \geq 0$ allora $c \cdot \varphi \in S(X) \cap \mathcal{L}^+(X)$ e

$$\int_A c\varphi \, d\mu = c \int_A \varphi \, d\mu$$

(ii) Se $\varphi, \psi \in S(X) \cap \mathcal{L}^+(X)$ allora $\varphi + \psi \in S(X) \cap \mathcal{L}^+(X)$ e

$$\int_A (\varphi + \psi) \, d\mu = \int_A \varphi \, d\mu + \int_A \psi \, d\mu$$

(iii) (monotonia) Se $\varphi, \psi \in S(X) \cap \mathcal{L}^+(X)$ con $\varphi \leq \psi$ allora
$$\int_A \varphi \, d\mu \leq \int_A \psi \, d\mu$$

(iv) Data $\varphi \in S(X) \cap \mathcal{L}^+(X)$, la mappa di $\mathcal{M}$ in $[0,+\infty]$ che ad ogni A associa $\int_A \varphi \, d\mu$ è una misura.

Dimostrazione (i) — (iii) facile

(iv) Certo $\int_\emptyset \varphi \, d\mu = \int_X \varphi \chi_\emptyset \, d\mu = \int_X 0 \, d\mu = 0$. Se $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, ove $\{A_n\}_n \subset \mathcal{M}$ è una successione di elementi a due a due disgiunti,
$$\int_A \varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^m \lambda_j \, \mu(E_j \cap A) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \, \mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E_j \cap A_n)\Big)$$
$$= \sum_{j=1}^m \lambda_j \sum_{n=1}^\infty \mu(E_j \cap A_n) = \sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^m \lambda_j \, \mu(E_j \cap A_n) = \sum_{n=1}^\infty \int_{A_n} \varphi \, d\mu$$
ove si è usato che la successione $\{E_j \cap A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di elementi a 2 a 2 disgiunti, la σ-additività di μ e il teorema di Fubini-Tonelli (caso discreto). $\square$

DEF 2 Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurato. Se $f \in \mathcal{L}^+(X)$ e $A \in \mathcal{M}$ poniamo
$$\int_A f \, d\mu \equiv \sup\Big\{ \int_A \varphi \, d\mu \;\Big|\; \varphi \in S(X) \cap \mathcal{L}^+(X) \text{ con } 0 \leq \varphi \leq f \Big\}$$

ESERCIZIO Per $f \in S(X) \cap \mathcal{L}^+(X)$ le due definizioni coincidono.

LEMMA 2 Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurato e $A \in \mathcal{M}$. Allora

(i) se $f \in \mathcal{L}^+(X)$ e $c \geq 0$ allora $cf \in \mathcal{L}^+(X)$ e
$$\int_A cf \, d\mu = c \int_A f \, d\mu$$

(ii) (monotonia) Se $f, g \in \mathcal{L}^+(X)$ e $f \leq g$ allora
$$\int_A f \, d\mu \leq \int_A g \, d\mu$$

Proviamo ora il seguente importante teorema.

TEOREMA 1 (*della convergenza monotona, di Beppo Levi*)

Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurato, $A \in \mathcal{M}$, $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^+(X)$ t.c.

$$0 \le \cdots \le f_j(x) \le f_{j+1}(x) \le \cdots \qquad \forall x \in X$$

allora $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$ definisce su X una funzione $f \in \mathcal{L}^+(X)$ e

$$\int_A (\sup_{j\in\mathbb{N}} f_j)\, d\mu = \int_A (\lim_{j\to\infty} f_j)\, d\mu \overset{\downarrow}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{j\to\infty} \int_A f_j\, d\mu = \sup_{j\in\mathbb{N}} \int_A f_j\, d\mu \qquad (1)$$

Dimostrazione

Già sappiamo che $f = \lim_{j\to\infty} f_j \in \mathcal{L}^+(X)$ (cfr. Teorema 3 del Cap VI). Dalla monotonia dell'integrale discende che per ogni $l \in \mathbb{N}$

$$\int_A f_l\, d\mu \le \int_A \sup_{j\in\mathbb{N}} f_j\, d\mu$$

ma questo implica pure

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \int_A f_j\, d\mu \le \int_A \sup_{j\in\mathbb{N}} f_j\, d\mu$$

Resta da provare la disuguaglianza inversa. Dalla definizione 2, basterà provare che se $\varphi \in S(X) \cap \mathcal{L}^+(X)$ e $\varphi \le f$ allora

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \int_A f_j\, d\mu \ge \int_A \varphi\, d\mu .$$

Naturalmente, ciò è equivalente a provare che se $\alpha \in]0,1[$, allora

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \int_A f_j\, d\mu \ge \alpha \int_A \varphi\, d\mu .$$

Definiamo, $\forall n \in \mathbb{N}$, $E_n \equiv \{x \in A : f_n(x) \ge \alpha\varphi(x)\}$ e proviamo che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = A$.
Ovviamente $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \subset A$. Viceversa, supponiamo $x \in A$. Se $\varphi(x) = 0$, $x \in E_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, altrimenti $\sup_{j\in\mathbb{N}} f_j(x) = f(x) \ge \alpha\varphi(x) > 0$ quindi $\exists\, j_x \in \mathbb{N}$ t.c. $x \in E_{j_x} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$
Poiché poi $E_n \subset E_{n+1}$ (in quanto $f_n \le f_{n+1}$) e, come dal Lemma 2, la mappa che ad $A \in \mathcal{M}$ associa $\int_A \varphi\, d\mu$ è una misura, per la proprietà della continuità dal basso si ha

$$\alpha \int_A \varphi\, d\mu = \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \varphi\, d\mu = \alpha \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{E_n} \varphi\, d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{E_n} \alpha\varphi\, d\mu$$

$$\le \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{E_n} f_n\, d\mu \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_A f_n\, d\mu$$

$\square$

OSSERVAZIONE Argomento non applicabile per $\alpha = 1$: $\sup_{j\in\mathbb{N}} \alpha_j \ge \alpha \not\Rightarrow \exists\, J \in \mathbb{N}$ t.c. $\alpha_J \ge \alpha$ (basterà prendere $\alpha_j = \alpha - \frac{1}{j}$). Noi abbiamo applicato che

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \alpha_j > \alpha \Rightarrow \exists\, J \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \alpha_J > \alpha$$

OSSERVAZIONE Può accadere che entrambi i membri dell'uguaglianza (1) siano uguali a $+\infty$.

COROLLARIO. Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ sp. misurato e $A \in \mathcal{M}$

i) $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^+(X) \Rightarrow f_1 + f_2 \in \mathcal{L}^+(X)$

e $\int_A (f_1 + f_2)\, d\mu = \int_A f_1\, d\mu + \int_A f_2\, d\mu$

ii) (scambio dell'ordine fra integrale e sommatoria):

$$\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^+(X) \implies \int_A \sum_{j=1}^{\infty} f_j\, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_A f_j\, d\mu$$

(nessun altra ipotesi!)

iii) se $f \in \mathcal{L}^+(X)$ allora $\int_A f\, d\mu = 0 \Leftrightarrow \mu(\{x \in A : f(x) \neq 0\}) = 0$.

iv) Se $g, f \in \mathcal{L}^+(X)$ e $g = f$ q.o. su $A \Rightarrow \int_A f\, d\mu = \int_A g\, d\mu$

iv') Se $f \in \mathcal{L}^+(X)$, $g = f$ q.o. su A, $g \geq 0$, la misura μ è completa, allora $g \in \mathcal{L}^+(X)$ e $\int_A f\, d\mu = \int_A g\, d\mu$

v) Se $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^+(X)$ è una successione crescente ovunque su X e, ~~posto~~ $f = \lim_{j\to\infty} f$ q.o. su A e $f \in \mathcal{L}^+(X)$ allora $\int_A f\, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_A f_j\, d\mu$.

vi) Se $f \in \mathcal{L}^+(X)$ e $\int_A f\, d\mu < \infty \Rightarrow \mu(\{x \in A : f(x) = +\infty\}) = 0$.

Dimostrazione

i) Per il teorema di approssimazione con le funzioni semplici (Teor. 3, Cap. VI), esistono due successioni $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}, \{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^+(X) \cap S(X)$ crescenti con $\lim_{j\to\infty} \varphi_j = f_1$ e $\lim_{j\to\infty} \psi_j = f_2$

Dal Lemma 1, si ha $\int_A (\varphi_j + \psi_j)\, d\mu = \int_A \varphi_j\, d\mu + \int_A \psi_j\, d\mu$ $\forall j \in \mathbb{N}$ e, dal Teorema 1, poiché le successioni sono crescenti, si ha

$$\begin{aligned}\int_A (f_1 + f_2)\, d\mu &\overset{T1}{=} \lim_{j\to\infty} \int_A (\varphi_j + \psi_j)\, d\mu \\ &= \lim_{j\to\infty} \left(\int_A \varphi_j\, d\mu + \int_A \psi_j\, d\mu \right) \\ &= \lim_{j\to\infty} \int_A \varphi_j\, d\mu + \lim_{j\to\infty} \int_A \psi_j\, d\mu \overset{T1}{=} \int_A f_1\, d\mu + \int_A f_2\, d\mu\end{aligned}$$

ii) Basta applicare il teorema di Beppo Levi alla successione crescente delle somme parziali

$$\int_A \left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j\right) d\mu = \int_A \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f_j\right) d\mu \overset{T1}{=} \lim_{n\to\infty} \int_A \sum_{j=1}^{n} f_j\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_A f_j\, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_A f_j\, d\mu$$

iii) Sia $\varphi \in S(X)\cap \mathcal{L}^+(X)$, $\varphi \not\equiv 0$, $\varphi = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \chi_{E_j}$. Allora

$$\{x\in A : \varphi(x)=0\} = \bigcup_{j=1}^{m} E_j$$

e
$$\int_A \varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mu(E_j) = 0 \iff 0=\mu(E_j) \ \forall j\geq 1 : \lambda_j \neq 0 \quad \text{(uno almeno esiste)}$$
$$\iff 0 = \sum_{\substack{j=1 \\ \lambda_j\neq 0}}^{m} \mu(E_j) = \mu\Big(\bigcup_{\substack{j=1 \\ \lambda_j\neq 0}}^{m} E_j\Big) = \mu(\{x\in A : \varphi(x)\neq 0\})$$

Sia ora $f\in \mathcal{L}^+(X)$. Dal teorema di approssimazione con funzioni semplici, $\exists \{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset S(X)\cap\mathcal{L}^+(X)$ crescente con $\varphi_j \to f$ per $j\to\infty$. Allora

$$\{x\in A : f(x)\neq 0\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x\in A : \varphi_j(x)\neq 0\}$$

Infatti se $x\in A$ e $f(x)\neq 0$ allora $\exists\, j_x\in\mathbb{N}$ t.c. $\varphi_j(x)\neq 0$ $\forall j\geq j_x$, viceversa se $\exists\, \bar{j}\in\mathbb{N}$ t.c. $\varphi_{\bar{j}}(x)\neq 0$, dato che $0\leq \dots \leq \varphi_{\bar{j}}(x) \leq \dots \leq f(x)$ pure $f(x)\neq 0$.

Ne segue che $\mu(\{x\in A : f(x)\neq 0\}) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\{x\in A : \varphi_j(x)\neq 0\}) = 0$ se e soltanto se $\int_A \varphi_j \, d\mu = 0$ $\forall j\in\mathbb{N}$ cioè $0=\lim_{j\to\infty}\int_A \varphi_j\, d\mu = \int_A f\, d\mu$.

iv) Poniamo $N = \{x\in A : g(x)\neq f(x)\}$; allora $N\subset N'$ con $\mu(N')=0$. E

$$\int_A g\, d\mu = \int_{A\setminus N'} g\, d\mu + \int_{N'} g\, d\mu = \int_{A\setminus N'} g\, d\mu =$$
$$= \int_{A\setminus N'} f\, d\mu = \int_{A\setminus N'} f\, d\mu + \int_{N'} f\, d\mu = \int_A f\, d\mu.$$

iv') Basta notare che, dal teorema 5 del Cap VI, $g\in\mathcal{L}^+(X)$ e applicare dunque (iv).

v) Poniamo $N=\{x\in A : \lim_{j\to\infty} f_j(x)\neq f(x)\}$; allora $\exists\, N'\in\mathcal{M}$, $N\subset N'$, $\mu(N')=0$. E'

$$\int_A f\, d\mu = \int_{A\setminus N'} f\, d\mu + \int_{N'} f\, d\mu = \int_{A\setminus N'} f\, d\mu \overset{T1}{=} \lim_{j\to\infty} \int_{A\setminus N'} f_j\, d\mu$$
$$= \lim_{j\to\infty}\Big(\int_{A\setminus N'} f_j\, d\mu + \int_{N'} f_j\, d\mu\Big) = \lim_{j\to\infty}\int_A f_j\, d\mu$$

vi) Posto
$$B\equiv \{x\in A : f(x)=+\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x\in A : f(x)>n\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(]n,\infty[) \in \mathcal{M}, \quad B\subset A$$

si ha
$$\int_A f\, d\mu \geq \int_B f\, d\mu = (+\infty)\cdot\mu(B) = +\infty \quad \text{se } \mu(B)>0$$

ma
$$\int_A f\, d\mu < \infty \quad \text{quindi} \quad \mu(B)=0. \qquad \square$$

Proviamo ora il seguente importante risultato.

<u>TEOREMA 2</u> (Fatou) Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. misurato, $A \in \mathcal{M}$, $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^+(X)$.

Allora $\liminf_{j\to\infty} f_j \in \mathcal{L}^+(X)$ e

$$\int_A \liminf_{j\to\infty} f_j \, d\mu \le \liminf_{j\to\infty} \int_A f_j \, d\mu \overset{\text{ok}}{\le} \sup_{j\in\mathbb{N}} \int_A f_j \, d\mu$$

<u>Dimostrazione</u>. Innanzitutto $\liminf_{j\to\infty} f_j = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\ge n} f_m$ e $\{\inf_{m\ge n} f_m\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^+(X)$ è successione crescente, percui (dal Teorema di Beppo Levi) si ha che $\int_A (\liminf_{j\to\infty} f_j) d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_A (\inf_{m\ge n} f_m) d\mu$. Ora notiamo che $\int_A (\inf_{m\ge n} f_m) d\mu \le \int_A f_m \, d\mu$ per ogni $m \ge n$ (dalla monotonia dell'integrale) da cui segue subito

$$\int_A (\inf_{m\ge n} f_m) d\mu \le \inf_{m\ge n} \int_A f_m \, d\mu$$

Dunque

$$\int_A \liminf_{j\to\infty} f_j \, d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_A (\inf_{m\ge n} f_m) d\mu \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\ge n} \int_A f_m \, d\mu = \liminf_{j\to\infty} \int_A f_m \, d\mu$$

$\square$

<u>COROLLARIO</u>, Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ sp. misurato, $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^+(X)$. Se

$$\lim_{j\to\infty} f_j = f \quad \text{q.o. su } A$$

e $f \in \mathcal{L}^+(X)$ (il che è sempre vero se μ è misura completa)

allora

$$\int_A f \, d\mu \le \liminf_{j\to\infty} \int_A f_j \, d\mu \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_A f_n \, d\mu$$

<u>Dim</u> Sia $N \in \mathcal{M}$, $\mu(N) = 0$, con $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$ $\forall x \in A \setminus N$. Allora

$$\int_A f \, d\mu = \int_{A\setminus N} f \, d\mu = \int_A (f \cdot \chi_{A\setminus N}) d\mu = \int_A (\lim_{j\to\infty} f_j \cdot \chi_{A\setminus N}) d\mu$$

$$\le \liminf_{j\to\infty} \int_A f_j \cdot \chi_{A\setminus N} \, d\mu$$

$$= \liminf_{j\to\infty} \int_A f_j \, d\mu$$

$\square$

<u>ESEMPIO.</u> Siano $(X, \mathcal{M}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}_{\mathbb{R}}, m)$ ove m è la misura di Lebesgue, $A =]0,1[$ e, per $j \in \mathbb{N}$,

$$f_j(x) = \begin{cases} j & \text{se } 0 < x < \frac{1}{j} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora $\int_{]0,1[} \lim_{j\to\infty} f_j \, dm = 0 \ne 1 = \lim_{j\to\infty} \int_{]0,1[} f_j \, dm$.

Notare che $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ non è crescente.

Capitolo VIII - Integrazione di funzioni complesse

DEF 1 Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurato e $A \in \mathcal{M}$. Allora

i. se $f: A \to \mathbb{R}$ è $\mathcal{M}$-misurabile, e almeno uno degli integrali $\int_A f^+ d\mu, \int_A f^- d\mu$ è finito, porremo

$$\int_A f d\mu \equiv \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu$$

(con la convenzione $a - (+\infty) = -\infty$, $(+\infty) - a = +\infty$)

ii. Se $f: A \to \mathbb{R}$ è $\mathcal{M}$-misurabile, e ambedue gli integrali $\int_A f^+ d\mu, \int_A f^- d\mu$ sono finiti, diremo che f è μ-integrabile su A.

DEF 2 Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurabile e $A \in \mathcal{M}$. Diremo che una funzione $f: A \to \mathbb{C}$ è μ-integrabile su A se ambedue le funzioni $\mathrm{Re} f$, $\mathrm{Im} f$ sono μ-integrabili su A, e se ciò accade porremo

$$\int_A f d\mu \equiv \int_A \mathrm{Re} f \, d\mu + i \int_A \mathrm{Im} f \, d\mu$$

OSSERVAZIONE. Dalle definizione 1, 2, segue che se f è $\mathcal{M}$-misurabile su A allora è μ-integrabile su $A \iff |f|$ è μ-integrabile su A in quanto $\int_A |f| d\mu = \int_A f^+ d\mu + \int_A f^- d\mu$.

LEMMA 1 Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurabile e $A \in \mathcal{M}$. Se $f: A \to \mathbb{C}$ è μ-integrabile su A allora

$$\left| \int_A f d\mu \right| \leq \int_A |f| d\mu$$

Dimostrazione. Se $f: A \to \mathbb{R}$, allora

$$\left| \int_A f d\mu \right| = \left| \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu \right| \leq \int_A f^+ d\mu + \int_A f^- d\mu = \int_A |f| d\mu.$$

Se $f: A \to \mathbb{C}$ e $f \not\equiv 0$ poniamo

$$\alpha = \frac{\overline{\int_A f d\mu}}{\left| \int_A f d\mu \right|} \in \mathbb{C}$$

allora $|\alpha| = 1$ e

$$\left| \int_A f d\mu \right| = \alpha \int_A f d\mu = \int_A \alpha f d\mu = \mathrm{Re} \int_A \alpha f d\mu \quad \text{(sono numeri reali)}$$

$$\leq \left| \int_A \alpha f d\mu \right| \leq \int_A |\alpha f| d\mu = \int_A |f| d\mu \qquad \square$$

LEMMA 2 Siano $(X,\mathcal{M},\mu)$ uno spazio misurabile, $A\in\mathcal{M}$ e $f,g:A\to\mathbb{C}$ funzioni $\mathcal{M}$-misurabili. Allora sono equivalenti le asserzioni

1. $\int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu \quad \forall E\in\mathcal{M},\ E\subset A$

2. $f=g$ q.o. su A

Dimostrazione

$(2)\Rightarrow(1)$ $\exists N\in\mathcal{M}$, $\mu(N)=0$, t.c. $f=g$ ovunque su $E\setminus N$ quale che sia $E\in\mathcal{M}$ con $E\subset A$. Allora $\int_E f\,d\mu=\int_{E\setminus N} f\,d\mu=\int_{E\setminus N} g\,d\mu=\int_E g\,d\mu \quad \forall E\in\mathcal{M}, E\subset A$.

$(1)\Rightarrow(2)$. Supponiamo, per assurdo, che sia

$$\int_A |f-g|\,d\mu>0$$

Sia $u=\operatorname{Re}(f-g)$, $v=\operatorname{Im}(f-g)$. Allora almeno una delle funzioni è non identicamente nulla su un insieme $E\subset A$ con $\mu(E)>0$, per esempio u^+. Dunque

$$\operatorname{Re}\int_E f\,d\mu - \operatorname{Re}\int_E g\,d\mu \qquad (u^-=0)$$

$$=\operatorname{Re}\int_E (u^+-u^-)\,d\mu = \operatorname{Re}\int_E u^+\,d\mu>0$$

cioè (1) non è soddisfatta.

Quindi (1) implica $\int_A |f-g|\,d\mu=0$ e, dal Corollario al Teorema di Beppo Levi (parte iii) si ha $|f-g|=0$ q.o. su A $\Leftrightarrow$ (2). □

DEF. 3 Sia $(X,\mathcal{M},\mu)$ uno sp. misurato e $A\in\mathcal{M}$. Diremo che $f\in L^1_\mu(A)$ se esiste un insieme N di misura $\mu(N)=0$ tale che f è μ-integrabile su $A\setminus N$. Possiamo anche assumere che f non sia necessariamente definita su N.

OSSERVAZIONE. Ci sono alcune ragioni per cui non diciamo soltanto che $f\in L^1_\mu(A)$ se f è μ-integrabile su A, come sembrerebbe più naturale.

1) Supponiamo che $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset L^1_\mu(A)$ sia successione di funzioni definite su A ed ivi integrabile, ma tale che $\lim_{j\to\infty} f_j=f$ esista solo q.o. su A, cioè supponiamo che esista $N\in\mathcal{M}$, $N\subset A$, $\mu(N)=0$ tale che il limite esista ovunque su $A\setminus N$ e che sia ivi integrabile, cosa che accade spesso. In tal caso si può dire che $f\in L^1_\mu(A)$.

2) Ai fini dell'integrazione, le funzioni a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ finite q.o. su A possono essere considerate funzioni a valori reali. E' sufficiente ridefinirle, sull'insieme in cui valgono $+\infty$ o $-\infty$, ponendole p.e. uguali a 0.

3) Ricordiamo che, se la misura μ non è completa, $f \in L^1_\mu(A)$ è definita ed integrabile su A e $g \neq f$ solo in un insieme $N \in \mathcal{M}$ di misura $\mu(N) = 0$, allora g potrebbe non essere nemmeno $\mathcal{M}$-misurabile, dunque non μ-integrabile, su A. Tuttavia, in virtù della definizione 3, $g \in L^1_\mu(A)$ perché coincide con f su $A \setminus N$ ed è, pertanto, integrabile su $A \setminus N$.

<u>OSSERVAZIONE</u>. Diciamo che f è equivalente a g su A, brevemente $f \sim g$ su A, se $f = g$ q.o. su A cioè se $\exists N \in \mathcal{M} \mid \mu(N) = 0$ t.c. $f = g$ su $A \setminus N$. Ai fini dell'integrazione, due funzioni equivalenti sono la stessa perché dal <u>Lemma 2</u> e dalla <u>Def. 3</u> se $f \in L^1_\mu(A)$ e $g \sim f$ su A allora $\forall E \in \mathcal{M}$ con $E \subset A$ si ha $\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu$.

<u>OSSERVAZIONE</u>. A questo proposito, notare che in alcuni libri, p.e. in [F] il simbolo $L^1_\mu(A)$ è usato per denotare lo spazio di tutte le classi di equivalenza relative all'equivalenza $\sim$ sopra definita.

<u>TEOREMA 1 (generalizzazione del teorema della convergenza monotona)</u>. Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurato, $A \in \mathcal{M}$, $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni $f_j : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{M}$-misurabili. Supponiamo che

1. $\lim_{j \to \infty} f_j = f$ q.o. su A

2. f è $\mathcal{M}$-misurabile su A (il che è sempre vero se la misura μ è completa)

3. $g \leq f_j \leq f$ q.o. su A, $\forall j \in \mathbb{N}$, ove $g \in L^1_\mu(A)$

Allora si ha

$$(3) \qquad \int_A \lim_{j \to \infty} f_j \, d\mu = \lim_{j \to \infty} \int_A f_j \, d\mu$$