

FRANCESCO MATTIELLO

ANALISI REALE

2008-2009

6

PROF. VICTOR BURENKOV

Contenuto del corso:

- 1) Misura
- 2) Integrazione (Lebesgue)
- 3) Spazi L^p
- 4) Decomposizione e Differenziazione di misura

Testo: G. Folland, Real Analysis Modern Techniques
and their Applications,
John-Wiley & Sons, 1984.

Utile sono anche:

G. De Marco, Analisi Due

V. Burenkov, Introduction to the Theory of
 L^p -spaces (Lecture Notes, in preparation)

Esame: • scritto con esercizi ed alcuni elementi
di teoria (def ed enunciati)
• orale (obbligatorio per voto > 26)

Compiti: I compito: giovedì 6/11
ore 14.30 - 17.00 (16.30)
1C 150 (1A 150)

II compito: venerdì 12/12
ore 14.30 - 16.30
1A 150 - 1C 150

Appelli : I appello : 16/12 11.30

1A150 1C150

II appello : 7/1/09 da confermare

e-mail : lamberti@math.unipd.it

pagina web : math.unipd.it/~lamberti

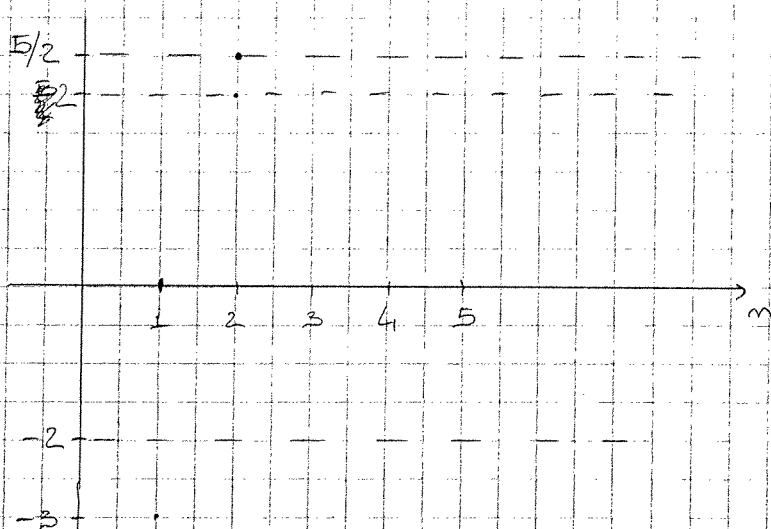
Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ (

E' noto cosa si intende per $\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$, $\inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$

(si tiene conto di tutti i termini della succ.)).

Vogliamo dare una def che tenga conto solo di $n \rightarrow \infty$

Esempio Sia $x_n = (-1)^n \left(2 + \frac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$.



$$\sup x_n = \frac{5}{2} \quad \inf x_n = -3$$

Si ha che $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -2$.

$\forall K \in \mathbb{N}$ poniamo:

$$L_K = \sup_{n \geq K} x_n, \quad l_K = \inf_{n \geq K} x_n$$

Si noti che

$$L_K \geq L_{K+1} \quad \downarrow \quad (\text{po meno termini su cui testare})$$

$$l_K \leq l_{K+1} \quad \nearrow$$

~~Se~~ Se il numero di termini su cui testare diminuisce, allora il sup decresce e l'inf aumenta.

Quindi esistono in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} L_K \quad (= \inf_{K \in \mathbb{N}} L_K)$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} l_K \quad \left(= \sup_{K \in \mathbb{N}} l_K \right).$$

Poniamo, per definizione

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{K \rightarrow \infty} L_K$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{K \rightarrow \infty} l_K$$

Esempio. $x_n = n \cos \frac{n\pi}{2}, \quad n \geq 1$

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2K+1, \quad K \geq 0 \\ -n & \text{se } n = 2(2K+1) \\ n & \text{se } n = 4K, \quad K \geq 1 \end{cases}$$

Ora, $L_K = \sup_{n \geq K} x_n \geq \underbrace{x_{4K}}_{\text{un termine della successione}} = 4K$

un termine della successione

quindi per confronto $\lim_{K \rightarrow \infty} L_K = +\infty$

Analog., $l_K = \inf_{n \geq K} x_n \leq x_{2(2K+1)} = -2(2K+1)$

$\Rightarrow \lim_{K \rightarrow \infty} l_K = -\infty$

Per esercizio: $x_n = \cos \frac{n\pi}{2}$ (facile),

$x_n = \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{2}$ (meno facile)

 E' chiaro che $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \sup_{n \geq 1} x_n,$

$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \inf_{n \geq 1} x_n$

Prop. Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in $\overline{\mathbb{R}}$.

Allora $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$. (*)

Inoltre, esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ in $\overline{\mathbb{R}}$ se e solo se

$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$, nel qual caso si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$$

dim (*) segue subito da $l_k \leq L_k \quad \forall k$
(e si conserva al limite).

Dim. l'altra

"=": Sia $l = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$;

ora, $l_k \leq x_k \leq L_k \quad \forall k$.

Per il Th. dei carabinieri,
 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = l$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = l$$

" $\Rightarrow$ ": Sia $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. $\forall I$ intorno di l si ha che $x_k \in I$ per ogni $k \geq k_I$ ($\exists k_I$, per la def. di limite).

Supp. I chiusa (si può) $\Rightarrow l_k = \inf_{n \geq k} x_n$, L_k

$\in I$, $\forall k \geq k_I$ (sup e inf stanno in I , perché I è chiusa). Ma questa è la def. di limite

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} l_k = \lim_{k \rightarrow \infty} L_k = l$$

C.V.D.

Prop. Siano $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$ (non $\overline{\mathbb{R}}$)

Allora:

$$(1) \quad \text{se } \lambda > 0 \quad \text{allora} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda x_n = \lambda \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$
$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda x_n = \lambda \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$$
$$\text{se } \lambda < 0 \quad \text{allora} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda x_n = \lambda \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$$

(2) se $(x_{n_h})_{h \in \mathbb{N}}$ è una sottosuccessione allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} x_{n_h},$$

$$\limsup_{h \rightarrow \infty} x_{n_h} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$

(meno elementi)

(3) se $x_n \leq y_n \quad \forall n$ allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n \quad \text{e} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n$$

(monotonia)

$$(4) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n$$

(meno scelte se prima sommo e poi faccio il $\limsup$)

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$$

(5) se esiste $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in \mathbb{R}$ allora

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \gamma$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \gamma$$

La seguente prop. dà una def. operativa per il calcolo del limite superiore e del limite inferiore di una successione in $\overline{\mathbb{R}}$:

Prop. Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in $\bar{\mathbb{R}}$. Sia E l'insieme di tutti i limiti in $\bar{\mathbb{R}}$ di tutte le sottosuccessioni di $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergenti in $\bar{\mathbb{R}}$.

Allora

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \max E$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \min E$$

(ci vuol dire che effettivamente c'è una sottosucc. che converge al $\limsup$, e una al $\liminf$)

~~Prop.~~ Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in $\bar{\mathbb{R}}$.

Siano $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ e $(x_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ 2 sottosuccessioni tali che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_{m_k} = b$$

e tali che

$$\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{m_k : k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}. \quad (*) \quad \left(\text{abbiamo esaurito tutt. gli indici} \right)$$

Allora

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \max \{a, b\},$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \min \{a, b\}$$

Soluz. In questo caso, $E = \{a, b\}$.

(Vale anche per più di 2)

⊙ chiaro che non può esistere un'altra sottosuccessione che converge ad un $c \neq a, b$: se tale s.s. ha gli indici in $\{n_k\} \Rightarrow$ converge ad a , se gli ha in $\{m_k\}$ converge ad b , se è ad "indici misti" non converge (basta prendere 2 s.s. di questa, una ad indici in $\{n_k\}$ e una ad indici in $\{m_k\}$: hanno limiti ~~diversi~~ a e b ($\neq c$) risp.)

Esempio. $x_n = n \cos \frac{n\pi}{2}$, $n \geq 1$.

$$\lim_{h \rightarrow \infty} x_{2h-1} = \lim_{h \rightarrow \infty} 0 = 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} x_{2(2h-1)} = \lim_{h \rightarrow \infty} -2(2h-1) = -\infty,$$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} x_{2(2h)} = \lim_{h \rightarrow \infty} 2(2h) = +\infty,$$

per $\{2h-1 : h \in \mathbb{N}\} \cup \{2(2h-1) : h \in \mathbb{N}\} \cup \{2(2h) : h \in \mathbb{N}\} =$
 $= \mathbb{N},$

quindi $\limsup x_n = \max \{0, -\infty, +\infty\} = +\infty,$

$$\liminf x_n = \min \{0, -\infty, +\infty\} = -\infty.$$

Limiti superiori ed inferiori di funzioni

Sia (X, d) uno spazio metrico, $E \subset X$, $E \neq \emptyset$.

ed $f: E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$. Sia $x_0 \in X$ un punto di accumulazione di E .

per il lim. per $x \rightarrow x_0$ val
 la "regola" di sempre più le
 possibilità di trovare valori

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{\pi \rightarrow 0} \sup_{\substack{x \in B(x_0, \pi) \cap E \\ x \neq x_0}} f(x) \quad \left(= \inf_{\pi > 0} \sup_{\substack{x \in B(x_0, \pi) \cap E \\ x \neq x_0}} f(x) \right)$$

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{\pi \rightarrow 0} \inf_{\substack{x \in B(x_0, \pi) \cap E \\ x \neq x_0}} f(x) \quad \left(= \sup_{\pi > 0} \inf_{\substack{x \in B(x_0, \pi) \cap E \\ x \neq x_0}} f(x) \right)$$

Di fatto la def. data non dipende dalla base di
 intorno di x_0 presa e non dipende dal valore di
 $f(x_0)$.

⊙ cioè $\sup_{\substack{x \in B(x_0, \pi) \cap E \\ x \neq x_0}} f(x)$ è funzione crescente di π .

Esercizio. Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \sup \sin \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \inf \sin \frac{1}{x}$. (4)

Potiamo dire $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ per ogni $x \neq 0$.

Consideriamo

$$\sup_{\substack{x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ x \neq 0}} \sin \frac{1}{x} = 1, \quad \text{perché nei punti}$$

$$x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, \quad k \geq 0 \quad \text{si ha}$$

$$\sin \frac{1}{x_k} = 1 \quad \text{e } x_k \text{ è arbitrariamente vicino a zero}$$

(e quando $k \rightarrow \infty$, $x_k \rightarrow 0$). Quindi,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sup f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 1 = 1$$

Analogamente, $\inf_{\substack{x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ x \neq 0}} \sin \frac{1}{x} = -1$ e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \inf f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -1 = -1$$

Esercizio Chiaramente se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e si deve calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \inf f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sup f(x)$ gli intorno di $+\infty$ sono

del tipo $(r, +\infty)$, $\forall r \in \mathbb{R}$. Allora per "ridurre il raggio dell'intorno" bisogna far tendere r a $+\infty$, non a 0.

Esercizio Calcolare

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{1 + \cos^2 x}$$

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{1 + \cos^2 x}$$

Una base degli intorno di $+\infty = x_0$ è $[\pi, +\infty[$.

Dobbiamo valutare

$$\sup_{x > \pi} f(x)$$

$$\inf_{x > \pi} f(x)$$

Notiamo che $0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1 + \cos^2 x \leq 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1 + \cos^2 x} \leq 1 \Rightarrow \frac{4}{1 + \cos^2 x} \leq 8$$

Nei punti $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$f(x_k) = 8$$

↑ bisogna ricordare
questo fatto per
concludere che f.p.
è il sup

e x_k è arbitrariamente vicino a $+\infty$. Quindi,

$$\sup_{x > \pi} f(x) = 8$$

Quindi, $\limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 8$.

Analogamente per il $\liminf$.

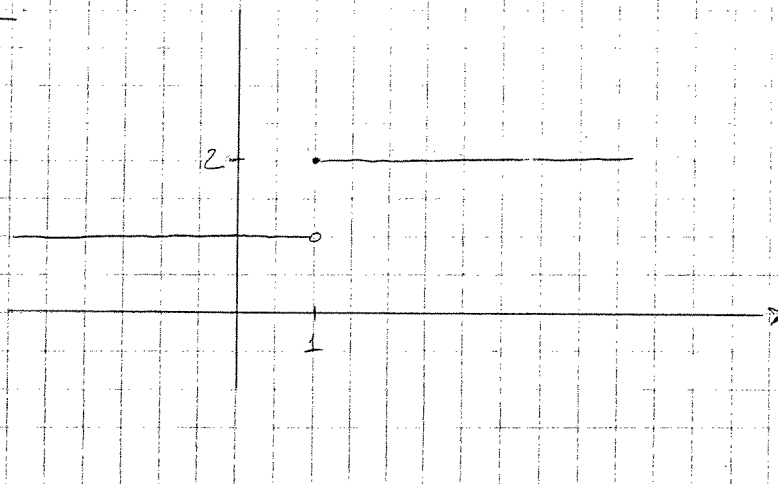
Def. Sia (X, d) uno spazio metrico, $E \subset X$,
 $E \neq \emptyset$, $x_0 \in E$, x_0 punto di accumulazione
di E . Sia $f: E \rightarrow \mathbb{R}$.

f si dice superiormente semicontinua in x_0 se
 $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$;

f si dice inferiormente semicontinua in x_0 se
 $f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Esempio

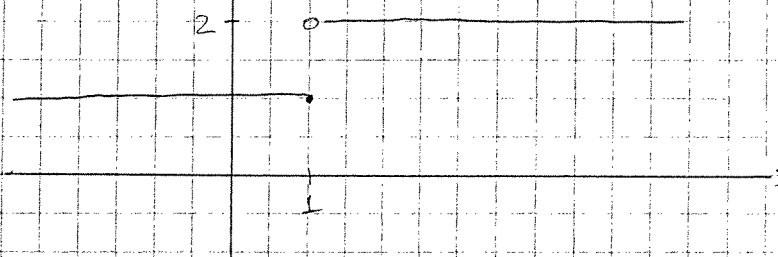
(5)



sup. semicontinua
in 1

($\limsup = 2$)
però si può
mettere > 2
 $\liminf = 1$

$f(1)$



inf. semicontinua
in 1

($\liminf = 1$)
però si può
mettere < 1
 $\limsup = 2$

$f(1)$

Prop. f è superiormente semicontinua in x_0 se e solo se $\forall \varepsilon > 0 \exists$ un intorno U di x_0 t.c.

$$f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

$$\forall x \in U \cap E, x \neq x_0;$$

f è inf. semicontinua in x_0 se e solo se

$\forall \varepsilon > 0 \exists$ un intorno U di x_0 t.c.

$$f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon$$

$$\forall x \in U \cap E, x \neq x_0.$$

(la def di limite vorrebbe entrambe)

CAPITOLO 1 : MISURE

Che cos'è una misura?

È la lunghezza in $\mathbb{R}$, l'area in $\mathbb{R}^2$, il volume in $\mathbb{R}^3$ e i loro analoghi in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$.

Idealmente una misura dovrebbe essere definita su insiemi arbitrari di $\mathbb{R}^n$ e dovrebbe tradurre le nostre aspettative intuitive.

Cioè, vorremmo definire una funzione

$$\mu: \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, +\infty]$$

ove $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ t.c.

(1) Se $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è una succ. di elementi di $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ a 2 a 2 disgiunti, allora

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) ;$$

(2) Se $E, F \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ differiscono per una rototraslazione (i.e. sono isometriche) allora

$$\mu(E) = \mu(F) ;$$

(3) $\mu([0,1]^n) = 1$.

Purtroppo tali condizioni non sono compatibili per ogni

$\mu: \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, +\infty]$. Si veda Folland (c1, §1).

(la ragione è dovuta all'Assioma della Seta).

Che fare?

Sarà ragionevole restringere il dominio di μ ad un sottoinsieme proprio di $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, diciamo $\mathcal{A}$

(i.e. ~~arbitrari~~).

È chiaro che valgono che $\mathcal{A}$ sia chiuso rispetto alla unione e alla intersezione finita e al passaggio al complementare ($\mathcal{A}$ sarà l'insieme dei misurabili).

Noi di fatto considereremo un insieme arbitrario X invece di $\mathbb{R}^n$.

Def. 1 Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X . Diremo algebra di parti di X un sottoinsieme $\mathcal{A}$ non vuoto di $\mathcal{P}(X)$ t.c.

(1) Se $A_j \in \mathcal{A}$ per $j = 1, \dots, m$ allora $\bigcup_{j=1}^m A_j \in \mathcal{A}$

(2) Se $A \in \mathcal{A}$ allora $A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$ *

Se poi $\mathcal{A}$ godesse anche della proprietà

(3) (chiusura risp. all'unione numerabile)

Se $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ è una successione in $\mathcal{A}$, allora

$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$ (unione numerabile)

allora diremo che $\mathcal{A}$ è una σ -algebra di parti di X .

Lemma 1 (1) Se $\mathcal{A}$ è una algebra di parti di X

allora valgono:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;

(ii) se $A_j \in \mathcal{A}$ per $j = 1, \dots, m$ allora $\bigcap_{j=1}^m A_j \in \mathcal{A}$;

(iii) se $A, B \in \mathcal{A}$ allora $A \cap B \in \mathcal{A}$.

(2) Se $\mathcal{A}$ è una σ -algebra allora:

(iv) se $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ è una successione in $\mathcal{A}$,

allora $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

* Osservazione Se $\mathcal{A}$ è un'algebra di $\mathcal{P}(X)$, la complementazione è

dim. (1, i). Se $A \in \mathcal{A}$ allora $A^c \in \mathcal{A}$, quindi

$X = A \cup A^c \in \mathcal{A}$ e quindi $\emptyset = X^c \in \mathcal{A}$.

(ii) e (iv) per esercizio [$A \cap B = B^c \cap A^c$; per le altre usarsi De Morgan]

~~Definizione~~ Nella def. di σ -algebra non si richiede la chiusura rispetto all'unione arbitraria (ma solo numerabile).

Esempi. Sia X un insieme.

(1) $\{\emptyset, X\}$ è una σ -algebra di $\mathcal{P}(X)$,

(2) $\mathcal{P}(X)$ è una σ -algebra di $\mathcal{P}(X)$;

(3) Se $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ allora $\{\emptyset, A, A^c, X\}$ è una σ -algebra di $\mathcal{P}(X)$.

(esercizio)

Lemma 2. Sia X un insieme. Se $\mathcal{F}$ è una famiglia arbitraria di σ -algebra di $\mathcal{P}(X)$, allora

$\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$ è una σ -algebra di $\mathcal{P}(X)$.

dim. (2) Se $A \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$ allora $A \in A \quad \forall A \in \mathcal{F}$.

Allora $A^c \in A \quad \forall A \in \mathcal{F}$, cioè $A^c \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$.

(3) Se $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ è una success. in $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$ allora

$(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ è una success. in A , per ogni $A \in \mathcal{F}$.

Quindi, $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in A \quad \forall A \in \mathcal{F}$, cioè $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$.

C.V.D.

Def. 2 Sia X un insieme e $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. Chiameremo $\mathcal{M}(\mathcal{E})$

la σ -algebra generata da $\mathcal{E}$ cioè

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}_{\mathcal{E}}} A,$$

dove $\mathcal{F}_{\mathcal{E}}$ è l'insieme delle σ -algebre contenenti $\mathcal{E}$,
 $\mathcal{F}_{\mathcal{E}} = \{ A \subset \mathcal{P}(X) : A \text{ è } \sigma\text{-algebra, } A \supset \mathcal{E} \}$

Si noti che $\mathcal{F}_{\mathcal{E}} \neq \emptyset$ perché $\mathcal{P}(X)$ è una σ -algebra contenente $\mathcal{E}$. Inoltre, dal Lemma 2 segue che $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ è una σ -algebra.

Lemma 3. Sia X un insieme ed $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$.

Allora $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ è la minima σ -algebra che contiene $\mathcal{E}$, cioè:

- (1) $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ è una σ -algebra, $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \supset \mathcal{E}$;
- (2) se A è una σ -algebra, $A \supset \mathcal{E}$, allora $A \supset \mathcal{M}(\mathcal{E})$.

dim. (1) segue dal Lemma 2 e dalla def.

(2) Se A è una σ -algebra e $A \supset \mathcal{E}$, allora $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{E}}$ e quindi

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \bigcap_{B \in \mathcal{F}_{\mathcal{E}}} B \subset A \quad (A \text{ è uno dei } B)$$

C.V.D

Lemma 4. Sia X uno spazio topologico e siano E_1, E_2 sottoinsiemi di $\mathcal{P}(X)$. Allora:

- (1) $\mathcal{K}(\mathcal{K}(E_1)) = \mathcal{K}(E_1)$;
- (2) Se $E_1 \subset E_2$ allora $\mathcal{K}(E_1) \subset \mathcal{K}(E_2)$;
- (3) Se $E_1 \subset \mathcal{K}(E_2)$ allora $\mathcal{K}(E_1) \subset \mathcal{K}(E_2)$.

dim. (1). Mostriamo che $\mathcal{K}_{E_1} = \mathcal{K}_{\mathcal{K}(E_1)}$. Infatti se $A \in \mathcal{K}_{\mathcal{K}(E_1)}$ allora $A \supset E_1$ e quindi $A \in \mathcal{K}_{E_1} \Rightarrow \mathcal{K}_{\mathcal{K}(E_1)} \subset \mathcal{K}_{E_1}$. Se $A \in \mathcal{K}_{E_1}$ allora $A \supset \mathcal{K}(E_1)$ (Lemma 3), quindi $A \in \mathcal{K}_{\mathcal{K}(E_1)} \Rightarrow \mathcal{K}_{E_1} \subset \mathcal{K}_{\mathcal{K}(E_1)}$. Quindi, $\mathcal{K}(\mathcal{K}(E_1)) = \bigcap_{A \in \mathcal{K}_{\mathcal{K}(E_1)}} A = \bigcap_{A \in \mathcal{K}_{E_1}} A = \mathcal{K}(E_1)$.

(3). Se $E_1 \subset \mathcal{K}(E_2)$ allora $\mathcal{K}(E_2) \supset \mathcal{K}(E_1)$ per il Lemma 3 (e $\mathcal{K}(E_1) \supset E_1$).

(2). Segue da 3, poiché $E_2 \subset \mathcal{K}(E_2)$.

CVD

collezione degli aperti di X

Def. 3. Sia (X, τ_X) uno spazio topologico. Diamo σ -algebra dei Borelliani di X la σ -algebra di $\mathcal{P}(X)$ generata dalla topologia τ_X , cioè $\mathcal{B}_X = \mathcal{K}(\tau_X)$.

Dunque, $\mathcal{B}_X$ contiene gli aperti (per la def.) e tutti gli insiemi chiusi (perché complementari di aperti) e quindi contiene tutte le unioni / intersez. numerabili di aperti o chiusi, tutte le intersez. / unioni numerabili di insiemi ottenuti come sopra ($\cup / \cap$ num. di aperti o chiusi), etc. etc...

↑ questi sono

Esempio $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ è la σ -algebra dei Borelliani di $\mathbb{R}$ generata dalla topologia standard di $\mathbb{R}$ ($\tau_{\mathbb{R}}$). Vedremo che i Borelliani di $\mathbb{R}$ non sono tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, cioè $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

(tra i Borelliani avremo anche altri insiemi misurabili)

Ricordiamo che $\tau_{\mathbb{R}}$ è la famiglia di tutti gli insiemi aperti di $\mathbb{R}$, cioè $A \in \tau_{\mathbb{R}}$ se e solo se $A = \emptyset$ oppure $A = \bigcup_{j=1}^m]\alpha_j, \beta_j[$ per qualche

$m \in \mathbb{N}$ o $m = \infty$ e per degli intervalli del tipo $]\alpha_j, \beta_j[$ finiti o infiniti, a 2 a 2 disgiunti.

Lemma 5. Le famiglie

$$\mathcal{E}_1 = \{]a, b[: a, b \in \mathbb{R}, a < b \} \quad (\text{intervalli aperti e finiti})$$

$$\mathcal{E}_2 = \{ [a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b \} \quad (\text{intervalli chiusi e finiti})$$

$$\mathcal{E}_3 = \{ [a, b[: a, b \in \mathbb{R}, a < b \}$$

$$\mathcal{E}_4 = \{]a, +\infty[: a \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathcal{E}_5 = \{ [a, +\infty[: a \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathcal{E}_6 = \{]-\infty, a[: a \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathcal{E}_7 = \{]-\infty, a] : a \in \mathbb{R} \}$$

osservazione
generano la σ -algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, cioè

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{H}(\mathcal{E}_1) = \mathcal{H}(\mathcal{E}_2) = \dots = \mathcal{H}(\mathcal{E}_7).$$

dim. 1) Da $\textcircled{*}$ segue che $\tau_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{M}(E_1)$, ^{cioè tutti gli aperti} (pensaci un attimo, è facile)

(ogni aperto è unione num. di aperti disgiunti).

D'altra parte, $E_1 \subset \tau_{\mathbb{R}}$. Quindi dal Lemma 4, segue che $\mathcal{M}(E_1) \subset \mathcal{M}(\tau_{\mathbb{R}}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{M}(E_1)) = \mathcal{M}(E_1)$.
 $\parallel$
 $\beta_{\mathbb{R}}$

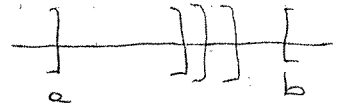
Quindi, $\mathcal{M}(E_1) = \beta_{\mathbb{R}}$.

2) Essendo $]a, b] =]a, b[\cup \{b\}$ e $]a, b[$ è aperto^(bor), $\{b\}$ è chiuso^(bor) $\Rightarrow]a, b]$ è un boreliano.

Quindi, $E_2 \subset \beta_{\mathbb{R}}$.

Quindi, $\mathcal{M}(E_2) \subset \mathcal{M}(\beta_{\mathbb{R}}) = \beta_{\mathbb{R}}$.

Viceversa, $]a, b[= \bigcup_{n=1}^{\infty}]a, b - 2^{-n}]$ (perché $2^{-n} < b-a$)



quindi $]a, b[\in \mathcal{M}(E_2)$, quindi $E_1 \subset \mathcal{M}(E_2)$

$\Rightarrow \mathcal{M}(E_1) \subset \mathcal{M}(\mathcal{M}(E_2)) = \mathcal{M}(E_2)$.

$\parallel$ (punto 1)
 $\beta_{\mathbb{R}}$

Quindi, $\beta_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{M}(E_2)$, quindi $\beta_{\mathbb{R}} = \mathcal{M}(E_2)$.

3-4-5-6-7 per esercizio. (dim. che uno si ottiene dagli altri e viceversa).

Def. 4. Diremo spazio misurabile una coppia $(X, \mathcal{A})$ dove X è un insieme e $\mathcal{A}$ è una σ -algebra di $\mathcal{P}(X)$.

Def. 5. Siano X un insieme e $\mathcal{A}$ una σ -algebra di $\mathcal{P}(X)$.

Diremo misura su $\mathcal{A}$ una funzione

$$\mu: \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty] \quad (\text{ } +\infty \text{ è compreso})$$

t.c.:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$

(2) μ è numerabilmente additiva (σ -additiva), cioè se

$(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ è una successione in $\mathcal{A}$ di elementi a 2 a 2

disgiunti allora

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Osservazione. Da (1) e (2) segue che μ è finitamente additiva. Infatti, siano $m \in \mathbb{N}$ e $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$

a 2 a 2 disgiunti; poniamo $A_{m+1} = A_{m+2} = \dots = \emptyset$

e allora

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^m A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \stackrel{(2)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \sum_{j=1}^m \mu(A_j) \quad (\text{per (1)})$$

Def. 6. Diremo spazio misurato una tripla

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, ove X è un insieme, $\mathcal{A}$ è una σ -algebra di $\mathcal{P}(X)$ e μ è una misura su $\mathcal{A}$.

Def. 7. Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio misurato. Diremo che μ è finita se $\mu(X) < \infty$ e che μ è σ -finita se esiste una successione $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ t.c.

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \quad \text{e} \quad \mu(A_j) < \infty \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

(ad es., in $\mathbb{P}$ prob., $\mu(X) = 1$)

Ad esempio, le misure standard di $\mathbb{R}^n$ sono non finite, ma σ -finite ($\mathbb{R}^n$ si può ricoprire con insiemi tutti di misura finita).

Esempi.

(1) Sia X un insieme non vuoto, $x_0 \in X$. La funzione

$$\delta_{x_0} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$$

definita da

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in A \\ 0 & \text{se } x_0 \notin A \end{cases}$$

è una misura finita su $\mathcal{P}(X)$ detta

misure di Dirac con massa concentrata in x_0 .

Infatti sia $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una successione in $\mathcal{P}(X)$ di elementi a 2 a 2 disgiunti.

Se $x_0 \notin A_j$, $\forall j \in \mathbb{N}$, allora $(x_0 \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)$

$$\delta_{x_0}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = 0 = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{x_0}(A_j)$$

Se $x_0 \in A_{j_0}$ per un qualche $j_0 \in \mathbb{N}$ allora $x_0 \notin A_j$ $\forall j \neq j_0$ (a 2 a 2 disgiunti).

$$\delta_{x_0}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = 1 = \delta_{x_0}(A_{j_0}) = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{x_0}(A_j)$$

l'unica
contiene x_0

(2) Sia X un insieme. La funzione $c: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ definita da:

$c(A) = +\infty$ se cardinalità di A è infinita

$c(A) = \#$ di elementi di A se A è finito

è una misura su $\mathcal{P}(X)$. (conta i punti)

Se X è finito $\Rightarrow c$ è finita.

Se X è numerabile $\Rightarrow c$ è σ -finita.

Se X non è numerabile $\Rightarrow c$ non è σ -finita.

(esercizio)

$\downarrow$ non può essere unione
di insiemi finiti

Teorema 1 Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ spazio misurato.

(1) (Monotonia) Se $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$ allora

$$\mu(A) \leq \mu(B)$$

(2) (Subaddittività numerabile) Se $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è una successione in $\mathcal{A}$ allora

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

(3) (Continuità dal basso) Se $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è una successione in $\mathcal{A}$ crescente rispetto alla inclusione

$(A_j \subset A_{j+1}, \forall j \in \mathbb{N})$ allora

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j)$$

(4) (Continuità dall'alto) Se $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è una successione in $\mathcal{A}$ decrescente e con almeno un elemento di misura finita allora

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j)$$

dim. (1)



Dalla additività segue che $\mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq \mu(A)$.

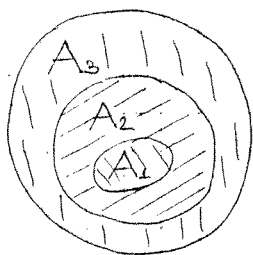
(3) Se $\mu(A_i) = +\infty$ per un certo $i \in \mathbb{N}$, allora dalla 1 segue che $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \geq \mu(A_i) = +\infty \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = +\infty$.

Inoltre, $\mu(A_j) \geq \underbrace{\mu(A_i)}_{+\infty} \quad \forall j \geq i$, quindi

$$\mu(A_j) = +\infty \quad \forall j \geq i.$$

Unindi, $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j) = +\infty$.

Supponiamo che $\mu(A_j) < \infty \quad \forall j \in \mathbb{N}$.

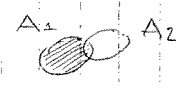


Poniamo $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus A_2$, etc.

Notiamo che $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$.

Inoltre, i B_j sono a 2 a 2 disgiunti ^{df. di serie}.

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \stackrel{\text{df. di serie}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mu(B_j) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\mu(A_1) + \sum_{j=2}^n (\mu(A_j) - \mu(A_{j-1})) \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$

(2) Per additività finita e dalla (1) segue che  $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2)$.

Per induzione, si vede che $\mu(A_2) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2)$.

$$\textcircled{*} \mu\left(\bigcup_{j=1}^m A_j\right) \leq \sum_{j=1}^m \mu(A_j), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

(11)

Le successioni $\mu\left(\bigcup_{j=1}^m A_j\right)$ e $\sum_{j=1}^m \mu(A_j)$ sono non decrescenti ($\Rightarrow$ ammettono limite).

Quindi,

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \stackrel{(3)}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^m A_j\right) \stackrel{\textcircled{*}}{\leq} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

$\left(\left(\bigcup_{j=1}^m A_j\right)_{m \in \mathbb{N}}\right)$ è una successione crescente di insiemi e

la loro unione dà $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$.

(4) esercizio (usare i complementari).

CVD

Osservazione In (4) non possiamo rimuovere la condizione di finitezza di uno degli A_j .

Esempio Sia c la misura che conta i punti in $\mathbb{R}$.

$$A_j = [j, +\infty[$$

$$c(A_j) = +\infty, \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

$$c\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = c(\emptyset) = 0 \quad \left(\Rightarrow \lim = +\infty \right)$$

Corollario. Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ spazio misurato.

(1) Se $\{\Pi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è una successione in $\mathcal{A}$ e

$$\mu(\Pi_j) = 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \text{allora}$$

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \Pi_j\right) = 0$$

(2) Se $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 0$ e $B \in \mathcal{A}$, $B \subset A$

$$\text{allora } \mu(B) = 0.$$

dim. esercizio. (basta usare la monotonia).

Def. 8. Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio misurato. Diremo che

μ è una misura completa se dato $B \in \mathcal{P}(X)$

t.c. $\exists \Pi \in \mathcal{A}$ con $\mu(\Pi) = 0$ e $B \subset \Pi$

allora $B \in \mathcal{A}$ (e quindi $\mu(B) = 0$). (pena 1 bene) $\otimes$

Teorema 2 (del completamento)

Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio misurato. Posto

$$\bar{\mathcal{A}} = \left\{ E \cup F : E \in \mathcal{A}, F \in \mathcal{P}(X) \text{ t.c. } \exists \Pi \in \mathcal{A} \text{ con } \mu(\Pi) = 0 \text{ e } F \subset \Pi \right\} \quad \otimes$$

si ha che $\bar{\mathcal{A}}$ è una σ -algebra di $\mathcal{P}(X)$,

$$\mathcal{A} \subset \bar{\mathcal{A}}.$$

Inoltre, esiste una unica misura completa $\bar{\mu}$ su $\bar{\mathcal{A}}$

che estende μ . Per tale $\bar{\mu}$ risulta che

$$\bar{\mu}(E \cup F) = \bar{\mu}(E), \quad \forall E \cup F \in \bar{\mathcal{A}} \text{ come in } \otimes.$$

$\bar{\mu}$ si dice completamento della μ .

dim. vedi Folland, p. 26.

Osservazione. Se si prende $E = \emptyset$ allora $\bar{\mu}(E \cup F) = \bar{\mu}(E) = \bar{\mu}(\emptyset) = 0$
 $\forall F \in \mathcal{P}(X)$ t.c. $\exists \Pi \in \mathcal{A}$ con $\mu(\Pi) = 0$ e $F \subset \Pi$.

Def. 9. Si dice che $\bar{A}$ è il complemento di A (12)
rispetto a μ e che $\bar{\mu}$ è il complemento di μ .

Def. 10. Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio misurato e sia
 $P(x)$ una proprietà associata a un elemento $x \in X$
che può essere vera o falsa (es: $f(x) = .3$).

Diciamo che P è vera quasi ovunque (brevemente q.o.
o a.e. = almost everywhere) se esiste $\Pi \in \mathcal{A}$ con

$$\mu(\Pi) = 0 \quad \text{t.c.}$$

$$\{x \in X : P(x) \text{ è falsa}\} \subset \Pi.$$

se l'insieme di
punti in cui essa è
falsa è contenuto
in un insieme di
misura nulla.

Osservazione Se μ è completa allora P è vera q.o.
se e solo se $\mu(\{x \in X : P(x) \text{ è falsa}\}) = 0$.

* In generale, non è vero che se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è spazio misurato
allora $\mathcal{A}$ contiene tutti i sottoinsiemi degli insiemi di misura
nulla (cioè che μ è completa).

Come controesempio si può considerare la σ -algebra

$$\{\emptyset, X\} \quad (X \neq \emptyset) \quad \text{con la misura nulla.}$$

CAPITOLO 2 MISURE ESTERNE

Def. 1. Sia X un insieme. Diamo misura esterna su $\mathcal{P}(X)$ una funzione

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty] \quad (\text{"misura tutto"})$$

t.c.

(1) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(2) (Monotonia) Se $A, B \in \mathcal{P}(X)$, $A \subset B$

allora $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

(3) (Subadditività numerabile). Se $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è una successione in $\mathcal{P}(X)$ allora

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$$

(non è una misura perché in (3) c'è $\leq$ e non $=$;
però è definita su $\mathcal{P}(X)$).

Lemma 1. Sia X un insieme e $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ t.c.

$\emptyset, X \in \mathcal{E}$ ($\mathcal{E}$ collezione di plurirettangoli), $f : \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$

t.c. $f(\emptyset) = 0$. Posto

$$(1) \quad f^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} f(A_j) : \begin{array}{l} \{A_j\}_{j \in \mathbb{N}} \text{ è una} \\ \text{successione in } \mathcal{E}, \\ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \end{array} \right\}$$

per ogni $A \in \mathcal{P}(X)$, si ha che f^* è una misura esterna su $\mathcal{P}(X)$.

Accenniamo brevemente alla dimostrazione:

dim. $X \in \mathcal{E} \Rightarrow$ l'insieme in (1) è non vuoto

$$\emptyset \in \mathcal{E} \Rightarrow p^*(\emptyset) = 0.$$

La monotonia è ovvia (se ho un insieme più piccolo, ogni insieme che ricopre quello più grande ricopre anche quello più piccolo) $\rightarrow$ dunque per l'insieme più grande, per il quale di esso ripenso in coprimanti, l'inf. diventa più piccolo.

Subadd: vedi Folland, p. 28

Esempio $\mathcal{E} = \{\emptyset, X\}$, $p(\emptyset) = 0$, $p(X) = 1$

Ovviamente, $p^*(\emptyset) = 0$.

Sia $A \in \mathcal{P}(X)$, $A \neq \emptyset$

$$\begin{aligned} p^*(A) &= \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} p(A_j) : A_j = \emptyset \text{ o } A_j = X, \bigcup A_j \supset A \right\} = \\ &= \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} p(A_j) : A_j = X \right\} = \\ &= \inf \{ j : j \in \mathbb{N} \} = 1 \end{aligned}$$

Nota che per questa p^* se $\#X > 1$

p^* non è una misura, perché $p^*(A \cup B) = 1$

ma $p^*(A) = p^*(B) = 1$,

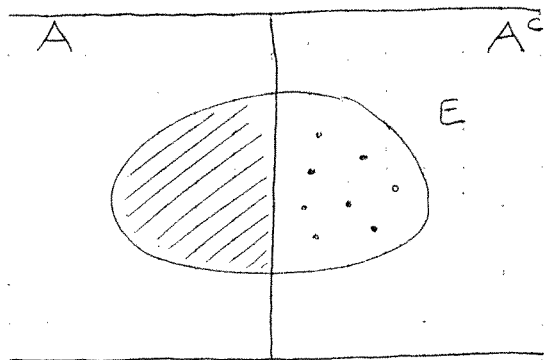
$$p^*(A \cup B) < p^*(A) + p^*(B) \text{ se } A, B \neq \emptyset.$$

Def. 2. Sia X un insieme e μ^* una misura esterna su $\mathcal{P}(X)$. Si dice che $A \in \mathcal{P}(X)$ è misurabile (alla Carathéodory) per μ^* se

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

$$\forall E \in \mathcal{P}(X).$$

Dato E qualsiasi, A è misurabile se "spacca bene E ":



~~Def. 2.~~ La subaddittività di μ^* garantisce sempre che $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$.

($E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c)$). μ^* è esterna, quindi è subadd. anche con le unioni disgiunte.

Quindi, per verificare la misurabilità di un insieme A basta verificare che

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

e solo nel caso in cui $\mu^*(E) < +\infty$ perché nel caso $\mu^*(E) = +\infty$ essa è ovvia.

Teorema 1 (Carathéodory)

Sia X un insieme e μ^* una misura esterna su X . Allora la collezione $\mathcal{M}$ degli insiemi misurabili alla Carathéodory per μ^* è una σ -algebra e $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ è una misura completa.

Esistenza di insiemi non misurabili

① Insieme di Vitali (fondatore del Sem. Mat. di Padova)

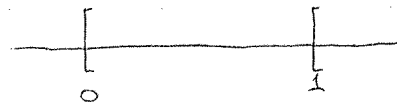
Consideriamo l'insieme $[0, 1[$

Per ogni $x, y \in [0, 1[$ poniamo

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

$\sim$ è una relazione di equivalenza, che ripartisce $[0, 1[$ in classi di equivalenza. Grazie all'Assioma della Scelta è possibile scegliere un elemento in ciascuna classe di equivalenza.

Sia Π l'insieme degli elementi scelti (insieme di Vitali).

Idea:  per ogni numero razionale q in $[0, 1[$

troviamo Π di quel numero $\rightarrow$, la parte che esce la si recupera dall'altra parte.

Sia $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1[$ e consideriamo il traslato di Π , cioè

$$\Pi_r = \left(r + \underbrace{\Pi \cap [0, 1-r[}_{\substack{\text{è la parte che} \\ \text{non esce, e viene} \\ \text{trasmessa}}} \right) \cup \left(r + \underbrace{\Pi \cap [1-r, 1[}_{\substack{\text{è la parte} \\ \text{che esce, e} \\ \text{viene spostata a sinistra}}} - 1 \right)$$

(Π_r è congr. a Π). $\forall$ adifferenziamo per una rototraslazione

Si ha che:

$$(1) \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1[} \Pi_r = [0, 1[;$$

$$(2) \text{ Se } r \neq s \implies \Pi_r \cap \Pi_s = \emptyset$$

(15)

dim. (1) Se $x \in [0, 1[$ allora esiste $\gamma \in \Pi$ t.c. $x \sim \gamma$

(perché le classi di equ. ripartiscono $[0, 1[$). 2 casi:

• caso $\gamma \leq x$: $\gamma + \underbrace{(x - \gamma)}_{\in \mathbb{Q}} = x$, quindi

$x \in \Pi_\tau$, ove $\tau = x - \gamma \in \mathbb{Q}$

• caso $x < \gamma$: $\gamma + \underbrace{[(x - \gamma + 1) - 1]}_{\in \mathbb{Q}} = x$, quindi

$x \in \Pi_\tau$, con $\tau = x - \gamma + 1 \in \mathbb{Q}$

Quindi (1) è vera

(2) Supponiamo che $\Pi_\tau \cap \Pi_\delta \neq \emptyset$, sia $x \in \Pi_\tau \cap \Pi_\delta$,

allora $x - \tau$ (oppure $x - \tau + 1$) e $x - \delta$ (oppure $x - \delta + 1$)

appartengono ad Π . Quindi abbiamo 2 elementi di

Π equivalenti e distinti, assurdo (differiscono per razionali)

Se μ è una misura su $\mathbb{R}$ invariante per traslazioni

ed Π fosse misurabile, si avrebbe:

$$\mu([0, 1[) = \mu\left(\underbrace{\bigcup_{\tau \in \mathbb{Q} \cap [0, 1[} \Pi_\tau}_{\text{unione disgiunta e numerabile}}\right) = \sum_{\tau \in \mathbb{Q} \cap [0, 1[} \mu(\Pi_\tau) = \begin{matrix} (\Pi_\tau \text{ congruente ad } \\ \text{e } \mu \text{ è invariante} \\ \text{per traslazioni}) \end{matrix} \mu(\Pi)$$

$$= \sum_{\tau \in \mathbb{Q} \cap [0, 1[} \mu(\Pi)$$

○ o $\mu(\Pi) = 0$ (visto che è misurabile) e quindi $\mu([0, 1[) = 0$

o $\mu(\Pi) > 0$ e quindi $\mu([0, 1[) = +\infty$,

cosa incompatibile con $\mu([0, 1[) = 1$.

② Paradosso di Banach-Tarski (1924)

Siano U, V insiemi aperti di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Esiste $K \in \mathbb{N}$ ed esistono $E_1, \dots, E_K, F_1, \dots, F_K$ sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ t.c.

(1) $E_j, j=1, \dots, K$ sono a 2 a 2 disgiunti, $\bigcup_{j=1}^K E_j = U$

(2) $F_j, j=1, \dots, K$ sono a 2 a 2 disgiunti, $\bigcup_{j=1}^K F_j = V$

(3) E_j è congruente a $F_j \quad \forall j=1, \dots, K$
(congruente = differisce per una rototraslazione).

È chiaro che E_j e F_j non potranno essere dei misurabili, perché altrimenti si avrebbe

$$\mu(U) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^K E_j\right) = \sum_{j=1}^K \mu(E_j) \stackrel{\text{cong.}}{=} \sum_{j=1}^K \mu(F_j) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^K F_j\right) = \mu(V)$$

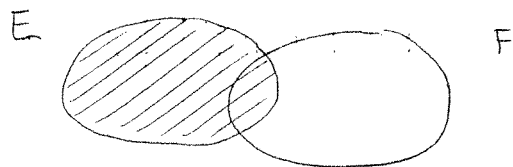
③ Esercizio (- pag. 27, Folland)

Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio misurato, $E, F \in \mathcal{A}$.

Provare che

$$\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F)$$

Soluz.



$$E \cup F = E \cup (F \setminus E)$$

$$\Rightarrow \mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E)$$

$$\Rightarrow \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F) = \mu(E) + \boxed{\mu(F \setminus E) + \mu(F \cap E)} =$$

$$= \mu(E) + \mu(F)$$

Esercizio. (Continuità dall'alto)

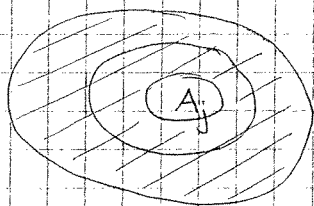
(16)

Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ spazio misurato, $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ success. in $\mathcal{A}$ t.c. $A_{j+1} \subset A_j, \forall j \in \mathbb{N}$.

Supp che $\exists m \in \mathbb{N}$ t.c. $\mu(A_m) < +\infty$. Allora

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j).$$

Soluz.



(l'interv. è dentro A_m ,
quindi posso partire da A_m)

Sia $F_j = A_m \setminus A_j, \forall j > m$; $(F_j)_{j \in \mathbb{N}}$ è crescente (ovvio).

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{j=m+1}^{\infty} F_j\right) & \stackrel{\text{continuità dal basso}}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(F_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} [\mu(A_m) - \mu(A_j)] = \\ & = \underbrace{\mu(A_m)}_{\infty} - \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j) \end{aligned}$$

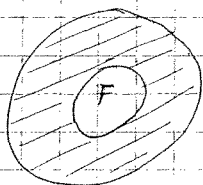
D'altro canto,

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{j=m+1}^{\infty} F_j\right) & = \mu\left(\bigcup_{j=m+1}^{\infty} A_m \setminus A_j\right) \stackrel{\text{De Morgan}}{=} \mu\left(A_m \setminus \bigcap_{j=m+1}^{\infty} A_j\right) = \\ & = \underbrace{\mu(A_m)}_{\infty} - \mu\left(\bigcap_{j=m+1}^{\infty} A_j\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j) = \mu\left(\bigcap_{j=m+1}^{\infty} A_j\right) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right)$$

Osservazione. Se $E, F \in \mathcal{A}$ ed $F \subset E$ allora

$$\mu(E \setminus F) = \mu(E) - \mu(F).$$



$$\begin{aligned} \mu(E) & = \mu((E \setminus F) \cup F) = \\ & = \mu(E \setminus F) + \mu(F) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mu(E \setminus F) = \mu(E) - \mu(F).$$

Esercizio 7 (p. 26, Folland)

Siano $\mu_1, \dots, \mu_m$ misure su $(X, \mathcal{A})$ e

$a_1, \dots, a_m$ numeri in $]0, +\infty[$. Allora

$$\mu = \sum_{h=1}^m a_h \mu_h$$

è una misura su $(X, \mathcal{A})$.

Soluz. (1) $\mu(\emptyset) = \sum_{h=1}^m a_h \underbrace{\mu_h(\emptyset)}_{\substack{0 \\ \forall h=1, \dots, m}} = 0$

(2) Sia $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ success. di elementi in $\mathcal{A}$ a.2 a.2
disgiunti. Allora

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{h=1}^m a_h \mu_h\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{h=1}^m a_h \left[\sum_{j=1}^{\infty} \mu_h(A_j) \right] =$$

$$= a_1 \sum_{j=1}^{\infty} \mu_1(A_j) + \dots + a_m \sum_{j=1}^{\infty} \mu_m(A_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} a_1 \mu_1(A_j) + \dots + \sum_{j=1}^{\infty} a_m \mu_m(A_j) =$$

somme a
termini
positive

$$= \sum_{j=1}^{\infty} [a_1 \mu_1(A_j) + \dots + a_m \mu_m(A_j)] = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{h=1}^m a_h \mu_h(A_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

Attenzione!

Per il T. di Tonelli (caso discreto) si possono
scambiare $\sum_j$ (infinito!) (anche 2 somme infinite).

Teorema (Fubini-Tonelli caso discreto)

(17)

Sia $\{x_{ij}\}_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ un insieme di numeri complessi.

Supponiamo che almeno una delle 2 somme

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |x_{ij}|, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |x_{ij}|$$

sia finito. Allora

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} x_{ij}$$

(per i numeri positivi, si può scambiare comunque,)
anche se la somma non è finita

* Esercizio 8 (p. 27, Folland)

Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ spazio misurato, $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ success. in $\mathcal{A}$.

Poniamo

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcap_{K \geq 1} \bigcup_{n \geq K} E_n \quad \left(\begin{array}{l} \text{è un'unione all'infinito;} \\ \text{le unioni sono sempre} \\ \text{più piccole di quelle di } K \end{array} \right)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcup_{K \geq 1} \bigcap_{n \geq K} E_n \quad \left(\begin{array}{l} \text{è un'intersezz. crescente di} \\ \text{cui si fa } \bigcup \end{array} \right)$$

Alloca

$$\mu \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n \right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$$

e se $\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) < \infty$ allora

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) \leq \mu \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n \right)$$

Soluz.

$$\mu \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n \right) = \mu \left(\bigcup_{K \geq 1} \underbrace{\left(\bigcap_{n \geq K} E_n \right)}_{\text{crescente}} \right) \stackrel{\text{continuità del borel}}{=}$$

$$= \lim_{K \rightarrow \infty} \mu \left(\bigcap_{n \geq K} E_n \right)$$

Ora, $\mu \left(\bigcap_{n \geq K} E_n \right) \leq \mu(E_n) \quad \forall n \geq K \quad \left(\bigcap_{n \geq K} E_n \subset E_n, \forall n \geq K \right)$

quindi

$$\mu \left(\bigcap_{n \geq K} E_n \right) \leq \inf_{n \geq K} \mu(E_n)$$

o faccio lim per $K \rightarrow \infty$ trovo lim inf.

Quindi

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \mu \left(\bigcap_{n \geq K} E_n \right) \leq \lim_{K \rightarrow \infty} \inf_{n \geq K} \mu(E_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$$

Lemma

$$\text{Se } a \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n \quad (a \text{ è un minorante})$$

Vediamo l'altra:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \lim_{K \rightarrow \infty} \sup_{n \geq K} \mu(E_n) \leq \lim_{K \rightarrow \infty} \mu \left(\bigcup_{n \geq K} E_n \right) \stackrel{\text{continuità borel}}{=}$$

$$\left[E_n \subset \bigcup_{n \geq K} E_n \quad \forall n \geq K \Rightarrow \mu(E_n) \leq \mu \left(\bigcup_{n \geq K} E_n \right) \right]$$

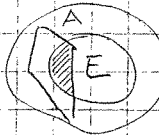
$$= \mu \left(\bigcap_{K=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq K} E_n \right) = \mu \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n \right)$$

Esercizio 10 (p. 27, Folland)

18

Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio misurato, sia $E \in \mathcal{A}$

fissate



Poniamo

$$\mu_E(A) = \mu(A \cap E), \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

Provare che μ_E è una misura su $(X, \mathcal{A})$

(ha a che fare con la restrizione di μ)

Soluz (1) $\mu_E(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap E) = \mu(\emptyset) = 0$

(2) Sia $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una successione in $\mathcal{A}$ di elementi a 2 a 2 disgiunti

$$\begin{aligned} \mu_E\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= \mu\left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \cap E\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{(A_j \cap E)}_{\text{disgiunti a 2 a 2}}\right) = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \cap E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_E(A_j) \end{aligned}$$

**  (p. 23)

Sia $\mathcal{A}$ una σ -algebra infinita. Allora

(a) $\mathcal{A}$ contiene una success. di elementi a 2 a 2 disgiunti (m. $\neq \emptyset$)

(b) $\mathcal{A}$ non è numerabile.

Soluz.

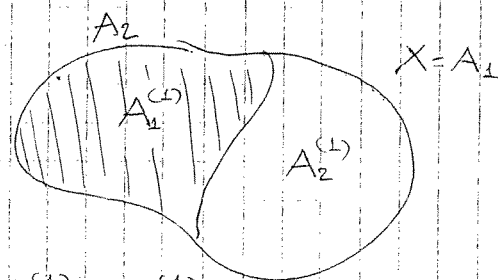
Prova 1. Poniamo $A_1 = X$

Poiché A_1 contiene infiniti elementi

di $\mathcal{A}$, esistono $A_1^{(1)}, A_2^{(1)} \in \mathcal{A}$

non vuoti, disgiunti t.c. $X = A_1 = A_1^{(1)} \cup A_2^{(1)}$

Almeno una fra $A_1^{(1)}$ e $A_2^{(1)}$ contiene infiniti elementi di $\mathcal{A}$, diciamo A_2 .



Passo 2. A_2 contiene infiniti elementi di A , quindi

$$A_2 = A_1^{(2)} \cup A_2^{(2)}$$

con $A_1^{(2)}, A_2^{(2)} \in A$ non vuoti e disgiunti, e almeno uno dei 2 contiene infiniti elementi di A , diciamolo A_3 .

Con questa procedura si trova una successione

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4 \dots$$

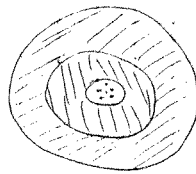
con $A_n \neq \emptyset \quad \forall n$.

La successione richiesta è data (dalle corone) da

$$E_1 = A_1 \setminus A_2$$

$$E_2 = A_2 \setminus A_3$$

etc.



Ricorda: $|\mathcal{P}(A)| > |A|$ per ogni insieme A .

Def. 2. X un insieme, μ^* una misura esterna su $\mathcal{P}(X)$. $A \in \mathcal{P}(X)$ è misurabile (alla Carathéodory) per μ^* se

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c),$$

$\forall E \in \mathcal{P}(X)$

Subadditività $\Rightarrow$...

Teorema 1 (di Carathéodory)

Siano X un insieme e μ^* una misura esterna su $\mathcal{P}(X)$. Allora la collezione $\mathcal{M}$ dei misurabili alla Carathéodory per μ^* è una σ -algebra di $\mathcal{P}(X)$ e $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ è una misura completa.

dim. La dim. che $\mathcal{M}$ è una σ -algebra e che $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ è una misura σ -additiva (vedi Folland, p. 29).

Proviamo ora che $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ è completa.

Se $B \in \mathcal{P}(X)$ tale che esiste $\Pi \in \mathcal{M}$ con $\mu^*(\Pi) = 0$ e $B \subset \Pi$. Proviamo che $B \in \mathcal{M}$.

Se $E \in \mathcal{P}(X)$, la monotonia di μ^* implica che $0 = \mu^*(\Pi) \geq \mu^*(B) \geq \mu^*(E \cap B) \geq 0$ (μ^* è esterna, quindi è definita su ogni $B \in \mathcal{P}(X)$).

Dunque, $\mu^*(E \cap B) = 0$.

Per la monotonia di μ^* si ha

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap B^c) = \underbrace{\mu^*(E \cap B)}_0 + \mu^*(E \cap B^c)$$

$$\Rightarrow \mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c)$$

Anche

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) \quad (\text{subadditività})$$

Dunque,

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c), \quad \forall E \in \mathcal{P}(X).$$

Dalla def. 2, $B \in \mathcal{K}$.

CVD

Def. 3. Siano X un insieme ed $\mathcal{A}$ una algebra di $\mathcal{P}(X)$. Diciamo premisura su $\mathcal{A}$ una funzione $\tilde{\mu}$ di $\mathcal{A}$ in $[0, +\infty]$ t.c.

$$(1) \tilde{\mu}(\emptyset) = 0$$

(2) $\tilde{\mu}$ è pre σ -additiva, cioè se $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è una successione in $\mathcal{A}$ di elementi a 2 a 2 disgiunti

t.c.
$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A} \quad (*) \text{ (importante!)}$$

allora
$$\tilde{\mu}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_j)$$

Notiamo che grazie a (2) $\tilde{\mu}$ è finitamente additiva, perché $\bigcup_{j=1}^m A_j \in \mathcal{A}$ (perché $\mathcal{A}$ è un'algebra), $m \in \mathbb{N}$.

Notiamo anche che poiché $\mathcal{A}$ è un'algebra, non è una σ -algebra, in generale non segue che $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

Rispetto alla def. di misura, la condizione (*) è nuova.

Def 4. Sia X un insieme. Diremo famiglia elementare di $\mathcal{P}(X)$ un sottoinsieme $\mathcal{E}$ di $\mathcal{P}(X)$ t.c.

(20)

- (i) $\emptyset \in \mathcal{E}$;
- (ii) Se $A, B \in \mathcal{E}$ allora $A \cap B \in \mathcal{E}$;
- (iii) Se $A \in \mathcal{E}$ allora A^c è l'unione finita di elementi di $\mathcal{E}$.

Esempio $X = \mathbb{R}$

$$\mathcal{E} = \{ \emptyset \} \cup \{]a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b \} \cup \{]-\infty, b] : b \in \mathbb{R} \} \cup \{]a, +\infty[: a \in \mathbb{R} \}.$$

$\mathcal{E}$ è una famiglia elementare di $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

- (i) ovvio;
- (ii) Per esempio, se
$$-\infty \leq a < b < +\infty$$
$$-\infty \leq c < d < +\infty$$
e $a < c$

$$\begin{array}{ccccccc} &] & &] & &] & &] \\ & a & & c & & b & & d \end{array}$$

$$\text{allora }]a, b] \cap]c, d] = \begin{cases} \emptyset & \text{se } b \leq c \\]c, b] & \text{se } b > c \end{cases}$$

- (iii) Il complementare di un elemento di $\mathcal{E}$ è in $\mathcal{E}$ o è l'unione di 2 elementi di $\mathcal{E}$.

Per esempio, se $-\infty < b < +\infty$

$$]-\infty, b]^c =]b, +\infty[\in \mathcal{E}$$

Se $-\infty < a < b < +\infty$ allora

$$]a, b]^c = \underbrace{]-\infty, a]}_{\in \mathcal{E}} \cup \underbrace{]b, +\infty[}_{\in \mathcal{E}}$$

Lemma 2. Siano X un insieme ed $\mathcal{E}$ una famiglia elementare di $\mathcal{P}(X)$. Allora l'insieme delle unioni finite disgiunte degli elementi di $\mathcal{E}$ è una algebra di $\mathcal{P}(X)$.

Senza dim. (vedi Folland, C. 1, p. 23).

Def. 5. Si dice che questa algebra di $\mathcal{P}(X)$ è l'algebra di $\mathcal{P}(X)$ generata da $\mathcal{E}$.

Teorema 2.

Siano X un insieme, $\mathcal{E}$ una famiglia elementare di $\mathcal{P}(X)$ e μ una funzione di $\mathcal{E}$ in $[0, +\infty]$ t.c.

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) (additività finita) Se $\{A_j\}_{j=1}^n$ è un sottoinsieme finito di $\mathcal{E}$ di elementi a 2 a 2 disgiunti t.c.

$\bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{E}$ allora $\mu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j)$;

(iii) Se $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ è una successione in $\mathcal{E}$ di elementi a 2 a 2 disgiunti t.c. $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{E}$

allora $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$.

Allora esiste una ed una sola misura

$\tilde{\mu}$ sull'algebra $\mathcal{A}$ generata da $\mathcal{E}$ in $\mathcal{P}(X)$ che estende μ e si ha

$$\tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m \mu(A_i) \quad (\text{è additiva})$$

per ogni sottoinsieme finito $\{A_i\}_{i=1}^m$ di $\mathcal{E}$ di elementi a 2 a 2 disgiunti.

Senza dim.

Teorema 3. Siano X un insieme, $\mathcal{A}$ un'algebra di $\mathcal{P}(X)$, $\tilde{\mu}$ una misura su $\mathcal{A}$, (21)
 $\tilde{\mu}^*$ la misura esterna su $\mathcal{P}(X)$ generata da $\tilde{\mu}$, $\mathcal{M}$ la σ -algebra dei $\tilde{\mu}^*$ -misurabili alla Caratheodory e $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ la σ -algebra generata da $\mathcal{A}$.
 Allora

(i) $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$

(ii) $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}^*|_{\mathcal{M}(\mathcal{A})}$ è una misura su $\mathcal{M}(\mathcal{A})$

t.c. $\tilde{\mu}|_{\mathcal{A}} \stackrel{(\text{ovvero})}{=} \tilde{\mu}^*|_{\mathcal{A}} \stackrel{(\text{non ovvero})}{=} \tilde{\mu}$

(iii) Se anche $\tilde{\mu}$ è σ -finita allora $\tilde{\mu}$ è prolungamento unico di $\tilde{\mu}$ a misura su $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

dim. Per (i) e (iii) si veda Folland, C. 1, p. 30.

(iv) Dal Teor. 1 (Caratheodory), $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}^*|_{\mathcal{M}}$

è una misura completa. Proviamo che

$\tilde{\mu}^*|_{\mathcal{A}} = \tilde{\mu}$ (cioè che $\tilde{\mu}^*(A) = \tilde{\mu}(A)$, $\forall A \in \mathcal{A}$).

(a) Se $A \in \mathcal{A}$ possiamo prendere $A_1 = A$, $A_j = \emptyset$

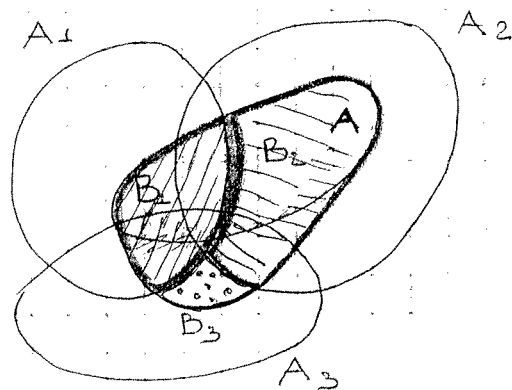
per $j > 1$. Allora

$$\tilde{\mu}^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_j) : \begin{array}{l} \{A_j\}_{j=1}^{\infty} \text{ è una success. in } \mathcal{A} \\ \text{t.c. } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \end{array} \right\} \stackrel{\downarrow \text{ovv.}}{\leq} \\ \leq \tilde{\mu}(A) + \tilde{\mu}(\emptyset) + \tilde{\mu}(\emptyset) + \dots = \tilde{\mu}(A).$$

caso
generale (b) Se $A \in \mathcal{A}$, $A_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N}$ e $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$,

poniamo

$B_1 = A \cap A_1, \quad B_j = A \cap \left(A_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i \right)$



Chiare che $B_1 \cup B_2 = A \cap (A_1 \cup (A_2 \setminus A_1))$
 $= A \cap (A_1 \cup A_2)$,

$$\begin{aligned} B_1 \cup B_2 \cup B_3 &= A \cap ((A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)) \cup (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2))) = \\ &= A \cap ((A_1 \cup A_2) \cup (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2))) = \\ &= A \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3), \end{aligned}$$

$$B_1 \cup \dots \cup B_m = A \cap (A_1 \cup \dots \cup A_m),$$

$\forall m \in \mathbb{N}$.

Dunque,

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = A \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = A \quad (\text{perch\u00e9 } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)$$

E' anche chiaro che $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ \u00e8 una famiglia
 in $\mathcal{A}$ di elementi a 2 a 2 disgiunti. ($B_j \subset A_j$)

Allora

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_j) &= \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\mu}(B_j \cup (A_j \setminus B_j)) = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (\underbrace{\tilde{\mu}(B_j) + \tilde{\mu}(A_j \setminus B_j)}_{=0}) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\mu}(B_j) \end{aligned}$$

$\tilde{\mu}$ premissura \u00e8 finitamente additiva

Poich\u00e9 $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = A \in \mathcal{A}$ e $\tilde{\mu}$ \u00e8 pre σ -additiva si ha

$$\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\mu}(B_j) = \tilde{\mu}(A)$$

Dunque,

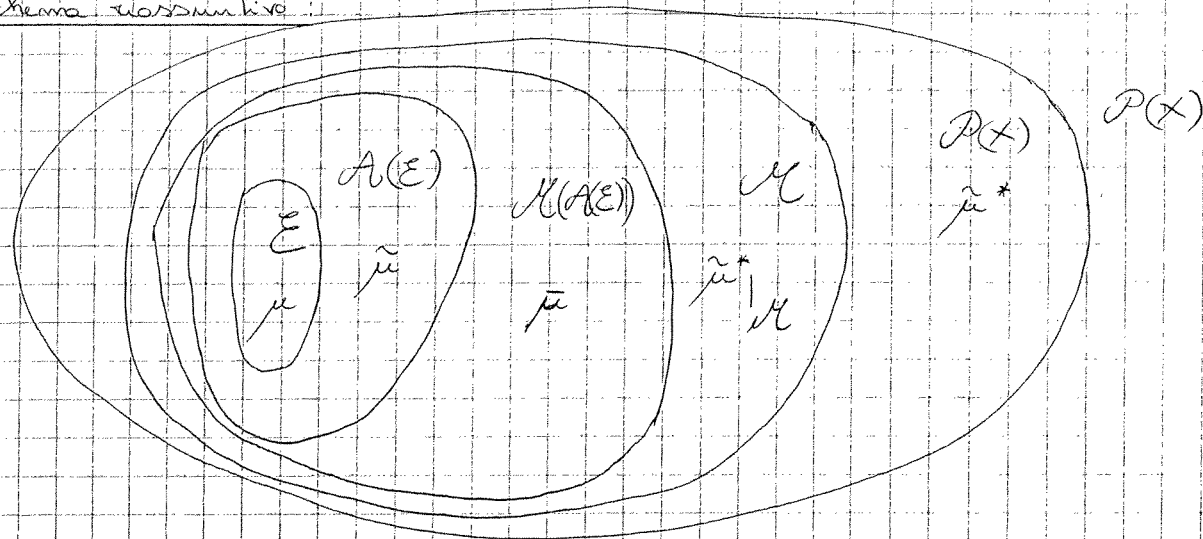
$$\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_j) \geq \tilde{\mu}(A), \quad \forall A_j \in \mathcal{A} \text{ t.c. } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

Quindi,

$$\tilde{\mu}^*(A) \geq \tilde{\mu}(A) \quad (\text{basta passare all'inf})$$

$$\text{Così } \tilde{\mu}^*(A) = \tilde{\mu}(A), \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad \circ \quad \tilde{\mu}^*|_{\mathcal{A}} = \tilde{\mu} \quad \text{CVD}$$

Schema riassuntivo:



- $\mathcal{E}$ una famiglia elementare (def. 4, cap. 2.)
- $\mu: \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$ una funzione con proprietà semplici, in particolare μ è finitamente additiva (Teorema 2, C. 2.)
- $A(\mathcal{E})$ l'algebra generata da $\mathcal{E}$ (def. 5, c. 2.)
- $\tilde{\mu}: \mathcal{A}(\mathcal{E}) \rightarrow [0, +\infty]$ premisura (def. 3, c. 2.) che estende μ
- $\tilde{\mu}^*: P(X) \rightarrow [0, +\infty]$ la misura esterna (def. 1, c. 2.) generata da $\tilde{\mu}$ (formula (4), c. 2.)
- $\mathcal{M}$ la collezione dei misurabili alla Carathéodory (def. 2, c. 2.)
- $\tilde{\mu}^*|_{\mathcal{M}}: \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$ la misura (def. 5, c. 1.) completa (def. 3, c. 1.) (Teorema 1, c. 2.)

- $\mathcal{H}(\mathcal{A}(\mathcal{E}))$ è σ -algebra ($\mathcal{H}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}$)
- $\bar{\mu} = \tilde{\mu}^*|_{\mathcal{H}(\mathcal{A})}$ misura su $\mathcal{H}(\mathcal{A})$.

CAPITOLO 3 : MISURE BORELIANE SU $\mathbb{R}$

Ora costruiamo delle misure su $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, la σ -algebra dei borelliani di $\mathbb{R}$ generata dalla topologia standard $\tau_{\mathbb{R}}$ (la minima σ -algebra che contiene $\tau_{\mathbb{R}}$).

Prima definiremo opportune funzioni sulla famiglia elementare

$$\mathcal{E} = \{\emptyset\} \cup \{]a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b \} \cup$$

$$\cup \{]-\infty, b] : b \in \mathbb{R} \} \cup \{]a, +\infty[: a \in \mathbb{R} \},$$

brevemente

$$\mathcal{E} = \{]a, b] : -\infty \leq a \leq b \leq +\infty \}.$$

(Se $b = +\infty$, $]a, +\infty]$ sia rimpiazzata da $]a, +\infty[$, anche $]a, a] = \emptyset$).

Ci interessa soprattutto quella misura μ tale che

$$\mu(]a, b]) = b - a, \quad -\infty < a < b < +\infty.$$

Più in generale, considereremo una funzione crescente

e continua a destra $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e definiremo

una misura μ t.c.

$$\mu(]a, b]) = F(b) - F(a), \quad -\infty < a < b < +\infty.$$

Ricordiamo alcune proprietà delle funzioni crescenti e delle funzioni continue a destra.

Se $a \in \mathbb{R}$ allora esistono finiti i limiti

$$F(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = \inf_{x > a} F(x),$$

$$F(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} F(x) = \sup_{x < a} F(x).$$

Inoltre esistono (finiti o infiniti) i limiti

$$F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}} F(x),$$

$$F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \inf_{x \in \mathbb{R}} F(x).$$

La condizione di continuità a destra in un punto

a significa che

$$F(a^+) = F(a).$$

Teorema 1

Siano $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione crescente e continua a destra, $\mathcal{A}$ l'algebra generata da $\mathcal{E}$ e

$\mu_F: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ la funzione definita nel modo seguente. Siano $\mu_F(\emptyset) = 0$, per ogni

$J \in \mathcal{E}$, $J \neq \emptyset$ (J è intervallo finito o ∞)

$$(1) \mu_F(J) = F(\sup J) - F(\inf J)$$

in particolare se $J =]a, b]$ ove $-\infty < a < b < +\infty$,

$$(2) \mu_F(]a, b]) = F(b) - F(a),$$

e per ogni famiglia $\{J_i\}_{i=1}^m$ di elementi a 2 a 2 disgiunti di $\mathcal{E}$

$$(3) \mu_F\left(\bigcup_{i=1}^m J_i\right) = \sum_{i=1}^m \mu_F(J_i)$$

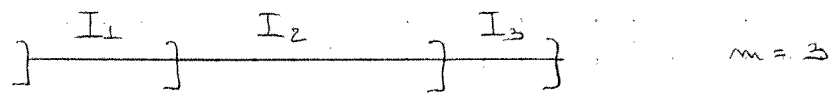
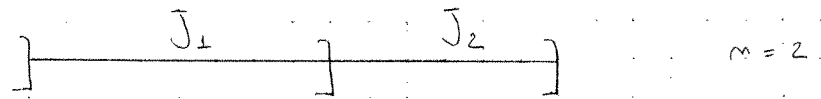
Allora μ_F è una premisura sull'algebra $\mathcal{A}$.

dim. 1. E' possibile che per 2 famiglie

$\{J_i\}_{i=1}^m$ e $\{I_j\}_{j=1}^m$ di elementi a 2 a 2 disgiunti di $\mathcal{E}$

$$\bigcup_{i=1}^m J_i = \bigcup_{j=1}^m I_j \quad (\textcircled{*} J_i \subset \bigcup_{j=1}^m I_j)$$

Per esempio:



In tal caso,

$$\sum_{i=1}^m \mu_F(J_i) = \sum_{i=1}^m \mu_F(J_i \cap (\bigcup_{j=1}^m I_j)) = \quad (\text{da } \textcircled{*})$$

$$= \sum_{i=1}^m \mu_F\left(\bigcup_{j=1}^m (J_i \cap I_j)\right) \stackrel{(\textcircled{*})}{=} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \mu_F(J_i \cap I_j) =$$

$J_i \cap I_j \in \mathcal{E}$
e sono a 2 a 2 disgiunti

$$= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \mu_F(I_j \cap J_i) = \dots = \sum_{j=1}^m \mu_F(I_j)$$

Quindi la $(\textcircled{*})$ è ben posta.

2. Siano $J_i \in \mathcal{E}$, $i \in \mathbb{N}$ elementi a 2 a 2 disgiunti e t.c. $\bigcup_{i=1}^{\infty} J_i \in \mathcal{A}$, cioè

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} J_i = \bigcup_{j=1}^m I_j,$$

ove $I_j \in \mathcal{E}$ e I_j a 2 a 2 disgiunti.

Poiché $I_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$ si ha

$$I_j = I_j \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} J_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (I_j \cap J_i)$$

Siccome $I_j \cap J_i \in \mathcal{E}_1$. Dalla (3)
e questi 2 a 2 disgiunti

(24)

$$\mu_F\left(\bigcup_{j=1}^m I_j\right) = \sum_{j=1}^m \mu_F(I_j) =$$

Dunque, è sufficiente provare che

$$(4) \quad \mu_F(I_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(I_j \cap J_i).$$

Infatti se (4) è soddisfatta si ha

$$\mu_F\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} J_i\right) = \mu_F\left(\bigcup_{j=1}^m I_j\right) = \sum_{j=1}^m \mu_F(I_j) =$$

$$(4) \quad = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\mu_F(I_j \cap J_i)}_{\geq 0} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^m \mu_F(I_j \cap J_i) \stackrel{(3)}{=} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F\left(\bigcup_{j=1}^m (I_j \cap J_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F\left(J_i \cap \bigcup_{j=1}^m I_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(J_i) \quad \left(J_i \subset \bigcup_{j=1}^m I_j\right).$$

3. (Dim. di (4)).

3a. Supponiamo che

$$I_j =]a, b], \quad -\infty < a < b < +\infty$$

e dimostriamo (I_j è fisso)

$$I_j \cap J_i = G_i, \quad i \in \mathbb{N} \quad (\text{a 2 a 2 disgiunti})$$

Allora da (3)

$$\mu_F(]a, b]) = \mu_F\left(\bigcup_{i=1}^m G_i\right) + \mu_F\left(]a, b] \setminus \bigcup_{i=1}^m G_i\right)$$

$$\left(]a, b] = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i, \text{ dunque } \bigcup_{i=1}^m G_i \subset]a, b]\right)$$

$$\geq \mu_F\left(\bigcup_{i=1}^m G_i\right) = \sum_{i=1}^m \mu_F(G_i), \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Dunque, passando al limite per $m \rightarrow \infty$

$$5) \mu_F([a, b]) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu_F(G_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(G_i) \dots$$

3b. Proviamo ora la disuguaglianza inversa.

$$]a, b] = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$$

Sia $i(b) \in \mathbb{N}$ t.c. $b \in G_{i(b)}$; poiché $G_{i(b)} \subset]a, b]$
allora

$$G_{i(b)} =]a_{i(b)}, b]$$

Poniamo

$$a_1 = a_{i(b)}, \quad b_1 = b.$$

$\mathcal{E}$ ed $\bar{\mathcal{E}}$ in $]a, b]$
 $\cup \{a\} =]a, b] \cup \{a\} =]a, b]$
 $\cup]a, a] =]a, b]$

Sia $i(a_1) \in \mathbb{N}$ t.c. $a_1 \in G_{i(a_1)}$. Poiché $G_{i(a_1)} \subset]a, b]$,
 $\cup]a_1, b] =]a, b]$

$$=]a, a_1] \cup]a_1, b], \quad \text{allora}$$

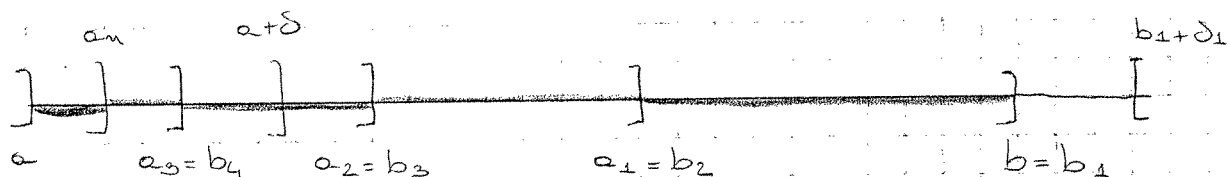
$$G_{i(a_1)} =]a_{i(a_1)}, a_1] \quad \left(\begin{array}{l} \text{dove sta in } \mathcal{E}, \text{ quindi} \\ \text{a sinistra } \bar{\mathcal{E}} \text{ aperto} \end{array} \right)$$

Poniamo

$$a_2 = a_{i(a_1)}, \quad b_2 = a_1.$$

Eccetera. Quindi

$$]a, b] = \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i] \quad , \quad \text{ove } a_i = b_{i+1}, \quad i \in \mathbb{N}.$$



$\exists c$ S.t. $\forall \varepsilon > 0$ Per continuit  a destra di F
in a ed in b_j esistono $\delta \in]0, b-a[$
t.c.

$$F(a+\delta) - F(a) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

e $\delta_j \in]0, b_{j+1} - a_{j+1}[$ t.c.

$$F(b_j + \delta_j) - F(b_j) \leq \frac{\varepsilon}{2j} \quad \textcircled{*}$$

Insomma

$$\underbrace{[a+\delta, b]}_{\text{(chiuso) compatto}} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{]a_j, b_j+\delta_j[}_{\text{aperto}}$$

(per compattezza:
ogni ricopr. ∞ di
un compatto ammette
un ricoprimento finito)

Dunque esiste $m \in \mathbb{N}$ t.c.

$$[a+\delta, b] \subset \bigcup_{j=1}^m]a_j, b_j+\delta_j[$$

Perch 

$$F(b) \leq F(b_1 + \delta_1)$$

($b = b_1$ e F crescente)

e

$$F(a) \geq F(a+\delta) - \frac{\varepsilon}{2} \geq F(a_m) - \frac{\varepsilon}{2}$$

O si ha

per def.

$$\mu_F([a, b]) = F(b) - F(a) \leq F(b_1 + \delta_1) - F(a_m) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= F(b_1 + \delta_1) - F(a_1) + F(a_1) - F(a_m) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= F(b_1 + \delta_1) - F(a_1) + \sum_{j=1}^{m-1} (F(a_j) - F(a_{j+1})) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$j+1 = k, 2 \leq k \leq m$

$$F(b_{j+1}) \leq F(b_{j+1} + \delta_{j+1})$$

monotonia

$$\leq \sum_{k=1}^m (F(b_k + \delta_k) - F(a_k)) + \frac{\varepsilon}{2} =$$

$$= \sum_{k=1}^m (F(b_k + \delta_k) - F(b_k)) + \sum_{k=1}^m (F(b_k) - F(a_k)) + \frac{\varepsilon}{2} \leq$$

$$\begin{aligned}
 & \leq \underbrace{\sum_{k=1}^m \frac{\varepsilon}{2^k}}_{\varepsilon''} + \sum_{k=1}^m \mu_F([a_k, b_k]) + \frac{\varepsilon}{2} \\
 & \leq \sum_{k=1}^m \mu_F([a_k, b_k]) + \frac{3\varepsilon}{2}, \quad \forall \varepsilon > 0
 \end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^m \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^m}$
 $= 1 - \frac{1 - \frac{1}{2^m}}{2} = 1 - \frac{2^{m+1} - 1}{2^{m+1}} = \frac{2^{m+1} - 2^m + 1}{2^{m+1}} = \frac{2^m - 1}{2^{m+1}} \leq 1$

Dunque,

$$(6) \quad \mu_F([a, b]) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_F([a_k, b_k]) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(G_i)$$

per questo è stato mostrato in 2.1b

Le disuguaglianze (5) e (6) implicano che

$$\mu([a, b]) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(G_i)$$

$$\mu(I_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(I_j \cap J_i) \quad (\text{che è la (4)})$$

3d. Il caso $I_j =]-\infty, b]$ o $I_j =]a, +\infty[$ esercizio
(facoltativo).

CVD

Teorema 2

Sia $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione crescente e continua a destra. Esiste una ed una sola premisura μ sull'algebra $\mathcal{A}$ generata da $\mathcal{E}$ t.c.
per ogni $-\infty < a < b < +\infty$

$$(7) \quad \mu([a, b]) = F(b) - F(a).$$

dim. 1. L'esistenza è stata provata nel Teorema 1.

2. (Unicità) Sia μ una premisura che soddisfa

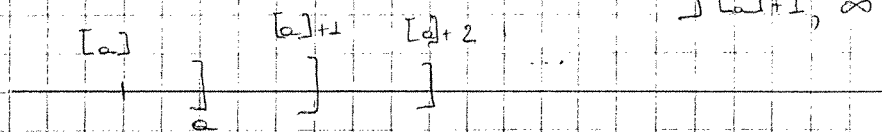
(Z). Allora $\mu(\emptyset) = 0$, per ogni $-\infty < a < b < +\infty$

$$\mu([a, b]) \stackrel{(Z)}{=} F(b) - F(a) = F(\sup[a, b]) - F(\inf[a, b]).$$

Inoltre, per ogni $a \in \mathbb{R}$

$$]a, +\infty[=]a, [a] + 1] \cup \left(\bigcup_{j=[a]+1}^{\infty}]j, j+1] \right) \in \mathcal{E}$$

$$\stackrel{''}{=}] [a] + 1, \infty[\in \mathcal{E}$$



Donque poiché μ è una premisura,

$$\mu(]a, +\infty[) = \mu(]a, [a] + 1]) + \sum_{j=[a]+1}^{\infty} \mu(]j, j+1]) =$$

$$= F([a] + 1) - F(a) + \sum_{j=[a]+1}^{\infty} (F(j+1) - F(j))$$

$$= F([a] + 1) - F(a) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=[a]+1}^n (F(j+1) - F(j)) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (F(n+1) - F(a))$$

$$= F(+\infty) - F(a) = F(\sup]a, +\infty[) - F(\inf]a, +\infty[)$$

Quindi (4) nel Teorema 1 segue $\mu_F(]a, +\infty[)$

(Il caso $] -\infty, b]$ è simile)

Per ogni famiglia $\{J_i\}_{i=1}^m$ di elementi a 2 a 2 disgiunti di $\mathcal{E}$ si ha

$$\bigcup_{i=1}^m J_i \in \mathcal{A} \quad (\text{algebra})$$

e poiché μ è premisura,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^m J_i\right) = \sum_{i=1}^m \mu(J_i) = \mu_F\left(\bigcup_{i=1}^m J_i\right).$$

Dunque μ soddisfa (3) nel Teorema 1.

Così μ coincide con la premisura μ_F del Teorema 1.

C.V.D.

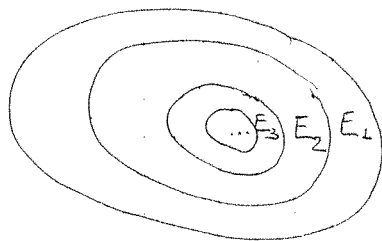
*  p. 23, Folland

Sia $\mathcal{M}$ una σ -algebra infinita. Allora

- (a) $\mathcal{M}$ contiene una successione infinita di elementi a 2 a 2 disgiunti,
- (b) $\mathcal{M}$ non è numerabile.

Soluz. (a) è stata provata.

(b) Sia $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione infinita di elementi di $\mathcal{M}$ a 2 a 2 disgiunti (vedi (a)).



Poniamo

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}).$$

insieme delle parti di $\{E_n, n \in \mathbb{N}\}$, cioè

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{aligned} &\{E_1\}, \{E_2\}, \{E_3\}, \dots \\ &\{E_1, E_2\}, \{E_1, E_3\}, \dots \\ &\{E_2, E_3\}, \{E_2, E_4\}, \dots \\ &\dots \end{aligned} \right.$$

$$\{E_1, E_2, E_3, \dots\} \dots$$

È noto che $\mathbb{R}$ non è numerabile (Ricordiamo

27

la cardinalità dell'insieme delle parti di un insieme è sempre maggiore della cardinalità di tale insieme).

Ora $\forall E \in \mathbb{R}$ poniamo

$$E_\varepsilon = \bigcup_{E \in \mathcal{E}} E$$

In particolare, $E_1, E_2, E_3, \dots$

$$E_1 \cup E_2, E_1 \cup E_3, \dots$$

$$E_2 \cup E_3, \dots$$

$$E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots$$

Si noti che

$$E_1 \neq E_2 \Rightarrow E_{E_1} \neq E_{E_2}$$

(E_n sono a 2 a 2 disgiunti)

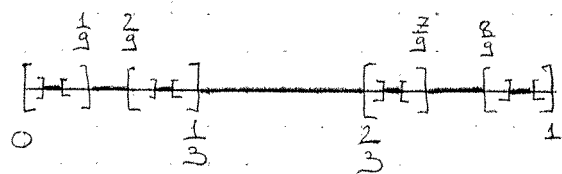
Dunque la collezione dei misurabili $\{E_\varepsilon, \varepsilon \in \mathbb{R}\} \subset$

$\mathcal{M}$ (perché nel primo le unioni sono finite),

ed è non numerabile (perché $\{\varepsilon \mid \varepsilon \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ è non numerabile).

3. Insiemi di Cantor

Sia



(ripeto lo stesso procedimento su ogni intervallo $[]$ chiuso)

$$A = \underbrace{\left] \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right[\cup \left] \frac{1}{9}, \frac{2}{9} \right[\cup \left] \frac{2}{9}, \frac{8}{9} \right[}_{2} \cup$$

$$\underbrace{\left] \frac{1}{27}, \frac{2}{27} \right[\cup \left] \frac{2}{27}, \frac{8}{27} \right[\cup \left] \frac{19}{27}, \frac{20}{27} \right[\cup \left] \frac{25}{27}, \frac{26}{27} \right[}_{4} \cup$$

$\cup \dots$

Unicamente, A è un aperto (unione di aperti).

Gli intervalli sono a 2 a 2 disgiunti, quindi la misura di A è

$$m(A) = \frac{1}{3} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{9}}_2 + \underbrace{\frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27}}_{4} + \dots$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \dots =$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \dots \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

avē $m(A) = 1$.

Def. L'insieme di Cantor (classico)

$$C = [0, 1] \setminus A$$

Proprietà di C (1) C è compatto contenuto in $[0, 1]$ (2) C non contiene intervalli($\Leftrightarrow C$ è totalmente sconnessa)(3) C non ha punti isolati(4) $m(C) = 0$ (5) $x \in C \Leftrightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n}$, ove $b_n = \{0, 2\}$ (! $b_n \neq 1$)

(tale rappresentazione ternaria è unica)

(6) C non è numerabiledim (1) Unia (A è aperto, $[0, 1]$ è chiuso, inoltre C è limitate)(2) Unia (della def di A)(3) esercizio(4) $m(C) = m([0, 1] \setminus A) \stackrel{A \subset [0, 1]}{=} m([0, 1]) \setminus m(A) = 1 - 1 = 0$ (5) Assumiamo che $x \in [0, 1]$ e consideriamo la rappresentazione ternaria:

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$$

$$a_n \in \{0, 1, 2\}$$

Assumiamo che $a_1 = 1$ (cioè x sta dopo o su $\frac{1}{3}$).

$$\text{Dunque, } x = \frac{1}{3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$$

$$\text{Dunque, } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{\frac{1}{3^2}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

($a_n \geq 0$) ($a_n \leq 2$)

$$\text{cioè } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} \quad \vee \quad x = \frac{1}{3} \quad \vee \quad x = \frac{2}{3}$$

Se

$$\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} \Rightarrow x \in A, x \notin C$$

$$\text{Se } x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 0,1000\dots = \underline{0,0222\dots}$$

perché $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3}$ rappresenta la somma senza 1

Se $x = \frac{2}{3}$ allora

$$x = 0,1222\dots = 0,2000\dots$$

$$(\Leftrightarrow a_n = 2, n \geq 2)$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)$$

In modo simile,

$$x \in C \Leftrightarrow \text{se e solo se } a_n \in \{0, 2\} \quad \left(\text{ripetendo il ragionamento per tutti gli altri intervalli di } A \right)$$

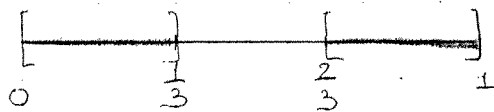
(6) Segue dalla (5) in modo standard

$$x = 0, a_1 a_2 \dots, a_n \in \{0, 2\}$$

$$\Rightarrow \{x \mid x = 0, a_1 a_2 \dots, a_n \in \{0, 2\}\} \text{ non \u00e8 numerabile.}$$

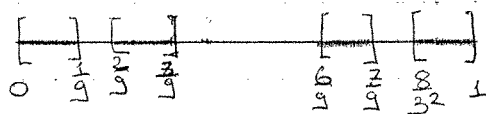
CVD

C si pu\u00f2 descrivere anche nel modo seguente:



Consideriamo

$$P_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$



$$P_2 = \left[0, \frac{1}{3^2}\right] \cup \left[\frac{2}{3^2}, \frac{3}{3^2}\right] \cup \left[\frac{6}{3^2}, \frac{7}{3^2}\right] \cup \left[\frac{8}{3^2}, \frac{9}{3^2}\right]$$

...

$$P_m = \dots \text{ contiene } 2^m \text{ intervalli di lunghezza } \frac{1}{3^m}$$

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} P_n^*, \quad P_{n+1} \subset P_n \quad (!)$$

$$m(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

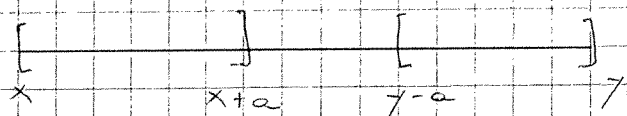
* Infatti C è il complementare in $[0,1]$ di A , che è unione degli intervalli ...
Quindi, basta applicare De Morgan.

Generalizzazione

Sia $I = [x, y]$ e $0 < a < y - x$.

Poniamo

$$I_{D,a} = [x, x+a], \quad I_{d,a} = [y-a, y]$$



(D: sinistro, d: destro).

Siano $a_n, n \in \mathbb{N}$ t.c.

$$a_0 = 1, \quad 0 < a_n < \frac{a_{n-1}}{2}, \quad \forall n \geq 1.$$

(Cioè implica che $a_n < \frac{1}{2^n}$)

Per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ definiamo una famiglia I_n di 2^n intervalli chiusi $I_{n,k}$ a 2 a 2 disgiunti di lunghezza a_n .

$$I_n = \{ I_{n,k} \}_{1 \leq k \leq 2^n}$$

ove

$$I_0 = \{ I_{0,1} \}, \quad \text{ove } I_{0,1} = [0,1];$$

$$\text{se } I_{n-1} = \{ I_{n-1,k} \}_{1 \leq k \leq 2^{n-1}}$$

$$m(I_{n-1,k}) = a_{n-1},$$

allora

$$I_n = \{ I_{n,k} \}_{1 \leq k \leq 2^n}$$

(29)

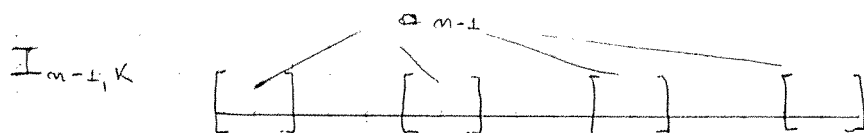
ovv

$$I_{n, 2h-1} = (I_{n-1, h})_{D, a_n}$$

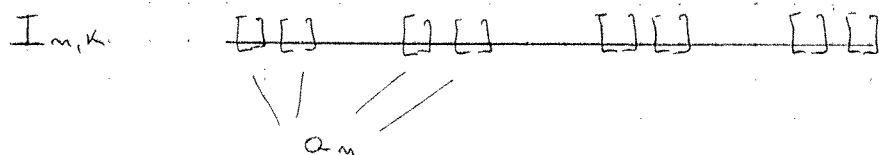
$$I_{n, 2h} = (I_{n-1, h})_{d, a_n}$$

Poniamo

$$P_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n, k}$$



$\Downarrow$



2^{n-1} intervalli di lunghezza a_{n-1} ciascuno

$2 \cdot 2^{n-1}$

2^n intervalli di lunghezza a_n ciascuno ($a_n < \frac{a_{n-1}}{2}$)

Ovvero che $P_{n+1} \subset P_n$.

Def. L'insieme

$$P = \bigcap_{n=0}^{\infty} P_n$$

è detto l'insieme di Cantor associato alla successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Se $a_n = \frac{1}{3^n}$ allora P coincide con C .

Proprietà di P

(30)

- (1) P è un insieme compatto in $[0,1]$ e non vuoto.
- (2) P non contiene intervalli.
- (3) P non ha punti isolati.
- (4) $m(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n$

dim. (1) Unica perché $P = \bigcap_{n=0}^{\infty} P_n$ e P_n sono chiusi.
P non è vuoto perché dalla costruzione P contiene tutti gli estremi di tutti gli intervalli $I_{n,k}$ per ogni n e per ogni k.

(2) Ciascun P_n non contiene intervalli di lunghezza superiore a a_n (dalla costruzione) e $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ($a_n < \frac{1}{2^n}$).

Dunque, P non contiene intervalli.

(3) senza dim.

$$\begin{aligned} (4) \quad m(P) &= m\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} P_n\right) \stackrel{P_n \subset P_{n+1} \text{ e } m(P_n) \text{ è m.c.s. finita}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} m(P_n) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^n} \underbrace{m(I_{n,k})}_{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n \end{aligned}$$

Il caso particolare

Sia $0 \leq \alpha < 1$ e

$$a_n = \frac{\alpha}{2^n} + \frac{1-\alpha}{3^n}$$

$$\text{Poiché } \alpha < 1, \quad a_n = \frac{\alpha}{2^n} + \frac{1-\alpha}{3^n} < \frac{a_{n-1}}{2}$$

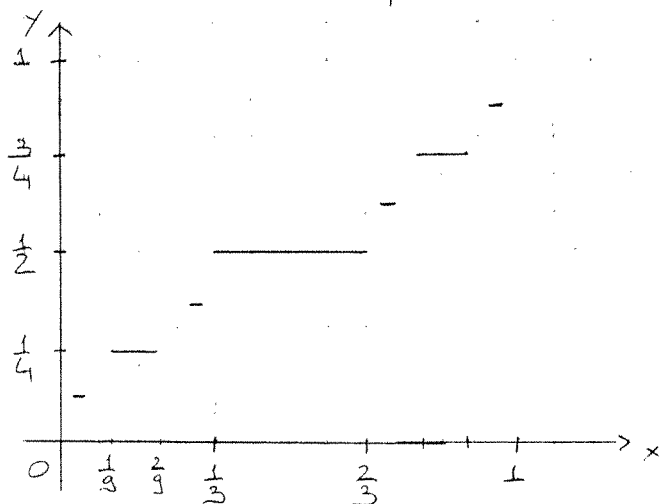
(se $\alpha=0$ $a_n = \frac{1}{3^n}$ e $P = C$)

Allora $m(P) = \alpha$.

osservazione Se $\alpha \neq 0$, $0 < \alpha < 1$ P è un esempio di insieme chiuso con interno vuoto e con misura positiva (perché non contiene intervalli)

4. La scuola del Diavolo

Consideriamo C . Definiamo una funzione f_C :



f_C è una funzione definita da

$$f_C(x) = f_C\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n}\right) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^{n+1}} \quad \text{se } x \in C, \quad f_C(x) = 0 \quad \text{se } x \in [0, 1] \setminus C$$

Questa funzione ha le seguenti proprietà:

(1) La funzione f_C di $[0, 1]$ in $[0, 1]$ è monotona crescente, suriettiva e continua.

(2) L'immagine di $[0, 1] \setminus C (= A)$,

$f_C([0, 1] \setminus C)$ è un insieme numerabile.

(3) L'immagine di C

$f_C(C)$ ha la misura uguale a 1:

$$m(f_C(C)) = 1.$$

(4) La funzione f_C è quasi ovunque derivabile con derivata nulla e zero.

dim. (2) ovvia perché $\forall x \in A_m$ ove $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$,

$f(x)$ è una costante.

(4) ovvia perché $\forall x \in A_m$, $f(x) = \text{cost}$

$\Rightarrow f'(x) = 0$ su A e $m(A) = 1$.

$$\begin{aligned} (3) \text{ ovvia perché } m(f_C(C)) &= m(f_C([0,1] \cap A)) = \\ &= m(f_C[0,1] \setminus f_C(A)) = \underbrace{m([0,1])}_{\text{perché è suriettiva}} - \underbrace{m(f_C(A))}_0 = 1. \end{aligned}$$

Per le proprietà suddette è molto bizzarra, la funzione f_C viene chiamata la scala del Diavolo, ma anche la funzione di Cantor.

Teorema 3

Siano $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione crescente e continua a destra e $\mathcal{A}$ l'algebra di $\mathcal{P}(X)$ generata da $\mathcal{E} = \{]a, b] : -\infty \leq a \leq b \leq +\infty \}$.

(i). Esiste una ed una sola misura μ_F su $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{M}(\mathcal{I}_{\mathbb{R}})$ che soddisfa

$$(8) \quad \mu_F(]a, b]) = F(b) - F(a) \quad \forall -\infty < a < b < +\infty$$

Tale μ_F coincide con la restrizione su $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ della misura esterna $\tilde{\mu}_F^*$ generata dalla unica premisura $\tilde{\mu}_F$ su $\mathcal{A}$ per cui

$$(9) \quad \tilde{\mu}_F(]a, b]) = F(b) - F(a) \quad \forall -\infty < a < b < +\infty$$

(ii). Se F e G sono 2 funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ crescenti e continue a destra, allora

$\mu_F = \mu_G$ se e solo se F e G differiscono per una costante additiva.

(iii). Se μ è una misura su $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ finita sugli intervalli finiti allora la funzione

$$F(x) = \begin{cases} \mu(]0, x]) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -\mu(]x, 0]) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è una funzione crescente e continua a destra.

Inoltre, $\mu = \mu_F$.

(iv) Se μ è una misura su $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ finita sugli intervalli superiormente limitati, in particolare

(3)

se μ è una misura finita su $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, allora la funzione

$$G(x) = \mu([-\infty, x]) \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

è una funzione crescente e continua a destra.

Inoltre, $\mu = \mu_G$.

(Diremo G la funzione cumulativa di distribuzione di μ)

dim. (i) Consideriamo la misura esterna $\tilde{\mu}_F^*$ associata alla unica premisura $\tilde{\mu}$ dal teorema 2. Allora

$$A \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{M}(\mathcal{I}_{\mathbb{R}}) = \mathcal{M}(\mathcal{E}) = \mathcal{M}(A) \subset \mathcal{M}_F(\mathbb{R})$$

$$(\mathcal{E} \subset A \subset \mathcal{I}_{\mathbb{R}})$$

$$[a, b] = \underbrace{[a, b[}_{\text{aperto}} \cup \underbrace{\{b\}}_{\text{chiuso}} \text{ è una base di } \mathbb{R}$$

dal Teor. 2 del cap. 2

ove $\mathcal{M}(A)$ è la σ -algebra generata da A e

$\mathcal{M}_F(\mathbb{R})$ è la σ -algebra dei $\tilde{\mu}_F^*$ -misurabili

alla Carathéodory.

Dal Teorema 3 del cap. 2

$\tilde{\mu}_F^*|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}$ è una misura ($\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{M}(A)$)

$$\text{Siccome } \mathbb{R} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}^+}]-j, j]$$

$$\text{e } \tilde{\mu}_F^*([-j, j]) = F(j) - F(-j)$$

la premisura $\tilde{\mu}_F$ è σ -finita

Dunque da questo teorema

$\tilde{\mu}_F^*|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}$ è l'unico prolungamento di $\tilde{\mu}_F$ su $\mathcal{M}(A)$

"
 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

(ii). Deve essere

$$\mu_F([0, x]) = \mu_G([0, x]), \quad \forall x > 0.$$

Quindi, $F(x) - F(0) = G(x) - G(0)$

$$F(x) - G(x) = F(0) - G(0), \quad \forall x > 0.$$

Analogamente, $\forall x < 0$.

Quindi, F e G differiscono per la costante $F(0) - G(0)$.

Se F e G differiscono per una costante, cioè per un certo $c \in \mathbb{R}$ $F(x) = G(x) + c, \quad \forall x \in \mathbb{R}$, allora

$$\begin{aligned} \mu_F([a, b]) &= F(b) - F(a) = (G(b) + c) - (G(a) + c) = \\ &= G(b) - G(a) = \mu_G([a, b]) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{per def.} \\ \text{di } \mu_F \text{ e } \mu_G \end{array}$$

Allora dalla proprietà (i) $\mu_F(I) = \mu_G(I), \quad \forall I \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

(iv) Sia $-\infty < x < y < \infty$. Allora

$$\begin{aligned} G(y) &= \mu([-\infty, y]) = \mu([-\infty, x] \cup [x, y]) = \\ &= \underbrace{\mu([-\infty, x]) + \mu([x, y])}_{\substack{\mu \text{ misura} \\ 0}} \geq G(x), \end{aligned}$$

dunque G è crescente.

Inoltre, dal Teorema 1 del CAP. 1,

$$G(x) = \mu([-\infty, x]) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} [-\infty, x + \frac{1}{n}]\right) \quad \begin{array}{l} \text{continuità} \\ \text{dall'alto} \end{array}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left([-\infty, x + \frac{1}{n}]\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} G\left(x + \frac{1}{n}\right) =$$

$$\begin{array}{l} G \text{ crescente} \\ \text{per def.} \end{array} = \lim_{\gamma \rightarrow x^+} G(\gamma) = G(x^+),$$

dunque G è continua a destra.

Infine, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ t.c. $a < b$,

$$\begin{aligned} \mu([a, b]) &= \mu([-\infty, b] \setminus [-\infty, a]) \quad \mu \text{ misura} \\ &= \mu([-\infty, b]) - \mu([-\infty, a]) = G(b) - G(a) = \end{aligned}$$

$$= \mu_G([a, b]) \quad (\Rightarrow \mu_G \text{ normalizzata } (2))$$

Allora dalla unitarietà, $\mu = \mu_G$.

(iii) Analogamente a (iv).

C.V.C.

Def. 1 Diciamo che

$$\mu_F^{(P)} \equiv \tilde{\mu}_F^*|_{\mathcal{B}_R}$$

è la misura Booleiana associata alla funzione F .

□ [in (iii), per ogni $x > 0$ e $x \neq 0$]

$$\lim_{\xi \rightarrow x^+} F(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x^+} \mu([0, \xi]) \stackrel{\text{M. overc.}}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \mu([0, x + \frac{1}{m}]) \stackrel{\text{continuità dall'alto}}{=}$$

$$= \mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} [0, x + \frac{1}{m}]\right) = \mu([0, x]) = F(x)$$

Se $x = 0$, $F(0) = 0$; per,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \mu([0, x]) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu([0, x + \frac{1}{m}]) \stackrel{\text{continuità dall'alto}}{=} \\ = \mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} [0, x + \frac{1}{m}]\right) = \mu([0, 0]) \stackrel{\substack{x=0 \\ \text{proprietà di } F}}{=} 0 \quad \square$$

CAPITOLO 4: MISURE DI STIELTJES-LEBESGUE

Teorema 1

Siano $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione crescente e continua a destra, $\mathcal{A}$ l'algebra di $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generata da E e $\tilde{\mu}_F^*$ la misura esterna su $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generata dalla unica premisura $\tilde{\mu}_F$ su $\mathcal{A}$ che soddisfa (9).

Allora esiste una ed una sola misura μ_F sulla σ -algebra $\mathcal{M}_F(\mathbb{R})$ dei $\tilde{\mu}_F^*$ -misurabili alla Carathéodory, che soddisfa (8).
Tale misura coincide con la restrizione su $\mathcal{M}_F(\mathbb{R})$ della misura esterna $\tilde{\mu}_F^*$:

$$\mu_F = \tilde{\mu}_F^*|_{\mathcal{M}_F(\mathbb{R})},$$

ovvero $\tilde{\mu}_F$ è la unica premisura che soddisfa (9).

dim. Dal Teorema di Carathéodory, $\tilde{\mu}_F^*|_{\mathcal{M}_F(\mathbb{R})}$ è

una misura. Siccome la premisura $\tilde{\mu}_F$ è σ -finita ^{Teorema 3, cap. 2, par. c(1)}, dal Teorema 3 Cap. 2 $\tilde{\mu}_F^*|_{\mathcal{M}_F(\mathbb{R})}$ è

l'unico prolungamento di $\tilde{\mu}_F$ su $\mathcal{M}_F(\mathbb{R})$.

CVD

Def. 1. Diremo $\mathcal{M}_F(\mathbb{R})$ la σ -algebra dei misurabili alla Stieltjes-Lebesgue associata ad F e

$$\mu_F^{(SL)} \equiv \tilde{\mu}_F^*|_{\mathcal{M}_F(\mathbb{R})}$$

la misura di Stieltjes-Lebesgue associata ad F .

Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio misurato. Ricordiamo che la misura μ è completa se dato $B \in \mathcal{P}(X)$ t.c. $\exists \Pi \in \mathcal{A}$ con $\mu(\Pi) = 0$ e $B \subset \Pi$ allora $B \in \mathcal{A}$ (e dunque $\mu(B) = 0$)

L'insieme

$$\bar{\mathcal{A}} = \left\{ A \cup B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{P}(X) \text{ t.c. } \exists \Pi \in \mathcal{A} \text{ con } \mu(\Pi) = 0 \text{ e } B \subset \Pi \right\}$$

è il completamento di $\mathcal{A}$ rispetto a μ e la misura unica $\bar{\mu}$ su $\bar{\mathcal{A}}$ che prolunga μ su $\bar{\mathcal{A}}$ è il completamento di μ (Se $\bar{A} \in \bar{\mathcal{A}}$ allora $\bar{\mu}(\bar{A}) = \mu(A)$, ove A è tale che esiste $B \in \mathcal{P}(X)$ e $\Pi \in \mathcal{A}$ con $\mu(\Pi) = 0$ e $B \subset \Pi$ e $\bar{A} = A \cup B$)

Teorema 2

Sia $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione crescente e continua a destra.

(i) La misura Boreliana $\mu_F^{(B)}$ in generale non è completa.

In particolare, questa misura non è completa se $F(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

(ii) La misura di SL è completa (T. di Carathéodory).

(iii) $\mathcal{M}_F(\mathbb{R})$ è il completamento di $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ($\mathcal{M}_F(\mathbb{R}) = \overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}$)

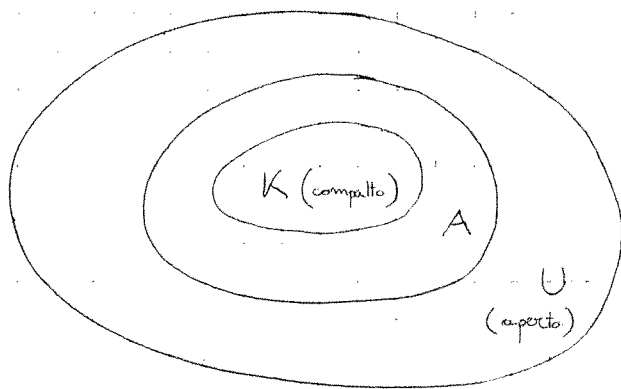
(iv) $\mu_F^{(SL)}$ è il completamento di $\mu_F^{(B)}$ ($\mu_F^{(SL)} = \overline{\mu_F^{(B)}}$)

Segue dim. (ii) è ovvio; vedi Folland, C.I., p. 42 (esercizio)

Teorema 3

Siano $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione crescente e continua a destra e $\mathcal{M}_F(\mathbb{R})$ la σ -algebra dei misurabili alla SL. Se $A \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R})$ allora

$$\begin{aligned} 1) \mu_F^{(SL)}(A) &= \inf \left\{ \mu_F^{(SL)}(U) : U \text{ è aperto di } \mathbb{R} \text{ e } A \subset U \right\} \\ &= \sup \left\{ \mu_F^{(SL)}(K) : K \text{ è } \overset{\text{compatto}}{\text{chiuso}} \text{ di } \mathbb{R} \text{ e } K \subset A \right\} \end{aligned}$$



Senza dim. (vedi Folland, C.1 p. 35-36)

Questo Teorema permette la seguente def. equivalente della misura di SL.