Dimostrazione.

Consideriamo $h_j = f_j - g$ per ogni $j \in \mathbb{N}$ e $h = f - g$. Allora h_j, h sono $\mathcal{M}$-misurabili $\forall j \in \mathbb{N}$ e $0 \leq h_j \leq h$ q.o. su A $\forall j \in \mathbb{N}$.

Dunque, esistono $N_0, N_1, \ldots \in \mathcal{M}$ tali che

$$\mu(N_0) = \mu(N_1) = \cdots = \mu(N_j) = \cdots = 0$$

e

$$(1) \text{ è vero } \forall x \in A \setminus N_0$$

$$0 \leq h_j \leq h \text{ è vero } \forall x \in A \setminus N_j \quad (\text{per ogni } j \in \mathbb{N})$$

Posto $N = \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j$, $\mu(N) = 0$ e

$$(1) \text{ è vero } \forall x \in A \setminus N$$

$$0 \leq h_j \leq h \text{ è vero } \forall x \in A \setminus N.$$

Ora, dal lemma di Fatou e dalla parte (iv) del Corollario al Teorema di Beppo Levi, si ha:

$$\int_{A\setminus N} h \, d\mu = \int_{A\setminus N} \lim_{j\to\infty} h_j \, d\mu$$

$$= \int_{A\setminus N} \liminf_{j\to\infty} h_j \, d\mu \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{j\to\infty} \int_{A\setminus N} h_j \, d\mu \leq \limsup_{j\to\infty} \int_{A\setminus N} h_j \, d\mu$$

$$\overset{\text{monotonia integr.}}{\leq} \limsup_{j\to\infty} \int_{A\setminus N} h \, d\mu = \int_{A\setminus N} h \, d\mu.$$

Quindi, in realtà, tutte le disuguaglianze sono uguaglianze, e in particolare si ha

$$\int_{A\setminus N} \lim_{j\to\infty} h_j \, d\mu = \left\{ \begin{array}{l} = \liminf_{j\to\infty} \int_{A\setminus N} h_j \, d\mu \\ \\ = \limsup_{j\to\infty} \int_{A\setminus N} h_j \, d\mu \end{array} \right\} = \lim_{j\to\infty} \int_{A\setminus N} h_j \, d\mu$$

$$\Leftrightarrow \int_A h \, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_A h_j \, d\mu$$

ovvero (dato che $g \in L^1_\mu(A)$; $*$)

$$\int_A f \, d\mu - \int_A g \, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_A f_j \, d\mu - \int_A g \, d\mu \overset{*}{\Rightarrow} (3)$$

$\square$

Osservazione Può accadere che entrambi i membri dell'uguaglianza (3) siano uguali a $+\infty$.

COROLLARIO. L'uguaglianza (3) è sempre vera se 1.—3. sono sostituite da

1'. $\lim_{j\to\infty} f_j = g$ q.o. su A

2'. g è $\mathcal{M}$-mis. (sempre vero se μ completa)

3'. $g \le f_j \le f$ q.o. su A ove $f \in L^1_\mu(A)$

Dimostrazione

Basterà notare che $-f_j$ per $j \in \mathbb{N}$, $-f$, $-g$ soddisfano alle condizioni 1.—3. del teorema, "nei ruoli" risp. di f_j, g, f. □

Osservazione Può accadere che entrambi i membri dell'uguaglianza siano uguali a $-\infty$.

Ora formuliamo la condizione più utile che assicura la possibilità di passare al limite sotto il segno di integrale.

TEOREMA 2 (della convergenza dominata, di Lebesgue)

Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurato, $A \in \mathcal{M}$, $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una successione in $L^1_\mu(A)$ tale che

i. $\lim_{j\to\infty} f_j = f$ q.o. su A

ii. esiste una funzione nonnegativa $g \in L^1_\mu(A)$ t.c.

$$|f_j| \le g \quad \text{q.o. su } A \quad \forall\, j \in \mathbb{N}$$

Allora $f \in L^1_\mu(A)$ e l'uguaglianza (3) è vera.

Dimostrazione. Poniamo $\underline{f}_j = \min\{f_j, f\}$ e $\overline{f}_j = \max\{f_j, f\}$ $\forall\, j \in \mathbb{N}$.

Dalla condizione (ii)

$$-g \le \underline{f}_j \le f \quad \text{e} \quad f \le \overline{f}_j \le g \quad \text{q.o. su } A$$

ove $-g, g \in L^1_\mu(A)$, e $\lim_{j\to\infty} \underline{f}_j = f = \lim_{j\to\infty} \overline{f}_j$ q.o. su A. Dunque dal teorema 1 e corollario

$$\lim_{j\to\infty} \int_A \underline{f}_j \, d\mu = \int_A f \, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_A \overline{f}_j \, d\mu .$$

Ora, poiché $\underline{f}_j \le f_j \le \overline{f}_j$ q.o. su A per ogni $j \in \mathbb{N}$, si ha

$$\lim_{j\to\infty} \int_A \underline{f}_j \, d\mu \le \liminf_{j\to\infty} \int_A f_j \, d\mu \le \limsup_{j\to\infty} \int_A f_j \, d\mu \le \lim_{j\to\infty} \int_A \overline{f}_j \, d\mu .$$

Dunque

$$\lim_{j\to\infty} \int_A f_j \, d\mu = \int_A f \, d\mu$$

e

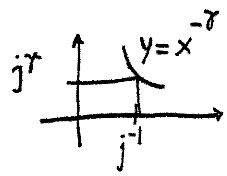
$$-\infty < -\int_A g \, d\mu \le \int_A f \, d\mu \le \int_A g \, d\mu < \infty \quad \text{che implica } f \in L^1_\mu(A). \quad \square$$

<u>OSSERVAZIONE</u>. Notare che la minima funzione g che soddisfa (ii) è

$$g(x) = \sup_{j \in \mathbb{N}} |f_j(x)| \quad x \in A$$

<u>ESEMPIO</u> Siano $(X, \mathcal{M}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}_{\mathbb{R}}, m)$ ove m è la misura di Lebesgue, $A =]0,1[$, $\gamma \geq 0$ e, per ogni $j \geq 1$,

$$f_j(x) = \begin{cases} j^\gamma & \text{se } 0 < x \le 1/j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Notare che $2^{-\gamma} x^{-\gamma} \le \sup_{j \in \mathbb{N}} f_j(x) \le x^{-\gamma}$ $\quad g(x) = x$

Infatti se $\frac{1}{2} < x < 1$ questo segue da $\sup_{j \in \mathbb{N}} f_j(x) = f_1(x) = 1$

se invece $0 < x \le 1/2$ si ha

$$\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor > \frac{1}{x} - 1 \geq \frac{1}{2x}$$

e

$$2^{-\gamma} x^{-\gamma} = \frac{1}{(2x)^\gamma} \le \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor^\gamma \le \sup_{j \in \mathbb{N}} f_j(x) = \sup_{j \le 1/x} f_j(x) = \sup_{j \le 1/x} j^\gamma \le \left(\frac{1}{x}\right)^\gamma = x^{-\gamma}$$

Se $\gamma < 1$ allora $\int_{(0,1)} x^{-\gamma} \, dm < \infty$ e dal teorema 2

$$\lim_{j\to\infty} \int_{]0,1[} f_j(x) \, dm = \int_{]0,1[} \lim_{j\to\infty} f_j(x) \, dm = 0$$

come si può anche verificare direttamente dato che

$$\int_{]0,1[} f_j(x) \, dm = j^{\gamma - 1} \longrightarrow 0 \quad (\gamma - 1 < 0)$$

Se $\gamma \geq 1$ allora $g \notin L^1(A)$: $\int_{]0,1[} x^{-\gamma} dm = \infty$, quindi non si può applicare il Teorema 2; in questo caso si osserva che

$$\left.\begin{array}{l} \infty \overset{\gamma>1}{=} \\ 1 \underset{\gamma=1}{=} \end{array}\right\} = \lim_{j\to\infty} \int_{(0,1)} f_j(x)\,dm \neq \int_{(0,1)} \lim_{j\to\infty} f_j(x)\,dm = 0 .$$

<u>TEOREMA 3</u> Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurato, $A \in \mathcal{M}$ e $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset L^1_\mu(A)$ tale che

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_A |f_j|\, d\mu < \infty$$

Allora

1) $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ converge q.o. su A
2) $\sum_{j=1}^{\infty} f_j \in L^1_\mu(A)$
3) $\int_A \left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j\right) d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_A f_j \, d\mu$

<u>Dimostrazione</u>. Dal Corollario del Teorema 1, parte (ii),

$$\int_A \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|\right) d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_A |f_j|\, d\mu$$

Dunque dalla parte (iv) del Corollario

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f_j| < \infty \quad \text{q.o. su } A$$

quindi $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ converge q.o. su A. Inoltre

$$\left|\sum_{j=1}^{n} f_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |f_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |f_j| \in L^1_\mu(A) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{j=1}^{n} f_j \xrightarrow{n} \sum_{j=1}^{\infty} f_j$$

Quindi, teorema 2 $\Rightarrow$ 2), 3). $\square$

TEOREMA 4 Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurato, $A \in \mathcal{M}$, $f \in L^1_\mu(A)$ e $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset L^1_\mu(A)$ t.c. $f_j \to f$ in $L^1_\mu(A)$ per $j \to \infty$

cioè $\lim_{j\to\infty} \int_A |f_j - f| \, d\mu = 0$

Allora esiste una sottosuccessione $\{f_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ t.c.

$$f_{j_k} \to f \text{ q.o. su } A \text{ per } k \to \infty$$

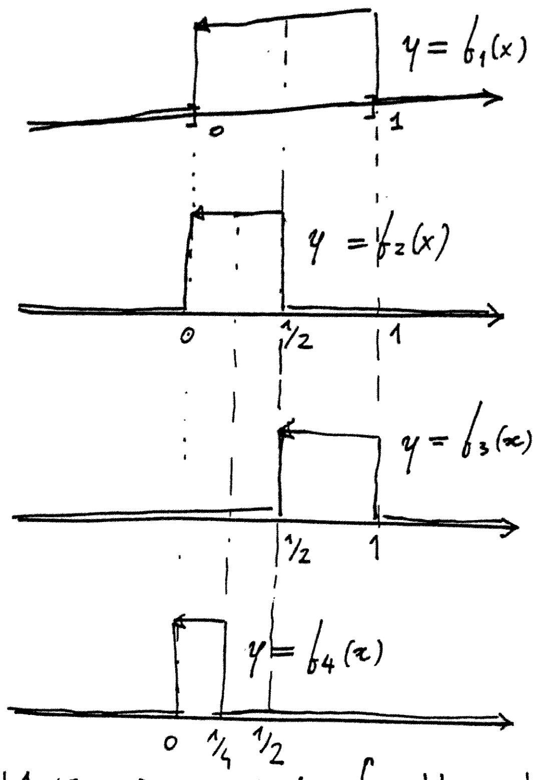
Senza dim [F, cap 3] $\square$

ESEMPIO Siano $(X, \mathcal{M}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}_\mathbb{R}, m)$, $A =]0,1]$ e

$$f_j = \chi_{]i2^{-k},(i+1)2^{-k}]}$$

ove $k = 0, 1, 2, \dots$ e $i = 0, 1, \dots, 2^{k-1}$ e infine $j = i + 2^{+k}$

$k=0$
$i=0$
$\Rightarrow j=1,\ A_j =]0,1]$



Allora $f_j \to 0$ in $L^1_m(]0,1])$ perché $\int_{]0,1]} |f_j - 0| \, dm = 2^{-k} \to 0$ per $j \to \infty$ (in quanto $k = \lfloor \log_2 j \rfloor$) ma $f_j \not\to 0$ $\forall x \in]0,1]$. Esistono infatti due sotto successioni indiciate da j_{1k}, j_{2k} per $k \in \mathbb{N}$ tali che

$$f_{j_{1k}}(x) = 0 \quad \text{e} \quad f_{j_{2k}}(x) = 0$$

Notare che la sottosuccessione $\{f_{2^k}\}_{k\in\mathbb{N}} = \{f_1, f_2, f_4, f_8, \dots\}$ tende a 0 per $k \to \infty$.

Capitolo IX - Gli integrali di Rienmann e Lebesgue

Caratterizzazione di Darboux dell'integrale di Riemann

Siano $-\infty < a < b < +\infty$ e $P = \{t_j\}_{j=0}^n$ una partizione di $[a,b]$ cioè $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Siano poi $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata e

$$S_P(f) = \sum_{j=1}^{n} M_j (t_j - t_{j-1}), \quad s_P(f) = \sum_{j=1}^{n} m_j (t_j - t_{j-1})$$

ove

$$M_j = \sup_{x \in]t_{j-1}, t_j]} |f(x)|, \quad m_j = \inf_{x \in]t_{j-1}, t_j]} |f(x)| \quad \text{per } j = 1, \dots, n$$

e siano

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \equiv \inf_P S_P(f), \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \equiv \sup_P s(f)$$

Se $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$, diciamo che f è Riemann-integrabile in $[a,b]$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx \equiv \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

Se f è Riemann-integrabile, $\lim_{\delta(P) \to 0^+} s_P(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta(P) \to 0^+} S_P(f)$ ove $\delta(P) \equiv \max_{j=1,\dots,n} (t_j - t_{j-1})$ è la 'maglia' di P.

TEOREMA 1 Siano $-\infty < a < b < +\infty$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata. Allora

(a) f Riemann-integrabile in $[a,b] \Rightarrow f \in L^1_m([a,b])$ e $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(x)\,dm$.

(b) La Lebesgue-integrabilità su $[a,b]$ <u>non</u> implica la Riemann-integrabilità su $[a,b]$.

(c) f Riemann-integrabile su $[a,b] \Leftrightarrow m(\{x \in [a,b] : f \text{ non è continua in } x\}) = 0$

Dimostrazione

(a) Siano, $\forall P$, partizione di $[a,b]$, $g_P = \sum_{j=1}^{n} m_j \chi_{]t_{j-1}, t_j]}$ e $G_P = \sum_{j=1}^{n} M_j \chi_{]t_{j-1}, t_j]}$ se $P = \{t_j\}_{j=0}^n$. Consideriamo ora una successione di partizioni $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che $P_k \subset P_{k+1}$ e $\lim_{k \to \infty} \delta(P_k) = 0$, e le due successioni di funzioni $\{g_{P_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{G_{P_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$. Allora $g_{P_k} \le g_{P_{k+1}} \le f \le G_{P_{k+1}} \le G_{P_k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ e $s_{P_k}(f) \le s_{P_{k+1}}(f) \le S_{P_{k+1}}(f) \le S_{P_k}(f)$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Dunque si ha che le due posizioni

$g \equiv \lim_k g_{P_k} \leq f \leq \lim_k G_{P_k} \equiv G$ hanno senso per monotonia

hé $g_{P_k}, G_{P_k} \in S([a,b]) \ \forall k \in \mathbb{N}$ (ovv. sono tutte funzioni semplici)

integrali di Riemann e Lebesgue coincidono; per esempio:

$$\int_a^b g_{P_k}(x)dx = \sum_{j=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} g_{P_k}(x)dx$$
$$= \sum_{j=1}^n m_i^{(k)} (t_i - t_{i-1})$$
$$= \sum_{j=1}^n m_i^{(k)} m(]t_{i-1}, t_i]) = \int_{[a,b]} g_{P_k} dm \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

funzioni g e G sono limiti di successioni monotone di funzioni semplici, que sono Lebesgue-misurabili e, dal teorema di convergenza monotona,

$$\int g\, dm = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} g_{P_k}\, dm = \lim_{k\to\infty} \int_a^b g_{P_k}(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} s_{P_k}(f) = \int_a^b f(x)dx$$

ıalogamente

$$\int_{[a,b]} G\, dm = \int_a^b f(x)dx$$

ne si ha $\int_{[a,b]} (G-g)dm = 0$ e poiché $G-g \geq 0$ si ha $G = g$ q.o. su . Dalla (1) segue perciò $f = g$ q.o. su $[a,b]$ dunque f è Lebesgue-integr- ile su $[a,b]$, perché m è completa, e

$$\int_{[a,b]} f\, dm = \int_{[a,b]} g\, dm = \int_a^b f(x)dx$$

onsideriamo la funzione di Dirichlet $\chi = \chi_{\mathbb{Q}}$; essa non è iemann-integrabile, perché $\underline{\int_a^b} \chi(x)dx = 0$ e $\overline{\int_a^b} \chi(x)dx = b-a$, ma è ebesgue-integrabile, perché $\chi \sim 0$ su $[a,b]$ e $\int_{[a,b]} \chi\, dm = 0$

iamo $h(x) = \liminf_{y\to x} f(y)$, $H(x) = \limsup_{y\to x} f(y)$. f è continua in x sse $x) = H(x) = f(x)$. Notiamo che

$$h(x) = \sup_{\varepsilon>0} \inf_{y\in B(x,\varepsilon)} f(y) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \inf_{y\in B(x,\varepsilon)} f(y)$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \inf_{y\in B(x,\varepsilon)} f(y) \geq g(x)$$

infatti detto $P_\ell = \{t_j^{(\ell)}\}_{j=1}^{n_\ell}$ e $x \in [a,b] \setminus P$, poiché $\lim_{\ell\to\infty} \delta(P_\ell) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists\, \ell = \ell(k)$ e $1 \le j = j(k) \le n_\ell$ tali che $]t_{j-1}^{(\ell)}, t_j^{(\ell)}] \subset B[x, \frac{1}{k})$

quindi $$\inf_{y\in B[x,\frac{1}{k})} f(y) \le \inf_{y \in]t_{j-1}^{(\ell)}, t_j^{(\ell)}]} f(y) = m_j^{(\ell)} = g_{P_k}(x) \le g(x) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$ (57)

dunque $h(x) \le g(x) \Rightarrow (2)$. Allo stesso modo si mostra che
$$(3) \qquad G(x) = H(x) \qquad \forall x \in [a,b] \setminus P.$$
Le uguaglianze (2), (3) implicano, in virtù del fatto che $m(P)=0$, che h, H sono Lebesgue-misurabili e che
$$\int_{[a,b]} h\, dm = \underline{\int_a^b} f\, dx = \int_{[a,b]} g\, dm$$
$$\int_{[a,b]} H\, dm = \overline{\int_a^b} f\, dx = \int_{[a,b]} G\, dm$$
Ora, f è Riemann-integrabile $\Leftrightarrow \underline{\int_a^b} f\, dx = \overline{\int_a^b} f\, dx \Leftrightarrow \int_{[a,b]} (H-h)\, dm = 0$
$$\Leftrightarrow H = h \text{ q.o. su } [a,b]$$
$$\Leftrightarrow m(\{x \in [a,b] : f \text{ non è continua in } x\}) = 0 \qquad \square$$

LEMMA 1 Sia $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ Riemann-integrabile su $[a,b]$ $\forall b > a$. Allora
$$(4) \qquad \int_a^\infty f(x)\, dx = \int_{[a,\infty[} f\, dm,$$
ove $\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\, dx$ è l'integrale improprio di Riemann, e
$$\int_a^\infty f(x)\, dx \text{ converge} \Leftrightarrow f \in L_m^1([a,+\infty[)$$

Dimostrazione

Dalla definizione dell'integrale improprio, dal teorema 1 e dal teorema di Beppo Levi, si ha
$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx \overset{(j\in\mathbb{N})}{=} \lim_{j\to\infty} \int_a^{a+j} f(x)\, dx \overset{T1}{=} \lim_{j\to\infty} \int_{[a,a+j]} f\, dm$$
$$= \lim_{j\to\infty} \int_{[a,\infty[} f \chi_{[a,a+j]}\, dm \overset{BL}{=} \int_{[a,\infty[} f\, dm$$

ove nell'ultima uguaglianza si è potuto usare Beppo Levi perché

$$0 \le f\chi_{[a,a+j[} \le f\chi_{[a,a+j+1[} \le \dots \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

e $\lim_{j\to\infty} f\chi_{[a,a+j]} = f$ $\square$

<u>Osservazione</u> Sia $f:[a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ (eventualmente a valori anche <0)

Se $\int_a^\infty |f(x)|dx < \infty \Rightarrow$ la (4) è ancora vera.

Ma se $\int_a^\infty |f(x)|dx$ diverge la (4) è sicuramente falsa, perché

$$\int_{[a,+\infty[} f\,dm \text{ esiste} \Leftrightarrow \int_{[a,+\infty[} |f|\,dm \text{ è finito}$$

$$\int_{[a,+\infty[} |f|\,dm \overset{\text{Lemma 1}}{=} \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx = \infty \quad \lightning$$

<u>ESEMPIO</u>.

È $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ ma $\int_{[0,\infty[} \frac{\sin x}{x}dm$ non esiste:

infatti $\int_{[0,\infty[} \left|\frac{\sin x}{x}\right|dm$ diverge (è $\int_a^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|dx = \infty$). Tuttavia, si può definire l'integrale di Lebesgue improprio

$$\int_{[0,\infty[} f\,dm = \lim_{b\to\infty}\int_{[a,b[} f\,dm$$

in modo che $\int_{[0,+\infty[} \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$. $\square$

<u>Osservazione</u> Dal <u>Lemma 1</u>, l'integrale di Lebesgue è una generalizzazione di quello di Riemann e l'insieme di tutte le funzioni Lebesgue-integrabili è più vasto dell'insieme di tutte le funzioni Riemann-integrabili.

<u>Osservazione</u>. Notare che i teoremi dei capitoli VI, VII hanno le varianti appropriate per l'integrale di Riemann proprio ed improprio.

Ad esempio:

TEOREMA 2 (teorema di convergenza dominata per l'integrale di Riemann). (59)

Siano $a \in \mathbb{R}$, $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ successione di funzioni $f_j : [a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ tali che gli integrali $\int_a^{+\infty} |f_j(x)|\,dx$ convergano e sia

1) $\lim_{j\to\infty} f_j = f$ q.o. su $[a,+\infty[$

2) $\exists\ g > 0$ t.c. $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ converge e $|f_j| \le g$ q.o. su $[a,\infty]$ $\forall j$

3) f è Riemann-integrabile su $[a,b]$ $\forall b > a$.

Allora
$$\lim_{j\to\infty} \int_a^{+\infty} f_j(x)\,dx = \int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

Dimostrazione

Dal lemma 1, dall'osservazione e dal teorema della convergenza dominata per gli integrali di Lebesgue,

$$f_j \in L^1_m([a,+\infty[) \quad \text{per ogni } j \in \mathbb{N}$$

(T. Lebesgue)

$$g \in L^1_m([a,+\infty[)$$

e dunque $f \in L^1_m([a,+\infty[)$ e dalla (3) segue $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$ per cui

$$\lim_{j\to\infty} \int_a^{\infty} f_j(x)\,dx = \lim_{j\to\infty} \int_{[a,\infty[} f_j\,dm \underset{\text{t.L.c.d.}}{=} \int_{[a,\infty[} f\,dm \underset{\text{Lemma 1}}{\overset{(3)}{=}} \int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

$\square$

Capitolo X - Teorema di Fubini - Tonelli

20.11.06

<u>TEOREMA 1</u> Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurato, $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ un altro spazio misurato e siano μ, ν σ-finite. Siano $A \in \mathcal{M}$, $B \in \mathcal{N}$.

a) (Tonelli) Sia f non negativa e misurabile su $A \times B$ rispetto alla misura prodotto $\mu \times \nu$. Allora

$$g(x) = \int_B f(x,y)\, d\nu(y) \in \mathcal{M}$$

$$h(y) = \int_A f(x,y)\, d\mu(x) \in \mathcal{N}$$

e

$$(1) \quad \int_{A\times B} f(x,y)\, d(\mu\times\nu) = \int_A \left(\int_B f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

$$= \int_B \left(\int_A f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

b) (Fubini) Se $f \in L^1_{\mu\times\nu}(A\times B)$ allora

$f(x,\cdot) \in L^1_\nu(B)$ q.o. su A

$f(\cdot,y) \in L^1_\mu(A)$ q.o. su B

$g \in L^1_\mu(A)$, $h \in L^1_\nu(B)$ e l'uguaglianza (1) è vera

<u>Senza dim</u> [F., Cap. 2].

Ora formuliamo la condizione più utile che assicura la possibilità di cambiare l'ordine di integrazione.

<u>COROLLARIO</u>. Sia f misurabile su $A\times B$ rispetto alla misura $\mu\times\nu$ e

$$\int_A\left(\int_B |f(x,y)|\,d\nu(y)\right)d\mu(x) < \infty$$

oppure

$$\int_B\left(\int_A |f(x,y)|\,d\mu(x)\right)d\nu(y) < \infty$$

allora $f\in L^1_{\mu\times\nu}(A\times B)$ e l'uguaglianza (1) è vera.

<u>OSSERVAZIONE</u>. La condizione che le misure μ,ν siano σ-finite non si può omettere (cfr [F., Cap 2]).

In (b), la condizione $f\in L^1_{\mu\times\nu}(A\times B)$ non si può omettere, quand'anche μ,ν siano la misura di Lebesgue. Per esempio

$$\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\right)dy = -\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\right)dx = \frac{\pi}{4}$$

in questo caso infatti $\int_0^1\int_0^1 \left|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right| dx\,dy = \infty$ (esercizio)

— · —

Capitolo XI - Integrale di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$

Ricordiamo che la misura di Lebesgue m^n su $\mathbb{R}^n$ è il completamento di $\underbrace{m\times\cdots\times m}_{n}$ ove m è la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$, e che $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$, la σ-algebra dei misurabili alla Lebesgue di $\mathbb{R}^n$, è il completamento di $\underbrace{\mathcal{L}_{\mathbb{R}}\otimes\cdots\otimes\mathcal{L}_{\mathbb{R}}}_{n}$. In seguito, scriveremo semplicemente $\int_A f\,dx$ per $\int_A f\,dm^n$, ove $A\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$, e $L^1(A)$ per $L^1_{m^n}(A)$.

<u>TEOREMA 1 (di sostituzione negli integrali di Lebesgue)</u>. Siano $A\subset\mathbb{R}^n$ un insieme misurabile alla Lebesgue, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un aperto contenente A, e $g:\Omega\to\mathbb{R}^n$ funzione t.c. $g\in C^1_b(\Omega)$, g iniettiva. Allora $f\in L^1(g(A))$ se, e soltanto se, $f(g)\,Jac(g)\in L^1(A)$ ove $Jac(g)=\det\nabla g$ è lo jacobiano.

Inolthe $\displaystyle\int_{g(A)} f\,dy = \int_A (f\circ g)|\mathrm{Jac}\,g|\,dx \qquad (y=g(x),\ x\in A)$

—.—

Ricordiamo che per $g=(g_1,\dots,g_n):\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n$,

$$\nabla g = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n}$$

è la matrice di Jacobi. Inoltre, $g\in C_b^1(\Omega)$ significa che tutte le derivate $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ sono continue su Ω e che $\|g\|_{C_b^1(\Omega)} \equiv \max\limits_{1\le i,j\le n}\left[\sup\limits_{x\in\Omega}\left|\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}\right|\right]<\infty$.

Ricordiamo anche che se Ω è dominio per una funzione $g:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n$ t.c. $\mathrm{Jac}(g)(x)\ge 0$ $\forall x\in\Omega$ oppure $\mathrm{Jac}(g)(x)\le 0$ $\forall x\in\Omega$. $g\in C_b^1(\Omega)$ è iniettivo allora

<u>Esempio</u> Se $n\geq 2$ consideriamo la trasformazione $x=g(\rho,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})$ definita da

$$\begin{cases} x_n = \rho\sin\varphi_{n-1} \\ x_{n-1} = \rho\cos\varphi_{n-1}\sin\varphi_{n-2} \\ x_{n-2} = \rho\cos\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-3} \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_2 = \rho\cos\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-3}\cdot\ldots\cdot\cos\varphi_2\sin\varphi_1 \\ x_1 = \rho\cos\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-3}\cdot\ldots\cdot\cos\varphi_2\cos\varphi_1 \end{cases}$$

e l'insieme $\Omega=\{(\rho,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})\in\mathbb{R}^n : 0<\rho<\infty,\ 0\le\varphi_1\le 2\pi,\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi_2,\dots,\varphi_{n-1}\le\frac{\pi}{2}\}$ su cui essa è definita. Allora $g:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n$, $g\in C_b^1(\Omega)$, g è iniettiva.

Inolthe $\mathrm{Jac}(g)=\rho^{n-1}\cos^{n-2}\varphi_{n-1}\cos^{n-3}\varphi_{n-2}\cdot\ldots\cdot\cos\varphi_2$.

In particolare, se $n=2$,

$$g:\begin{cases} x_2=\rho\sin\varphi_1 \\ x_1=\rho\cos\varphi_1\end{cases}$$

se $n=3$,

$$g:\begin{cases} x_3=\rho\sin\varphi_2 \\ x_2=\rho\cos\varphi_2\sin\varphi_1 \\ x_1=\rho\cos\varphi_2\cos\varphi_1\end{cases}$$

Dal teorema 1 di questo capitolo e dal teorema 1 del capitolo X, per ogni $f \in L^1(B(0,r))$, ove $0 < r \leq \infty$ (se $r=\infty$, $B(0,\infty) = \mathbb{R}^n$), è

$$(2) \quad \int_{B(0,r)} f\,dx = \int_0^r \rho^{n-1}d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi_2\, d\varphi_2 \cdots \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}\varphi_{n-1}\, F\, d\varphi_{n-1}$$

ove $F = f(\rho\cos\varphi_{n-1} \cdots \cos\varphi_2\cos\varphi_1, \rho\cos\varphi_{n-1} \cdots \cos\varphi_2\sin\varphi_1, \ldots, \rho\sin\varphi_{n-1})$.

Se $f \in L^1({}^c B(0,r))$, ove ${}^cB(0,r) = \mathbb{R}^n \setminus B(0,r)$, in (2) $\int_0^r$ andrebbe sostituito con $\int_r^\infty$. In particolare, se $g(|x|) = f(x)$ ove $g(\rho)\rho^{n-1} \in L^1(0,r)$ allora

$$(3) \quad \int_{B(0,r)} g(|x|)\,dx = \sigma_n \int_0^r g(\rho)\rho^{n-1}d\rho$$

ove

$$\sigma_n = \sigma(\mathbb{S}^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

è l'area della sfera unitaria $\mathbb{S}^{n-1}$ di $\mathbb{R}^n$ (ricordiamo: $|x| = \rho$). Allo stesso modo, se $g(\rho)\rho^{n-1} \in L^1(r,\infty)$ allora

$$(4) \quad \int_{{}^cB(0,r)} g(|x|)\,dx = \sigma_n \int_r^\infty g(\rho)\rho^{n-1}d\rho$$

Notare che

$$\sigma_n = n\, v_n$$

ove v_n è il volume della palla unitaria $B(0,1)$ di $\mathbb{R}^n$, cioè

$$v_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \begin{cases} \dfrac{\pi^m}{m!} & \text{se } n = 2m \\[2ex] \dfrac{\pi^{m-1}2^m}{(2m-1)!!} & \text{se } n = 2m-1 \end{cases}$$

ricordiamo la definizione di semi-fattoriale:

$$(2m-1)!! = (2m-1)\cdot(2m-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1$$
$$(2m)!! = 2m(2m-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$$

e della funzione gamma di Euler:

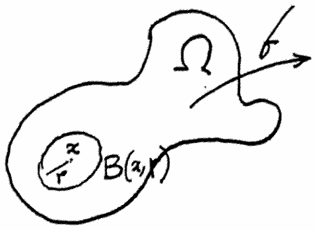
$$\Gamma(\alpha) \equiv \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt \qquad \text{per } \alpha > 0$$

che sui naturali subordina il fattoriale.

TEOREMA 2 (della differenziazione degli integrali, Lebesgue)

Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, cioè $f \in L^1(K)\ \forall K \Subset \Omega$.

Allora, $\forall x \in \Omega$ (= per quasi ogni $x \in \Omega$)



$$(5) \quad \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f\, dy = f(x)$$

ove $|B(x,r)| = m^n(B(x,r)) = v_n r^n$

Capitolo XII - Spazi $L^p(A)$

<u>DEF 1</u> Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurato, $A \in \mathcal{M}$, $0 < p < \infty$. Diremo che

$$f \in L^p_\mu(A)$$

se $\exists\, N \in \mathcal{M}$, $\mu(N) = 0$, tale che f è misurabile su $A \setminus N$ e $|f|^p$ è integrabile su $A \setminus N$.

$$\|f\|_{L^p_\mu(A)} \equiv \left(\int_{A \setminus N} |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

ovviamente la definizione non dipende dalla scelta del null set N, e ugualmente $\|f\|_{L^p_\mu(A)}$.

<u>ESEMPIO</u> Siano $(X, \mathcal{M}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}, m^n)$, $0 < p < \infty$, $0 < r < \infty$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

$$(a) \quad |x|^\gamma \in L^p(B(0,r)) \iff \gamma > -\frac{n}{p}$$

$$(b) \quad |x|^\gamma \in L^p({}^cB(0,r)) \iff \gamma < -\frac{n}{p}$$

<u>Dimostrazione</u>

Dalla formula (3)

$$(a) \quad \|(|x|^\gamma)\|_{L^p(B(0,r))} = \left(\int_{B(0,r)} |x|^{\gamma p} dx \right)^{1/p} = \sigma_n^{1/p} \left(\int_0^r \rho^{\gamma p + n - 1} d\rho \right)^{1/p}$$

$$= \begin{cases} \left(\dfrac{\sigma_n}{\gamma p + n} \right)^{1/p} r^{\gamma + \frac{n}{p}} & \text{se } \gamma > -\frac{n}{p} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \square$$

(b) analogamente usando la formula (4)

DEF 2 Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurato, $A \in \mathcal{M}$. Diremo che $f \in L^\infty_\mu(A)$ se esiste un insieme $N \in \mathcal{M}$ con $\mu(N)=0$ tale che f è misurabile su $A \setminus N$ e $|f(x)|<\infty$

$$\|f\|_{L^\infty_\mu(A)} \equiv \underset{x\in A\setminus N}{\operatorname{esssup}} |f(x)| \equiv \inf_{\substack{\omega\in\mathcal{M}:\\ \mu(\omega)=0}} \ \sup_{x\in (A\setminus N)\setminus\omega} |f(x)|$$

se $\mu(A)>0$ (altrimenti è $\|f\|_{L^\infty_\mu(A)}=0$).

TEOREMA 1 (Riesz). Siano $(X,\mathcal{M},\mu)=(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}, m^n)$ lo spazio misurato ove m^n è la misura di Lebesgue, $A\in\mathcal{M}$ e $m^n(A)<\infty$. Allora

$$(*) \quad \lim_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p_{m^n}(A)} = \|f\|_{L^\infty_{m^n}(A)}$$

OSSERVAZIONE. Il Teorema 1 da' una giustificazione per la definizione 2.
Se $m^n(A)=\infty$ l'uguaglianza $(*)$ non vale.

21.11.06

OSSERVAZIONE

$$\inf_{x\in A} f(x) \overset{\omega=\emptyset}{\leq} \underset{x\in A}{\operatorname{essinf}} f(x) \leq \underset{x\in A}{\operatorname{esssup}} f(x) \overset{\omega=\emptyset}{\leq} \sup_{x\in A} f(x)$$

ESEMPI. Consideriamo $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_{\mathbb{R}}, m)$ e $f:\mathbb{R}\to[0,\infty[$ definita da

$$f(x) = \chi_{\{0\}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x\neq 0 \\ 1 & \text{se } x=0 \end{cases}$$

$\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)=0$; $\underset{x\in\mathbb{R}}{\operatorname{essinf}} f(x)=0$; $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)=1$; $\underset{x\in\mathbb{R}}{\operatorname{esssup}} f(x)=0$

Consideriamo $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}, m^n)$ ed $e\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ con $m^n(e)=0$. Sia $f:\mathbb{R}^n\to[0,\infty[$ t.c. $f(x)>0$ se $x\in e$ e $f(x)=0$ se $x\notin e$

$0=\inf_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) = \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\operatorname{essinf}} f(x)$; $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) = \sup_{x\in e} f(x)>0$ ma $\operatorname{esssup}=0$

infatti

$$0\leq \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\operatorname{esssup}} f(x) = \inf_{\omega\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}:m^n(\omega)=0} \ \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\omega} f(x) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus e} f(x)=0$$

$$0\leq \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\operatorname{essinf}} f(x) = \sup_{\omega\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}:m^n(\omega)=0} \ \inf_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\omega} f(x) \leq \sup_{\substack{\omega\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}\\ m^n(\omega)=0}} \left[\inf_{x\in(\mathbb{R}^n\setminus e)\setminus\omega} f(x)\right]=0$$

LEMMA 1 Siano $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}, m^n)$ lo spazio misurato ove m^n è la misura di Lebesgue, A aperto di $\mathbb{R}^n$ e $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione continua. Allora

$$\operatorname*{essinf}_{x\in A} f(x) = \inf_{x\in A} f(x) \quad , \quad \operatorname*{esssup}_{x\in A} f(x) = \sup_{x\in A} f(x)$$

Dimostrazione

Vediamo la prima. Sia $\omega \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$, $m^n(\omega) = 0$; supponiamo esista $\xi \in \omega$ tale che $f(\xi) < \inf_{x\in A\setminus\omega} f(x)$; allora, per continuità, $\exists\, \delta > 0$ t.c.

$$y \in B(\xi,\delta) \Rightarrow f(y) < \inf_{x\in A\setminus\omega} f(x)$$

ora $B(\xi,\delta) \not\subset \omega$ (avrebbe misura nulla) dunque ha intersezione non nulla con $A\setminus\omega$ il che implica che $\exists\ \bar{y} \in A\setminus\omega$ con $f(\bar{y}) < \inf_{x\in A\setminus\omega} f(x)$, assurdo.

Quindi $f(y) \geq \inf_{x\in A\setminus\omega} f(x)\ \forall\, y \in \omega$, da cui segue $\inf_{A\setminus\omega} f(x) = \inf_{A} f(x)$ ma ω era arbitrario in $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ con la proprietà $m^n(\omega)=0$. □

LEMMA 2 Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio misurato, $A \in \mathcal{M}$ e $0 < p \leq \infty$. Allora $L^p(A)$ è spazio vettoriale con addizione puntuale e moltiplicazione per numeri complessi.

Dimostrazione Siano $a, b \geq 0$.

Ricordiamo che $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ se $0 < p \leq 1$

(*) $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ se $1 \leq p < \infty$

Allora, se $0 < p \leq 1$ e $f, g \in L^p(A)$ si ha

$$\int_A |f+g|^p d\mu \leq \int_A (|f|^p + |g|^p)\, d\mu < \infty \text{ se } \Leftrightarrow f+g \in L^p(A)$$

Allo stesso modo, se $1 \leq p < \infty$ e $f, g \in L^p(A)$ si ha

$$\int_A |f+g|^p d\mu \leq 2^{p-1} \int_A (|f|^p + |g|^p)\, d\mu \underset{(2)}{<} \infty \Leftrightarrow f+g \in L^p(A)$$

Il caso $p = \infty$, senza dimostrazione

OSSERVAZIONE

$$\|f+g\|_{L^p(A)} \le 2^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_A |f|^p d\mu + \int_A |g|^p d\mu\right)^{1/p} \le 2^{1-\frac{1}{p}}\left(\|f\|_{L^p(A)} + \|g\|_{L^p(A)}\right)$$

se $p>1$. Di fatto $2^{1-\frac{1}{p}}$ può essere rimpiazzato con 1 (cfr. Teorema 2, sotto).

LEMMA 3 Sia $1<p<\infty$. Allora $\forall a,b \geq 0$ e $\forall \gamma \geq 1$

$$(a+b)^p \le \gamma a^p + C_p(\gamma) b^p \tag{3}$$

ove $C_p(\gamma) = \left(1-\gamma^{\frac{1}{1-p}}\right)^{1-p}$

Nota: se $\gamma = 2^{p-1}$ si ha $C_p(\gamma) = 2^{p-1}$ e la (3) diventa la (*)

Dimostrazione. Ovvio per $b=0$. Supponiamo $b>0$ e poniamo $x = \frac{a}{b}$. In tal caso la (3) diventa

$$(1+x)^p - C_p(\gamma) \le \gamma x^p$$

$$(1+x)^p - \gamma x^p \le C_p(\gamma)$$

È sufficiente verificare che $\max\limits_{x>0}\left[(1+x)^p - \gamma x^p\right] \le C_p(\gamma)$. □

Osservazione Notare che

$$\min_{\gamma>1}\left(\gamma a^p + C_p(\gamma) b^p\right) = (a+b)^p \tag{4}$$

TEOREMA 2 (Disuguaglianza di Minkowski) Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurato, $1 \le p \le \infty$, $f,g \in L^p(A)$, $A \in \mathcal{M}$. Allora

$$\|f+g\|_{L^p(A)} \le \|f\|_{L^p(A)} + \|g\|_{L^p(A)} \tag{5}$$

Dimostrazione Dalla (3), $\forall x \in A$ e $\forall \gamma > 1$ è

$$|f(x)+g(x)|^p \le (|f(x)|+|g(x)|)^p \le \gamma |f(x)|^p + C_p(\gamma)|g(x)|^p$$

Poiché $|f(x)+g(x)|^p$ è misurabile su A, si ha

$$\int_A |f(x)+g(x)|^p d\mu \le \gamma \int_A |f(x)|^p d\mu + C_p(\gamma)\int_A |g(x)|^p d\mu$$

Dunque, dalla (4),

$$\int_A |f(x)+g(x)|^p \le \min_{\gamma \ge 1} \left(\gamma \int_A |f(x)|^p d\mu + C_p(\gamma) \int_A |g(x)|^p d\mu\right)$$

$$= \min_{\gamma > 1} \left(\gamma \|f\|_{L^p}^p + C_p(\gamma) \|g\|_{L^p}^p\right)$$

$$\overset{(4)}{=} \left(\|f\|_{L^p(A)}^p + \|g\|_{L^p(A)}^p\right) \Rightarrow (5) \quad \text{per } 1 \le p < \infty$$

□

Il caso $p=\infty$ per esercizio.

TEOREMA 3 Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurato, $A \in \mathcal{M}$, $1 \le p \le \infty$.
Allora $L^p(A)$ è spazio di Banach

Dim

Sia $1 \le p < \infty$.

i. $\|f\|_{L^p(A)} \ge 0$; $\|f\|_{L^p(A)} = 0 \iff f = 0$ q.o. su A

ii. $\|\alpha f\|_{L^p(A)} = \left(\int_A |\alpha f|^p d\mu\right)^{1/p} = |\alpha| \, \|f\|_{L^p(A)}$

iii. $\|f+g\|_{L^p(A)} \le \|f\|_{L^p(A)} + \|g\|_{L^p(A)}$ (Teorema 2)

iv. Ricordiamo che la completezza di $L^p(A)$ è equivalente alla seguente proprietà:

$$f_k \in L^p(A), \, k \in \mathbb{N}, \text{ e } \sum_{k=1}^\infty \|f_k\|_{L^p(A)} < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^\infty f_k \in L^p(A)$$

Siano $\sum_{k=1}^\infty \|f_k\| = B < \infty$, $G_n = \sum_{k=1}^n |f_k|$ e $G = \sum_{k=1}^\infty |f_k|$.

Allora $0 \le G_n \le G_{n+1} \le \dots \le G$ e

$$\|G_n\|_{L^p(A)} = \left\|\sum_{k=1}^n |f_k|\right\|_{L^p(A)} \overset{T2}{\le} \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L^p(A)} \le B \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dunque, usando il teorema di Beppo Levi

$$\|G\|_{L^p}^p = \int_A G^p d\mu \overset{BL}{=} \lim_{n\to\infty} \int_A G_n^p \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \|G_n\|_{L^p(A)}^p \le B^p < \infty$$

da cui segue $G \in L^p(A)$, che implica in particolare che

$$G(x) = \sum_{k=1}^\infty |f_k(x)| < \infty \quad \text{q.o. su } A$$

Cioè la serie $F(x)=\sum_{k=1} f_k(x)$ converge assolutamente q.o. su A quindi converge q.o. su A.

Inoltre $|F(x)| \leq G(x) \Rightarrow F \in L^p(A)$ e (69)

$$|F(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)|^p \leq \left(|F(x)| + \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|\right)^p \leq (2\,G(x))^p \in L^p(A)$$

Dal teorema della convergenza dominata,

$$\lim_{n\to\infty} \|F - \sum_{k=1}^{n} f_k\|_{L^p(A)} = \left(\lim_{n\to\infty} \int_A |F(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)|^p d\mu\right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_A \lim_{n\to\infty} |F(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)|^p d\mu\right)^{1/p} = 0$$

Il caso $p=\infty$ senza dimostrazione. □

Osservazione Poiché $\|f\|_{L^p(A)} = 0$ equivale a $f=0$ q.o. su A, cioè $f \sim 0$, ma non necessariamente $f=0$, su A, come invece è richiesto nella definizione di spazio normato, a rigore $L^p(A)$ dovrebbe essere chiamato uno spazio ~~vettoriale~~ semi-normato (completo). Ma se $f \sim 0$ ai fini dell'integrazione f è indistinguibile da 0. Se, poi, $\tilde{L}^p(A)$ è lo spazio delle classi dell'equivalenza $\sim$, è un vero spazio normato (di Banach).

LEMMA 4 (Disuguaglianza di Young). Sia $1<p<\infty$, allora

$$(6) \qquad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'},$$

ove $\quad p' = \frac{p}{p-1} \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$

per ogni $a,b \geq 0$.

Dimostrazione

Il caso $b=0$ è ovvio. Altrimenti, posto $x = \frac{a}{b^{\frac{1}{p-1}}}$, si ha

$$\frac{a}{b^{p'-1}} \leq \frac{1}{p}\frac{a^p}{b^{p'}} + \frac{1}{p'} \Leftrightarrow \frac{a}{b^{\frac{1}{p-1}}} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{a}{b^{\frac{1}{p-1}}}\right)^p + \frac{p-1}{p}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \leq \frac{1}{p}x^p + 1 - \frac{1}{p}$$

Basta verificare che $\max_{x>0}\left(x - \frac{x^p}{p}\right) = \left(x - \frac{x^p}{p}\right)\Big|_{x=1} = 1 - \frac{1}{p}$ □

TEOREMA 4 (Disuguaglianza di Hölder)

Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurato, $A \in \mathcal{M}$, $1 \leq p \leq \infty$, e

$$p' = \frac{p}{p-1} \quad \text{se} \quad 1 < p \leq \infty$$
$$p' = \infty \quad \text{se} \quad p = 1$$
$$p' = 1 \quad \text{se} \quad p = \infty$$

Siano poi $f, g \in L^p(A)$, $L^{p'}(A)$ rispettivamente. Allora $fg \in L^1(A)$ e

$$\|fg\|_{L^1(A)} \leq \|f\|_{L^p(A)} \|g\|_{L^{p'}(A)}$$

Dim 1. Vediamo il caso $1 < p < \infty$. Quando sia $\|f\|_{L^p(A)} = 0 = \|g\|_{L^{p'}(A)}$ il risultato è ovvio. Assumiamo dunque $0 < \|f\|_{L^p(A)}, \|g\|_{L^{p'}(A)} < \infty$.

Poniamo in (5)

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p(A)}}, \quad b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^{p'}(A)}}$$

si ha dunque

$$\frac{|f(x)\, g(x)|}{\|f\|_{L^p(A)} \|g\|_{L^{p'}(A)}} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|^p_{L^p(A)}} + \frac{1}{p'} \frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|^{p'}_{L^{p'}(A)}} \quad \text{(Young)}$$

Poiché i due membri della disuguaglianza sono misurabili, si ha

$$\int_A \frac{|f(x)\, g(x)|}{\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}} d\mu \leq \frac{1}{p} \frac{\int_A |f(x)|^p d\mu}{\|f\|^p_{L^p}} + \frac{1}{p'} \frac{\int_A |g(x)|^{p'} d\mu}{\|g\|^{p'}_{L^{p'}}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \Rightarrow (6')$$

2. Il caso $p = 1$ ($\Rightarrow p' = \infty$). Sia $\omega \in \mathcal{M}$: $\mu(\omega) = 0$; allora

$$\|fg\|_{L^1} = \int_{A \setminus \omega} |f(x)||g(x)| d\mu \leq \sup_{x \in A \setminus \omega} |g(x)| \int_{A \setminus \omega} |f(x)| d\mu = \sup_{x \in A \setminus \omega} |g(x)| \int_A |f(x)| d\mu$$
$$= \sup_{x \in A \setminus \omega} |g(x)| \cdot \|f\|_{L^1(A)}$$

$$\Rightarrow \|fg\|_{L^1(A)} \leq \inf_{\substack{\omega \in \mathcal{M}: \\ \mu(\omega) = 0}} \sup_{x \in A \setminus \omega} |g(x)| \|f\|_{L^1(A)}$$
$$= \|f\|_{L^1(A)} \cdot \|g\|_{L^\infty(A)}$$

3. Segue da 2.
(Il caso $p=\infty$ ($\Rightarrow p'=1$)) $\square$

<u>COROLLARIO 1</u> Sia $(X,\mathcal{M},\mu)$ uno spazio misurato, $A\in\mathcal{M}$, $0<p<p_1,p_2\leq\infty$.
Se (7) $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=\frac{1}{p}$ e $f\in L^{p_1}(A)$, $g\in L^{p_2}(A)$

allora $fg\in L^p(A)$ e

$$(8)\quad \|fg\|_{L^p(A)}\leq \|f\|_{L^{p_1}(A)}\cdot\|g\|_{L^{p_2}(A)}$$

<u>OSSERVAZIONE</u> La (8) con $p=1$ è la (6').

<u>Dimostrazione</u>
Per $p<\infty$ si ha

$$\|fg\|_{L^p(A)}=\left(\int_A|fg|^p d\mu\right)^{1/p}=\left\||f|^p|g|^p\right\|_{L^1(A)}^{1/p}$$
$$\overset{(6)}{\leq}\left(\left\||f|^p\right\|_{L^{p_1/p}(A)}\cdot\left\||g|^p\right\|_{L^{p_2/p}(A)}\right)^{1/p}$$

perché $p_1/p\geq 1$ e $\frac{p}{p_1}+\frac{p}{p_2}=1$.
Quindi

$$\|fg\|_{L^p(A)}\leq\left(\left(\int_A\left(|f|^p\right)^{\frac{p_1}{p}}d\mu\right)^{\frac{p}{p_1}}\cdot\left(\int_A\left(|g|^p\right)^{\frac{p_2}{p}}d\mu\right)^{\frac{p}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$=\|f\|_{L^{p_1}(A)}\cdot\|g\|_{L^{p_2}(A)}$$

Caso $p=\infty$ ($\Rightarrow p_1=p_2=\infty$): senza dimostrazione. $\square$

<u>COROLLARIO 2</u> Siano $(X,\mathcal{M},\mu)$ uno spazio misurato, $A\in\mathcal{M}$ con $\mu(A)<\infty$, $0<p<q\leq\infty$. Allora,

$$(9)\quad L^q(A)\subset L^p(A)$$

$$(10)\quad \|f\|_{L^p(A)}\leq\mu(A)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\cdot\|f\|_{L^q(A)}\qquad\forall f\in L^q(A)$$

Dimostrazione

Dalla (8),

$$\|f\|_{L^p(A)} = \|f\cdot 1\|_{L^p(A)} \le \|f\|_{L^q(A)}\cdot\|1\|_{L^{p_2}(A)} \quad \text{ove} \quad \frac{1}{q}+\frac{1}{p_2}=\frac{1}{p}$$

$$= \mu(A)^{1/p_2}\,\|f\|_{L^q(A)}$$

che implica (10). Infine, (10) $\Rightarrow$ (9):

$$f\in L^q(A) \Rightarrow \|f\|_{L^p(A)} \le \mu(A)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\,\|f\|_{L^q(A)} < \infty \Rightarrow f\in L^p(A). \ \square$$

COROLLARIO 3. (Disuguaglianza moltiplicativa). Siano $(X,\mathcal{M},\mu)$ uno spazio misurato, $0<p_1<p<p_2\le\infty$, $A\in\mathcal{M}$. Allora, $\forall f\in L^{p_1}(A)\cap L^{p_2}(A)$,

(11) $$\|f\|_{L^p(A)} \le \|f\|^{\alpha}_{L^{p_1}(A)}\cdot\|f\|^{1-\alpha}_{L^{p_2}(A)}$$ con $\alpha\in\,]0,1[$ definita da:

(12) $$\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p_1}+\frac{1-\alpha}{p_2}$$

Dim

Poiché dalla (12) si ha $\left(\frac{p_1}{\alpha}\right)^{-1}+\left(\frac{p_2}{1-\alpha}\right)^{-1}=p^{-1}$, dalla (8) si ha

$$\|f\|_{L^p(A)} = \||f|^{\alpha}|f|^{1-\alpha}\|_{L^p(A)} \underset{(8)}{\le} \||f|^{\alpha}\|_{L^{p_1/\alpha}(A)}\cdot\||f|^{1-\alpha}\|_{L^{\frac{p_2}{1-\alpha}}(A)}$$

$$= \|f\|^{\alpha}_{L^{p_1}(A)}\,\|f\|^{1-\alpha}_{L^{p_2}(A)}$$

$\square$

Capitolo XIII - Spazi ℓ^p

DEF 1 Sia $0<p\le\infty$. Si dice che una successione $a=\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{C}$ appartiene a ℓ^p se

per $0<p<\infty$ $\quad \|a\|_{\ell^p}\equiv\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p\right)^{1/p}$ è finito

per $p=\infty$ $\quad \|a\|_{\ell^\infty}\equiv\sup_{k\in\mathbb{N}}|a_k|<\infty$

Osservazione Consideriamo lo spazio misurato $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\mu)$, ove

$$\mu=\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n$$

ove δ_n è la misura di Dirac con la massa concentrata in n. Cioè, se $A\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$,

$$\delta_n(A)=\begin{cases}1 & \text{se } n\in A\\ 0 & \text{se } n\notin A\end{cases}$$

Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ è funzione continua su $\mathbb{R}$, allora

$$\|f\|_{L^p_\mu(\mathbb{R})}=\|\{f(n)\}_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p}$$

Dunque la maggior parte dei risultati del capitolo XII è applicabile agli spazi ℓ^p. Ad esempio

TEOREMA 2' (disuguaglianza di Minkowski)
Siano $1\le p\le\infty$ e $a,b\in\ell^p$. Allora $\|a+b\|_{\ell^p}\le\|a\|_{\ell^p}+\|b\|_{\ell^p}$.

TEOREMA 3' Sia $1\le p\le\infty$. Allora ℓ^p è uno spazio di Banach.

TEOREMA 4' (disug. di Hölder) Siano $1\le p\le\infty$, $a\in\ell^p$, $b\in\ell^{p'}$. Allora, posto $ab=\{a_nb_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $ab\in\ell^1$ e $\|ab\|_{\ell^1}\le\|a\|_{\ell^p}\|b\|_{\ell^{p'}}$.

COROLLARIO 1' Siano $0<p\le p_1, p_2\le\infty$, $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=\frac{1}{p}$ e $a\in\ell^{p_1}$, $b\in\ell^{p_2}$. Allora $ab\in\ell^p$ e $\|ab\|_{\ell^p}\le\|a\|_{\ell^{p_1}}\|b\|_{\ell^{p_2}}$

COROLLARIO 3' Siano $0<p_1<p<p_2\le\infty$. Allora $\forall a\in\ell^{p_1}\cap\ell^{p_2}$,

$$\|a\|_{\ell^p}\le\|a\|_{\ell^{p_1}}^{\alpha}\,\|a\|_{\ell^{p_2}}^{1-\alpha}\qquad\text{ove } \alpha\in\,]0,1[\,:\ \frac{1}{p}=\frac{\alpha}{p_1}+\frac{1-\alpha}{p_2}$$

Tuttavia, il Teorema 1 e il corollario 2 del teorema 4 del Cap XII non sono applicabili a ℓ^p poiché $\mu(\mathbb{R}) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n(\mathbb{R}) = \infty$, e in tali proposizioni è essenziale che sia $\mu(A) < \infty$.

Si noti che esistono teoremi veri per gli spazi ℓ^p che non sono validi per gli spazi $L^p_\mu(A)$ generali. Per esempio:

TEOREMA 1 (Disuguaglianza di Jensen)

Sia $0 < p < q \leq \infty$. Allora $\ell_p \subset \ell_q$ e, $\forall a \in \ell^p$, $\|a\|_{\ell^q} \leq \|a\|_{\ell^p}$

Dimostrazione

Se $\|a\|_{\ell^p} = 1$ si ha $|a_n| \leq \|a\|_{\ell^p} = 1$ dunque $|a_n|^q \leq |a_n|^p$

e $\|a\|_{\ell^q} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^q\right)^{1/q} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/q} = 1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p} = \|a\|_{\ell^p}$

che è la tesi con $\|a\|_{\ell^p} = 1$. Esercizio: completare la dimostrazione.

Capitolo XIV - Misure con segno

DEF. 1 Sia $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile. Si dice che $\nu : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ è una misura con segno se

i. $\nu(\emptyset) = 0$

ii. $\nu(E) < +\infty$ $\quad \forall E \in \mathcal{M}$

oppure

$\nu(E) > -\infty$ $\quad \forall E \in \mathcal{M}$

iii. se $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ è successione di insiemi a due a due disgiunti,

$$\nu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j)$$

e, se $\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)$ è finito, allora $\sum_{j=1}^{\infty} |\nu(E_j)| < \infty$

ESEMPI. Ogni misura è una misura con segno; diremo misura standard ogni misura positiva.

- Se μ_1, μ_2 sono misure positive e almeno una è finita, $\nu = \mu_1 - \mu_2$ è una misura con segno
- Se μ è una misura positiva e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è μ-integrabile su X allora la funzione $\nu : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ definita da

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu \qquad \forall E \in \mathcal{M}$$

è una misura con segno

<u>LEMMA 1</u> (Continuità dall'alto e dal basso della misura con segno). Siano $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e ν una misura con segno su $\mathcal{M}$.

1. Se $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ è crescente,
$$\nu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) = \lim_{j \to \infty} \nu(E_j)$$
2. Se $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ è decrescente, e $\nu(E_1)$ è finita, allora
$$\nu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\Big) = \lim_{j \to \infty} \nu(E_j)$$

<u>DEF. 2</u> Siano $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e ν una misura con segno su $\mathcal{M}$. Si dice che un insieme $E \in \mathcal{M}$ è positivo (risp. negativo, nullo) se

$$\nu(F) \geq 0 \quad (\text{risp. } \nu(F) \leq 0, \ \nu(F) = 0)$$

perogni $F \in \mathcal{M}$ con $F \subset E$.

<u>LEMMA 2</u> Siano $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e ν una misura con segno su $\mathcal{M}$. Se $\{P_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ è successione di insiemi positivi, allora pure l'insieme $\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$ è positivo.

<u>Dimostrazione</u>

Sia $Q_n = P_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} P_j \quad \forall n \in \mathbb{N}$. La successione $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ è di insiemi a due a due disgiunti e si ha $\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$

Se $E \in \mathcal{M}$ e $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$ allora, dal lemma 1

$$\nu(E) = \nu\Big(E \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j\Big)\Big) = \nu\Big(E \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j\Big)\Big) = \nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E \cap Q_n\Big) \overset{\text{disg.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E \cap Q_n) \geq 0. \quad \square$$

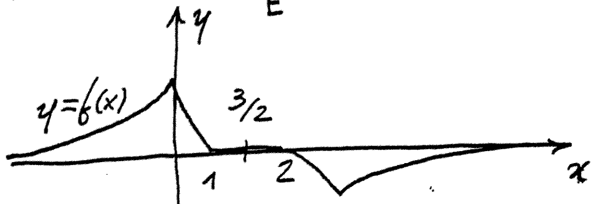
TEOREMA 1 (teorema di decomposizione di Hahn)

Sia $(X,\mathcal{M})$ uno spazio misurabile, ν una misura con segno su $\mathcal{M}$.
Allora esistono un insieme positivo $P\in\mathcal{M}$ e uno negativo $N\in\mathcal{M}$ t.c.

$$P\cup N = X \quad , \quad P\cap N=\emptyset$$

Se P', N' è un'altra coppia di tali insiemi allora $P\Delta P' = N\Delta N'$
è un insieme nullo, ove Δ indica la differenza simmetrica
$(A\Delta B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A))$.

ESEMPIO. Siano $(\mathbb{R},\mathcal{L}_{\mathbb{R}}, m)$ lo sp. mis. con la misura di Lebesgue
$f\in L^1_m(\mathbb{R})$, $\nu(E)=\int_E f\,d\mu$ $\quad\forall E\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$



$P=]-\infty,1]$, $N=]1,\infty[$
$P'=]-\infty,\frac{3}{2}]$, $N=]\frac{3}{2},\infty[$
P,P' positivi $\quad N,N'$ negativi

$\mathbb{R}=P\cup N = P'\cup N'$ con $P\cap N=\emptyset=P'\cap N'$.
$P\Delta P' = \emptyset\cup]1,\frac{3}{2}] = N\Delta N'$.
Importante: $\nu(E)=\int_E f\,d\mu = 0 \quad \forall E\subset P\Delta P'$.

Dimostrazione

Senza perdita di generalità, assumiamo che $\nu(E)<+\infty$ $\forall E\in\mathcal{M}$
(altrimenti consideriamo $-\nu$).

1. Se $A\in\mathcal{M}$, $\nu(A)>-\infty \Rightarrow \forall\varepsilon>0 \exists B\subset A$, $B\in\mathcal{M}$ t.c. $\nu(B)\ge\nu(A)$ e $\nu(E)\ge-\varepsilon$, $\forall E\subset B$, $E\in\mathcal{M}$. Infatti, altrimenti, $\forall B\subset A$, $B\in\mathcal{M}$ t.c. $\nu(B)\ge\nu(A)$ $\exists E\subset B, E\in\mathcal{M}$ t.c. $\nu(E)\le-\varepsilon$. Dunque esiste $E_1\subset A$, con $\nu(E_1)\le-\varepsilon$ $(B=A)$. Poiché $\nu(A\setminus E_1)=\nu(A)-\mu(E_1)\ge\nu(A)$, esiste $E_2\subset A$, con $\nu(E_2)\le-\varepsilon$ $\quad(B=A\setminus E_1)$, eccetera.
Dunque esistono degli insiemi $E_j\subset A$, $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{M}$, a due a due disgiunti, con $\nu(E_j)\le-\varepsilon$. Allora, se $E=\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, si ha

$$\nu(A\setminus E)=\nu(A)-\nu(E)=\nu(A)-\sum_{j=1}^{\infty}\nu(E_j)=+\infty$$

contro l'ipotesi

2. Se $A\in\mathcal{M}$, $\nu(A)>-\infty$, allora esiste un insieme positivo $P\subset A$, con $\nu(P)\ge\nu(A)$, cioè $\nu(E)\ge 0$ $\forall E\subset P$. Infatti, dal teorema 1, esistono

$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ t.c. $A_1 = A$, $A_n \subset A_{n-1}$ $\forall n \geq 2$ e $\nu(A_n) \geq \nu(A_{n-1})$ ...

e $\nu(E) \geq -\frac{1}{n}$ $\forall E \subset A_n$

Poniamo $P = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

Allora P è positivo, infatti se $E \in \mathcal{M}$, $E \subset P$, allora $E \subset A_n$ $\nu(E) \geq -\frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dunque $\nu(E) \geq 0$. Inoltre $\nu(P) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) \geq \nu(A)$ dal lemma 1

3. Poniamo $s = \sup\{\nu(A),\ A \in \mathcal{M}\}$. Allora esiste una successione $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $Q_n \in \mathcal{M}$ e $\lim_{n\to\infty} \nu(Q_n) = s$ e $\nu(Q_n) \leq s$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Dal passo 2, esisteranno $P_n \subset Q_n$ per $n \in \mathbb{N}$ tali che P_n sono positivi e $\nu(P_n) \geq \nu(Q_n)$. Allora $\lim_{n\to\infty} \nu(P_n) = s$

Poniamo $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$; allora, ~~dal~~ lemma 2, P è positivo, poiché $P_n \subset P$ e $P \in \mathcal{M}$.

$$\nu(P_n) \leq \nu(P_n) + \nu(P \setminus P_n) = \nu(P) \leq s \quad \text{dunque} \quad \nu(P) = s$$

Inoltre $N = P^c$ è negativo, Infatti, se esiste $E \subset N$ t.c. $E \in \mathcal{M}$: $\nu(E) > 0$ si ha $P \cap E = \emptyset$, dunque $\nu(P \cup E) = \nu(P) + \nu(E) > s$, assurdo.

4. Se P', N' è un altra coppia di insiemi t.c. P' è positivo e $N' = (P')^c$ è negativo, allora $P \setminus P' \subset P \Rightarrow \nu(P \setminus P') \geq 0$ ma $P \setminus P' \subset N \Rightarrow \nu(P \setminus P') \leq 0$ quindi $\nu(P \setminus P') = 0$. Allo stesso modo $\nu(P' \setminus P) = 0$ dunque $\nu(P \Delta P') = 0$

Finalmente, $P \setminus P' = P \cap (P')^c = P \cap N' = N^c \cap N' = N' \setminus N$ e, analogamente, $P' \setminus P = N \setminus N'$. Dunque è $P \Delta P' = N \Delta N'$ e $\nu(N \Delta N') = 0$

$\square$

<u>DEF 2.</u> Sia $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile, ν_1, ν_2 le misure con segno su $\mathcal{M}$. Si dice che ν_1, ν_2 sono mutuamente singolari $(\nu_1 \perp \nu_2)$ se esistono $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ tali che

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset, \quad E_1 \cup E_2 = X,$$

E_1 è nullo per ν_1, E_2 è nullo per ν_2

TEOREMA 2 (teorema di decomposizione di Jordan). Siano $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e ν una misura con segno su $\mathcal{M}$. 78
Allora esistono due uniche misure positive (ν^+, ν^-) t.c.

$$\nu = \nu^+ - \nu^-$$

$$\nu^+ \perp \nu^-$$

Dimostrazione

1 Sia $X = P \cup N$ una decomposizione di Hahn. Poniamo

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap P)$$

$$\nu^-(E) = -\nu(E \cap N)$$

$\forall E \in \mathcal{M}$. Allora $\nu(E) = \nu((E \cap P) \cup (E \cap N)) = \nu(E \cap P) + \nu(E \cap N)$
$= \nu^+(E \cap P) - \nu^-(E \cap N) \Rightarrow \nu = \nu^+ - \nu^-$. e, se $E \subset P$
Anche se $N \supset E$, $\nu^+(E) = \nu(E \cap P) = \nu(\emptyset) = 0$
$\nu^-(E) = 0$ analogamente. Quindi $\nu^+ \perp \nu^-$.

2 (unicità) Assumiamo che μ^+, μ^- è un'altra coppia di misure positive t.c. $\nu = \mu^+ - \mu^-$ e $\mu^+ \perp \mu^-$.
Siano $G, H \in \mathcal{M}$ con $G \cap H = \emptyset$, $G \cup H = X$ t.c. H è nullo per ν^+ e G per ν^-. Allora, per ogni $E \in \mathcal{M}$ si ha

$$\nu(E) = \mu^+(E) = \mu^-(E) = \begin{cases} \mu^+(E) \geq 0 & \text{se } E \subset G \\ -\mu^-(E) \leq 0 & \text{se } E \subset H \end{cases}$$

Quindi anche $G \cup H = X$ è una decomposizione di Hahn. Allora, dal teorema 1, $P \Delta G$ è nullo. Pertanto, $\forall E \in \mathcal{M}$

$$\mu^+(E) = \mu^+((E \cap G) \cap (E \setminus G)) = \mu^+(E \cap G) + \mu^+(E \setminus G) = \mu^+(E \cap G) \quad (E \setminus G \subset P \Delta G)$$

$$= \nu(E \cap G) \quad + \nu((E \cap (G \setminus P)) \cup (E \cap (G \cap P)))$$

$$= \nu(E \cap (G \setminus P)) + \nu(E \cap G \cap P) = \nu(E \cap G \cap P) = \nu((E \cap P) \setminus (E \cap (P \setminus G)))$$

$$= \nu(E \cap P) - \nu(E \cap (P \setminus G)) = \nu(E \cap P) = \nu^+(E)$$

dunque $\mu^+(E) = \nu^+(E)$, ugualmente, $\mu^-(E) = \nu^-(E)$ $\forall E \in \mathcal{M}$. □

DEF 3 Si dice che ν^+, ν^- sono risp. la variazione positiva e negativa di ν.
Si dice anche che la misura positiva $|\nu|$ su $\mathcal{M}$ definita da

$$|\nu| = \nu^+ + \nu^-$$

è la variazione totale di ν.

TEOR. 3 Siano $(X, \mathcal{M})$ sp. mis., ν una misura con sgn su $\mathcal{M}$ e $E \in \mathcal{M}$. Allora

(a) $\nu^+(E) = \sup \{\nu(F) : F \in \mathcal{M}, F \subset E\}$

(b) $\nu^-(E) = -\inf \{\nu(F) : F \in \mathcal{M}, F \subset E\}$

(c) $|\nu|(E) = \sup \{ \sum_{j=1}^{n} |\nu(E_j)| : E_1, \dots, E_n \in \mathcal{M}$ a due a due disgiunti, $\bigcup_{j=1}^{n} E_j = E \}$.

ESEMPIO Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurato, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funzione in $L^1_\mu(X)$, con

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu \qquad \forall E \in \mathcal{M}$$

$$P = \{x \in X : f(x) \geq 0\}, \quad N = P^c.$$

Allora $\nu^+(E) = \int_{E \cap P} f \, d\mu$, $\nu^-(E) = -\int_{E \cap N} f \, d\mu$, $|\nu|(E) = \int_E |f| \, d\mu$

DEF 4 Siano $(X, \mathcal{M})$ uno sp. misurabile, ν una misura con segno e $A \in \mathcal{M}$.
Allora $L^1_\nu(A) \equiv L^1_{\nu^+}(A) \cap L^1_{\nu^-}(A)$

e, per ogni $f \in L^1_\nu(A)$,

$$(1) \qquad \int_A f d\nu = \int_A f \, d\nu^+ - \int_A f d\nu^-$$

OSS La (1) implica che

$$\left| \int_A f d\mu \right| \leq \int_A |f| \, d|\nu|$$

(In [F], p. 83, c'è un errore di stampa). Infatti

$$\left| \int_A f d\mu \right| \leq \left| \int_A f \, d\nu^+ \right| + \left| \int_A f d\nu^- \right| \leq \int_A |f| d\nu^+ + \int_A |f| \, d\nu^- = \int_A |f| d(\nu^+ + \nu^-) = \int_A |f| d|\nu|$$

CAPITOLO XV - Teorema di Radon-Nikodym

DEF 1 Siano $(X, \mathcal{M})$ uno sp. misurabile, ν una misura con segno su $\mathcal{M}$ e μ una misura positiva su $\mathcal{M}$. Si dice che ν è assolutamente continua rispetto a μ, brevemente $\nu \ll \mu$, se

$$E \in \mathcal{M}, \mu(E)=0 \Rightarrow \nu(E)=0$$

ESEMPI

1) Siano $f \in L^1_\mu(X)$ e ν la misura con segno definita da

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

Allora ovviamente $\nu \ll \mu$. Infatti se $\mu(E)=0$, si ha $\nu(E)=0$.

2) Siano $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}, m^n)$ lo spazio misurato con la misura di Lebesgue m^n, $x \in \mathbb{R}^n$ e δ_x la misura di Dirac con la massa concentrata in x. Allora δ_x non è assolutamente continua rispetto a m^n. Infatti $m^n(\{x\})=0$ mentre $\delta_x(\{x\})=1$. Inoltre $\delta_x \perp m^n$ perché $\mathbb{R}^n = \{x\} \cup \{x\}^c$, $\{x\}$ è un insieme m^n-nullo, e $\{x\}^c$ è un insieme δ_x-nullo. Infatti se $E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ con $E \subset \{x\}$, allora $E=\{x\}$ oppure $E=\emptyset$ e $m^n(E)=0$. Se $E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ e $E \subset \{x\}^c$ allora $\delta_x(E)=0$.

ESERCIZIO Provare che

$$\nu \ll \mu \Leftrightarrow |\nu| \ll \mu \Leftrightarrow \nu^+ \ll \mu \text{ e } \nu^- \ll \mu$$

TEOREMA 1 Siano $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile, ν una misura con segno su $\mathcal{M}$, μ una misura positiva su $\mathcal{M}$. Allora

$\nu \ll \mu \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.c., per ogni $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) < \delta$, si ha $|\nu(E)| < \varepsilon$.

dimostrazione

"$\Leftarrow$" Se $\mu(E)=0$, allora $\mu(E) < \delta \ \forall \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ dunque $|\nu(E)| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$ quindi $\nu(E)=0$.

"$\Rightarrow$" Dall'esercizio si ha che $|\nu| \ll \mu$. Assumendo il contrario della tesi, $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mu(E_n) < 2^{-n}$ e $|\nu(E_n)| \geq \varepsilon$. Poniamo $F_k = \bigcup_{n=k+1}^\infty E_n$ e $F = \bigcap_{k=1}^\infty F_k$.

Allora $\mu(F_k) \leq \sum_{n=k+1}^\infty \mu(E_n) = \sum_{n=k+1}^\infty 2^{-n} = 2^{-k}$ e $F_k \subset F_{k-1} \quad \forall k \geq 1$

dunque da un lato $\mu(F) = \lim_{k\to\infty} \mu(F_k) = 0$

dall'altro $|\nu(F_k)| \geq |\nu(E_{k+1})| \geq \varepsilon \quad (F_k \supset E_{k+1})$

e $|\nu|(F) = \lim_{k\to\infty} |\nu|(F_k) \geq \varepsilon$, $\exists \varepsilon > 0$, contro l'ipotesi $|\nu| \ll \mu$. □

COROLLARIO (Continuità assoluta dell'integrale) Siano $(X,\mathcal{M},\mu)$ uno sp. misurato, $A\in\mathcal{M}$ e $f\in\mathcal{L}^1_\mu(A)$. Allora, per ogni $\varepsilon>0$, esiste $\delta>0$ tale che per ogni $E\in\mathcal{M}$, $E\subset A$, con $\mu(E)<\delta$ si ha

$$\left|\int_E f\,d\mu\right|<\varepsilon$$

Dimostrazione

Segue perché la misura con segno ν definita su $\mathcal{M}$ da $\nu(E)=\int_E f\,d\mu\ \forall E\in\mathcal{M}$ soddisfa $\nu\ll\mu$ (Esempio 1). □

TEOREMA 2 (di Radon-Nikodym) Siano $(X,\mathcal{M})$ uno sp. mis, ν una misura con segno, μ una misura positiva su $\mathcal{M}$; se entrambe ν,μ sono σ-finite esistono due uniche misure λ,ρ su $\mathcal{M}$ con segno, σ-finite e tali che

$$\nu=\lambda+\rho$$
$$\lambda\perp\mu$$
$$\rho\ll\mu$$

Inoltre esiste una funzione $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ $\mathcal{M}$-misurabile, unica a meno di una modifica su un insieme di μ-misura nulla, tale che

$$(1)\qquad \rho(E)=\int_E f\,d\mu\quad\forall E\in\mathcal{M}$$

(Brevemente, $d\rho=f\,d\mu$).

Dimostrazione parziale (Costruzione di f). Assumiamo che ν,μ siano finite e ν sia positiva. Poniamo $\mathcal{F}=\{f:X\longrightarrow[0,+\infty[\ :\ \int_E f\,d\mu\le\nu(E)\ \forall E\in\mathcal{M}\}$

Notare che se $f,g\in\mathcal{F}$ si ha $h=\max_{(\text{pointw})}\{f,g\}\in\mathcal{F}$, infatti, se

$$A=\{x\in A:\ f(x)>g(x)\}$$

per ogni $E\in\mathcal{M}$, $\int_E h\,d\mu=\int_{E\cap A}f\,d\mu+\int_{E\cap A^c}g\,d\mu\le\nu(E\cap A)+\nu(E\setminus A)=\nu(E)$.

Sia $a=\sup\left\{\int_X f\,d\mu\ \middle|\ f\in\mathcal{F}\right\}$; allora $a\le\nu(X)<\infty$ (per hp) ed esistono $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{F}$ t.c. $\lim_{n\to\infty}\left[\int_X f_n\,d\mu\right]=a$ (def. di sup).

Siano ora $g_n=\max\{f_1,\dots,f_n\}$ ($\in\mathcal{F}$ (visto)) e $f=\sup_{n\in\mathbb{N}}f_n$; allora

$$\int_X f_n\,d\mu\le\int_X g_n\,d\mu\le a$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty}\int_X g_n\,d\mu=a$$

Poiché $\lim_{n\to\infty}g_n=f$ e $g_n\le g_{n+1}$ dal teorema di convergenza monotona si ha

$f \in \mathcal{F}'$ e $\int_X f d\mu = a$

Poniamo $\nu(E) = \int_E f d\mu$, $E \in \mathcal{M}$.

(Il resto è senza dimostrazione).

OSSERV. Si dice che f in (1) è la derivata di ν rispetto a μ, brevemente
$$f = \frac{d\nu}{d\mu}$$

DEF 2 Siano $-\infty < a < b < +\infty$ e $F: [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ funzione. Allora F si dice assolutamente continua se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tale che, per ogni famiglia finita di intervalli
$$(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) \subset [a,b]$$
a due a due disgiunti e tali che
$$\sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) < \delta,$$
si ha
$$\sum_{j=1}^{n} |F(b_j) - F(a_j)| < \varepsilon$$

TEOREMA 3 (Teorema fondamentale del calcolo integrale di Lebesgue)

Se $-\infty < a < b < +\infty$ e $F: [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti

(i) F è assolutamente continua

(ii) F' esiste q.o. su $[a,b]$, $F' \in L^1_m([a,b])$ e $\forall x \in [a,b]$ $\int_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a)$

Dim

(ii) $\Rightarrow$ (i) Dal Corollario al Teorema 1

(i) $\Rightarrow$ (ii) senza dim.

ESERC. Provare che esiste una funzione $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ tale che F' esiste q.o. su $[a,b]$, $F'\in L^1_m([a,b])$ ma $\int_a^b F'(t)\,dm(t)\neq F(b)-F(a)$.

DEF3 Siano $(X,\mathcal{M})$ uno sp. mis. Si dice che una funzione $\nu:\mathcal{M}\to\mathbb{C}$ è una misura complessa se

i) $\nu(\emptyset)=0$

ii) $|\nu(E)|$ è finito $\forall E\in\mathcal{M}$

iii) se $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{M}$ di el. a 2 a 2 disg $\Rightarrow \nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\nu(E_j)$

e $\sum_{j=1}^{\infty}|\nu(E_j)|<\infty$

OSS Le proprietà di una misura complessa seguono da quelle delle misure con segno perché

$$\nu=\operatorname{Re}\nu+i\operatorname{Im}\nu$$

cioè $\nu(E)=\operatorname{Re}(\nu(E))+i\operatorname{Im}(\nu(E))\quad\forall E\in\mathcal{M}$, ove $\operatorname{Re}\nu,\operatorname{Im}\nu$ sono misure con segno.