

Def. 2 Sia $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione crescente e

(35)

continua a destra. L'insieme $\mathcal{M}_F(\mathbb{R})$ dei
misurabili alla SL e la misura $\mu_F^{(SL)}: \mathcal{M}_F(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$
sono definiti da:

$$1 \quad \mu_F^{(SL)}(\emptyset) = 0$$

2 Se $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ allora

$$\mu_F^{(SL)}(]a, b[) = F(b^-) - F(a^+) = \quad (!) (]a, b[\text{ aperto})$$

$$= F(b^-) - F(a) \quad (F \text{ continua a destra})$$

Se $a \in \mathbb{R}$ allora

$$\mu_F^{(SL)}(\{a\}) = F(a) - F(a^-)$$

Se $a \in \mathbb{R}$ allora

$$\mu_F^{(SL)}(]a, +\infty[) = F(+\infty) - F(a^+) = F(+\infty) - F(a)$$

Se $b \in \mathbb{R}$ allora

$$\mu_F^{(SL)}(]-\infty, b[) = F(b^-) - F(-\infty)$$

3 Se $-\infty < a \leq b < +\infty$ allora

$$\mu_F^{(SL)}([a, b]) = F(b^+) - F(a^-) = \quad (!)$$

$$= F(b) - F(a^-)$$

In particolare, se $a \in \mathbb{R}$ allora

$$\mu_F^{(SL)}(\{a\}) = F(a) - F(a^-)$$

4 Se U è aperto di $\mathbb{R}$, cioè U è l'unione
finita o numerabile di intervalli aperti limitati
o non limitati, o 2 a 2 disgiunti

$$U = \bigcup_i]a_i, b_i[$$

allora

$$\mu_F^{(SL)}(U) = \sum_i \mu_F^{(SL)}([a_i, b_i[).$$

5. Se K è compatto in $\mathbb{R}$, cioè esiste $[a, b]$ con $-\infty < a < b < +\infty$ (chiuso e limitato) e un aperto U t.c.
 $K = [a, b] \setminus U$

allora

$$\mu_F^{(SL)}(K) = \mu_F^{(SL)}([a, b]) - \mu_F^{(SL)}(U).$$

6. $\mathcal{M}_F(\mathbb{R})$ è l'insieme di tutti gli insiemi $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ per cui

$$\inf \{ \mu_F^{(SL)}(U) : U \text{ è aperto di } \mathbb{R}, A \subset U \} = \\ = \sup \{ \mu_F^{(SL)}(K) : K \text{ è compatto di } \mathbb{R}, K \subset A \}.$$

7. Per ogni $A \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R})$ (dunque $\inf = \sup$) la misura $\mu_F^{(SL)}(A)$ è definita da (1) (del Teorema 3).

~~osservazione~~ Se $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ allora

$$\mu_F^{(SL)}([a, b]) = F(b) - F(a),$$

$$\begin{aligned} \text{perché } \mu_F^{(SL)}([a, b]) &= \mu_F^{(SL)}([a, b[\cup \{b\}) = \\ &= \mu_F^{(SL)}([a, b[) + \mu_F^{(SL)}(\{b\}) = F(b^-) - F(a) + F(b) - F(b^-) = \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

~~Se F è continua~~ Se F è continua allora

$$\begin{aligned} \mu_F^{(SL)}([a, b[) &= \mu_F^{(SL)}([a, b]) = \mu_F^{(SL)}([a, b[) = \\ &= \mu_F^{(SL)}([a, b]) = F(b) - F(a), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b. \end{aligned}$$

In particolare,

$$\mu_F^{(SL)}(\{a\}) = 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

CAPITOLO 5: LA MISURA DI LEBESGUE SU $\mathbb{R}$

Def. 1. Se $F(x) = \text{Id}(x) = x$ diremo

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}} = \mathcal{M}_{\text{Id}}(\mathbb{R})$$

la σ -algebra dei misurabili di Lebesgue
($\Leftrightarrow$ m-misurabili) e

$$m = \mu_{\text{Id}}^{(GL)}$$

la misura di Lebesgue, l'unica misura su $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ t.c. $m([a, b]) = b - a$, $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b$.

Essendo $F = \text{Id}$ continua,

$$m(\{x\}) = 0, \quad m([a, b[) = m([a, b]) = m([a, b[) = \\ = m([a, b]) = b - a, \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ con } a < b$$

Consideriamo alcune proprietà della misura di Lebesgue m .

Teorema 1.

Siano $\lambda \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau \neq 0$. Allora.

$$(i) \quad \lambda + \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

$$(ii) \quad \tau \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

$$(iii) \quad \lambda + \mathcal{L}_{\mathbb{R}} = \mathcal{L}_{\mathbb{R}} \quad \text{e} \quad m(\lambda + E) = m(E), \\ \forall E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}} (\supset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \text{, in particolare, quindi, vale } \forall E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

$$(iv) \quad \tau \mathcal{L}_{\mathbb{R}} = \mathcal{L}_{\mathbb{R}} \quad \text{e} \quad m(\tau E) = |\tau| m(E), \\ \forall E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}} (\supset \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$$

$$\text{Se } \tau = -1, \quad m(-E) = m(E).$$

dim. (i) Sia $s \in \mathbb{R}$ fisso

$$s +]a, b[=]s+a, s+b[$$

$\forall a, b : -\infty < a < b < +\infty$, un insieme

$U \subset \mathbb{R}$ è aperto se e solo se l'insieme $s+U$ è aperto

Infatti se U è aperto allora U è unione finita o numerabile di intervalli aperti (limitati o non limitati) a 2 a 2 disgiunti:

$$U = \bigcup_i]a_i, b_i[= \bigcup_i (s +]a_i, b_i[)$$

Allora $s+U = s + \bigcup_i]a_i, b_i[= \bigcup_i]s+a_i, s+b_i[$,
dunque $s+U$ è aperto.

Poiché s è arbitrario e U è un insieme aperto arbitrario se $s+U$ è aperto allora

$$U = (-s) + \underbrace{(s+U)}_{\text{aperto, per ipotesi}}$$

è aperto.

Dunque,

$$s + \mathcal{T}_{\mathbb{R}} = \{ s+U : U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}} \} = \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$$

Si noti che $s + \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ è una σ -algebra. Infatti

1) se $B \in s + \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow B = s+A$ con $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$
allora

$$B^c = (s+A)^c = s + \underbrace{A^c}_{\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}} \in s + \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, poiché $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ è σ -algebra

(Esercizio... Provere che $(s+A)^c = s+A^c$).

2) Se $B_j \in s + \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow B_j = s+A_j$ con
 $A_j \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ allora

$$\bigcup_j B_j = \bigcup_j (s+A_j) = s + \underbrace{\bigcup_j A_j}_{\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}} \in s + \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, poiché $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ è σ -algebra

Poiché $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{M}(\mathcal{I}_{\mathbb{R}})$, cioè $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ è la minima

σ -algebra che contiene $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$ si ha

$$\mathcal{I}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \quad \text{dunque} \quad s + \mathcal{I}_{\mathbb{R}} \subset s + \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

$$\text{e } \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{M}(\mathcal{I}_{\mathbb{R}}) = \mathcal{M}(s + \mathcal{I}_{\mathbb{R}}) \subset \overbrace{\mathcal{M}(s + \mathcal{B}_{\mathbb{R}})}^{\sigma\text{-algebra}} = s + \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

$$\text{cioè } \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset s + \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

Così, poiché $s \in \mathbb{R}$ è arbitrario,

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset -s + \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

dunque

$$s + \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset s + (-s + \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

Unendo,

$$s + \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

(ii) Analogamente

(iii) (a) Poniamo per definizione

$$m_s(E) = m(s + E), \quad \forall E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

$$(\text{EES } s + E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$$

per (i), quindi è ben def.)

Allora m_s è una misura su $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Infatti se $E_j \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ sono a 2 a 2 disgiunti allora

$$\begin{aligned} m_s\left(\bigcup_j E_j\right) &= m\left(s + \bigcup_j E_j\right) = m\left(\bigcup_j (s + E_j)\right) = \\ &= \sum_j m(s + E_j) = \sum_j m_s(E_j) \end{aligned}$$

m misura
a 2 a 2 disgiunti
e in $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

$$\text{Inoltre, } m_s([a, b]) = m(s + [a, b]) = m([s+a, s+b]) =$$

$$= s+b - (s+a) = b-a = m([a, b]),$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a < b.$$

Dunque, per l'unicità della misura di Lebesgue

$$\text{si ha } m(s+E) = m(E), \quad \forall E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

(b) Sia $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, $m(A) = 0$, $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ e $B \subset A$.
 Poiché dal Teorema 2 del cap. 4, $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ è un
 complemento di $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e la misura m su $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$
 è un complemento di $m|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}$ si ha

(38)

$$B \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}} \text{ e } m(B) = 0.$$

(c) Sia $E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$. Allora esistono $F \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e
 $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ t.c. esiste $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ con $m(A) = 0$ e
 $B \subset A$ t.c.
 $E = F \cup B$

Allora

$$\begin{aligned} \sigma + E &= \sigma + (F \cup B) = \underbrace{(\sigma + F)}_{\substack{\cap \\ \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \text{ per (i)}}} \cup \underbrace{(\sigma + B)}_{\substack{\cap \\ A \\ \sigma + A \\ \cap \\ \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \\ \text{e } m(\sigma + A) = m(A) = 0 \\ \downarrow \\ A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}}}_{\substack{\cap \\ \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \\ \text{e } m(\sigma + A) = m(A) = 0 \\ \downarrow \\ A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}}} \end{aligned}$$

dunque

$$\sigma + E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}, \quad \forall E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}, \quad \text{cioè}$$

$$\sigma + \mathcal{L}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$$

Analogamente,

$$-\sigma + \mathcal{L}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}},$$

dunque

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}} = \sigma + (-\sigma + \mathcal{L}_{\mathbb{R}}) \subset \sigma + \mathcal{L}_{\mathbb{R}}.$$

$$\text{Quindi, } \sigma + \mathcal{L}_{\mathbb{R}} = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}.$$

(d) Inoltre ($E = F \cup B$)

$$\underline{m(F)} \leq \underline{m(E)} \leq m(F) + \underbrace{m(B)}_0 = \underline{m(F)}$$

e

$$\begin{aligned} \underline{m(F)} &= \underline{m(\sigma + F)} \leq \underline{m(\sigma + E)} \leq m(\sigma + F) + \underbrace{m(\sigma + B)}_0 = \\ &\quad \uparrow \\ &\quad F \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \\ &= m(\sigma + F) = \underline{m(F)}. \end{aligned}$$

Quindi,

$$m(\sigma + E) = m(F) = \underline{m(E)}.$$

(iv) Analogamente.

CVD

Lemma 1 (cardinalità di $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$).

(i) $\text{card } \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = c$ (continuo)

(ii) $\text{card } \mathcal{L}_{\mathbb{R}} = \text{card } \mathcal{P}(\mathbb{R}) = 2^c > c$

dim. (i) vedi [Folland, C.1 p. 28-29].

(ii) Poiché ogni sottoinsieme dell'insieme di Cantor

C è misurabile alla Lebesgue ($m(C) = 0$ ed

m è completa $\Rightarrow$ ogni sottoinsieme di C è mis. alla Lebesgue).

si ha che

$\mathcal{P}(C) \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ $\downarrow$ $\exists$ un dato ogni sottoinsieme di C $\forall E \subset \mathbb{R} \setminus C$
con $B \subset C$ ($m(C) = 0$) $\in$
 $B \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$

Poiché $\text{card } C = c$ allora $\text{card } \mathcal{P}(C) = 2^c = \text{card } \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Dunque, $\text{card } \mathcal{L}_{\mathbb{R}} = 2^c$.

CVD

Def. 1. Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ spazi misurati. Consideriamo l'insieme

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{i=1}^m \Pi_i \times \Pi_i, \quad \Pi_i \in \mathcal{M}, \Pi_i \in \mathcal{N}, \quad (\Pi_i \times \Pi_i) \cap (\Pi_j \times \Pi_j) = \emptyset \text{ se } i \neq j \right\}$$

Si dice che $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ è la σ -algebra generata da $\mathcal{A}$.

Esempio



$$\Pi_3 \cap \Pi_4 \neq \emptyset$$

$$\Pi_1 \cap \Pi_2 \neq \emptyset$$

Notiamo che Π_i (risp. Π_i) non sono necessariamente a 2 a 2 disgiunti.

Sia per ogni

$$A = \bigcup_{i=1}^m \Pi_i \times \Pi_i \in \mathcal{A}$$

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^m \mu(\Pi_i) \nu(\Pi_i) = \sum_{i=1}^m \mu(\Pi_i \times \Pi_i)$$

Allora $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ è una premisura su $\mathcal{A}$. La dim. è simile alla dim. del Teorema 1, cap. 3.

Questa premisura genera una misura esterna

$$\mu^* : \mathcal{P}(X \times Y) \longrightarrow [0, +\infty]$$

che prolunga π su $\mathcal{P}(X \times Y)$.

Def. 2. Diremo la restrizione della misura esterna

μ^* sulla σ -algebra $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ misura prodotto $\mu \times \nu$, cioè

$$\mu \times \nu = \mu^*|_{\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}}$$

Osservazione Siano μ e ν σ -finite, cioè

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i, \quad X_i \in \mathcal{M}, \quad \mu(X_i) < \infty$$

$$Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i, \quad Y_i \in \mathcal{N}, \quad \nu(Y_i) < \infty$$

Unindi, la premisura π è σ -finita. Infatti

$$X \times Y = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} (X_i \times Y_j)$$

e

$$\pi(X_i \times Y_j) = \mu(X_i) \nu(Y_j) < \infty.$$

Dunque, dal Teorema 3 del cap. 2, $\mu \times \nu$ è unica misura su $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ t.c.

$$(\mu \times \nu)(M \times N) = \mu(M) \nu(N),$$

$$\forall M \in \mathcal{M}, N \in \mathcal{N}$$

Inoltre siano

$(X_i, \mathcal{H}_i, \mu_i)$, $i = 1, \dots, m$ spazi misurati

La misura prodotto $\mu_1 \times \mu_2 \times \dots \times \mu_m$ è definita analogamente a $\mu \times \nu$, cioè

$$\mu_1 \times \mu_2 \times \dots \times \mu_m = \mu^*|_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_m}$$

ove μ^* è la misura esterna generata dalla premisura Π definita da

$$\Pi(A) = \Pi\left(\bigcup_{i=1}^m (\Pi_{1i} \times \dots \times \Pi_{mi})\right) = \sum_{i=1}^m \mu_1(\Pi_{1i}) \dots \mu_m(\Pi_{mi})$$

se $\Pi_{ki} \in \mathcal{H}_k$, $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, m$ e
 $(\Pi_{1i} \times \dots \times \Pi_{mi}) \cap (\Pi_{1j} \times \dots \times \Pi_{mj}) = \emptyset$ se $i \neq j$.

Def. 3. La misura di Lebesgue m^n su $\mathbb{R}^n$ è
 il completamento della misura prodotto $\underbrace{m \times \dots \times m}_n$
 ove m è la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$ e
 la σ -algebra $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ dei misurabili alla Lebesgue
 è il completamento di $\underbrace{\mathcal{L}_{\mathbb{R}} \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_{\mathbb{R}}}_n$.

Osservazione. Se le misure μ e ν sono complete
 la misura prodotto $\mu \times \nu$ in generale non è completa.
 In particolare, la misura $m \times m$ non è completa.
 Infatti

supponiamo che $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, $m(A) = 0$,

$B \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, $B \subset [0, 1]$. Allora

$A \times B \notin \mathcal{L}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ ma

$A \times B \subset H = A \times [0, 1] \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ e

$$(m \times m)(\Pi) = m(A) \cdot m([0,1]) = 0.$$

Esercizi

Sia C l'insieme di Cantor. Ricordiamo che

$$C = [0,1] \setminus A, \quad A = \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i[$$

ove

$$]a_1, b_1[=]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[, \quad]a_2, b_2[=]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[, \quad]a_3, b_3[=]\frac{1}{27}, \frac{2}{27}[,$$

Ricordiamo che

$$f_C(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}, & a_n = \frac{b_n}{2} \\ f_C(a_i) & \text{se } x \in]a_i, b_i[\\ \text{(costante su }]a_i, b_i[) \end{cases} \quad \text{se } x \in C \Leftrightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n} \quad \text{ove } b_n \in \{0,2\} \quad (\Rightarrow a_n \in \{0,1\})$$

è la funzione di Cantor.

Alcune proprietà di f_C :

$$f_C(C) = [0,1] \quad (\text{ovv. } f_C: C \rightarrow [0,1] \text{ è suriettiva})$$

Segue perché ogni $y \in [0,1]$ ammette la rappresentazione binaria

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}, \quad a_n \in \{0,1\}$$

Dimunque

$$y = f_C(x), \quad \text{ove } x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n}$$

$$\text{se } x \in A \text{ allora } f_C(x) = 1, \quad f_C(x) = 0$$

E' anche $f_C([0,1]) = [0,1]$ (e quando poiché $C \subset [0,1]$, f_C non è suriettiva)

Segue dalla def. di f_C

Inoltre, f_C è una funzione crescente

Se $0 \leq x \leq y \leq 1$ dalla def. $f_C(x) \leq f_C(y)$

Infatti se $x, y \in C$ e $x < y$ allora $f_C(x) < f_C(y)$

e se $x, y \in]a, b[$, $x < y$, allora $f_c(x) = f_c(y)$.

(4)

Perché $f_c([0, 1]) = [0, 1]$ ^(suriettiva) e f_c è una funzione crescente segue che f_c è una funzione continua (nessun salto).

Se $x \in [0, 1] \setminus C \Rightarrow x \in]a, b[$ per un certo ϵ allora

$$f'_c(x) = 0.$$

Dunque $f'_c = 0$ q.o. su $[0, 1] \Rightarrow m\{x \in [0, 1] \mid \text{non è vero che } f'_c(x) = 0\} = m(C) = 0.$

* ~~Soluzione~~ Esiste un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che è Lebesgue misurabile ma non Borelliano, cioè

$$B_{\mathbb{R}} \subset L_{\mathbb{R}}, \quad B_{\mathbb{R}} \neq L_{\mathbb{R}}$$

Soluzione 1. Segue perché $\text{card } B_{\mathbb{R}} = c$, $\text{card } L_{\mathbb{R}} = 2^c > c$.

Soluzione 2. (la costruzione diretta).

Sia $F: [0, 1] \rightarrow [0, 2]$ definita da

$$\underline{F(x) = f_c(x) + x.}$$

La funzione F è strettamente crescente (f_c cresc. e x strett. cresc.), è continua (f_c continua, x continua) e quindi è una funzione biettiva ($\Leftrightarrow$ iniettiva e suriettiva). Inoltre $F([0, 1]) = [0, 2]$.

Allora F mappa borelliani in $[0, 1]$ in borelliani in $[0, 2]$ (senza dim.).

Inoltre,

$$m(F(C)) \geq m(f_C(C)) = m([0,1]) = 1$$

Poiché $m(F(C)) > 0$ ^{tipo Vitali (la costruzione si può ripetere su ogni insieme di misura > 0)} esiste un insieme $\Pi \subset F(C)$ non misurabile alla Lebesgue. Consideriamo l'insieme

$$A = F^{-1}(\Pi)$$

Allora $A \subset C$ (perché $\Pi \subset F(C)$), dunque $m(A) = 0$ perché la misura di Lebesgue è completa.

Ma A non è un insieme borelliano, altrimenti $F(A) = \Pi$ è borelliano e dunque Lebesgue misurabile.

5. Misure di Stieltjes - Lebesgue

~~Esiste~~ E' vero o falso che comunque si scelgono F_1, F_2 monotone crescenti e continue a destra si ha che

$$\mathcal{M}_{F_1}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{F_2}(\mathbb{R}) \quad ?$$

Soluzione. Falso!

Esempio:

$$F_1(x) = x, \quad F_2(x) = \chi_{[0, \infty[}(x)$$

Infatti:

$$\mu_{F_1}^{(GL)} = m, \quad \mathcal{M}_{F_1}(\mathbb{R}) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$$

Consideriamo la delta misura di Dirac concentrata in $0 - \delta_0$:

$$\delta_0(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } A \subset \mathbb{R}, A \ni 0 \\ 0 & \text{se } A \subset \mathbb{R}, A \not\ni 0 \end{cases}$$

(!) δ_0 è definita su $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ed è una misura.

Consideriamo

$$G(x) = \mathbb{D}_0(-\infty, x]) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

funzione cumulativa di distribuzione di $\mathbb{D}_0$ ($\mathbb{D}_0$ è finita su ogni intervallo superiormente limitato).

Dunque,

$$G(x) = \chi_{[0, \infty[}(x) = F_2(x).$$

Dunque, $\mathcal{M}_{F_2}(\mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{L}_{\mathbb{R}}.$

**

~~Lipshitziana~~

Sia $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotona crescente e continua a destra. Supponiamo che F sia Lipschitziana, iniettiva e che l'inversa (definita su $F(\mathbb{R})$) sia pure Lipschitziana.

Allora

$$\mathcal{M}_F(\mathbb{R}) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}} \quad (= \mathcal{M}_{\text{Id}}(\mathbb{R})).$$

Soluzione Ricordiamo che F è bilipschitziana

se e solo se esistono $K_1, K_2 > 0$ t.c.

$$\underbrace{K_1 |x-y|}_{\substack{\text{l'inversa} \\ \text{è Lips.}}} \leq \underbrace{|F(x) - F(y)|}_{\substack{F \text{ è} \\ \text{Lips.}}} \leq \underbrace{K_2 |x-y|}_{\text{da } x, y} \quad \text{con } K_1, K_2 \text{ indipendenti}$$

Basta dim. che sono equivalenti

$$\mu_F^{(SL)}(A) = 0 \iff m(A) = 0.$$

Ricordiamo che $\mathcal{M}_F(\mathbb{R})$ è un complemento di $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, cioè

$$E \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R}) \iff E = F \cup A, \text{ ove } F \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \text{ e } \mu_F^{(SL)}(A) = 0.$$

Analogamente,

$$E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}} = \mathcal{M}_{\text{Id}}(\mathbb{R}) \iff E = F \cup A, \text{ ove } F \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \text{ e}$$

Ricordiamo che $\mu_F^{(SL)}(U)$

$$\mu_F^{(SL)}(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F^{(SL)}(]a_i, b_i[) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i[\right\} =$$

$$= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (F(b_i) - F(a_i)) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i[\right\}$$

Poiché F è b_i -Lipschitziana, per certi $K_1, K_2 > 0$

$$K_1(b_i - a_i) \leq |F(b_i) - F(a_i)| \leq K_2(b_i - a_i), \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

$$F(b_i) - F(a_i) \quad (F \text{ crescente})$$

(!) K_1, K_2 sono indipendenti da i .

Quindi,

$$K_1 \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (F(b_i) - F(a_i)) \leq K_2 \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i)$$

$$\forall]a_i, b_i[: A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i[$$

Quindi,

$$K_1 \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i[\right\} \leq$$

$$\leq \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (F(b_i) - F(a_i)) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i[\right\} \leq$$

$$\leq K_2 \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i[\right\}$$

e quindi

$$(0 \leq) K_1 m(A) \leq \mu_F^{(SL)}(A) \leq K_2 m(A)$$

$\Downarrow$

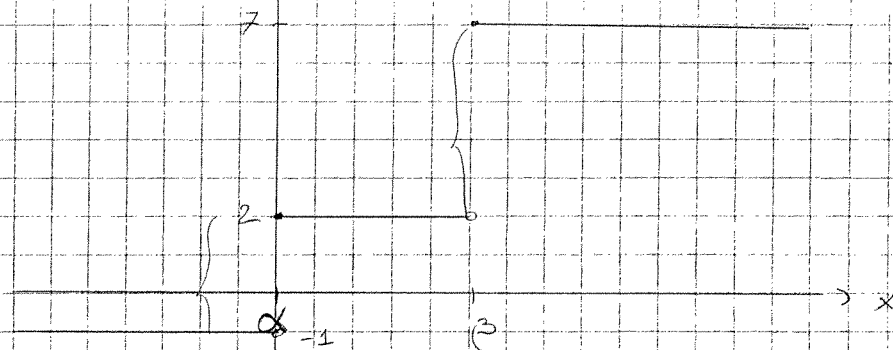
$$\mu_F^{(SL)}(A) = 0 \Leftrightarrow m(A) = 0$$

Ricordare che

$$\mathcal{M}_F(\mathbb{R}) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow (\mu_F^{(SL)}(A) = 0 \Leftrightarrow m(A) = 0)$$

Esercizio Sia

$$F(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < \alpha \\ 2 & \text{se } \alpha \leq x < \beta \\ 7 & \text{se } x \geq \beta \end{cases}$$



Dimostrare che esiste una unica misura su $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ t.c. $\mu([a, b]) = F(b) - F(a)$

Soluzione 1) F è crescente

2) F è continua a destra

Chi è $\mu_F^{(SL)}$?

$$\text{Vedendo, } F(x) = -1 + (2 - (-1)) \chi_{[\alpha, +\infty[}(x) + (7 - 2) \chi_{[\beta, +\infty[}(x),$$

dunque ha salto +1 perché è una costante additiva

$$\begin{aligned} \mu_F^{(SL)} &= \mu^{(SL)}_{3 \chi_{[\alpha, +\infty[} + 5 \chi_{[\beta, +\infty[} = \\ &= 3 \mu^{(SL)}_{\chi_{[\alpha, +\infty[}} + 5 \mu^{(SL)}_{\chi_{[\beta, +\infty[}} = \\ &= 3 \delta_\alpha + 5 \delta_\beta \end{aligned}$$

Lemma

$$\mu^{(SL)}_{\chi_{[\alpha, +\infty[}} = \delta_\alpha$$

perché $\chi_{[\alpha, +\infty[}$ coincide

con la funzione cumulativa di distribuzione di δ_α (e $\delta_\alpha = \mu^{(SL)}_{\chi_{[\alpha, +\infty[}}$).

Esercizio Sia

$$F(x) = 2x + \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(1) Dimostrare che esiste una unica misura $\mu_F^{(B)}$ definita sui borelliani $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ t.c.

$$\mu_F^{(B)}([a, b]) = F(b) - F(a).$$

(2) Dimostrare che

$$\mathcal{M}_F(\mathbb{R}) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}.$$

(3) Sia $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Dimostrare che

$$\mu_F^{(B)}(E) = 0 \iff m(E) = 0.$$

Soluzione. (1) $F'(x) = 2 + \cos x > 0 \implies F$ è crescente.

F derivabile $\forall x \implies F$ continua.

Dunque, esiste una unica misura $\mu_F^{(B)}$ su $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ t.c.

$$\mu_F^{(B)}([a, b]) = F(b) - F(a).$$

(2) F è bi-Lipschitziana:

$$1 \leq F'(x) \leq 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dal Teorema di Lagrange segue che $\forall x, y \in \mathbb{R}$ t.c.

$x < y$ esiste $\xi \in]x, y[$ t.c.

$$F(y) - F(x) = F'(\xi)(y-x)$$

dunque,

$$1(y-x) \leq F(y) - F(x) \leq 3(y-x)$$

Se $x > y$ analogamente

$$x-y \leq F(x) - F(y) \leq 3(x-y)$$

quindi

$$|x-y| \leq |F(x) - F(y)| \leq 3|x-y|$$

F è iniettiva perché strett. crescente

Si usa l'es. già fatto.

Così, $\mathcal{M}_F(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{Id}(\mathbb{R}) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$.



(3) Ricordiamo che se $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ allora

$$\mu_F^{(B)}(E) = 0 \iff \mu_F^{(SL)}(E) = 0$$

perché $\mu_F^{(SL)}$ è prolungamento di $\mu_F^{(B)}$, dunque

$$\mu_F^{(SL)}(E) = \mu_F^{(B)}(E) \quad \forall E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

F è bi-Lipschitziana, dunque

$$\mu_F^{(SL)}(E) = 0 \iff m(E) = 0$$

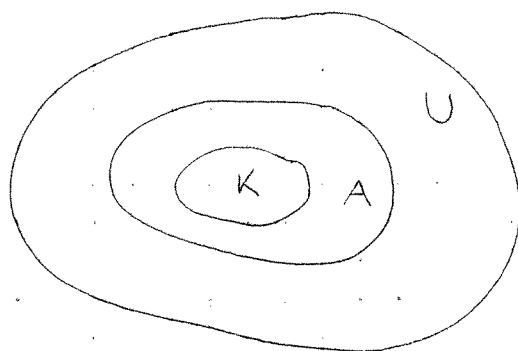
Ricorda (Omeomorfismi di intervalli). Sia I intervallo di $\mathbb{R}$ e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora f è iniettiva se e solo se è strettamente monotona. E in tal caso l'inversa di $f|_{V_e}$ ^{esiste ed} è continua.

Teorema 1

Sia $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ Allora

$$\begin{aligned} m^n(A) &= \inf \{ m^n(U) : U \text{ \u00e8 aperto di } \mathbb{R}^n \text{ e } A \subset U \} = \\ &= \sup \{ m^n(K) : K \text{ \u00e8 compatto di } \mathbb{R}^n \text{ e } K \subset A \} \end{aligned}$$

Senza dim. Vedi [Folland, c. 2. p. 68]



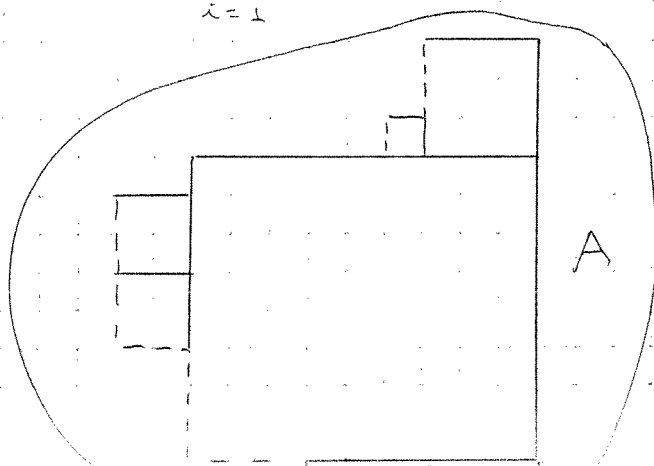
(simile al caso 1-dimensionale).

Lemma 1. Per ogni aperto A di $\mathbb{R}^n$ esistono dei
parallelepipedi

$$A_i =]a_{1i}, b_{1i}[\times \dots \times]a_{ni}, b_{ni}[$$

o 2 a 2 disgiunti t.c.

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$



Senza dim.

Non è unica tale rappresentazione.

Si può provare che se $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ con i parallelepipedi B_j , $j \in \mathbb{N}$ a 2 a 2 disgiunti allora

$$\sum_{i=1}^{\infty} m^m(A_i) = \sum_{j=1}^{\infty} m^m(B_j)$$

ove

$$\begin{aligned} m^m(A_i) &= m([a_{1i}, b_{1i}[) \cdots m([a_{mi}, b_{mi}[) = \\ &= (b_{1i} - a_{1i}) \cdots (b_{mi} - a_{mi}) \end{aligned}$$

Osservazione Analogamente al caso 1-dimensionale è possibile definire la misura di Lebesgue m^m in modo equivalente in base al Teorema 1.

La sola distinzione è che la misura di m aperta A in $\mathbb{R}^m$ è definita in base al Lemma 1 :

$$m^m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m^m(A_i)$$

Definizione $\mathcal{T}_X$ topologia di X , $\mathcal{B}$ una base Allora

$$U \in \mathcal{T}_X \Leftrightarrow U = \bigcup_{\alpha \in A} U_{\alpha}, \text{ dove } U_{\alpha} \in \mathcal{B}$$

Se $X = \mathbb{R}$ allora $\mathcal{B} = \{]a, b[: a, b \in \mathbb{R}, a < b \}$

$$\text{Dunque, } U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow U = \bigcup_{\alpha \in A}]a_{\alpha}, b_{\alpha}[;$$

in questo caso è possibile provare che esistono $]a_j, b_j[$ limitati o non limitati, a 2 a 2 disgiunti e t.c.

$$U = \bigcup_{\alpha \in A}]a_{\alpha}, b_{\alpha}[= \bigcup_i]a_i, b_i[\quad (\text{numeri finite o numerabili})$$

Teorema 2

$\nearrow$ è un vettore

Siano $S \in \mathbb{R}^m$ e $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Allora

$$(i) \quad S + \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m} \quad (= \underbrace{\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}}_m)$$

$$(ii) \quad S + \mathcal{L}_{\mathbb{R}^m} = \mathcal{L}_{\mathbb{R}^m} \quad \text{e} \quad m^n(S + E) = m^n(E),$$

$$\forall E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^m}$$

$$(iii) \quad a \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}$$

$$(iv) \quad a \mathcal{L}_{\mathbb{R}^m} = \mathcal{L}_{\mathbb{R}^m} \quad \text{e} \quad m^n(aE) = |a|^m m^n(E),$$

$$\forall E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^m}$$

Se $n=1$, questo teorema coincide con il Teorema 4 del cap. 4. La dimostrazione è simile, si basa sulla dim. del Lemma 1 e sulla Def. 2.

Teorema 3

Sia τ una rotazione in $\mathbb{R}^n$. Allora per ogni $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$

$$m^n(\tau(A)) = m^n(A).$$

Senza dim. Vedi [Folland, cap. 2, pp. 69-71].

Osservazione. La misura di Lebesgue m^n sulla σ -algebra $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ dei misurabili alla Lebesgue ($\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$) soddisfa per ogni $n \geq 1$ le ragionevoli richieste (i) - (iii) fissate all'inizio del cap. 1. se $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ è sostituito da $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$, cioè

$$m^n: \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n} \longrightarrow [0, +\infty] \quad \text{e}$$

(i) se $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è una successione di elementi

a 2 a 2 disgiunti di $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ allora

$$m^n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m^n(E_i)$$

(ii) Se E ed F sono due elementi di $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ che differiscono per una rototraslazione allora

$$m^n(E) = m^n(F)$$

46

(iii) $m^n([0,1]^n) = 1$.

CAPITOLO 7 : FUNZIONI MISURABILI

Siano (X, τ_X) uno spazio topologico e $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ ove $\tau_{\mathbb{R}}$ è la topologia standard generata dalla base $\mathcal{B} = \{]a, b[: a, b \in \mathbb{R}, a < b \}$ (finita).

Una funzione $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ è continua se

$$f^{-1}(U) \in \tau_X, \quad \forall U \in \tau_{\mathbb{R}}$$

$\mathcal{B}$ è un insieme di aperti f.c. ogni aperto della topologia $\tau_{\mathbb{R}}$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$

Questo è equivalente a dire che

$$f^{-1}(]a, b[) \in \tau_X, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b,$$

perché $\forall U \in \tau_{\mathbb{R}}$ ($\tau_{\mathbb{R}}$ è generata da $\mathcal{B}$)

$$U = \bigcup_{\alpha \in A}]a_{\alpha}, b_{\alpha}[\quad \text{e}$$

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A}]a_{\alpha}, b_{\alpha}[\right) = \bigcup_{\alpha \in A} \underbrace{f^{-1}(]a_{\alpha}, b_{\alpha}[)}_{\in \tau_X} \in \tau_X \quad \Leftrightarrow$$

Def. 1 Siano $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è $\mathcal{M}$ -misurabile se $f^{-1}(]a, b[) \in \mathcal{M}$ per ogni $a, b \in \mathbb{R} : a < b$.

(simile alla continuità)

Cioè, l'insieme

$$\{x \in X : a < f(x) < b\} \in \mathcal{M} \text{ (è misurabile),}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b$$

Se $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, diremo che f è $\mathcal{M}$ -misurabile se lo sono $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$.

Teorema 1 Se (X, τ_X) è uno spazio topologico e $\mathcal{M} = \mathcal{B}_X$ allora ogni funzione $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ continua è $\mathcal{B}_X$ -misurabile, perché

$$f^{-1}([a, b]) \in \tau_X \subset \mathcal{B}_X (= \mathcal{M}(\tau_X))$$

$\uparrow$
 per la
 continuità

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b$$

Se $X = \mathbb{R}^n$ e τ_X è la topologia standard allora ogni funzione $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ continua è $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ -misurabile e $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ -misurabile, perché

$$f^{-1}([a, b]) \in \tau_{\mathbb{R}^n} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$$

$\uparrow$
 per la
 continuità

$\mathcal{M}(\tau_{\mathbb{R}^n})$

Teorema 1

Siano $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) f è $\mathcal{M}$ -misurabile $\Leftrightarrow f^{-1}([a, b]) \in \mathcal{M}$
 $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b$

(ii) $f^{-1}([a, +\infty]) \in \mathcal{M}, \forall a \in \mathbb{R}$

(iii) $f^{-1}([a, +\infty]) \in \mathcal{M}, \forall a \in \mathbb{R}$

(iv) $f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{M}, \forall a \in \mathbb{R}$

(v) $f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{M}, \forall a \in \mathbb{R}$

(vi) $f^{-1}(U) \in \mathcal{M}, \forall U \in \tau_{\mathbb{R}}$

(vii) $f^{-1}(U) \in \mathcal{M}, \forall U \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

2. In generale l'affermazione (i) non è equivalente

a

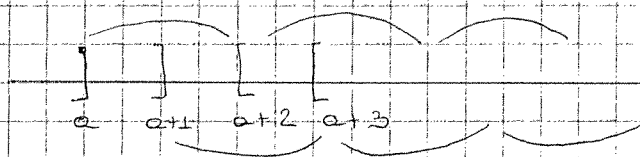
$$(viii) \quad f^{-1}(U) \in \mathcal{U}, \quad \forall U \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$$

$$(ix) \quad f^{-1}(\{a\}) \in \mathcal{U}, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

(7)

dim. (i) $\Rightarrow$ (iii) Sia $a \in \mathbb{R}$ Allora

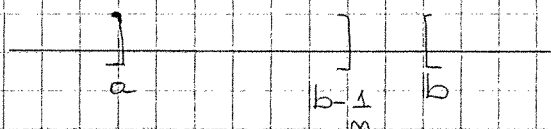
$$f^{-1}([a, +\infty[) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} [a+n, a+n+2[\cup [a+n+1, a+n+3[)\right)$$



$$= \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(\underbrace{f^{-1}([a+n, a+n+2[)}_{\mathcal{U} \text{ (per (i))}} \cup \underbrace{f^{-1}([a+n+1, a+n+3[)}_{\mathcal{U} \text{ (per (i))}} \right) \in \mathcal{U} \quad (\sigma\text{-algebra})$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ Allora

$$f^{-1}([a, b[) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [a, b - \frac{1}{n}]\right) =$$



$$= f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} ([a, +\infty[\cap [b - \frac{1}{n}, +\infty[)\right) =$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{f^{-1}([a, +\infty[)}_{\mathcal{U} \text{ (per (ii))}} \cap \underbrace{f^{-1}([b - \frac{1}{n}, +\infty[)}_{\mathcal{U} \text{ (per (ii))}} \right) \in \mathcal{U} \quad (\sigma\text{-algebra})$$

Le equivalenze (i) $\Leftrightarrow$ (iii), (i) $\Leftrightarrow$ (v), (i) $\Leftrightarrow$ (v)

per esercizio. Le dim. sono simili alla dim. che

(i) $\Leftrightarrow$ (iii).

(i) $\Rightarrow$ (vi). Sia $U \in \tau_{\mathbb{R}}$. Allora

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A}]a_{\alpha}, b_{\alpha}[\right) = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(]a_{\alpha}, b_{\alpha}[)$$

$\Rightarrow$ $\cap \xrightarrow{\quad} ?$ U è unione arbitraria $\mathcal{K}$ (per (i))
 $\mathcal{U}$ $\mathbb{R}$, ma si può scrivere come unione numerabile $U = \bigcup_k]a_k, b_k[$.

(vi) $\Rightarrow$ (i). Utile perché $]a, b[\in \tau_{\mathbb{R}}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$, dunque $f^{-1}(]a, b[) \in \mathcal{K}$.

(i) $\Rightarrow$ (vii). Ricordiamo che dal Lemma 4 del cap. 1

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ è la σ -algebra generata da

$$\mathcal{E} = \{]a, b[: a, b \in \mathbb{R}, a < b \}$$

(Punti).

Si noti che

$$\mathcal{K}' \equiv \{ A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} : f^{-1}(A) \in \mathcal{K} \}$$

è una σ -algebra. Infatti:

$$1) A, B \in \mathcal{K}' \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \text{ (}\sigma\text{-algebra)}$$

$$f^{-1}(A \cap B) = \underbrace{f^{-1}(A)}_{\in \mathcal{K}} \cap \underbrace{f^{-1}(B)}_{\in \mathcal{K}} \in \mathcal{K} \text{ (}\sigma\text{-algebra)}$$

$$2) A_j \in \mathcal{K}', j \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{A_j}_{\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \text{ (}\sigma\text{-algebra)}$$

$$\text{e } f^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{f^{-1}(A_j)}_{\in \mathcal{K}} \in \mathcal{K} \text{ (}\sigma\text{-algebra)}.$$

Inoltre, $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}'$ perché $f^{-1}(]a, b[) \in \mathcal{K}$ da (i).

Dal Lemma 3 del cap. 1,

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{K}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{K}(\mathcal{K}') = \mathcal{K}'.$$

Quindi, se $U \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \Rightarrow U \in \mathcal{K}' \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{K}$.

(viii) $\Rightarrow$ (i) Unica perché $\exists a, b \in \mathbb{R}$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

48

2. (viii) $\Rightarrow$ (i) Unica perché $\exists a, b \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}$,
 $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

(i) $\nRightarrow$ (viii) Siano $X = \mathbb{R}, \mathcal{M} = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}, C$ l'insieme di Cantor, e

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0 \\ f_C(x) + x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x+1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

ove f_C è la funzione di Cantor (c.d. scala del Diavolo).

Proviamo che $g(C) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ e $m(g(C)) = 1$.

Infatti

$$\begin{aligned} g(C) &= g([0, 1] \cup \overbrace{([0, 1] \setminus C))^A} = \text{perché } g \text{ è strettamente crescente e } A \subset [0, 1] \\ &= g([0, 1]) \cup g([0, 1] \setminus C) = \\ &= [0, 2] \cup g\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i[\right) = \text{la parte } A \\ &= [0, 2] \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} g(]a_i, b_i[) = g \text{ strett. crescente} \\ &= [0, 2] \cup \bigcup_{i=1}^{\infty}]f_C(a_i) + a_i, f_C(b_i) + b_i[\in \mathcal{L}_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} m(g(C)) &= 2 - \sum_{i=1}^{\infty} (f_C(b_i) + b_i - f_C(a_i) - a_i) = \\ &\quad \text{" } f_C(a_i), \text{ dalla def. di } f_C \\ &= 2 - \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) = 1 \\ &\quad \text{" } m(A) = m([0, 1] \setminus C) = 1 \end{aligned}$$

Perché $m(g(C)) = 1 > 0$, esiste un insieme

$$V \subset g(C) \quad \text{t.c.} \quad V \notin \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$$

Poniamo

$$U = g^{-1}(V) \quad (\subset g^{-1}(g(C)) = C)$$

Perché $U \subset g^{-1}(g(C)) = C$ e $m(C) = 0$

allora

$$U \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}} \quad \text{e} \quad m(U) = 0 \quad (m \text{ è completa})$$

Sia $f = g^{-1}$ (g strett. crescente).

Allora f è Lebesgue-misurabile perché (f ~~è~~ ^{strett.} crescente)

$$f^{-1}([a, b]) = g([a, b]) = [g(a), g(b)] \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$$

Ma

$$f^{-1}(U) = g(U) = V \notin \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$$

(i) $\Rightarrow$ (ix). Segue perché $\forall a \in \mathbb{R}$ dalla (ii) e (iii)

$$f^{-1}(\{a\}) = f^{-1}([a, +\infty[\cap]a, +\infty[) =$$

$$= f^{-1}([a, +\infty[) \cap f^{-1}(]a, +\infty[) \in \mathcal{M}$$

$\cap$ $\mathcal{M}((iii))$ $\cap$ $\mathcal{M}((ii))$

(ix) $\not\Rightarrow$ (i). Sia $X = \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, $A \notin \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, e

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \in A \\ -e^x & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus A \end{cases}$$

Sia $a \in \mathbb{R}$. Allora $f(x) = a \Leftrightarrow$

$$e^x = a \quad \text{se } a \geq 0 \quad \text{e} \quad -e^x = a \quad \text{se } a < 0$$

e^x crescente strett. $\Rightarrow$ esiste almeno un $x \in \mathbb{R}$ t.c.

$f(x) = a$. Quindi, $\rightarrow$ quando $a = 0$

$$f^{-1}(\{a\}) = \emptyset \quad \text{e} \quad f^{-1}(\{a\}) = \{b\} \quad \text{per un certo}$$

$b \in \mathbb{R}$. Quindi $f^{-1}(\{a\}) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{\mathcal{H}}$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

D'altra parte,

$$f^{-1}(\underbrace{]0, +\infty[}_{\mathcal{H}}) = A \notin \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{\mathcal{H}}$$

(9)

CVD

Teorema 2

Sia $(X, \mathcal{H})$ uno spazio misurabile ed $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni $f_j: X \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{H}$ -misurabili. Allora le funzioni

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} f_j, \inf_{j \in \mathbb{N}} f_j, \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j, \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j \quad \left(\text{sono tutte misurabili di } x \in X \right)$$

sono tutte $\mathcal{H}$ -misurabili.

dim. Dal Teorema 1 per la $\mathcal{H}$ -misurabilit  di $\sup_{j \in \mathbb{N}} f_j$ baster  provare che $\forall a \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$\{x \in X : \sup_{j \in \mathbb{N}} f_j(x) > a\} \in \mathcal{H}$$

Questa segue perch 

$$\{x \in X : \sup_{j \in \mathbb{N}} f_j(x) > a\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{\{x \in X : f_j(x) > a\}}_{\in \mathcal{H}} \in \mathcal{H} \quad \left(\text{o-} \right. \\ \left. \text{distribuzione} \right)$$

$\mathcal{H}$, perch  le f_j sono $\mathcal{H}$ -misurabili.

infatti se $\sup_{j \in \mathbb{N}} f_j(x) > a$ allora esiste $j_0 \in \mathbb{N}$

t.c. $f_{j_0}(x) > a$. Altrimenti, $\forall j \in \mathbb{N}$ $f_j(x) \leq a$

$\Rightarrow \sup_{j \in \mathbb{N}} f_j(x) \leq a$ (a   un maggiorante).

Anche se per un certo $j_0 \in \mathbb{N}$ $f_{j_0}(x) > a$, dunque

Dall'uguaglianza

$$\inf_{j \in \mathbb{N}} f_j = - \sup_{j \in \mathbb{N}} (-f_j)$$

segue che $\inf_{j \in \mathbb{N}} f_j$ è $\mathcal{M}$ -misurabile.

Per la $\mathcal{M}$ -misurabilità di $\limsup_{j \rightarrow \infty} f_j$ basterà notare

che

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} f_j = \inf_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\sup_{m \geq n} f_m}_{\mathcal{M}\text{-misurabile}}$$

$\mathcal{M}$ -misurabile

CVD

Questa dimostrazione è molto istruttiva: studiarla bene.

Corollario. Sia $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile.

Se $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è una successione di funzioni $\mathcal{M}$ -misurabili

$f_j: X \rightarrow \mathbb{R}$ e se

$$f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$$

esiste $\forall x \in X$, allora f è anche $\mathcal{M}$ -misurabile.

dim. Segue dal Teorema 2 perché

$$f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sup f_j(x) \quad (= \lim_{j \rightarrow \infty} \inf f_j(x)).$$

CVD

Def. 2 Sia $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile.

(50)

Diremo che una funzione $\varphi: X \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione semplice se esistono numeri $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ e $\Pi_1, \dots, \Pi_m \in \mathcal{M}$ (insiemi misurabili) t.c.

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^m \lambda_j X_{\Pi_j}(x)$$

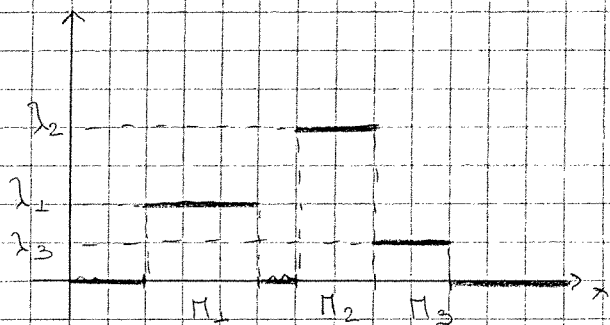
ove X_{Π} è la funzione caratteristica di Π , cioè

$$X_{\Pi}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Pi \\ 0 & \text{se } x \in X \setminus \Pi \end{cases}$$

Chiaramente l'insieme delle funzioni semplici costituisce uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ che indicheremo con il simbolo $S(X)$.

Def. 3 Simple $\Rightarrow \mathcal{M}$ -misurabile

(vedere l'esercizio qualche pagina più avanti)



Lemma 1 Sia $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile.

Se $\varphi: X \rightarrow \mathbb{C}$ è $\mathcal{M}$ -misurabile allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) $\varphi \in S(X)$

(ii) $\text{card } \varphi(X) < \infty$

o.e. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) [(i) $\Rightarrow$ φ $\mathcal{M}$ -mis.]

Se $\varphi \in S(X)$ e $\varphi(X) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ ($\text{card } \varphi(X) < \infty$)

ove λ_j sono a 2 a 2 distinti ($\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$)

allora

$$(*) \quad \varphi = \sum_{j=1}^m \lambda_j X_{E_j}$$

ovv.

$$E_j = \varphi^{-1}(\lambda_j) = \{x \in X : \varphi(x) = \lambda_j\}$$

Ovviamente gli E_j sono a 2 a 2 disgiunti (λ_j a 2 a 2 distinti). $\rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = X$ $X \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j : x \in X \rightarrow \varphi(x) = \lambda_j$ per un certo $j \in \mathbb{N}$

La rappresentazione (*) si dice la rappresentazione standard di φ . (perché $\varphi: X \rightarrow \mathbb{Q}$)
 $\rightarrow x \in \varphi^{-1}(\lambda_j) = E_j$

Senza dim.

Teorema 3

Sia $(X, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile.

1. Una funzione $f: X \rightarrow \mathbb{Q}$ è $\mathcal{A}$ -misurabile se e solo se esiste una successione di funzioni semplici $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ t.c.

$$(1) \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x), \quad \forall x \in X$$

2. Se una funzione $f: X \rightarrow \underline{[0, +\infty[}$ è $\mathcal{A}$ -misurabile esiste una successione di funzioni semplici $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ t.c. oltre a (1) vale

$$(2) \quad \underline{0} \leq \varphi_1(x) \leq \dots \leq \varphi_n(x) \leq \dots \leq f(x), \quad \forall x \in X$$

dim 1. La sufficienza segue dal Teorema 2 (dal (51 Corollario)) (ricordare che le funzioni semplici sono $\mathcal{M}$ -misurabili).

Necessità. Grazie alla def. 1 è sufficiente considerare le funzioni $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ (le componenti).

Poniamo

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } f(x) < -1 \\ \underbrace{[f(x)]}_{-1 \leq 0 \leq 1} & \text{se } |f(x)| \leq 1 \\ 1 & \text{se } f(x) > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Pi_4 &= \{x \in X: 0 < f(x) < 1\} \\ \Pi_3 &= \{x \in X: -1 \leq f(x) \leq 0\} \\ \Pi_1 &= \{x \in X: f(x) < -1\} \\ \Pi_2 &= \{x \in X: f(x) > 1\} \end{aligned}$$

$$\varphi_1(x) = -1 \cdot \chi_{\Pi_1} + 1 \cdot \chi_{\Pi_2} + (-1) \cdot \chi_{\Pi_3} + 1 \cdot \chi_{\Pi_4}$$

Notiamo che $\varphi_1 \in \mathcal{S}(X)$ e $\varphi(X) \subset \{-1, 0, 1\}$.

Se $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$ poniamo

$$(3) \quad * \quad \varphi_n(x) = \begin{cases} -n & \text{se } f(x) < -n \\ \varphi_{n-1}(x) + \underbrace{\frac{[n(f(x) - \varphi_{n-1}(x))]}{n}}_m & \text{se } |f(x)| \leq n \\ n & \text{se } f(x) > n \end{cases}$$

Perché $a-1 \leq [a] \leq a$ si ha se $|f(x)| \leq n$

$$\varphi_n(x) \leq \varphi_{n-1}(x) + \frac{n(f(x) - \varphi_{n-1}(x))}{n} = f(x)$$

$$\text{e } \varphi_n(x) > \varphi_{n-1}(x) + \frac{n(f(x) - \varphi_{n-1}(x)) - 1}{n} = f(x) - \frac{1}{n}$$

Dunque, se $|f(x)| \leq n$ si ha

$$(4) \quad f(x) - \frac{1}{n} < \varphi_n(x) \leq f(x)$$

Quindi se $x \in X$ esiste $n \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|f(x)| \leq n \quad (f: X \rightarrow \mathbb{R})$$

Dunque $\forall n \geq n$ (4) è vera e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x) \quad \left(* \text{ osservare che } \varphi_n \text{ è } \mathcal{M}\text{-misurabile} \right)$$

perché $\{x \in X: f(x) < -n\}, \{x \in X: f(x) > n\}, \{x \in X: |f(x)| \leq n\} \in \mathcal{M}$

Dalla (3) e (4)

$$-\frac{n+1}{n} < \varphi_n(x) \leq n, \quad \forall x \in X.$$

Anche se $n \geq 2$

$$\stackrel{n \geq 2}{-} \frac{n+1}{n} - \frac{1}{n-1} < \varphi_{n-1}(x) \leq n-1 \leq n.$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\geq 0}$

Poiché $|\varphi_{n-1}(x)| \leq n \quad \forall x \in X$, se $|f(x)| \leq n$

si ha

$$|f(x) - \varphi_{n-1}(x)| \leq |f(x)| + |\varphi_{n-1}(x)| \leq 2n.$$

Sia

$$A_n = \left\{ \left[\frac{n(f(x) - \varphi_{n-1}(x))}{n} \right], \text{ ove } x \in \mathbb{R} \text{ e } |f(x)| \leq n \right\}.$$

Allora $\text{card } A_n < \infty$ (perché $f(x) - \varphi_{n-1}(x)$ è limitata).

Poiché $\varphi_n(X) \subset \varphi_{n-1}(X) + A_n$ (somma vettoriale)

e $\varphi_1(X) \subset \{-1, 0, 1\}$ segue che

$\text{card } \varphi_n(X) < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Dunque tutte le funzioni φ_n sono semplici.

2. Sia $f \geq 0$. Dalla (4)

$$\varphi_n(x) \leq f(x) \quad \text{se} \quad 0 \leq f(x) \leq n.$$

Se $f(x) > n$ dalla (3)

$$\varphi_n(x) = n < f(x)$$

Dunque, $\varphi_n(x) \leq f(x), \quad \forall x \in X.$

e

$$\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(x) + \underbrace{\left[\frac{n(f(x) - \varphi_{n-1}(x))}{n} \right]}_{\geq 0} \geq \varphi_{n-1}(x)$$

e

$$0 \leq \varphi_1(x) \leq \dots \leq \varphi_n(x) \leq \dots \leq f(x).$$

CVD

Teorema 4

(52)

Siano $(X, \mathcal{K})$ uno spazio misurabile e
 $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, $g: X \rightarrow \mathbb{C}$ due funzioni $\mathcal{K}$ -misurabili.

Allora

- (i) le funzioni $f \pm g$ sono $\mathcal{K}$ -misurabili.
- (ii) la funzione fg è $\mathcal{K}$ -misurabile.
- (iii) Se $g(x) \neq 0, \forall x \in X$ allora
 $\frac{f}{g}$ è $\mathcal{K}$ -misurabile.

dim. (i) Dal Teorema 3 esistono 2 successioni

$\{ \varphi_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{ \psi_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ entrambe in $S(X)$ t.c.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x),$$

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x)$$

Dunque, per esempio

$$f(x) \pm g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(\varphi_n(x) \pm \psi_n(x))}_n \in S(X)$$

dunque $f \pm g$ è $\mathcal{K}$ -misurabile.

(ii) simile

(iii) esercizio

C.V.D

Sia $a \in \mathbb{R}$. Poniamo

$$a^+ = \max \{a, 0\}, \quad a^- = \max \{-a, 0\}.$$

Allora

$$a = a^+ - a^- \quad \text{e} \quad |a| = a^+ + a^-.$$

Corollario. Sia $(X, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$ -misurabile. Allora tali sono

$$f^+, f^-, |f|. \quad [f^+ = \max \{f, 0\}]$$

Teorema 5

Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio misurato. Se la misura μ è completa allora

(a) se f è $\mathcal{A}$ -misurabile e $g = f$ quasi ovunque su X allora g è $\mathcal{A}$ -misurabile.

(b) Se f_n è $\mathcal{A}$ -misurabile $\forall n \in \mathbb{N}$ e $f_n \rightarrow f$ quasi ovunque su X allora f è $\mathcal{A}$ -misurabile.

Se μ non è completa allora (a) e (b) in generale sono false (q.o.).

Osservazione. Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio misurato e P una proprietà definita su X cioè una funzione su X con valori "vero" o "falso":

$$P: X \rightarrow \{\text{vero}, \text{falso}\}$$

Se $P(x) = \text{vero}$ si dice anche che $P(x)$ è vera.

Esempio. Siano $f, g: X \rightarrow \mathbb{C}$ e

$$P(x) = \begin{cases} \text{vera} & \text{se } f(x) = g(x) \\ \text{falsa} & \text{se } f(x) \neq g(x) \end{cases}$$

(53)

$$\forall x \in X$$

Si dice che P è vera ovunque su X se $P(x) = \text{vera}$, $\forall x \in X$

In questo esempio P è vera ovunque su X significa che f è uguale a g identicamente, cioè $f(x) = g(x)$, $\forall x \in X$

Si dice che P è vera quasi ovunque (q.o.) su X se esiste $\Pi \in \mathcal{M}$ con $\mu(\Pi) = 0$ t.c.

$$\{x \in X : P(x) = \text{falsa}\} \subset \Pi$$

Se la misura μ è completa,

P è vera q.o. se $\mu(\{x \in X : P(x) = \text{falsa}\}) = 0$.

Nell'esempio sopra, P è vera q.o. su X

$$\Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ q.o. su } X$$

$$\Leftrightarrow \text{esiste } \Pi \in \mathcal{M} \text{ con } \mu(\Pi) = 0 \text{ t.c.}$$

$$\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} \subset \Pi$$

se la misura μ è completa

$$\Leftrightarrow \mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

Osservazione Talvolta è conveniente considerare

funzioni con valori in $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Definiamo i Boreliani in $\overline{\mathbb{R}}$ nel modo seguente:

$$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \{E \subset \overline{\mathbb{R}} : E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}.$$

Diciamo che una funzione $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è

$\mathcal{M}$ -misurabile se

$$f^{-1}(U) \in \mathcal{M}, \quad \forall U \in \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$$

I teoremi 2, 3, 4, 5 rimangono validi anche per funzioni a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ se evitiamo di considerare i casi indeterminati, per esempio $(+\infty) - (+\infty)$ o $0 \cdot (\pm\infty)$.

Degressioni sulla definizione di misura in $\mathbb{R}^n$

Il caso $n \geq 2$.

Ricordiamo che ogni insieme aperto ha la rappresentazione

$$(*) \quad \Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$$

ove

$$P_i =]a_{i1}, b_{i1}[\times \dots \times]a_{in}, b_{in}[\quad \left(\begin{array}{l} \text{parallelepipedi} \\ a_{21} a_{22} \text{ disgiunti} \end{array} \right)$$

Mediante questa rappresentazione la def. della misura di Lebesgue equivalente alla def. standard è la seguente.

Propo 1. Sia $P =]a_1, b_1[\times \dots \times]a_n, b_n[$. Allora $m^n(P) = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$.

Propo 2. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme aperto con la rappresentazione $(*)$ allora

$$m^n(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} m^n(P_i)$$

Si può provare che se Ω ha anche la rappresentazione

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$$

ove Q_i sono parallelepipedi $a_{21} a_{22}$ disgiunti

(come in $(*)$) allora

$$\sum_{i=1}^{\infty} m^n(Q_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m^n(P_i)$$

Dunque, $m^n(\Omega)$ è ben definita.

(54)

Passo 3. Sia K un compatto ($\Leftrightarrow K$ è chiuso e limitato) $\mathbb{R}^n$.

Sia P un parallelepipedo t.c. $K \subset P$. Allora

$\Omega = P \setminus K$ è aperto. Poniamo

$\mathcal{Q}$ interno di P $m^n(K) = m^n(P) - m^n(\Omega)$

Se Q è un altro parallelepipedo t.c. $K \subset Q$ allora

si può provare che

$$m^n(Q) - m^n(Q \setminus K) = m^n(P) - m^n(\underbrace{P \setminus K}_{\Omega})$$

Dunque, $m^n(K)$ è ben definita.

Passo 4. Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato si

definisce la misura esterna

$$(m^n)^*(E) = \inf \{ m^n(\Omega) : E \subset \Omega \text{ e } \Omega \text{ è aperto} \}$$

e la misura interna

$$(m^n)_*(E) = \sup \{ m^n(K) : K \subset E \text{ e } K \text{ è compatto} \}.$$

Si dice che E è Lebesgue misurabile se

$$(m^n)_*(E) = (m^n)^*(E).$$

In questo caso

$$m^n(E) = (m^n)_*(E) = (m^n)^*(E).$$

Passo 5. Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme non limitato

si dice che E è Lebesgue misurabile se $\forall m \in \mathbb{N}$

$E \cap \underbrace{B(0, m)}_{\text{palla, è limitato}}$ è Lebesgue misurabile.

In questo caso

$$m^n(E) = \lim_{m \rightarrow \infty} m^n(E \cap B(0, m)).$$

Funzioni misurabili

~~Esercizio~~ Sia $(X, \mathcal{K})$ uno spazio misurabile e $E \subset X$. Consideriamo

$$X_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \in X \setminus E \end{cases}$$

Allora X_E è (Lebesgue) misurabile se e solo se E è (Lebesgue) misurabile.

Soluzione. Ricordiamo che $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ è misurabile

$\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$\{x \in X : f(x) > a\} \quad \text{è misurabile,}$$

cioè $\in \mathcal{K}$.

Ora, se $a \geq 1$ allora

$$\{x \in X : X_E(x) > a\} = \emptyset \in \mathcal{K}.$$

Se $a < 0$ allora

$$\{x \in X : X_E(x) > a\} = X \in \mathcal{K}.$$

Se $1 > a \geq 0$

$$\{x \in X : X_E(x) > a\} = E$$

Dunque, X_E è misurabile $\Leftrightarrow E \in \mathcal{K}$.

~~Esercizio~~ Sia $(X, \mathcal{K})$ uno spazio misurabile, (55)
 E ed $F \subset X$, $a, b \in \mathbb{R}$. Allora se $E, F \in \mathcal{K}$
allora la funzione

$$f = a X_E + b X_F$$

è una funzione misurabile.

Soluzione Se $a = b \overset{0 \text{ o } a=0 \text{ o } b=0}{\vee}$ segue dall'esercizio precedente.

Sia $a \neq b$, per esempio $a < b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Allora

$$f(X) \subset \{a, b, a+b, 0\} \quad (\text{finito})$$

○ Se $E \cup F = X$ e $a, b > 0$ allora $f(x) > 0, \forall x \in X$.

Sia $c \in \mathbb{R}$ e consideriamo

$$\{x \in X : f(x) > c\}$$

Assumiamo per esempio che $0 < a < b (< a+b)$.

E' sufficiente considerare $c < 0$, $0 \leq c < a$, $a \leq c < b$,
 $c \geq b$. In ogni caso l'insieme è misurabile.

○ Ricordiamo che se $(X, \mathcal{K})$ è uno spazio misurabile,
 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ allora f è misurabile $\Leftrightarrow$ esiste
una successione di funzioni semplici $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
($\text{card } f_n(X) < \infty$) t.c.

$$(*) \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad \forall x \in X.$$

Se $f \geq 0$ allora esiste una successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
di funzioni semplici t.c. oltre a (*)

$$0 \leq f_1(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq \dots \leq f(x).$$

Ricordiamo che

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } f(x) < -1 \\ [f(x)] & \text{se } |f(x)| \leq 1 \\ 1 & \text{se } f(x) > 1 \end{cases}$$

e per ogni $n \geq 2$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} -n & \text{se } f(x) < -n \\ \varphi_{n-1}(x) + \frac{[n(f(x) - \varphi_{n-1}(x))]}{n} & \text{se } |f(x)| \leq n \\ n & \text{se } f(x) > n \end{cases}$$

Nella parte 1. si possono costruire funzioni "più semplici".

Consideriamo le funzioni ψ_n t.c. $\psi_1 = \varphi_1$ e per ogni $n \geq 2$

$$^* \psi_n(x) = \begin{cases} -n & \text{se } f(x) < -n \\ \frac{[nf(x)]}{n} & \text{se } -n \leq f(x) \leq n \\ n & \text{se } f(x) > n \end{cases}$$

Se $|f(x)| \leq n$ allora poiché $a-1 < [a] \leq a$ si ha

$$\frac{n f(x) - 1}{n} < \frac{[n f(x)]}{n} \leq \frac{n f(x)}{n} = f(x)$$

$$f(x) - \frac{1}{n}$$

Sia $x \in X$; consideriamo $m \in \mathbb{N}$ t.c. $|f(x)| \leq m$

Allora per ogni $n \geq m$ si ha

$$f(x) - \frac{1}{n} < \psi_n(x) \leq f(x)$$

Quindi, se $n \rightarrow \infty$ $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x)$, $\forall x \in X$.

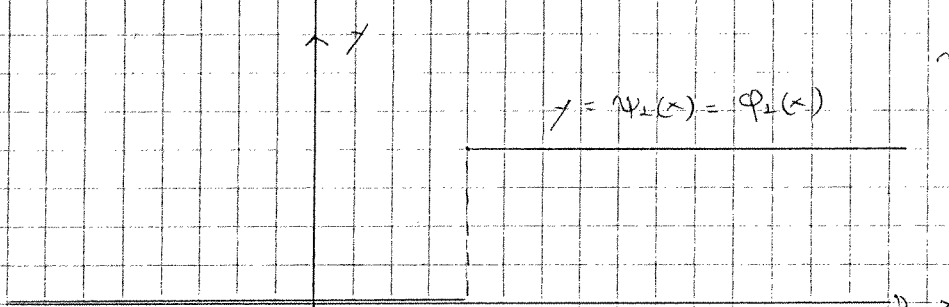
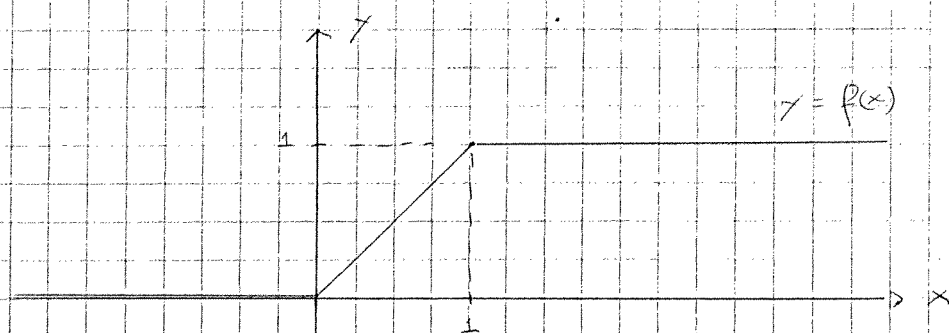
(* osservare che le $\psi_n(x)$ sono $\mathcal{A}$ -misurabili perché $\{x \in X : f(x) < -n\}$, $\{x \in X : f(x) > n\}$, $\{x \in X : |f(x)| \leq n\} \in \mathcal{A}$, essendo f $\mathcal{A}$ -misurabile, inoltre, $\sup \psi_n(X) < \infty$, e quindi le ψ_n sono semplici).

Notiamo che in generale se $f \geq 0$ segue che

$$\psi_n(x) \leq \psi_{n+1}(x) \quad \forall x \in X.$$

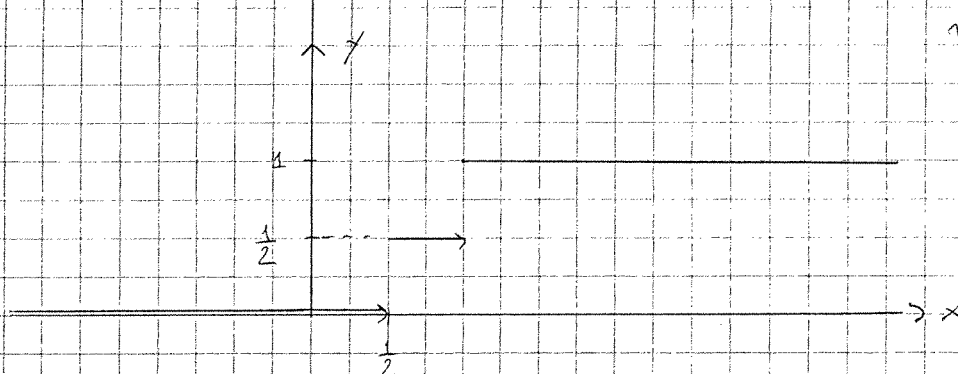
(56)

Vediamo un esempio:



$$\psi_1(x) = \phi_1(x) = [pf(x)]$$

perché $|f(x)| \leq 1$



$$\psi_2(x) = \frac{[2p(x)]}{2}$$

se $0 < x < \frac{1}{2}$, $0 < p(x) < \frac{1}{2}$, $0 < 2p(x) < 1$
 $\Rightarrow [2p(x)] = 0$

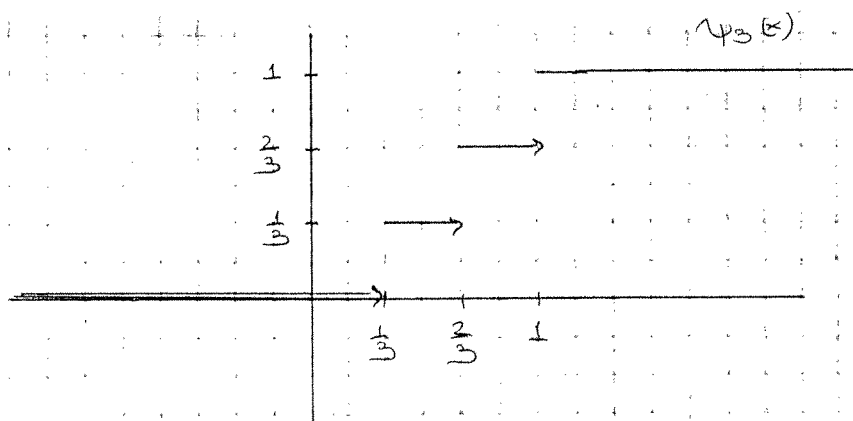
Se $\frac{1}{2} \leq x < 1$ allora $1 \leq 2p(x) = 2x < 2$, dunque

$$\frac{[2p(x)]}{2} = \frac{1}{2}$$

Quindi, $\psi_3(x) = \frac{[3p(x)]}{3}$

Se $0 < x < \frac{1}{3} \Rightarrow \psi_3(x) = 0$ ($p(x) = x \Rightarrow 3x < 1$)

Se $\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \Rightarrow \psi_3(x) = \frac{1}{3}$ ($1 \leq 3x < 2$)



e $\psi_2(x) \leq \psi_3(x)$ non è soddisfatta.

11.15. Se $\mu_F^{(SL)}$ è la misura di Stieltjes-Lebesgue associata alla funzione $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescente e continua a destra, per determinare la misura di insiemi compatti $[x, y]$ $\mu_F^{(SL)}$ -misurabili, basta usare il seguente trucco:

$$[x, y] = \bigcap_{j=1}^{\infty}]x - 2^{-j}, y] \quad , \quad \text{da cui}$$

$$\mu_F^{(SL)}([x, y]) = \mu_F^{(SL)}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}]x - 2^{-j}, y]\right) \stackrel{\text{continuità dell'alto}}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} \mu_F^{(SL)}(]x - 2^{-j}, y]) =$$

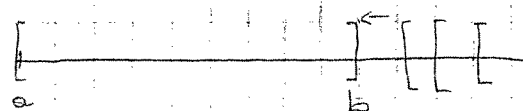
$$\lim_{j \rightarrow \infty} (F(y) - F(x - 2^{-j})) = F(y) - \lim_{j \rightarrow \infty} F(x - 2^{-j}) =$$

$$= F(y) - F(x^-).$$

11.16. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} [a, b - \frac{1}{n}] = [a, b[$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a, b + \frac{1}{n}] = [a, b]$$



Dati uno spazio misurabile $(X, \mathcal{M})$ e $A \in \mathcal{M}$

scriviamo

$$\mathcal{L}^+(A) \equiv \{ f: A \rightarrow [0, +\infty] \mid f \text{ è } \mathcal{M}\text{-misurabile} \},$$

(cioè per esempio $\forall a \geq 0$

$$\{x \in A : f(x) \geq a\} \in \mathcal{M})$$

Def. 1. Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurato,

$A \in \mathcal{M}$, $A \neq \emptyset$, $\varphi \in \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{L}^+(A)$,

$\varphi(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ (finito) ove

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m, \quad E_j = \varphi^{-1}(\lambda_j) = \{x \in A : \varphi(x) = \lambda_j\},$$

dunque $\varphi = \sum_{j=1}^m \lambda_j \chi_{E_j}$ la rappresentazione standard.

Diciamo che l'integrale di φ in A è l'elemento di $[0, +\infty]$

definito da

$$\int_A \varphi \, d\mu \equiv \sum_{j=1}^m \lambda_j \mu(E_j)$$

Osservazione. Se $\lambda_1 = 0$ e $\mu(E_1) = +\infty$ allora questa somma contiene $0 \cdot (+\infty)$. Per questo caso la convenzione seguente è naturale: $0 \cdot (+\infty) = 0$. Ne segue che

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j \mu(E_j) = \sum_{j=2}^m \lambda_j \mu(E_j).$$

Se $\mu(A) = 0$ allora $\mu(E_j) = 0$ e

$$\int_A \varphi \, d\mu = 0.$$

(ogni $E_j \in \mathcal{M}$, $E_j \subset A$, $\mu(E_j) \leq \mu(A) = 0$),
ovvero che $E_j \in \mathcal{M}$,
 $E_j = \varphi^{-1}(\lambda_j)$ con
 φ $\mathcal{M}$ -misurabile.

L'altra convenzione è naturale è che

$$\int \varphi \, d\mu = 0.$$

Notiamo anche che

$$\int_A d\mu = \mu(A) \quad \left(\begin{array}{l} \text{basta prendere } 1: A \rightarrow [0, +\infty], \\ 1 = 1 \cdot X_A \end{array} \right)$$

Lemma 1. Siano $(X, \mathcal{K}, \mu)$ uno spazio misurato,

$A, F_1, \dots, F_m \in \mathcal{K}$, $F_1, \dots, F_m \subset A$, $v_1, \dots, v_m \in [0, +\infty]$

$\varphi = \sum_{i=1}^m v_i X_{F_i}$ (ove gli insiemi $\{F_1, \dots, F_m\}$ e $\{F_1, \dots, F_m\}$ ~~non~~ necessariamente a 2 a 2 disgiunti). Allora

$$\int_A \varphi d\mu = \sum_{i=1}^m v_i \mu(F_i).$$

dim. Assumiamo senza perdita di generalità che

$$\bigcup_{i=1}^m F_i = A$$

(se $\bigcup_{i=1}^m F_i \neq A$ allora $\varphi(x) = \sum_{i=1}^m v_i X_{F_i}(x) = 0$

$\forall x \in A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^m F_i \right) = F_0$. Allora $F_0, F_1, \dots, F_m \subset A$,

$$\bigcup_{i=0}^m F_i = A \quad \text{e} \quad \varphi = \sum_{i=1}^m v_i X_{F_i} = \sum_{i=0}^m v_i X_{F_i},$$

con $v_0 = 0$, e $\sum_{i=0}^m v_i \mu(F_i) = \sum_{i=1}^m v_i \mu(F_i)$).

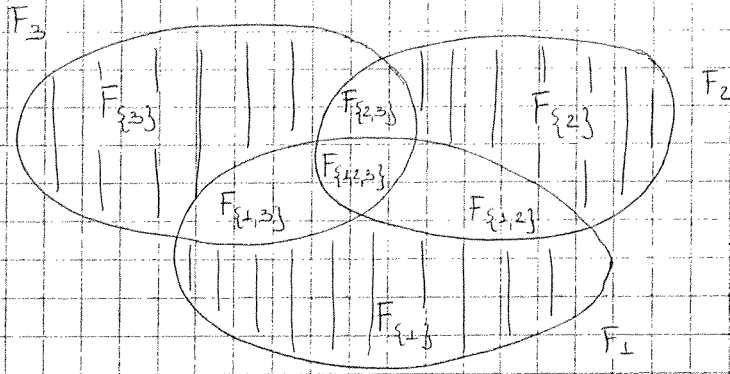
Sia $\varphi = \sum_{j=1}^m \lambda_j X_{E_j}$

la rappresentazione standard.

Siano $\Pi = \{1, \dots, m\}$ e $\forall I \subset \Pi$

$$F_I = \bigcap_{i \in I} F_i \cup \bigcup_{i \in \Pi \setminus I} F_i$$

Per esempio:



Notiamo che F_I sono a 2 a 2 disgiunti; inoltre

$$F_i = \bigcup_{\substack{I \in \Pi: \\ I \ni i}} F_I, \quad \bigcup_{I \in \Pi} F_I = \bigcup_{i=1}^m E_i (= A).$$

○ Dunque,

$$\mu(F_i) = \sum_{I \ni i} \mu(F_I)$$

Inoltre, $\forall x \in F_I \quad (\Rightarrow) \quad x \in \bigcup_{\substack{I \in \Pi \\ I \ni i}} F_I = F_i \quad (x \notin \bigcup_{\substack{I \in \Pi \\ I \ni i}} F_I \Rightarrow x \notin F_i)$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{i=1}^m v_i X_{F_i}(x) = \sum_{i \in I} v_i \underbrace{X_{F_i}(x)}_{\substack{= 1 \\ \text{se } x \in F_i \\ = 0 \text{ altrimenti}}} + \sum_{i \in \Pi \setminus I} v_i \underbrace{X_{F_i}(x)}_{= 0} = \\ &= \sum_{i \in I} v_i \equiv v_I \quad \left(\text{non dipende da } x \right) \end{aligned}$$

○ e

$$\varphi(F_I) = \{v_I\} \quad (\forall x \in F_I, \varphi(x) \equiv v_I).$$

Poiché

$$A = \bigcup_{j=1}^m E_j = \bigcup_{I \in \Pi} F_I$$

si ha

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} = \varphi\left(\bigcup_{I \in \Pi} F_I\right) = \\ &= \bigcup_{I \in \Pi} \varphi(F_I) = \bigcup_{I \in \Pi} \{v_I\} = \{v_I\}_{I \in \Pi}. \end{aligned}$$

Dunque $\forall I \in \Pi$ esiste $j \in \{1, \dots, m\}$ t.c.

$$v_I = \lambda_j. \quad \text{Quindi,}$$

$$E_j = \{x \in A \mid \varphi(x) = \lambda_j\}$$

$$= \{x \in A : \varphi(x) = v_I, \text{ ove } v_I = \lambda_j\}$$

$$= \bigcup_{\substack{I \in \Pi \\ v_I = \lambda_j}} F_I$$

Infatti se $x \in \bigcup_{\substack{I \in \Pi \\ v_I = \lambda_j}} F_I$ allora per un certo $I \in \Pi$

$$\text{con } v_I = \lambda_j, \quad x \in F_I \quad \text{e} \quad \varphi(x) = v_I = \lambda_j \quad (\Rightarrow x \in E_j).$$

Se $x \notin \bigcup_{\substack{I \in \Pi \\ v_I = \lambda_j}} F_I$ allora per un certo $I \in \Pi$ con

$$v_I \neq \lambda_j, \quad x \in F_I \quad \text{e} \quad \varphi(x) = v_I \neq \lambda_j \quad (\text{dunque, } x \notin E_j).$$

Così

$$\sum_{i=1}^m v_i \mu(F_i) = \sum_{i=1}^m v_i \sum_{I \ni i} \mu(F_I) =$$

scambiando le somme

$$= \sum_{I \in \Pi} \left(\sum_{i \in I} v_i \right) \mu(F_I) = \sum_{I \in \Pi} v_I \mu(F_I) =$$

$$= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{\substack{I \in \Pi \\ v_I = \lambda_j}} \lambda_j \right) \mu(F_I) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \mu(E_j),$$

perché $E_j = \bigcup_{\substack{I \in \Pi \\ v_I = \lambda_j}} F_I$ $\Leftarrow \forall I \in \Pi \exists j \in \{1, \dots, m\}$ t.c. $v_I = \lambda_j$.

Dalla def. 1, $\sum_{j=1}^m \lambda_j \mu(E_j) = \int_A \varphi d\mu.$

CVD

Lemma 2. Siano $(X, \mathcal{K}, \mu)$ uno spazio misurato.

(59)

(i) Se $A \in \mathcal{K}$, $\varphi \in S(A) \cap \mathcal{L}^+(A)$, $c \geq 0$,
allora $c\varphi \in S(A) \cap \mathcal{L}^+(A)$ e

$$\int_A c\varphi d\mu = c \int_A \varphi d\mu.$$

(ii) Se $A \in \mathcal{K}$, $\varphi, \psi \in S(A) \cap \mathcal{L}^+(A)$ allora
 $\varphi + \psi \in S(A) \cap \mathcal{L}^+(A)$ e

$$\int_A (\varphi + \psi) d\mu = \int_A \varphi d\mu + \int_A \psi d\mu$$

(iii) Se $A \in \mathcal{K}$, $\varphi, \psi \in S(A) \cap \mathcal{L}^+(A)$ e
 $\varphi \leq \psi$ allora

$$\int_A \varphi d\mu \leq \int_A \psi d\mu.$$

(iv) Siano $A_m \in \mathcal{K}$, $m \in \mathbb{N}$, $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ ^{a 2 a 2 disgiunti} e
 $\varphi \in S(A) \cap \mathcal{L}^+(A)$. Allora

$$\int_A \varphi d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{A_m} \varphi d\mu$$

(v) Data la funzione $\varphi \in S(X) \cap \mathcal{L}^+(X)$ la
funzione $\nu: \mathcal{K} \rightarrow [0, +\infty]$ definita da

$$\nu(A) = \int_A \varphi d\mu, \quad A \in \mathcal{K}$$

è una misura su $\mathcal{K}$.

dim. (i) Ossia

(ii) Siano

$$\varphi = \sum_{j=1}^m \lambda_j X_{E_j} \quad \text{e} \quad \psi = \sum_{i=1}^n \nu_i X_{F_i}$$

le rappresentazioni standard.

Allora in generale

$$\varphi + \psi = \sum_{j=1}^m \lambda_j X_{E_j} + \sum_{i=1}^m \nu_i X_{F_i}$$

non è la rappresentazione standard per $\varphi + \psi$, ma
ciò nonostante dal Lemma 1

$$\begin{aligned} \int_A (\varphi + \psi) d\mu &= \sum_{j=1}^m \lambda_j \mu(E_j) + \sum_{i=1}^m \nu_i \mu(F_i) = \\ &= \int_A \varphi d\mu + \int_A \psi d\mu \end{aligned}$$

(iii) Poiché $\psi - \varphi \in S(A) \cap \mathcal{L}^+(A)$, dalla (ii)
($\varphi \leq \psi$)

$$\begin{aligned} \int_A \psi d\mu &= \int_A (\underbrace{\varphi}_{\geq 0} + \underbrace{(\psi - \varphi)}_{\geq 0}) d\mu \stackrel{(ii)}{=} \int_A \varphi d\mu + \underbrace{\int_A (\psi - \varphi) d\mu}_{\geq 0 \text{ per la def. 1}} \geq \\ &\geq \int_A \varphi d\mu. \end{aligned}$$

(iv) Sia

$$\varphi = \sum_{j=1}^m \lambda_j X_{E_j}$$

la rappresentazione standard di φ , ove $E_j = \{x \in A : \varphi(x) = \lambda_j\}$.
Ovviamente, $E_j \subset A (\Rightarrow E_j \cap A = E_j)$.

Allora

$$\begin{aligned} \int_A \varphi d\mu &= \sum_{j=1}^m \lambda_j \mu(E_j) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \mu(E_j \cap A) \stackrel{\mu \text{ è additiva}}{=} \\ &= \sum_{j=1}^m \lambda_j \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_j \cap A_n)}_{\substack{\text{a 2 a 2} \\ \text{disgiunti}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^m \lambda_j \mu(E_j \cap A_n) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \varphi d\mu. \end{aligned}$$

$E_j \cap A_n \subset A_n, \forall n, \forall j$
 $\lambda_j, \lambda_n \in [0, +\infty]$
 per il Lemma 1
 $\sum_{j=1}^m \lambda_j \mu(E_j \cap A_n) = \int_{A_n} \varphi d\mu$

(v) E' $\nu(\emptyset) = \int_{\emptyset} \varphi d\mu = 0$ (convezione) e

dalla (iv)

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$$

se $A_m \in \mathcal{K}$, $m \in \mathbb{N}$, sono a 2 a 2 disgiunti.

Def. 2 Siano $(X, \mathcal{K}, \mu)$ uno spazio misurato e $A \in \mathcal{K}$. Se $f \in \mathcal{L}^+(A)$ poniamo:

$$\int_A f d\mu \equiv \sup \left\{ \int_A \varphi d\mu : \varphi \in S(A) \cap \mathcal{L}^+(A) \text{ e } \varphi \leq f \right\}.$$

~~Unica rappresentazione~~ Se $f \in S(A) \cap \mathcal{L}^+(A)$ allora

$$\int_A f d\mu = \sup \left\{ \int_A \varphi d\mu : \varphi \in S(A) \cap \mathcal{L}^+(A) \text{ e } \varphi \leq f \right\}.$$

nel senso della
def. 2

(dal Lemma 2, $\int_A \varphi d\mu \leq \int_A f d\mu \Rightarrow \sup \{ \} \leq \int_A f d\mu$,
e $\varphi = f$ ($\exists \varphi$) $\Rightarrow \sup \{ \} = \int_A \varphi d\mu = \int_A f d\mu$)

$= \int_A f d\mu$. Dunque, la def. 2 non contraddice la def. 1.

nel senso della
def. 1

Lemma 3 Siano $(X, \mathcal{K}, \mu)$ uno spazio misurato e $A \in \mathcal{K}$.

(i) Se $f \in \mathcal{L}^+(A)$ e $c \geq 0$ allora
 $cf \in \mathcal{L}^+(A)$ e

$$\int_A cf d\mu = c \int_A f d\mu$$

(ii) Se $f, g \in \mathcal{L}^+(A)$ e $f \leq g$ allora

$$\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu$$

(iii) Se $f \in \mathcal{L}^+(A)$, $B \in \mathcal{M}$, $B \subset A$ allora

$$\int_B f \, d\mu \leq \int_A f \, d\mu.$$

dim. (i) Ovvia (Lemma 2).

(ii)

$$\begin{aligned} \int_A f \, d\mu &= \sup \left\{ \int_A \varphi \, d\mu : \varphi \in \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{L}^+(A), \varphi \leq f \right\} \leq \\ &\leq \sup \left\{ \int_A \psi \, d\mu : \psi \in \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{L}^+(A), \psi \leq g \right\} = \\ &= \int_A g \, d\mu. \end{aligned}$$

$\varphi \leq g$
 $\uparrow$

(iii) Sia $\varphi \in \mathcal{S}(B) \cap \mathcal{L}^+(B)$, e $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ se $x \in B$, $\tilde{\varphi}(x) = 0$ se $x \in A \setminus B$.

Se $\varphi \leq f$ su B allora $\tilde{\varphi} \leq f$ su A . Dunque,

$$\begin{aligned} \int_A \tilde{\varphi} \, d\mu &\stackrel{\text{Lemma 2 (A=B \cup A \setminus B)}}{=} \int_B \tilde{\varphi} \, d\mu + \int_{A \setminus B} \tilde{\varphi} \, d\mu = \int_B \varphi \, d\mu = \\ &= \int_B \varphi \, d\mu \end{aligned}$$

e

$$\int_B f \, d\mu = \sup \left\{ \underbrace{\int_B \varphi \, d\mu}_{\int_A \tilde{\varphi} \, d\mu} : \underbrace{\varphi \in \mathcal{S}(B) \cap \mathcal{L}^+(B)}_{\tilde{\varphi} \in \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{L}^+(A)}, \underbrace{\varphi \leq f}_{\tilde{\varphi} \leq f \text{ su } A} \right\} \leq$$

($\tilde{\varphi}$ è caso particolare di ψ)

$$\begin{aligned} &\leq \sup \left\{ \int_A \psi \, d\mu : \psi \in \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{L}^+(A), \psi \leq f \right\} = \\ &= \int_A f \, d\mu. \end{aligned}$$

CVD

Proviamo ora il seguente importante

(61)

Teorema 1 (della convergenza monotona o di Beppo-Levi)

Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurato, $A \in \mathcal{M}$ ed $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una successione crescente in $L^+(A)$, cioè

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq \dots, \text{ per ogni } x \in A.$$

Allora

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) \in L^+(A) \text{ e}$$

$$(1) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \int_A f_j d\mu = \int_A \lim_{j \rightarrow \infty} f_j d\mu.$$

dim. Già sappiamo che $f = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j \in L^+(A)$.

Poiché $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ e la successione numerica $\{\int_A f_j d\mu\}_{j \in \mathbb{N}}$ sono crescenti (dal lemma 3) si ha

$$f = \sup_{j \in \mathbb{N}} f_j \text{ e (1) è equivalente alla}$$

$$(1') \quad \sup_{j \in \mathbb{N}} \int_A f_j d\mu = \int_A f d\mu.$$

Dal lemma 3, poiché $f_j \leq f$,

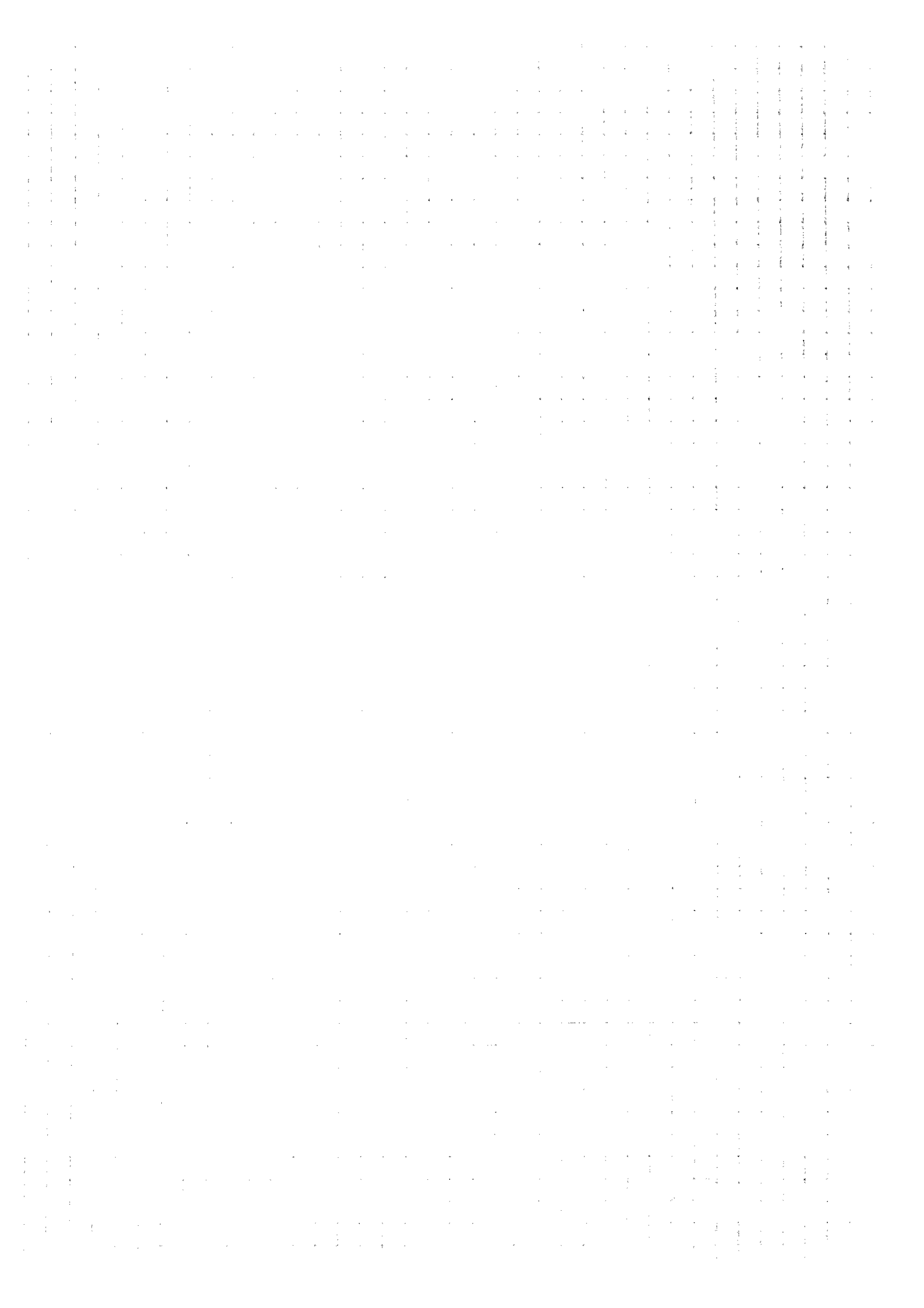
$$\int_A f_j d\mu \leq \int_A f d\mu, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Dunque,

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \int_A f_j d\mu \leq \int_A f d\mu$$

Rimane da provare la disuguaglianza inversa,

$$\int_A f d\mu \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} \int_A f_j d\mu.$$



Teorema 1

(62)

$(X, \mathcal{H}, \mu)$ sia uno spazio misurato, $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^+(A)$ successione crescente e $f = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j$. Allora

$$(1) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \int_A f_j d\mu = \int_A \lim_{j \rightarrow \infty} f_j d\mu.$$

dim. Rimane da provare che

$$\int_A f d\mu \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} \int_A f_j d\mu.$$

Dalla def. 2 basterà provare che $\forall \varphi \in \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{L}^+(A)$ con $\varphi \leq f$

$$\int_A \varphi d\mu \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} \int_A f_j d\mu.$$

Questo è equivalente a provare che $\forall \alpha \in]0, 1[$

$$\alpha \int_A \varphi d\mu \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} \int_A f_j d\mu$$

(basta poi passare al limite per $\alpha \rightarrow 1$).

Definiamo $\forall m \in \mathbb{N}$ l'insieme

$$E_m = \{x \in A : f_m(x) \geq \alpha \varphi(x)\}$$

Proviamo che

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_m = A \quad (*)$$

Ovviamente, $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_m \subset A$ (perché $E_m \subset A, \forall m \in \mathbb{N}$).

Sia $x \in A$, se $\varphi(x) = 0$ allora $x \in E_m$ per ogni m .

Se $\varphi(x) > 0$ allora

$$f(x) = \sup_{j \in \mathbb{N}} f_j(x) \geq \varphi(x) \geq \alpha \varphi(x) \quad (0 \leq \varphi \leq f).$$

Quindi esiste $j_x \in \mathbb{N}$ t.c. $f_{j_x}(x) \geq \alpha \varphi(x)$, allora $\sup_{j \in \mathbb{N}} f_j(x) \geq \alpha \varphi(x)$, ovvero

da cui $x \in E_{j_x}$, e dunque $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

$$\Rightarrow \bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_m \supset A \Rightarrow \bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_m = A.$$

Perché $f_n \leq f_{n+1}$, si ha $E_n \subset E_{n+1}$.

Dal lemma 2,

$\int_A \varphi d\mu$ è una misura su $\mathcal{H}$.

Dalla continuità dal basso per questa misura (successivamente)

$$\alpha \int_A \varphi d\mu = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} \varphi d\mu =$$

$$= \alpha \sup_{n \in \mathbb{H}} \int_{E_n} \varphi d\mu =$$

$$= \sup_{n \in \mathbb{H}} \int_{E_n} \alpha \varphi d\mu \leq$$

$$\leq \sup_{n \in \mathbb{H}} \int_{E_n} f_n d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{H}} \int_A f_n d\mu.$$

CVD

~~Osservazione~~ Questo argomento non è applicabile per

$\alpha = 1$ perché se $\sup_{j \in \mathbb{H}} a_j \geq a \not\Rightarrow \exists j \in \mathbb{H} : a_j \geq a$.

Per esempio, se $a_j = a - \frac{1}{j}$ ($\sup_{j \in \mathbb{H}} a_j = a$, ma $\nexists j$ t.c. $a_j \geq a$).

Ma abbiamo applicato il fatto che

$$\sup_{j \in \mathbb{H}} a_j > a \Rightarrow \exists j \in \mathbb{H} : a_j > a.$$

Corollario 1. Siano $(X, \mathcal{H}, \mu)$ uno spazio misurato e

$A \in \mathcal{H}$.

(i) Se $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^+(A)$ allora $f_1 + f_2 \in \mathcal{L}^+(A)$ e

$$\int_A (f_1 + f_2) d\mu = \int_A f_1 d\mu + \int_A f_2 d\mu.$$

(ii) (Scambio dell'ordine tra integrale e somma infinita).

Se $\{f_i\}_{i \in \mathbb{H}} \subset \mathcal{L}^+(A)$ allora

$$\int_A \sum_{j=1}^{\infty} f_j d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_A f_j d\mu$$

(63)

(Nessuna altra ipotesi!)

(iii) Se $A_m \in \mathcal{A}$ sono a 2 a 2 disgiunti e $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ e $f \in \mathcal{L}^+(A)$ allora

$$\int_A f d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{A_m} f d\mu$$

(iv) Se $f \in \mathcal{L}^+(A)$ allora

$$\int_A f d\mu = 0 \Leftrightarrow \mu(\{x \in A : f(x) > 0\}) = 0.$$

(v) Se $f \in \mathcal{L}^+(A)$, $g = f$ q.o. su A e $\forall g \in \mathcal{L}^+(A)$ ^{$g \geq 0$ e}

(che è sempre vero se la misura μ è completa)

allora

$$\int_A g d\mu = \int_A f d\mu$$

teorema 5, cap. 2

(vi) Se $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è una successione in $\mathcal{L}^+(A)$

crescente q.o. su A , $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = f$ q.o. su A

e se $f \in \mathcal{L}^+(A)$ (sempre vero se μ è completa)

allora

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_A f_j d\mu = \int_A \lim_{j \rightarrow \infty} f_j d\mu$$

(vii) Se $f \in \mathcal{L}^+(A)$ e $\int_A f d\mu < +\infty$ allora

$$\mu(\{x \in A : f(x) = +\infty\}) = 0.$$

dim. (i) Per il teorema di approssimazione con le funzioni semplici (Teorema 3 del cap. 2.) esistono 2 successioni $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}, \{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset S(A) \cap L^+(A)$ crescente con

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j = f_1, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \psi_j = f_2.$$

Dal teorema 1 e dal lemma 1 (ii)

$$\begin{aligned} \int_A (f_1 + f_2) d\mu &\stackrel{\text{Teor. 1}}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_A \underbrace{(\varphi_j + \psi_j)}_{\text{crescente}} d\mu \stackrel{\text{Lemma 1}}{=} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\int_A \varphi_j d\mu + \int_A \psi_j d\mu \right) = \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_A \varphi_j d\mu + \lim_{j \rightarrow \infty} \int_A \psi_j d\mu = \\ &= \int_A f_1 d\mu + \int_A f_2 d\mu. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \int_A \sum_{j=1}^{\infty} f_j d\mu &= \int_A \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{j=1}^n f_j}_{\text{crescente}} \right) d\mu \stackrel{\text{Teorema 1}}{=} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \sum_{j=1}^n f_j d\mu \stackrel{(i)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \int_A f_j d\mu = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_A f_j d\mu. \end{aligned}$$

(iii) Per il teorema di approssimazione con le funzioni semplici, esiste una successione crescente $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ di funzioni semplici t.c. $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \in S(A) \cap L^+(A)$
 $f = \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j.$

Dal Teor. 1 e dal lemma 2 (iv) si ha crescente in j

$$\int_A f d\mu \stackrel{\text{Teor. 1}}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_A \varphi_j d\mu \stackrel{\text{Lemma 2}}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \varphi_j d\mu =$$

$$= \sup_{\text{partizioni}} \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n=1}^m \int_{A_n} \varphi_j d\mu = \dots$$

la supremazione delle somme partizionali è crescente, alla
 fine si termina come in (i)

$$= \sup_{m \in H} \sup_{j \in H} \sum_{n=1}^m \int_{A_n} \varphi_j d\mu =$$

($\sup_{m \in H} \sum_{n=1}^m \varphi_j d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_j d\mu$ in generale, ma $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_j d\mu$ è crescente)

$$= \sup_{m \in H} \sum_{n=1}^m \sup_{j \in H} \int_{A_n} \varphi_j d\mu =$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{A_n} \varphi_j d\mu = \int_{A_m} f d\mu, \text{ Teor. 1}$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \int_{A_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu.$$

64

(iv) esercizio

(v) Poniamo $N = \{x \in A : g(x) \neq f(x)\}$. Allora
 $\exists \Pi_1 \in \mathcal{M}$ t.c. $N \subset \Pi_1$ e $\mu(\Pi_1) = 0$.

Dunque,

$$\int_A g d\mu = \int_{A \setminus \Pi_1} g d\mu + \underbrace{\int_{\Pi_1} g d\mu}_0 = \int_{A \setminus \Pi_1} f d\mu =$$

"0, perché $\mu(\Pi_1) = 0$

$$= \int_{A \setminus \Pi_1} f d\mu + \underbrace{\int_{\Pi_1} f d\mu}_0 = \int_A f d\mu.$$

(vi), (vii) esercizio

CVD

Attenzione In (viii) bisogna mostrare che

$\{x \in A : f(x) = +\infty\} \in \mathcal{M}$. Ciò segue perché
 $\{x \in A : f(x) = +\infty\} = f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{M}$ poiché
 f è $\mathcal{M}$ -integrabile (Teor. 1, cap. 7, (i) $\Rightarrow$ (ix)).

Corollario 2. Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio misurato,
 $f \in \mathcal{L}^+(X)$ e $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$, $\forall A \in \mathcal{A}$

($\nu: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$). Allora ν è una misura
 su $\mathcal{A}$.

dim. (1) $\nu(\emptyset) = \int_{\emptyset} f \, d\mu = 0$ (convenzione)

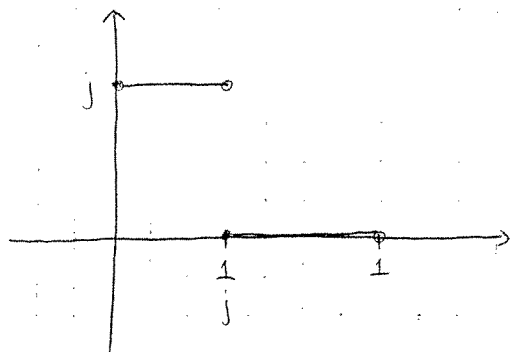
(2) Se $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$ sono a 2 a 2 disgiunti
 allora dal Corollario 1

$$\begin{aligned} \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} f \, d\mu \stackrel{\text{Col. 1}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f \, d\mu = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n). \end{aligned}$$

~~Esempio~~ Siano $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}_{\mathbb{R}}, m)$ ove m è
 la misura di Lebesgue. Sia

$$A =]0, 1[\quad e$$

$$f_j(x) = \begin{cases} j & \text{se } 0 < x < \frac{1}{j} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{j} \leq x < 1 \end{cases}$$



Allora $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) = 0$.

M_a

$$f_j = j \cdot \chi_{[0, \frac{1}{j}]} , \quad ([0, \frac{1}{j}]) = \frac{1}{j} - 0 = \frac{1}{j}$$

$$\int_A f_j(x) \, d\mu = 1 \quad (\text{funzione semplice})$$

(65)

$$\Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} \int_A f_j \, d\mu = 1 \neq \int_A 0 \, d\mu = \int_A f \, d\mu$$

per cui $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ non è crescente

CAPITOLO 9. INTEGRAZIONE DI FUNZIONI COMPLESSE

Def 1. Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurato e $A \in \mathcal{M}$

(i) Se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è $\mathcal{M}$ -misurabile e almeno uno degli integrali $\int_A f^+ \, d\mu$ e $\int_A f^- \, d\mu$ (f^+, f^- sono non negative) è finito, potremo

$$\int_A f \, d\mu \equiv \int_A f^+ \, d\mu - \int_A f^- \, d\mu$$

(ricordiamo che $f = f^+ - f^-$; convenzione $+\infty - a = +\infty$, $a - (+\infty) = -\infty$, $\forall a \in \mathbb{R}$)

(ii) Se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è $\mathcal{M}$ -misurabile e ambedue gli integrali $\int_A f^+ \, d\mu$, $\int_A f^- \, d\mu$ sono finiti, diciamo che f è μ -integrabile su A .

Def. 2. Siano $(X, \mathcal{K}, \mu)$ uno spazio misurato e $A \in \mathcal{K}$. Diremo che una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ è μ -integrabile se ambedue $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ sono μ -integrabili.

Se ciò accade possiamo:

$$\int_A f \, d\mu \equiv \int_A \operatorname{Re} f \, d\mu + i \int_A \operatorname{Im} f \, d\mu$$

$$(f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f).$$

~~Def. 3.~~ Se f è $\mathcal{K}$ -misurabile su A allora f è μ -integrabile su A se e solo se $|f|$ è μ -integrabile ($\Leftrightarrow \int_A |f| \, d\mu < +\infty$).

Infatti, se f è μ -integrabile allora f^+ e f^- sono μ -integrabili. Dunque, $|f| = f^+ + f^-$ è μ -integrabile. Se $|f|$ è μ -integrabile allora $0 \leq f^+$, $f^- \leq |f|$ sono $\mathcal{K}$ -misurabili (f è $\mathcal{K}$ -misurabile).

Dunque,

$$\int_A f^+ \, d\mu \leq \int_A |f| \, d\mu < +\infty \quad \text{e} \quad \int_A f^+ \, d\mu < +\infty.$$

In modo simile, $\int_A f^- \, d\mu$ è finito.

Dunque, f è μ -integrabile.

$$* \quad |f|^+ = |f|, \quad |f|^- = 0.$$

~~Esempio~~ $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}_\mathbb{R}, m)$,

$A =]0, 1[$, $B \subset A$, $B \notin \mathcal{L}_\mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B \\ -1 & \text{se } x \in A \setminus B \end{cases}$$

$\nearrow$ $\int_{\mathbb{R}} |f|^+ d\mu = m(A) = 1$,
 $\int_{\mathbb{R}} |f|^- d\mu = 0$
 $\nearrow$ $\int_{\mathbb{R}} |f| d\mu = 1$
 $\nearrow$ $\int_{\mathbb{R}} f d\mu = 1$
 $\nearrow$ $\int_{\mathbb{R}} f d\mu = 1$

Urvicemente, $|f| = 1 \cdot \chi_A$ $\in \mathcal{L}_\mathbb{R}$ misurabile ma

$f^+ = \chi_B$ non $\in \mathcal{L}_\mathbb{R}$ misurabile (es. già visto)

e dunque f non $\in \mathcal{L}_\mathbb{R}$ misurabile (f^+ non $\mathcal{L}_\mathbb{R}$ -mis. $\Rightarrow f$ non $\mathcal{L}_\mathbb{R}$ -mis.)

Lemma 1 Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio misurato, $A \in \mathcal{A}$

e $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione μ -integrabile. Allora

$$\left| \int_A f d\mu \right| \leq \int_A |f| d\mu.$$

dim Se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ allora

$$\left| \int_A f d\mu \right| \stackrel{\text{def}}{=} \left| \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu \right| \leq$$

$$\leq \underbrace{\int_A f^+ d\mu}_{\geq 0} + \underbrace{\int_A f^- d\mu}_{\geq 0} = \int_A (f^+ + f^-) d\mu =$$

$$= \int_A |f| d\mu.$$

Se $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ e $\int_A f d\mu \neq 0$ (il caso $= 0$ è ovvio),

poniamo $\alpha = \frac{\int_A f d\mu}{\left| \int_A f d\mu \right|}$ ($\neq 0$). Allora

$|\alpha| = 1$ e

$$0 \leq \underbrace{\left| \int_A f d\mu \right|}_{\in \mathbb{R}} = \alpha \int_A f d\mu \stackrel{*}{=} \underbrace{\int_A \alpha f d\mu}_{\in \mathbb{R}} =$$

$$= \operatorname{Re} \left(\int_A \alpha f d\mu \right) \stackrel{\text{def}}{=} \int_A \operatorname{Re}(\alpha f) d\mu + 0 \leq$$

$$\leq \int_A |\alpha f| d\mu = \int_A \underbrace{|\alpha|}_1 |f| d\mu = \int_A |f| d\mu \quad \text{CVD}$$

Osservazione. Se $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ è μ -integrabile su A e $\alpha \in \mathbb{C}$ allora $\alpha \int_A f d\mu = \int_A \alpha f d\mu$. È facile da verificare.

Def. 3. Siano $(X, \mathcal{K}, \mu)$ uno spazio misurato e $A \in \mathcal{K}$.

Diremo che $f \in L^1_\mu(A)$ se $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione μ -integrabile su A .

Teorema 2 (II. Teorema di Fatou)

Siano $(X, \mathcal{K}, \mu)$ uno spazio misurato, $A \in \mathcal{K}$ ed.

$\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \underline{L^+}(A)$. Allora

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} f_j \in L^+(A) \quad \text{e}$$

$$(2) \quad \int_A \left(\liminf_{j \rightarrow \infty} f_j \right) d\mu \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_A f_j d\mu$$

(e $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è crescente, vale =) Beppo Levi

dim. Già sappiamo che $\liminf_{j \rightarrow \infty} f_j \in L^+(A)$.

Poiché la successione

$$\inf_{j \geq n} f_j$$

è crescente, dal teorema di Beppo-Levi si ha

$$\int_A \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j d\mu = \int_A \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{j \geq n} f_j \right) \right) d\mu \quad \text{Beppo Levi}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \left(\inf_{j \geq n} f_j \right) d\mu$$

Poiché $\inf_{j \geq n} f_j \leq f_m$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$,

(67)

$$\int_A \inf_{j \geq m} f_j \, d\mu \leq \int_A f_m \, d\mu, \quad \forall m \geq n$$

è una minorante e l'inf è il max dei minoranti
e quindi

$$\int_A \inf_{j \geq m} f_j \, d\mu \leq \inf_{m \geq n} \int_A f_m \, d\mu$$

Infine, essendo entrambe crescenti, esistono i limiti e si ha

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_A \inf_{j \geq m} f_j \, d\mu &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\inf_{m \geq n} \int_A f_m \, d\mu \right) = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_A f_m \, d\mu. \end{aligned}$$

C.V.D.

Teorema 3 (una generalizzazione del teorema di Beppo Levi)

Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio misurato, $A \in \mathcal{A}$ ed

$\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni $f_j: A \rightarrow \mathbb{R}$

$\mathcal{A}$ -misurabili. Supponiamo che

1) $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = f$ q.o. su A

2) f è $\mathcal{A}$ -misurabile (che è sempre vero se μ è completa)

3) $g \leq f_j \leq f$ q.o. su A , per una certa funzione $g \in L^1_\mu(A)$.

Allora

$$(3) \quad \int_A \lim_{j \rightarrow \infty} f_j \, d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_A f_j \, d\mu.$$

Osservazione Ricordiamo che nel Teor. di Beppo Levi

$$0 \leq \dots \leq f_j \leq f_{j+1} \leq \dots \leq f \Rightarrow 3) \quad (0 = g \in L^1_\mu(A))$$

Quindi è una generalizzazione.

~~Il~~ Il teorema non dice che $f \in L^1_\mu(A)$. L'integrale può dunque divergere (si veda l'esercizio 8 della

dim. Consideriamo

$$h_j = f_j - g, \quad h = f - g.$$

Allora

$$0 \leq h_j \leq h, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} h_j = h \text{ q.o. su } A.$$

Dunque, esistono Π_0, Π_j con $j \in \mathbb{N}$ t.c. $\mu(\Pi_0) = \mu(\Pi_1) = \dots = 0$ e

$$\lim_{j \rightarrow \infty} h_j = h \text{ ovunque su } A \setminus \Pi_0.$$

$$0 \leq h_j \leq h \text{ ovunque su } A \setminus \Pi_j.$$

Poniamo $\Pi = \bigcup_{j=0}^{\infty} \Pi_j$. Allora

$$0 \leq h_j \leq h, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} h_j = h \text{ ovunque su } A \setminus \Pi, \forall j.$$

$$\text{Inoltre, } \mu(\Pi) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \mu(\Pi_j) = 0 \Rightarrow \mu(\Pi) = 0.$$

Dal Teorema di Fatou,

$$\begin{aligned} \int_{A \setminus \Pi} h \, d\mu &= \int_{A \setminus \Pi} \left(\lim_{j \rightarrow \infty} h_j \right) d\mu \stackrel{(*)}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{A \setminus \Pi} h_j \, d\mu \\ &= \int_{A \setminus \Pi} \left(\liminf_{j \rightarrow \infty} h_j \right) d\mu \stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{A \setminus \Pi} h_j \, d\mu \leq \\ &\leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \int_{A \setminus \Pi} h_j \, d\mu \stackrel{h_j \leq h \text{ ovunque su } A \setminus \Pi}{\leq} \int_{A \setminus \Pi} h \, d\mu. \end{aligned}$$

Dunque,

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{A \setminus \Pi} h_j \, d\mu = \limsup_{j \rightarrow \infty} \int_{A \setminus \Pi} h_j \, d\mu = \int_{A \setminus \Pi} h \, d\mu$$

$$\text{e } \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{A \setminus \Pi} h_j \, d\mu = \int_{A \setminus \Pi} h \, d\mu.$$

$$\text{Poiché } \int_{\Pi} h_j \, d\mu = \int_{\Pi} h \, d\mu = 0 \quad (\text{c. } \mu(\Pi) = 0) \text{ si ha}$$

che

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_A h_j \, d\mu = \int_A h \, d\mu,$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_A (f_j - g) d\mu = \int_A (f - g) d\mu$$

Poiché g è μ -integrabile si ha

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_A f_j d\mu - \int_A g d\mu = \int_A f d\mu - \int_A g d\mu$$

(in generale, f_j non è μ -integrabile) e

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_A f_j d\mu = \int_A f d\mu.$$

CVD

Corollario. L'uguaglianza (3) è anche vera se

1) - 3) sono sostituite con

1') $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = g$ q.o. su A

2') g è $\mathcal{M}$ -misurabile (sempre vero se μ è completa)

3') $g \leq f_j \leq f$ q.o. su A per una certa funzione $f \in L^1_\mu(A)$

dim. Basterà notare che f_j, f, g soddisfano

le condizioni 1) - 2) - 3) del Teor. 3.

CVD

Osservazione. Può accadere che ambedue i membri della uguaglianza (3) sono uguali a $+\infty$ (risp. a $-\infty$) ^{Teor. 3} ^{Corollario}

Ora formuliamo la condizione più utile che assicura la possibilità di passare al limite sotto il segno di integrale.

Teorema 4 (della convergenza dominata o il
teorema di Lebesgue)

Siano $(X, \mathcal{K}, \mu)$ uno spazio misurato, $A \in \mathcal{K}$,
 $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni $f_j: A \rightarrow \mathbb{C}$
t.c. $f_j \in L^1_\mu(A)$ e

1) $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = f$ q.o. su A

2) esiste una funzione $g \in L^1_\mu(A)$ t.c.
 $|f_j| \leq g$ q.o. $\forall j \in \mathbb{N}$.

Allora $f \in L^1_\mu(A)$ e

3) $\lim_{j \rightarrow \infty} \int_A f_j d\mu = \int_A f d\mu$.

dim. Dapprima assumiamo che $f_j: A \rightarrow \mathbb{R}$. Poniamo

$$\underline{f}_j = \min \{f_j, f\}, \quad \bar{f}_j = \max \{f_j, f\}$$

Dalla 2) $(-g \leq f_j \leq g \text{ q.o.}, \forall j \in \mathbb{N})$

$$-g \leq \underline{f}_j \leq f, \quad f \leq \bar{f}_j \leq g \quad \text{q.o. su } A.$$

Quindi, dal teor. 3 e corollario,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_A \underline{f}_j d\mu = \int_A \lim_{j \rightarrow \infty} \underline{f}_j d\mu = \int_A f d\mu \quad \text{e}$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_A \bar{f}_j d\mu = \int_A f d\mu.$$

Poiché $\underline{f}_j \leq f_j \leq \bar{f}_j$ q.o. su A , $\forall j \in \mathbb{N}$,

si ha $\int_A f d\mu$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_A \underline{f}_j d\mu = \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_A \underline{f}_j d\mu \leq$$

$$\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_A f_j d\mu \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \int_A f_j d\mu \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \int_A \bar{f}_j d\mu =$$

esist
il
lim

$$= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_A \bar{f}_j d\mu = \int_A \bar{f} d\mu.$$

(69)

Dunque,

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \int_A f_j d\mu = \limsup_{j \rightarrow \infty} \int_A f_j d\mu = \int_A f d\mu$$

e quindi

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_A f_j d\mu = \int_A f d\mu$$

Inoltre, essendo $|f_j| \leq g$ q.o. $\forall j \in \mathbb{N}$, è $|f| \leq g$ q.o., da cui

$$-\infty < \int_A g d\mu < +\infty \Rightarrow \int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu < +\infty,$$

dunque $f \in L^1_\mu(A)$

○ Se $f_j: A \rightarrow \mathbb{C}$, allora

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = f \Leftrightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} \operatorname{Re} f_j = \operatorname{Re} f \text{ e } \lim_{j \rightarrow \infty} \operatorname{Im} f_j = \operatorname{Im} f$$

q.o. su A

Anche

$$|f_j| \leq g \text{ q.o. su } A \Rightarrow |\operatorname{Re} f_j| (\leq |f_j|) \leq g \text{ e } |\operatorname{Im} f_j| (\leq |f_j|) \leq g \text{ q.o. su } A.$$

Dunque, dall'argomento visto sopra,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_A (\operatorname{Re} f_j) d\mu = \int_A (\operatorname{Re} f) d\mu \text{ e}$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_A (\operatorname{Im} f_j) d\mu = \int_A (\operatorname{Im} f) d\mu,$$

che significa che

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_A f_j d\mu = \int_A f d\mu.$$

CND

Osservazione Notiamo che la minima funzione $g \in L^1_\mu(A)$ che soddisfa

$$|f_j| \leq g \quad \text{q.o. su } A, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

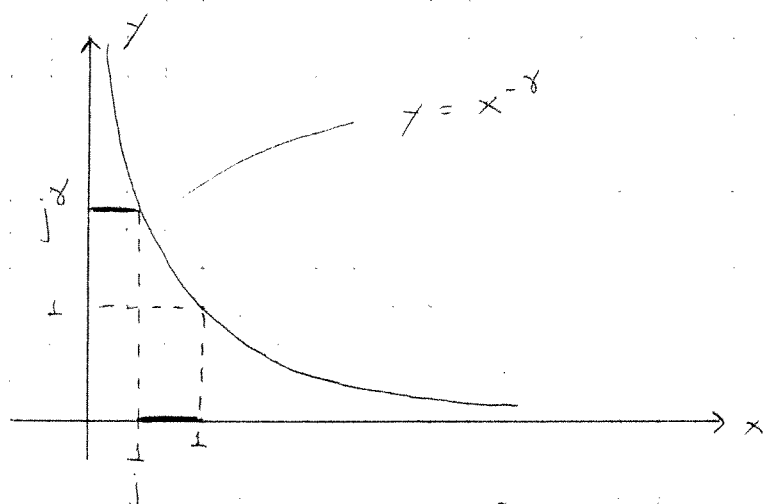
è

$$g = \sup_{j \in \mathbb{N}} |f_j|$$

$$(f_j \in L^1_\mu(A) \Rightarrow |f_j| \in L^1_\mu(A) \Rightarrow g \in L^1_\mu(A))$$

Esempio. Siano $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}_{\mathbb{R}}, m)$, $A =]0, 1[$, $\gamma \geq 0$,

$$f_j(x) = \begin{cases} j^\gamma & \text{se } 0 < x \leq \frac{1}{j} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{j} < x < 1 \end{cases}$$



Chiaramente f_j è una funzione in $S(A) \cap \mathcal{L}^+(A)$

$$\int_{]0, 1[} f_j d\mu = j^\gamma \cdot m\left(\left]0, \frac{1}{j}\right[\right) = j^{\gamma-1}, \quad e$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = 0 = f, \quad e \quad \text{dunque}$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{]0, 1[} f_j d\mu = \int_{]0, 1[} f d\mu \quad \Leftrightarrow \quad \gamma < 1$$

Applichiamo il Teor. L_1 . Notiamo che

$$2^{-\gamma} x^{-\gamma} \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} f_j(x) \leq x^{-\gamma} \quad (\text{esercizio})$$

$$\text{Sia } g(x) = x^{-\gamma}$$

Allora $g \in L^1_m(]0,1[) \Leftrightarrow \gamma < 1$

(70)

Teor. 4
 $\Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{]0,1[} f_j d\mu = \int_{]0,1[} f d\mu = 0.$

Teorema 5

Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio misurato, $A \in \mathcal{A}$ e

$\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset L^1_\mu(A)$ t.c. $f_j: A \rightarrow \mathbb{C}$ e

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_A |f_j| d\mu < \infty \quad (\text{converge}).$$

Allora

1) $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ converge q.o. su A

2) $\sum_{j=1}^{\infty} f_j \in L^1_\mu(A)$

3) $\int_A \left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j \right) d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_A f_j d\mu$

(3) è sempre vera se $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset L^+(A)$.

Osservazione. Dalla 1), esiste $\Pi \in \mathcal{A}$, $\Pi \subset A$, con $\mu(\Pi) = 0$
 t.c. $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ converge ovunque su $A \setminus \Pi$. Dunque su
 Π $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ non è definita.

Nella 2) si assume che su Π $\sum_{j=1}^{\infty} f_j = 0$
 e dunque $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ è definita su A .

dim. Ricordiamo che

$$\int_A \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j| \right) d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_A |f_j| d\mu < +\infty \quad (\text{per ipotesi, perché } |f_j| \in \mathcal{R}^+(A)).$$

Piché $\int_A \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j| \right) d\mu < +\infty$, la misura dell'insieme

$$\{x \in A : \sum_{j=1}^{\infty} |f_j| = +\infty\} \bar{=} \emptyset.$$

Diunque, $\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|$ converge q.o. su A .

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} f_j \text{ converge q.o. su } A.$$

Inoltre,

$$\left| \sum_{j=1}^m f_j \right| \leq \sum_{j=1}^m |f_j| \quad \left(\left| \sum_{j=1}^m f_j \right| \leq \sum_{j=1}^m |f_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |f_j| \right)$$

Se $F_m = \sum_{j=1}^m f_j$ e $G = \sum_{j=1}^{\infty} |f_j|$ allora

$$|F_m| \leq G, \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad G \in L^1_{\mu}(A).$$

Diunque, dal teor. di Lebesgue,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_A F_m d\mu = \int_A \left(\lim_{m \rightarrow \infty} F_m \right) d\mu$$

$\Downarrow$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_A f_j d\mu = \int_A \left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j \right) d\mu.$$

C.V.D.

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\int_A \sum_{j=1}^m f_j d\mu \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^m \int_A f_j d\mu \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_A f_j d\mu$$

Teorema 6

(71)

Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio misurato, $A \in \mathcal{A}$,
 $f \in L^1_\mu(A)$ e $\{f_j\}_{j \in H} \subset L^1_\mu(A)$ t.c.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_A |f_j - f| d\mu = 0$$

($\Leftrightarrow$ $f_j \xrightarrow{\text{brevemente}} f$ in $L^1_\mu(A)$).

Allora esiste una sottosuccessione $\{f_{j_m}\}_{m \in H}$ t.c.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_{j_m} = f \quad \text{q.o. su } A.$$

Senza dim. [vedi Folland, cap. 3]

Osservazione In generale l'affermazione

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = f \quad \text{q.o. su } A$$

non è vera.

CAPITOLO 10 : INTEGRALI DI RIEMANN E DI LEBESGUE

Ricordiamo la caratterizzazione di Darboux dell'integrale di Riemann.

Sia $-\infty < a < b < +\infty$ e $P = \{t_j\}_{j=0}^m$ una partizione di $[a, b]$, cioè

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b.$$

Sia f una funzione di $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Siano

$$m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x), \quad M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x), \quad \text{e}$$

$$m_j = \inf_{t_{j-1} \leq x \leq t_j} f(x), \quad M_j = \sup_{t_{j-1} \leq x \leq t_j} f(x), \quad \text{e}$$

$$S_p(f) = \sum_{j=1}^m m_j (t_j - t_{j-1}), \quad S_p(f) = \sum_{j=1}^m M_j (t_j - t_{j-1})$$

Definiamo che

$$\int_a^b f \, dx = \sup_P S_p(f), \quad \int_a^b f \, dx = \inf_P S_p(f)$$

(integrale inferiore)

(integrale superiore)

Notiamo che se $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione di partizioni t.c. $P_k \subset P_{k+1}$ e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta(P_k) = 0$$

ovv.

$$\delta(P) = \max_{1 \leq j \leq m} (t_j - t_{j-1}),$$

allora

$$(1) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} S_{P_k}(f) = \int_a^b f \, dx$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{P_k}(f) = \int_a^b f \, dx$$

($\nearrow S_{P_k} \leq S_{P_{k+1}}, S_{P_k} \geq S_{P_{k+1}}$)
 $\Rightarrow$ i limiti esistono e sono il
min e il max.)

Si dice che f è Riemann integrabile su $[a, b]$ se

$$\int_a^b f dx = \bar{\int}_a^b f dx \in \mathbb{R} \quad (\text{Numero reale})$$

In questo caso,

$$\int_a^b f dx = \int_a^b f dx = \bar{\int}_a^b f dx$$

(72)

Se f è Riemann integrabile allora f è limitata
 (se f non è limitata $\Rightarrow \int f = -\infty$ o $\bar{\int} f = +\infty$) e

$$\lim_{\delta(P) \rightarrow 0} S_p(f) = \lim_{\delta(P) \rightarrow 0} \bar{S}_p(f) = \int_a^b f dx$$

Teorema 1

Siano $-\infty < a < b < +\infty$ e $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) Se f è Riemann integrabile su $[a, b]$ allora
 f è Lebesgue integrabile su $[a, b]$ e

$$\int_{[a, b]} f dm = \int_a^b f dx$$

(b) La limitatezza di f e la Lebesgue integrabilità
non implicano la Riemann integrabilità.

(c) f è Riemann integrabile su $[a, b]$
 se e solo se f è limitata e la misura
 di Lebesgue dell'insieme

$$\{x \in [a, b] : f \text{ non è continua in } x\}$$

è uguale a 0.

dim (a) Siano $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$, $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$. Poiché

f è R integrabile, $m > -\infty$, $M < +\infty$ (f è limitata).

Siano per ogni partizione P

$$g_P = \sum_{j=1}^n m_j X_{[t_{j-1}, t_j]} \quad , \quad G_P = \sum_{j=1}^n M_j X_{[t_{j-1}, t_j]}$$

Consideriamo una successione di partizioni $\{P_K\}_{K \in \mathbb{N}}$,

$$P_K = \{t_j^{(K)}\}_{j=0}^{m_K} \quad \text{t.c.} \quad P_K \subset P_{K+1} \quad \text{e}$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \delta(P_K) = 0 \quad ,$$

e le due successioni

$$\{g_{P_K}\}_{K \in \mathbb{N}} \quad , \quad \{G_{P_K}\}_{K \in \mathbb{N}} \quad \text{Allora}$$

il numero di suddivisioni, ma
in un intervallo meno, può
trovare un inf più basso di quello
e tenuto prima

$$g_{P_K} \leq g_{P_{K+1}} \quad (\text{perché } P_K \subset P_{K+1})$$

$$m \leq g_{P_K} \leq g_{P_{K+1}} \leq f \leq G_{P_{K+1}} \leq G_{P_K} \leq M \quad ,$$

$$S_{P_K}(f) = \sum_{j=0}^{m_K} m_j^{(K)} (t_j^{(K)} - t_{j-1}^{(K)}) = \int_a^b g_{P_K} dx \quad ,$$

$$S_{P_K}(f) = \int_a^b G_{P_K} dx \quad (\text{analogamente}).$$

Dunque

$$S_{P_K}(f) \leq S_{P_{K+1}}(f) \leq S_{P_{K+1}}(f) \leq \quad (\text{da } g_{P_K} \leq g_{P_{K+1}}) \\ \leq S_{P_K}(f) \quad \int g_K \leq \int g_{K+1}$$

e

monotona
⇒ esiste il limite

$$(2) \quad g \equiv \lim_{K \rightarrow \infty} g_{P_K} \leq f \leq \lim_{K \rightarrow \infty} G_{P_K} \equiv G$$

Poiché le funzioni g_{P_K} sono funzioni semplici, gli integrali di Riemann e di Lebesgue di g_{P_K} coincidono.

$$\int_{[a,b]} g_{P_K} dm = \sum_{j=1}^{m_K} m_j^{(K)} (t_j^{(K)} - t_{j-1}^{(K)}) = \int_a^b g_{P_K} dx$$

Le funzioni g, G sono limiti di successioni

$\{g_{P_K}\}_{K \in \mathbb{N}} \quad , \quad \{G_{P_K}\}_{K \in \mathbb{N}}$ monotone di funzioni semplici,

$$m \leq g_{P_K}(x) \leq G_{P_K}(x) \leq M, \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\forall K \in H$$

(73)

Dunque, g e G sono Lebesgue misurabili e dal Teorema di Beppo Levi generalizzato,

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} g \, d\mu &= \int_{[a,b]} \left(\lim_{K \rightarrow \infty} g_{P_K} \right) d\mu = \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} g_{P_K} \, d\mu = \\ &= \lim_{K \rightarrow \infty} S_{P_K}(f) = \int_a^b f \, dx \quad \left(\text{perché } \lim_{K \rightarrow \infty} \delta(P_K) = 0 \right) \end{aligned}$$

Quindi,

$$(3') \quad \int_{[a,b]} g \, d\mu = \int_a^b f \, dx$$

e allo stesso modo

$$(3'') \quad \int_{[a,b]} G \, d\mu = \int_a^b f \, dx$$

Perché f è $\mathcal{R}$ integrabile, si ha

$$\int_{[a,b]} g \, d\mu = \int_{[a,b]} G \, d\mu \quad \left(= \int_a^b f \, dx \right)$$

$$\int_{[a,b]} (G - g) \, d\mu = 0 \quad (g = g^+ - g^-, G = G^+ - G^-)$$

Perché $G - g \geq 0$, questo implica che

$$G - g = 0 \quad \text{q.o. su } [a, b] \quad \text{e} \quad g = G \quad \text{q.o. su } [a, b]$$

Dalla disuguaglianza (2),

$$f = g \quad \text{q.o. su } [a, b]$$

Perché la misura di Lebesgue è completa,

f è Lebesgue misurabile su $[a, b]$ e

$$\int_{[a,b]} f \, d\mu = \int_{[a,b]} g \, d\mu = \int_a^b f \, dx.$$

$$f = g^+ - g^- \quad \int_a^b f \, dx = \int_a^b g^+ \, dx - \int_a^b g^- \, dx = \int_a^b g \, dx$$

(b) Consideriamo la funzione di Dirichlet

$$X(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è razionale} \\ 0 & \text{se } x \text{ è irrazionale} \end{cases}$$

La X non è $\mathcal{R}$ integrabile perché

$$\int_{-a}^b X \, dx = 0, \quad \int_a^b X = b-a$$

Ma X è Lebesgue misurabile perché

$$X \sim 0 \Leftrightarrow X = 0 \text{ q.o. su } [a, b]$$

$$\Leftrightarrow m\left(\underbrace{\{x \in [a, b] : X(x) \neq 0\}}_{\substack{\cap \\ \mathbb{Q}}}\right) = 0$$

Dunque,

$$\int_{[a, b]} X \, dm = \int_{[a, b]} 0 \, dm = 0$$

(c) Siano

$$h(x) = \liminf_{\gamma \rightarrow x} f(\gamma), \quad H(x) = \limsup_{\gamma \rightarrow x} f(\gamma)$$

Allora f è continua in x se e solo se

$$h(x) = H(x) = f(x).$$

Notiamo che dalla (2)

$$h(x) \geq g(x) \quad (\text{esercizio}).$$

Sia

$$P = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \quad (\text{vedi (a)}).$$

Allora P è numerabile e quindi $m(P) = 0$. Allora

$$(4) \quad g(x) = h(x) \quad \forall x \in [a, b] \setminus P$$

Infatti, sia $x \in [a, b] \setminus P$. Allora $\forall K \in \mathbb{N}$ esiste

$$1 \leq j = j(x, K) \leq m_K \text{ t.c. } x \in]t_{j-1}^{(K)}, t_j^{(K)}]$$

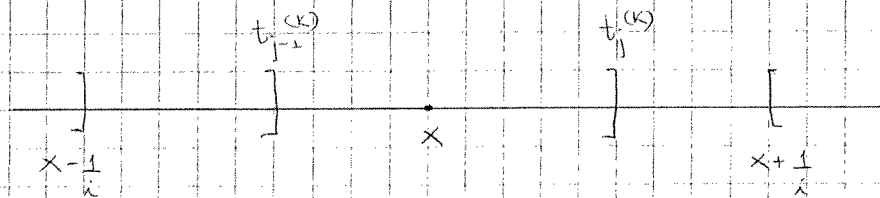
$$(\text{perché } [a, b] = \bigcup]t_{j-1}^{(K)}, t_j^{(K)}]) \text{ e } x \in]t_{j-1}^{(K)}, t_j^{(K)}[$$

$$(\text{perché } x \notin P). \text{ Poiché } \lim_{K \rightarrow \infty} \delta(P_K) = 0 \text{ si ha}$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} (t_{j+1}^{(K)} - t_j^{(K)}) = 0 \quad \text{Dunque,} \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ esiste}$$

$$K = K(x, \varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad 1 \leq j = j(x, \varepsilon) \leq m_K \quad \text{t.c.} \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \text{def. di} \\ \text{limite} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} &] t_{j-1}^{(K)}, t_j^{(K)}] \subset] x - \frac{1}{\varepsilon}, x + \frac{1}{\varepsilon} [\quad \text{e} \\ & x \in] t_{j-1}^{(K)}, t_j^{(K)} [\end{aligned}$$



74

Quindi,

$$\inf_{\gamma \in]x - \frac{1}{\varepsilon}, x + \frac{1}{\varepsilon}[} f(\gamma) \leq \inf_{\gamma \in]t_{j-1}^{(K)}, t_j^{(K)}[} f(\gamma) = m_j^{(K)} = g_{P_K}(x) \leq g(x)$$

$$h(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{\gamma \in]x - \frac{1}{\varepsilon}, x + \frac{1}{\varepsilon}[} f(\gamma) \leq g(x)$$

Allo stesso modo,

$$(5) \quad G(x) = H(x), \quad \forall x \in [a, b] \setminus P$$

Le uguaglianze (4) e (5) implicano che h e H sono Lebesgue misurabili (lo sono g e G), e dalle (3'), (3'')

$$\int_{[a,b]} h \, dm = \int_{[a,b]} g \, dm = \int_{-a}^b f \, dx$$

$$\int_{[a,b]} H \, dm = \int_{[a,b]} G \, dm = \int_a^{\bar{b}} f \, dx$$

La funzione f è $\mathcal{R}$ integrabile se e solo se

$$\int_{-a}^b f \, dx = \int_a^{\bar{b}} f \, dx \quad \Leftrightarrow \quad \int_{[a,b]} h \, dm = \int_{[a,b]} H \, dm$$

$$\Leftrightarrow \int_{[a,b]} \underbrace{(H-h)}_{\geq 0} \, dm = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H=h \quad \text{q.o. su } [a,b]$$

$$\Rightarrow m(\{x \in [a,b] : h(x) \neq H(x)\}) = 0$$

$$\Rightarrow m(\{x \in [a,b] : f \text{ non \u00e9 continua in } x\}) = 0$$

CVD

Il prossimo lemma riguarda gli intervalli illimitati:

Lemma 1. Siano $a \in \mathbb{R}$, $f: [a, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ Riemann integrabile su $[a, b]$ $\forall b > a$. Allora

$$\int_a^{+\infty} f \, dx = \int_{[a, +\infty[} f \, dm$$

$$\text{e } \int_a^{+\infty} f \, dx \text{ converge se e solo se } f \in L^1([a, +\infty[)$$

dim. Dalla def. dell'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} f \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{[a, b]} f \, dm =$$

f R-int.
su $[a, b]$

crescente in b , quindi posso prendere una succ. di naturali

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, a+n]} f \, dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, +\infty[} f \chi_{[a, a+n]} \, dm =$$

Beppo Levi

$$= \int_{[a, +\infty[} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f \chi_{[a, a+n]} \right) dm = \int_{[a, +\infty[} f \, dm$$

CVD

$$\begin{aligned} & \text{(additivit\u00e0)} \\ * \int_{[a, +\infty[} f \chi_{[a, a+n]} \, dm &= \int_{[a, a+n]} f \chi_{[a, a+n]} \, dm + \int_{[a+n, +\infty[} f \chi_{[a, a+n]} \, dm = \\ &= \int_{[a, a+n]} f \, dm + 0 = \int_{[a, a+n]} f \, dm \end{aligned}$$

Teorema 1

Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ spazi misurati, con misure σ -finite, $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{N}$.

(a) (Tonelli) Se f è non negativa e misurabile su $A \times B$ rispetto alla misura prodotto $\mu \times \nu$, allora la funzione

$$g(x) = \int_B f(x, y) d\nu_y \quad (\text{integ. risp. } y)$$

è $\mathcal{A}$ -misurabile, la funzione

$$h(y) = \int_A f(x, y) d\mu_x \quad (\text{integ. risp. } x)$$

è $\mathcal{N}$ -misurabile e

$$\begin{aligned} (1) \quad \int_{A \times B} f(x, y) d\mu \times \nu &= \int_A \left(\int_B f(x, y) d\nu_y \right) d\mu_x = \\ &= \int_B \left(\int_A f(x, y) d\mu_x \right) d\nu_y \end{aligned}$$

Provato $x \in A$
è una funzione
di secondo ordine

(b) (Fubini). Se $f \in L^1_{\mu \times \nu}(A \times B)$ allora

$f(x, \cdot) \in L^1_\nu(B)$ per quasi ogni $x \in A$,
 $f(\cdot, y) \in L^1_\mu(A)$ per quasi ogni $y \in B$ e
l'uguaglianza (1) è vera.

(f è a valori in $\mathbb{C}$, è in $L^1_{\mu \times \nu}(A \times B)$)

Senza dim. [vedi Folland, cap. 2]

Corollario. Siano f misurabile rispetto alla misura prodotto $\mu \times \nu$ e

$$\int_A \left(\int_B |f(x,y)| d\nu_y \right) d\mu_x < \infty$$

$$\text{opp} \int_B \left(\int_A |f(x,y)| d\mu_x \right) d\nu_y < \infty$$

Allora $f \in L^1_{\mu \times \nu}(A \times B)$ e (1) è vera.

Osservazione I Se $f \notin L^1_{\mu \times \nu}(A \times B)$ in generale

(1) non è vera.

Per esempio,

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy = -\frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx = \frac{\pi}{4} \quad (\text{esercizio}).$$

Osservazione importante Ricordando che se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è $L_{\mathbb{R}}$ -misurabile allora

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \Leftrightarrow |f| \in L^1(\mathbb{R})$$

e ricordando il legame tra l'integrale di Riemann generalizzato e l'integrale di Lebesgue, si ha che

$$(*) \quad f \in L^1(\mathbb{R}) \Leftrightarrow |f| \in L^1(\mathbb{R}) \Leftrightarrow f \text{ è assolutamente integrabile in senso generalizzato su } \mathbb{R}.$$

Ricordare che una condizione sufficiente per la $L_{\mathbb{R}}$ misurabilità è la continuità.

Se vale (*) allora $\int_{\mathbb{R}} f d\mu$ si può calcolare usando il Teor. della convergenza dominata con

$$f_n(x) = f(x) \text{ se } -n \leq x \leq n, \quad f_n(x) = 0 \text{ se } |x| > n \quad \left(f_n(x) = f(x) \chi_{[-n,n]}(x) \right)$$