

Esercizio 1 Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurato e $A \in \mathcal{M}$.

(i) Se $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{L}(A)$ (cioè f è μ -misurabile) e $\mu(A) = 0$ allora

$$\int_A f d\mu = 0.$$

(ii) Se $f \in \mathcal{L}^+(A)$ allora

$$\int_A f d\mu = 0 \iff \mu(\{x \in A : f(x) > 0\}) = 0.$$

(iii) Se $f \in \mathcal{L}^+(A)$ e $\int_A f d\mu < +\infty$ allora

$$\mu(\{x \in A : f(x) = +\infty\}) = 0.$$

Soluzione (i) Dappima siano $f \in \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{L}^+(A)$ e

$f = \sum_{j=1}^m \lambda_j \chi_{E_j}$ la rappresentazione standard. Allora

$$\int_A f d\mu = \sum_{j=1}^m \lambda_j \mu(E_j).$$

$E_j \in \mathcal{M}$, $E_j \subset A \Rightarrow \mu(E_j) = 0$, e dunque

$$\int_A f d\mu = 0.$$

○ Sia ora $f \in \mathcal{L}^+(A)$. Allora

$$\int_A f d\mu = \sup \left\{ \underbrace{\int_A \varphi d\mu}_0 : \varphi \in \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{L}^+(A), \varphi \leq f \right\} = 0.$$

0, per quanto visto sopra

Se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\int_A f d\mu = \underbrace{\int_A f^+ d\mu}_0 - \underbrace{\int_A f^- d\mu}_0 = 0.$$

Se $f: A \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\int_A f d\mu = \underbrace{\int_A \operatorname{Re} f d\mu}_0 + i \underbrace{\int_A \operatorname{Im} f d\mu}_0 = 0.$$

$$(ii) "\Leftarrow": \int_A f d\mu = \underbrace{\int_{\{x \in A: f(x) > 0\}} f d\mu}_{\substack{\text{"} \\ \mathcal{A}, f \mathcal{A}\text{-mis.} \\ \text{"} \\ 0, \text{ da (i)}}} + \underbrace{\int_{\{x \in A: f(x) = 0\}} f d\mu}_{\substack{\text{"} \\ \mathcal{A}, f \mathcal{A}\text{-mis.} \\ \text{"} \\ 0, \text{ perché } f=0}} = 0.$$

" $\Rightarrow$ ". Assumiamo

$$\mu(\{x \in A: f(x) > 0\}) > 0.$$

Notiamo che

$$\{x \in A: f(x) > 0\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{x \in A: f(x) > \frac{1}{m}\}.$$

$$(f(x) > 0 \Leftrightarrow \exists m \text{ t.c. } f(x) > \frac{1}{m}^*)$$

Dalla continuità dal basso

$$\mu(\{x \in A: f(x) > 0\}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(\{x \in A: f(x) > \frac{1}{m}\}) > 0,$$

e ne segue che per un certo $m \in \mathbb{N}$

$$\mu(\{x \in A: f(x) > \frac{1}{m}\}) > 0. \text{ Sia } A_m = \{x \in A: f(x) > \frac{1}{m}\}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_A f d\mu &= \underbrace{\int_{A_m} f d\mu}_{\substack{\geq 0 \\ \text{"}}} + \underbrace{\int_{A \setminus A_m} f d\mu}_{\substack{\geq 0 \\ \text{"}}} \geq \int_{A_m} f d\mu > \\ &> \frac{1}{m} \int_{A_m} d\mu = \frac{\mu(A_m)}{m} > 0. \end{aligned}$$

$$(iii)_{+\infty} \int_A f d\mu \geq \int_{\{x \in A: f(x) = +\infty\}} f d\mu = (+\infty) \mu(\{x \in A: f(x) = +\infty\})$$

$$\Rightarrow \mu(\{x \in A: f(x) = +\infty\}) = 0.$$

* Se $f(x) = c > 1$ allora $f(x) > 1 \geq \frac{1}{m} \forall m \in \mathbb{N}$.

Se $c \leq 1$ allora esiste $m \in \mathbb{N}$ t.c. $mc > 1$

($\mathbb{R}$ archimedeo). Dunque, $mf(x) = mc > 1 \Rightarrow f(x) > \frac{1}{m}$.

Esercizio 2 Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio misurato, $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) < +\infty$ e $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ $\mathcal{A}$ -misurabile e limitata. Allora $f \in L^1_\mu(A)$. (77)

Soluzione. f $\mathcal{A}$ -mis. implica che

$$f \in L^1_\mu(A) \Leftrightarrow \int_A |f| d\mu < +\infty \quad (\Leftrightarrow |f| \in L^1_\mu(A)).$$

Poiché f è limitata, esiste M t.c.

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in A.$$

M è $\mathcal{A}$ -misurabile, dunque

$$\int_A |f| d\mu \leq \int_A M d\mu = M \mu(A) < +\infty$$

○

Esercizio 3 $\frac{1}{x^\alpha} \in L^1_m([0, 1]) \Leftrightarrow \alpha < 1$.

Soluzione Ricordiamo che

$$\int_{[0, 1]} \frac{1}{x^\alpha} dm = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

integrale di Riemann improprio

Esercizio 4 Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio misurato,

$A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) < +\infty$, $f_n \rightrightarrows f$ (uniformemente) in A ,

○ ove $f_n \in L^1(A)$, $n \in \mathbb{N}$. Allora

$$f \in L^1(A) \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu.$$

Soluzione. Poiché $f_n \rightrightarrows f$ in A , si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in A \quad \text{ed esiste } K \in \mathbb{N} \text{ t.c.}$$

$$\forall m, n \geq K$$

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2}, \quad \forall x \in A \quad (\text{successione di Cauchy})$$

Sia $m = K$. Allora $\forall n \geq K$

$$|f_n(x)| = |f_K(x) + f_n(x) - f_K(x)| \leq |f_K(x)| + |f_n(x) - f_K(x)| <$$

$$\leq |f_K(x)| + 1, \text{ dunque}$$

$$\forall n \geq K$$

$$|f_n(x)| \leq |f_K(x)| + 1, \quad \forall x \in A, \forall n \geq K,$$

$$\text{ovvero } \underbrace{|f_K(x)| + 1}_{\substack{\cap \\ L^1(A)}} \in L^1(A).$$

$$\underbrace{\cap}_{L^1(A)} \quad \underbrace{L^1(A)}_{\text{perché } \mu(A) < +\infty}$$

Quindi, dal teorema di convergenza dominata,

$$f \in L^1(A) \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu.$$

① $f_n \rightarrow f$

(ricordare che allora f è unif. continua e quindi continua)

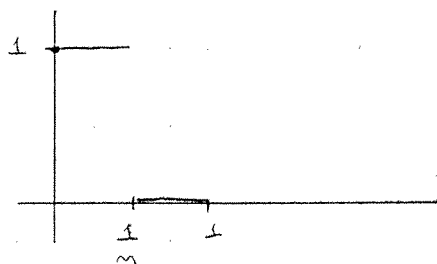
② $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$

$|f_n| \leq g \in L^1(A), \forall n \geq K$

$\Rightarrow$

(e vale Lebesgue)

Ad esempio



$$f_n = \chi_{[0, \frac{1}{n}]}$$

② $\checkmark$

① $\times$ ($f_n \not\rightarrow 0$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \text{ ma}$$

$$\begin{aligned} \|f_n\|_\infty &= \sup \{ |f_n(x)| : x \in [0, 1] \} = \\ &= \sup \{ |\chi_{[0, \frac{1}{n}]}(x)| : x \in [0, 1] \} = \\ &= 1 \end{aligned}$$

Esercizio 5. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{n \sin(\frac{x}{n})}{x(1+x^2)} dx$$

Soluzione. 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{1}{1+x^2}$

2) $|f_n(x)| \stackrel{(*)}{=} \frac{n |\sin \frac{x}{n}|}{x(1+x^2)} \leq \frac{n \cdot \frac{x}{n}}{x(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2} \quad (\text{per } |y| \leq |y|)$

Così $|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$

Poiché $\frac{1}{1+x^2} \in L^1([0, +\infty[)$ allora dal teorema di

convergenza dominata,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{m \operatorname{sen} \frac{x}{m}}{x(1+x^2)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

11.3 E' importante notare che $\frac{m \operatorname{sen}(\frac{x}{m})}{x(1+x^2)}$ è continua su $(0, +\infty)$ e quindi misurabile.

Anche questo segue dal teorema di Beppo Levi generalizzato, perché

$$-\frac{1}{1+x^2} \leq -f_m(x) \leq f_m(x) \leq \frac{1}{1+x^2}$$

$\cap$
 $L^1([0, +\infty[)$

inoltre, f_m è limitata in $(0, +\infty)$ e $\{x \in (0, +\infty) : f_m(x) \neq 0\}$ è continuo. Per misurabilità nulla
 $\Rightarrow f_m$ è $\mathcal{R}$ integrabile
 $\Rightarrow f_m$ è $\mathcal{L}$ integrabile
 $(L^1_m([0, +\infty)))$

Esercizio 6. Calcolare

$$I = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^m \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m e^{-2x} dx$$

(Il dominio di integrazione è variabile)

Soluzione. 1) $I = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m e^{-2x}}_{f_m(x)} X_{[0, m]}(x) dx$

$$2) \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = e^{-x}$$

Ricordiamo che

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \leq e^x,$$

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \leq \left(1 + \frac{x}{m+1}\right)^{m+1}, \quad \forall m \in \mathbb{N} \text{ t.c. } m > -x,$$

$$X_{[0, m]}(x) \leq X_{[0, m+1]}(x)$$

3 possibilità:

$$(i) \quad 0 \leq f_m(x) \leq f_{m+1}(x)$$

Dal teorema di Beppo Levi,

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$

$$(ii) \quad 0 \leq f_n(x) \leq e^{-x} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

Dal teorema di Beppo Levi generalizzato, $I = 1$.

$$(iii) \quad |f_n(x)| \leq e^{-x}, \quad \forall x \in [0, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(dalle 3 disuguaglianze), $e^{-x} \in L^1([0, +\infty[)$.

Dal teorema di Lebesgue, $I = 1$.

Esercizio 2 Calcolare

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{\infty} \underbrace{\frac{n}{x} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}_{f_n(x)} dx$$

Soluzione. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$

Chiaramente, $1 \notin L^1([0, +\infty[)$ e quindi il 1. di convergenza dominata non è applicabile.

Notiamo che

$$0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$$

(esercizio)

Dunque, dal teorema di Beppo Levi $\frac{n}{x} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq \ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)$

$$I = \int_1^{\infty} 1 dx = +\infty$$

Notiamo che $\ln(1+y) \leq y, \quad \forall y \geq 0$ *

Dunque,

$$0 \leq f_n(x) \leq 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

$L^1([1, +\infty[)$

Dal teorema di Beppo Levi generalizzato,

$$I = +\infty$$

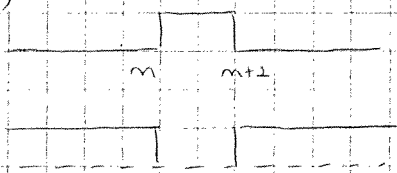
* Sia $F(y) = \ln(1+y) - y, \quad y \in [0, +\infty[$. Allora $F(0) = 0$,
 $F'(y) = \frac{1}{1+y} - 1 \leq 0 \Rightarrow F$ strett. decrescente. Quindi,

$$F(y) \leq 0, \quad \forall y \in [0, +\infty[\quad \Leftrightarrow \quad \ln(1+y) \leq y \quad \forall y \geq 0.$$

Esercizio 8

Calcolare

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{\infty} \underbrace{\frac{n}{x} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}_{f_n(x)} \underbrace{\left(1 - X_{[n, n+1]}(x)\right)}_{\text{II}} dx$$



Soluzione $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$.

Ma in questo caso, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ non è vera, quindi non si può applicare il t. di Beppo Levi.

Ma

$$0 \leq f_n(x) \leq 1 \quad \left(1 - X_{[n, n+1]} \leq 1 \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$$

Dal teor. di Beppo-Levi generalizzato, $I = \int_1^{\infty} 1 dx = +\infty$.

Esercizio 9

Sia

$$f_n(x) = \sin^2\left(\frac{n e^{-|x|}}{1+n^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Prova che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge $\forall x \in \mathbb{R}$ e che, poste $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, allora $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Soluzione $|f_n(x)| \leq \left(\frac{n e^{-|x|}}{1+n^2}\right)^2 \leq \frac{n^2}{(1+n^2)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$.

Dunque, dal corollario del teorema di convergenza monotona, essendo $f_n \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|x|} dx}_{=1} < +\infty$$

Dunque,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \in L^1(\mathbb{R}).$$

Esercizio 10. Provare che

$$J_1 = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy = -\frac{\pi}{4}$$

$$J_2 = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx = \frac{\pi}{4}$$

Soluzione. Notiamo che

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)'_x = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Dunque,

$$\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = - \int_0^1 \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)'_x dx = - \frac{x}{x^2 + y^2} \Big|_{0=x}^{1=y} = - \frac{1}{1 + y^2},$$

$$J_1 = - \int_0^1 \frac{dy}{1 + y^2} = - \tan^{-1} y \Big|_0^1 = -\frac{\pi}{4}$$

Ura, se $x \mapsto y$ e $y \mapsto x$

$$J_2 = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy = -J_1 = \frac{\pi}{4}$$

Conclusione. $J = \int_0^1 \int_0^1 \frac{|x^2 - y^2|}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = +\infty$. A.B. C'è 1.1.

Esercizio. Provare direttamente.

Segue dal teorema di Fubini perché se $J < +\infty$ allora da questo teorema $J_1 = J_2$.

Esercizio 11. Provare che per $s > 1$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-sx} \sin x}{x} dx = \arctan \frac{1}{s}$$

Soluzione. Ricordiamo che

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad |x| < 1 \quad (1)$$

Ura,

$$I = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-sx}}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) dx = ? \text{ (esercizio)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} e^{-sx}}{(2n+1)!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \underbrace{\left(\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-sx} dx \right)}_{(2n)!}$$

Ricordo : $\int_0^{\infty} x^n e^{-sx} dx = \frac{1}{s^{n+1}} \Gamma(n+1) = \frac{n!}{s^{n+1}}$

CAPITOLO 12: INTEGRALE DI LEBESGUE SU $\mathbb{R}^n$

Ricordiamo che la misura di Lebesgue m^n su $\mathbb{R}^n$ è il completamento della misura prodotto $\underbrace{m \times \dots \times m}_m$ e $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$, la σ -algebra dei misurabili alla m^n Lebesgue, è il completamento del prodotto $\underbrace{\mathcal{L}_{\mathbb{R}} \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_{\mathbb{R}}}_m$, ove $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ è una σ -algebra per il caso $\mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}$.

In seguito, scriveremo semplicemente

$$\int_A f \, dx$$

per $\int_A f \, d m^n$, ove $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ e $L^1(A)$ per $L^1_{m^n}(A)$.

Teorema 1 (Sostituzione negli integrali di Lebesgue)

Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile alla Lebesgue, cioè $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, $A \subset \Omega$ e $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una trasformazione t.c. $g \in C^1(\Omega)$ e g sia invertiva. Allora $f \in L^1(g(A))$ se e solo se $f(g) \text{Jac}(g) \in L^1(A)$, ove $\text{Jac}(g) = \det \nabla g$ è il determinante Jacobiano.

Inoltre,

$$(1) \quad \int_{g(A)} f \, dx = \int_A f(g) |\text{Jac}(g)| \, dy.$$

Senza dimostrazione [vedi Folland, c. 2]

Osservazione. Ricordiamo che per $g = (g_1, \dots, g_m) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$
 $\nabla g = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^m$ è la matrice di Jacoby.

Inoltre, $g \in C^1(\Omega)$ significa che tutte le derivate

$\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ sono continue su Ω . Se $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$

ove Ω è un dominio ($\Leftrightarrow$ un insieme aperto e connesso),

$g \in C^1(\Omega)$ e g è iniettiva allora si può provare

che $(Jac g)(x) \geq 0, \forall x \in \Omega$ o $(Jac g)(x) \leq 0, \forall x \in \Omega$.

Esempio (importante). Se $n \geq 2$ consideriamo la

trasformazione $x = (x_1, \dots, x_n) = g(\rho, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$,

ove g è definita da

$$\begin{cases} x_n = \rho \sin \varphi_{n-1} \\ x_{n-1} = \rho \cos \varphi_{n-1} \sin \varphi_{n-2} \\ \dots \\ x_2 = \rho \cos \varphi_{n-1} \dots \cos \varphi_{n-2} \dots \cos \varphi_2 \sin \varphi_1 \\ x_1 = \rho \cos \varphi_{n-1} \dots \cos \varphi_{n-2} \dots \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 \end{cases}$$

e l'insieme

$$\Omega = \left\{ (\rho, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \in \mathbb{R}^n : 0 < \rho < \infty, 0 \leq \varphi_1 < 2\pi, \right. \\ \left. -\frac{\pi}{2} \leq \varphi_2 \leq \frac{\pi}{2}, \dots, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi_{n-1} \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Allora

$g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ è t.c. $g \in C^1(\Omega)$ e iniettiva (ovvio).

Inoltre,

$$Jac(g) = \rho^{n-1} (\cos \varphi_{n-1})^{n-2} (\cos \varphi_{n-2})^{n-3} \dots \cos \varphi_2$$

In particolare, se $n=2$

$$\begin{cases} x_2 = \rho \sin \varphi_1 \\ x_1 = \rho \cos \varphi_1 \end{cases}, \quad Jac(g) = \rho$$

e se $n=3$

$$\begin{cases} x_3 = \rho \sin \varphi_2 \\ x_2 = \rho \cos \varphi_2 \sin \varphi_1 \\ x_1 = \rho \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 \end{cases}, \quad \text{Jac}(\rho) = \rho^2 \cos \varphi_2.$$

Dal Teorema 1 e dal Teorema 1 del capitolo 11
per ogni $f \in L^1(B(0, r))$ ove $0 < r \leq \infty$
(se $r = \infty$, $B(0, \infty) = \mathbb{R}^m$),

$$(2) \quad \int_{B(0, r)} f \, dx = \int_0^r \rho^{m-1} d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi_2 d\varphi_2 \cdots \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\cos \varphi_{m-1})^{m-2} d\varphi_{m-1}$$

$$\text{ove } F = f \left(\underbrace{\rho \cos \varphi_{m-1} \cdots \cos \varphi_2 \cos \varphi_1}_{x_1}, \dots, \underbrace{\rho \cos \varphi_{m-1} \sin \varphi_{m-2}}_{x_{m-1}}, \underbrace{\rho \sin \varphi_{m-1}}_{x_m} \right)$$

Se $f \in L^1(B(0, r)^c = \text{complemento di } B(0, r))$,
nella formula (2) l'integrale $\int_0^r$ dovrebbe
essere sostituito dall'integrale $\int_r^\infty$.

In particolare, se $f(x) = g(|x|)$ ove $|x| = \rho$
 $g(\rho) \rho^{m-1} \in L^1(0, r)$ allora da (2) segue

$$(3) \quad \int_{B(0, r)} g(|x|) = \sigma_m \int_0^r \underbrace{g(\rho) \rho^{m-1}}_{g \text{ dipende solo da } |x|} d\rho, \quad \text{ove}$$

$$\sigma_m = \frac{2 \pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})}$$

è l'area della sfera unitaria S^{m-1} in $\mathbb{R}^m$.

Qui

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad \alpha > 0$$

è la funzione Gamma di Eulero.

Alla stesso modo, se $g(\rho) \rho^{n-1} \in L^1(r, \infty)$ allora

$$\int_{B(0,r)^c} g(|x|) dx = \sigma_n \int_r^\infty g(\rho) \rho^{n-1} d\rho.$$

Notiamo anche che

$$\sigma_n = n \cdot v_n$$

ove v_n è il volume della palla unitaria $B(0,1)$

in $\mathbb{R}^n$. Inoltre,

$$\left(\frac{\sigma_n}{n}\right) v_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \begin{cases} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{n!} & \text{se } n = 2m \\ \frac{2^m \pi^{\frac{n}{2}-1}}{(2m-1)!!} & \text{se } n = 2m-1 \end{cases}$$

$$\text{ove } (2m-1)!! = (2m-1)(2m-3) \cdots 3 \cdot 1.$$

$$\left(\frac{\sigma_n}{n} = \frac{2 \cdot \pi^{\frac{n}{2}}}{n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \right)$$

Def. 1. Siano $(X, \mathcal{K}, \mu)$ uno spazio misurato, $A \in \mathcal{K}$ e $0 < p < \infty$. Diremo che f appartiene a $L^p_\mu(A)$ se esiste un insieme $N \in \mathcal{K}$ con $\mu(N) = 0$ tale che $f: A \setminus N \rightarrow \mathbb{C}$ (f non è necess. definita su N) è $\mathcal{K}$ -misurabile su $A \setminus N$ e $|f|^p$ è integrabile su $A \setminus N$.

Poniamo

$$\|f\|_{L^p_\mu(A)} = \left(\int_{A \setminus N} |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

Osservazione L'espressione $\|f\|_{L^p_\mu(A)}$ non dipende su N con $\mu(N) = 0$. Infatti, assumiamo che $N_1 \in \mathcal{K}$ e $\mu(N_1) = 0$. Allora

$$\|f\|_{L^p_\mu(A)} = \left(\int_{A \setminus N} |f|^p d\mu \right)^{1/p} = \left(\int_{A \setminus N_1} |f|^p d\mu \right)^{1/p}, \text{ essendo}$$

$$\int_{A \setminus N_1} |f|^p d\mu = \int_{A \setminus (N_1 \cup N)} |f|^p d\mu \quad \text{perché} \quad A \setminus N_1 = A \setminus (N \cup N_1) \cup$$

$$\mu(N_1 \cup N) = 0 \quad \text{e dunque}$$

$$= \int_{A \setminus N} |f|^p d\mu$$

$\cup (N_1 \setminus N) \cap A$
 N_1 e ha misura nulla

Osserviamo che se f è definita su A e la misura μ è completa allora la def. 1 è equivalente alla

Def. 1). Siano $(X, \mathcal{K}, \mu)$ uno spazio misurato, μ una misura completa, $A \in \mathcal{K}$ e $f: A \rightarrow \mathbb{C}$.

Allora $f \in L^p_\mu(A) \Leftrightarrow \begin{cases} 1) f \text{ è } \mathcal{K}\text{-misurabile} \\ 2) \|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty \end{cases}$

In seguito, senza perdita di generalità, assumeremo sempre che f è definita su A e che μ è completa e dunque applicheremo sempre la def. 1'.

~~Es. 12~~ Siano $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}, m^n)$, ove m^n è la misura di Lebesgue, $\forall \gamma \in \mathbb{R}$. Allora per $0 < p < \infty$

$$(a) \quad |x|^\gamma \in L_{m^n}^p(B(0, r)) \quad \Leftrightarrow \quad \gamma > -\frac{n}{p}, \quad (r < \infty)$$

$$(b) \quad |x|^\gamma \in L_{m^n}^p(B(0, r)^c) \quad \Leftrightarrow \quad \gamma < -\frac{n}{p}$$

dim. Dalla formula (3) del capitolo 12,

$$\begin{aligned} \| |x|^\gamma \|_{L_{m^n}^p(B(0, r))} &= \left(\int_{B(0, r)} |x|^{\gamma p} dx \right)^{1/p} = \\ &= \left(\sigma_n \int_0^r \rho^{\gamma p + n - 1} d\rho \right)^{1/p} = \frac{1}{p^{1 - (n/p + \gamma)}} \end{aligned}$$

integrale di Lebesgue = integrale improprio di Riemann, perché $f^{\gamma p + n - 1}$ è non negativa

$$= \begin{cases} \left(\frac{\sigma_n}{\gamma p + n} \right)^{1/p} r^{\gamma + \frac{n}{p}} & \text{se } \gamma > -\frac{n}{p} \\ +\infty & \text{se } \gamma \leq -\frac{n}{p} \end{cases}$$

(b) Allo stesso modo.

Esercizio. Siano $(X, \mathcal{M}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}, m^n)$, $0 < p < \infty$,
 $0 < r < \infty$, $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Provare che (84)

$$(a) \quad |x|^\delta (1 + |\log|x||)^\delta \in L_{m^n}^p(B(0, r)) \iff \gamma > -\frac{n}{p},$$

$$-\infty < \delta < \infty$$

$$o \quad \gamma = -\frac{n}{p} \text{ e } \delta < -\frac{1}{p}$$

$$(b) \quad |x|^\delta (1 + |\log|x||)^\delta \in L_{m^n}^p(B(0, r)^c) \iff$$

$$\gamma < -\frac{n}{p}, -\infty < \delta < \infty$$

$$o \quad \gamma = -\frac{n}{p}, \delta < -\frac{1}{p}$$

Def. 2. Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurato,
 $A \in \mathcal{M}$, $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, μ completa. Diremo che

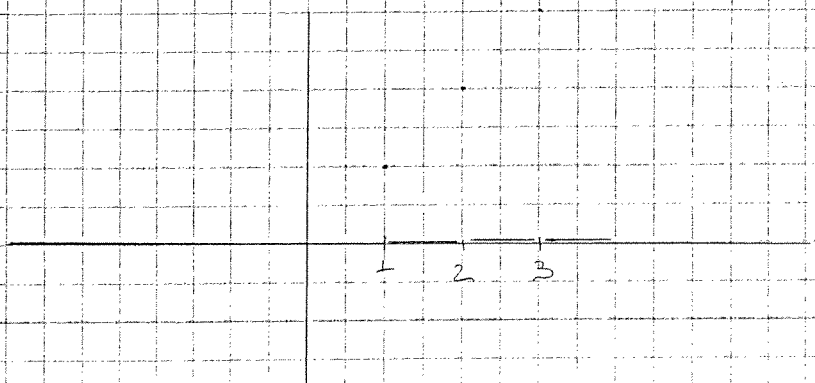
$$f \in L_{\mu}^{\infty}(A) \text{ se}$$

1) f è $\mathcal{M}$ -misurabile su A

$$2) \quad \|f\|_{L_{\mu}^{\infty}(A)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in A} |f(x)| =$$

$$= \inf_{\substack{\omega \in \mathcal{M} \\ \omega \subset A, \mu(\omega) = 0}} \sup_{x \in A \setminus \omega} |f(x)| < \infty$$

Esempio. $(X, \mathcal{M}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}_{\mathbb{R}}, m)$ e $f(m) = m$, $m \in \mathbb{N}$,
 $f(x) = 0$ se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.



$$\sup |f(x)| = +\infty, \text{ ma } \operatorname{ess\,sup} |f(x)| = 0, \text{ infatti}$$

$$\text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \geq 0 \quad (|f| \geq 0)$$

$$\text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R} \setminus A} |f(x)| = 0 \quad \left(\inf \sup \leq \sup \right. \\ \left. \text{per un } \mathcal{C} \setminus A = A \right. \\ \left. \text{particolare} \right)$$

Urvicameute si puo' sostituire A con ogni insieme $B \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ con $\mu(B) = 0$.

Teorema 1 (Riesz)

Siano $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}, m^n)$ lo spazio misurato ove m^n e' la misura di Lebesgue, $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ e $m^n(A) < \infty$ (importante). Sia $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione $\mathcal{L}$ -misurabile. Allora

$$(1) \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_{L^p_{m^n}(A)} = \|f\|_{L^\infty_{m^n}(A)}$$

Senza dim.

Osservazione Il teorema 1 da una giustificazione per la def. 2.

Notiamo che se $m^n(A) = +\infty$ allora (1) in generale non e' vera.

Ad esempio, siano $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ con $m^n(A) = +\infty$ e $X_A: A \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione caratteristica di A . Allora $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow X_A$ Lebesgue misurabile su A . Poi, $\forall 0 < p < \infty$

$$\|X_A\|_{L^p_{m^n}(A)} = \left(\int_A |1|^p d m^n \right)^{1/p} = (m^n(A))^{1/p} = +\infty,$$

quindi $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|X_A\|_{L^p_{m^n}(A)} = +\infty$.

$$\text{Pero', } \|X_A\|_{L^\infty_{m^n}(A)} = \text{ess sup}_{x \in A} |1| = 1$$

Lemma 1. Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio misurato, μ una misura completa, $A \in \mathcal{A}$ e $0 < p \leq \infty$. Allora $L^p_\mu(A)$ è uno spazio vettoriale con addizione puntuale e moltiplicazione con numeri complessi.

dim. La multipl. è ovvia.

Addizione. Ricordiamo che

$$(a+b)^p \leq a^p + b^p \quad \forall a, b \geq 0 \text{ e } 0 < p \leq 1$$

e

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1} (a^p + b^p) \quad \forall a, b \geq 0, 1 \leq p < \infty$$

) Siano $f, g \in L^p_\mu(A)$, allora f e g sono $\mathcal{A}$ -misurabili e $\|f\|_{L^p_\mu(A)}, \|g\|_{L^p_\mu(A)} < \infty$.

Dunque, $f+g$ è $\mathcal{A}$ -misurabile

disuguaglianza triangolare

$$\|f+g\|_{L^p_\mu(A)} = \left(\int_A |f+g|^p d\mu \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(\int_A \underbrace{(|f|+|g|)^p}_{\geq 0} d\mu \right)^{1/p}$$

$$(*) \quad (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq c_p (|f(x)|^p + |g(x)|^p),$$

$$c_p = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < p \leq 1 \\ c_p = 2^{p-1} & \text{se } 1 \leq p < \infty \end{cases}$$

$\mathcal{A}$ -misurabili: f, g $\mathcal{A}$ -mis.

$|f|$ $\mathcal{A}$ -mis.

$|g|$ $\mathcal{A}$ -mis.

$|f|^p$ $\mathcal{A}$ -mis.

$\Rightarrow |f|^p + |g|^p$ $\mathcal{A}$ -mis.

$\mathcal{A}$ -misurabili

perché entrambe sono $\mathcal{A}$ -misurabili.

perché
f, g
sont
integrabili
dalla
misura
misurabili

Segue che si può integrare (*) e

$$\int_A (|f(x)| + |g(x)|)^p d\mu \leq c_p \left(\int_A |f(x)|^p dx + \int_A |g(x)|^p dx \right).$$

Dunque,

$$\|f+g\|_{L^p_\mu(A)} \leq c_p^{1/p} \left(\|f\|_{L^p_\mu(A)}^p + \|g\|_{L^p_\mu(A)}^p \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq c_p^{1/p} c_p \left(\|f\|_{L^p_\mu(A)} + \|g\|_{L^p_\mu(A)} \right) < \infty.$$

Notiamo che se $1 \leq p < \infty$ allora $C_p = 2^{p-1}$, $C_{\frac{1}{p}} = 1$,
 dunque

$$\|f+g\|_{L^p_\mu(A)} \leq 2^{1-\frac{1}{p}} (\|f\|_{L^p_\mu(A)} + \|g\|_{L^p_\mu(A)})$$

Proviamo la disuguaglianza con la costante = 1.

Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio misurato, $1 \leq p \leq \infty$.

Se $f, g \in L^p_\mu(A)$ ove $A \in \mathcal{A}$ allora

$$\|f+g\|_{L^p_\mu(A)} \leq 2^{1-\frac{1}{p}} (\|f\|_{L^p_\mu(A)} + \|g\|_{L^p_\mu(A)})$$

La disuguaglianza vale anche con 1 al posto di $2^{1-\frac{1}{p}}$.

Lemma 2. Sia $1 < p < \infty$. Allora $\forall a, b \geq 0$ e $\forall \gamma > 1$

$$(3) \quad (a+b)^p \leq \gamma a^p + C_p(\gamma) b^p, \quad \text{ove}$$

$$C_p(\gamma) = \left(1 - \gamma^{\frac{1}{1-p}}\right)^{1-p}$$

Osservazione. Se $\gamma = 2^{p-1}$ allora $C_p(\gamma) = 2^{p-1}$ e

(3) $\Rightarrow (a+b)^p \leq 2^{p-1} (a^p + b^p)$. Dunque (3) è una generalizzazione.

dim. Il caso $b = 0$ è ovvio. Sia $b > 0$. Poniamo

$$x = \frac{a}{b} \quad \text{Allora} \quad (3) \Leftrightarrow$$

$$(1+x)^p \leq \gamma x^p + C_p(\gamma), \quad \forall x \geq 0,$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(1+x)^p - \gamma x^p}_{\text{funzione di } x} \leq \underbrace{C_p(\gamma)}_{\text{costante}}, \quad \forall x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \max_{x \geq 0} ((1+x)^p - \gamma x^p) \leq C_p(\gamma)$$

che segue dal calcolo standard.

Osservazione Dal calcolo standard,

$$(4) \quad \min_{\gamma > 1} (\gamma a^p + c_p(\gamma) b^p) = (a+b)^p$$

(86)

Teorema 2 (La disuguaglianza di Minkowski)

Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurato, μ una misura completa, $A \in \mathcal{M}$ e $1 \leq p < \infty$.

Se $f, g \in L^p_\mu(A)$ allora $f+g \in L^p_\mu(A)$ e

$$(5) \quad \|f+g\|_{L^p_\mu(A)} \leq \|f\|_{L^p_\mu(A)} + \|g\|_{L^p_\mu(A)}$$

dim Dal Lemma 1, $f+g \in L^p_\mu(A)$. Dalla (3),

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq$$

$$\leq \gamma |f(x)|^p + c_p(\gamma) |g(x)|^p$$

Poiché $|f|^p, |g|^p, |f+g|^p$ sono $\mathcal{M}$ -misurabili su A ,

$$\int_A |f(x) + g(x)|^p d\mu \leq \gamma \int_A |f(x)|^p d\mu + c_p(\gamma) \int_A |g(x)|^p d\mu$$

indip. da γ

$\forall \gamma > 1$ Dunque,

$$\int_A |f(x) + g(x)|^p d\mu \leq \inf_{\gamma > 1} \left(\gamma \int_A |f(x)|^p d\mu + c_p(\gamma) \int_A |g(x)|^p d\mu \right)$$

$$(4) = \left(\|f\|_{L^p_\mu(A)} + \|g\|_{L^p_\mu(A)} \right)^p$$

$\Rightarrow (5)$

CVD

Osservazione. Se $0 < p < 1$, dal lemma 1

$$(6) \quad \|f + g\|_{L^p_\mu(A)} \leq 2^{\frac{1}{p}-1} (\|f\|_{L^p_\mu(A)} + \|g\|_{L^p_\mu(A)})$$

(non è possibile migliorarla)

Sia $(X, \mathcal{K}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}_{\mathbb{R}}, m)$, ove m è la misura di Lebesgue, $A = \mathbb{R}$, $f = \chi_{[0,1]}$, $g = \chi_{[1,2]}$

Allora

$$\|f + g\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|\chi_{[0,2]}\|_{L^p(\mathbb{R})} = 2^{\frac{1}{p}},$$

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|g\|_{L^p(\mathbb{R})} = 1$$

Quindi,

$$\|f + g\|_{L^p(\mathbb{R})} = 2^{\frac{1}{p}-1} (1+1) = 2^{\frac{1}{p}-1} (\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|g\|_{L^p(\mathbb{R})})$$

Quindi, non è possibile provare (6) con un numero $C < 2^{\frac{1}{p}-1}$ invece di $2^{\frac{1}{p}-1}$.

Teorema 3

(1)

Siano $(X, \mathcal{K}, \mu)$ uno spazio misurato, μ una misura completa, $A \in \mathcal{K}$, $0 < p \leq \infty$. Allora lo spazio $L^p_\mu(A)$ è completo.

Osservazione. Siano $f, f_n \in L^p_\mu(A)$, ove $n \in \mathbb{N}$.

Si dice che $f_n \rightarrow f$ in $L^p_\mu(A)$ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^p_\mu(A)} = 0$$

Si dice che $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy

se

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|f_m - f_n\|_{L^p_\mu(A)} = 0$$

$L^p_\mu(A)$ è completa se ogni successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p_\mu(A)$ di Cauchy esiste $f \in L^p_\mu(A)$ t.c. $f_n \rightarrow f$ in $L^p_\mu(A)$.

dim. Sia $1 \leq p < \infty$. Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p_\mu(A)$ una successione di Cauchy, cioè

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|f_m - f_n\|_{L^p_\mu(A)} = 0.$$

Dunque, $\forall k \in \mathbb{N}$ esiste $n_{k,l} \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall m, n \geq n_{k,l}$

$$\|f_m - f_n\|_{L^p_\mu(A)} < 2^{-l-1}$$

e anche

$$n_l \leq n_{l+1}$$

In particolare e senza perdita di generalità $n_l \leq n_{l+1}$, $l \in \mathbb{N}$.

In particolare, se $m = n_{l+1}$, $n = n_l$

$$\|f_{n_{l+1}} - f_{n_l}\|_{L^p_\mu(A)} < 2^{-l-1}$$

o se $l+1 \mapsto l$ allora

$$\|f_{n_l} - f_{n_{l-1}}\|_{L^p_\mu(A)} < 2^{-l}$$

Poniamo

$$f_1 = f_{n_1}, \quad f_m = f_{n_m} - f_{n_{m-1}}, \quad m \geq 2$$

Allora

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \|f_n\|_{L^p_\mu(A)} &= \sum_{n=2}^{\infty} \|f_{n_n} - f_{n_{n-1}}\|_{L^p_\mu(A)} < \\ &< \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n} = \frac{1}{2} < \infty \end{aligned}$$

$$\text{Siano } \sum_{n=2}^{\infty} \|f_n\|_{L^p_\mu(A)} = B, \quad \text{e}$$

$$G_m = \sum_{k=1}^m \|f_k\|_{L^p_\mu(A)} \quad \text{e} \quad G = \lim_{m \rightarrow \infty} G_m = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L^p_\mu(A)}$$

(è crescente)

Allora

Minkowski

$$\|G_m\|_{L^p_\mu(A)} = \left\| \sum_{k=1}^m \|f_k\|_{L^p_\mu(A)} \right\|_{L^p_\mu(A)} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L^p_\mu(A)} \leq B$$

Quindi, dal teorema della convergenza monotona, G_n monotona, $p \geq 1$
 $\Rightarrow G_n^p$ monotona

$$\int_A G^p d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A G_n^p d\mu \leq B^p \quad (G = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n)$$

Quindi, $G \in L^p_\mu(A)$, cioè

$$\int_A \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \right) d\mu < \infty$$

Quindi, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ converge q.o. su A .

Quindi, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge q.o. su A .

Poniamo $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ se $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge e $F(x) = 0$ altrimenti.

F è $\mathcal{K}$ -misurabile, $|F| \leq G (= \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|)$,
quindi $F \in L^p_\mu(A)$ e

$$\left| F - \sum_{k=1}^n f_k \right|^p \leq \left(|F| + \sum_{k=1}^n |f_k| \right)^p \leq (G + G)^p = (2G)^p$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$L^1_\mu(A)$,
perché $G \in L^1_\mu(A)$

Notiamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(F(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right) = 0$ q.o. su A ,

dalla def. di $F(x)$.

Quindi, dal teorema della convergenza dominata,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F - \varphi_n\|_{L^p_\mu(A)}^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \|F - \sum_{k=1}^n f_k\|_{L^p_\mu(A)}^p =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \left| F - \sum_{k=1}^n f_k \right|^p d\mu = \int_A \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| F - \sum_{k=1}^n f_k \right|^p}_{=0} d\mu = 0$$

Quindi, $\varphi_n \rightarrow F$ in $L^p_\mu(A)$ (sottosec.)

Finalmente, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|F - \varphi_n\|_{L^p_\mu(A)} &= \|(F - \varphi_{m_n}) + (\varphi_{m_n} - \varphi_n)\|_{L^p_\mu(A)} \leq \\ &\stackrel{\text{Minkowski}}{\leq} \|F - \varphi_{m_n}\|_{L^p_\mu(A)} + \|\varphi_{m_n} - \varphi_n\|_{L^p_\mu(A)} \\ &\quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ &\quad 0 \quad \quad \quad 0 \text{ (di Cauchy)} \end{aligned}$$

(88)

Donque, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|F - \varphi_n\|_{L^p_\mu(A)} = 0$.

Il caso $0 < p < 1$ è simile

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \|\varphi_n\|_{L^p_\mu(A)}^p &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \|\varphi_{m_n} - \varphi_{m_{n-1}}\|_{L^p_\mu(A)}^p < \\ &< \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-np} < \infty \end{aligned}$$

ecc. (esercizio)

Il caso $p = \infty$ senza dim.

C.V.D

Corollario Se $1 \leq p \leq \infty$ $L^p_\mu(A)$ è uno spazio vettoriale seminormato completo (= semi-Banach), con la seminorma $\|f\|_{L^p_\mu(A)} = \left(\int_A |f|^p d\mu \right)^{1/p}$, perché

1) $\|f\|_{L^p_\mu(A)} = 0 \Leftrightarrow f = 0$ q.o. su A (non ovunque)
 $\downarrow$
seminorma

2) $\|\alpha f\|_{L^p_\mu(A)} = |\alpha| \|f\|_{L^p_\mu(A)}$

3) $\|f + g\|_{L^p_\mu(A)} \leq \|f\|_{L^p_\mu(A)} + \|g\|_{L^p_\mu(A)}$
 (disuguaglianza di Minkowski)

4) completezza (Teorema 3)

Se $\tilde{L}^p_\mu(A)$ denota lo spazio di classi di equivalenza rispetto all'equivalenza $\sim$, cioè $\alpha, \tilde{f} \in \tilde{L}^p_\mu(A)$ allora
 $\tilde{f} = \{g \in L^p_\mu(A) : g \sim f \text{ su } A\}$
 $\Leftrightarrow g = f \text{ q.o. su } A$,
 allora $\tilde{L}^p_\mu(A)$ è uno spazio vettoriale normato completo (= Banach). Per questa ragione in

multi libri si dice che $L^p_\mu(A)$ è uno spazio di Banach, ma a rigore $L^p_\mu(A)$ è uno spazio vettoriale seminormato completo (semi-Banach).

Se $0 < p < 1$,

$$\|f + g\|_{L^p_\mu(A)} \leq 2^{\frac{1}{p}-1} (\|f\|_{L^p_\mu(A)} + \|g\|_{L^p_\mu(A)})$$

con $c = 2^{\frac{1}{p}-1} > 1$

Dunque, $\int L^p_\mu(A)$ con $0 < p < 1$ è uno spazio semiquasi normato completo.

Lemma 3 (disuguaglianza di Young)

Se $1 < p < \infty$ allora $\forall a, b \geq 0$.

$$(7) \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1$$

$$\text{ove } p' = \frac{p}{p-1} \quad \left(\Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right)$$

dim. Se $b = 0$ allora è ovvio. Sia $b > 0$.

Allora (7) è equivalente a

$$\frac{a}{b^{\frac{p}{p-1}-1}} \leq \frac{1}{p} \frac{a^p}{b^{\frac{p}{p-1}}} + \frac{1-1}{p} \quad \left(\text{basta dividere per } b^{p'} \right)$$

$\Downarrow$

$$\frac{a}{b^{\frac{1}{p-1}}} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{a}{b^{\frac{1}{p-1}}} \right)^p + \frac{1-1}{p}$$

$\Downarrow$

$$x \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1-1}{p} \quad \left(x = \frac{a}{b^{\frac{1}{p-1}}} \right)$$

$\Downarrow$

$$x - \frac{x^p}{p} \leq \frac{1-1}{p}, \quad \forall x \geq 0$$

$$\max_{x \geq 0} \left(x - \frac{x^p}{p} \right) = \frac{1-p}{p}, \quad \text{dal calcolo standard.}$$

CVD

Teorema 4 (disuguaglianza di Hölder)

Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio misurato, μ una misura completa, $A \in \mathcal{A}$, $\boxed{1 < p < \infty}$. Se $f \in L^p_\mu(A)$,

$$g \in L^{p'}_\mu(A) \quad \left(p' = \frac{p}{p-1} \text{ se } 1 < p < \infty, \quad p' = \infty \text{ se } p = 1, \right.$$

$$\left. p' = 1 \text{ se } p = \infty \right) \text{ allora } fg \in L^1_\mu(A) \text{ e}$$

$$(8) \quad \|fg\|_{L^1_\mu(A)} \leq \|f\|_{L^p_\mu(A)} \|g\|_{L^{p'}_\mu(A)}$$

dim. Sia $1 < p < \infty$. Il caso $\|f\|_{L^p_\mu(A)} = 0$ o $\|g\|_{L^{p'}_\mu(A)} = 0$ è ovvio.

Sia $\|f\|_{L^p_\mu(A)} > 0$, $\|g\|_{L^{p'}_\mu(A)} > 0$. Poniamo nella

$$(7) \quad a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p_\mu(A)}}, \quad b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^{p'}_\mu(A)}}$$

Dunque, dalla (7)

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^p_\mu(A)} \|g\|_{L^{p'}_\mu(A)}} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_{L^p_\mu(A)}^p} + \frac{1}{p'} \frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|_{L^{p'}_\mu(A)}^{p'}}$$

Poiché i 2 membri di questa disuguaglianza sono $\mathcal{A}$ -misurabili, si ha

$$\frac{\int_A |f| |g| d\mu}{\|f\|_{L^p_\mu(A)} \|g\|_{L^{p'}_\mu(A)}} \leq \frac{1}{p} \underbrace{\frac{\int_A |f|^p d\mu}{\|f\|_{L^p_\mu(A)}^p}}_{=1} + \frac{1}{p'} \underbrace{\frac{\int_A |g|^{p'} d\mu}{\|g\|_{L^{p'}_\mu(A)}^{p'}}}_{=1} = 1$$

$\Rightarrow$ (8).

CVD

Corollario 1. Siano $(X, \mathcal{K}, \mu)$ uno spazio misurato, μ una misura completa, $A \in \mathcal{K}$, $0 < p \leq p_1, p_2 \leq \infty$
 $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}$. Se $f_1 \in L_{\mu}^{p_1}(A)$, $f_2 \in L_{\mu}^{p_2}(A)$ allora
 $f_1 f_2 \in L_{\mu}^p(A)$ e

$$\|f_1 f_2\|_{L_{\mu}^p(A)} \leq \|f_1\|_{L_{\mu}^{p_1}(A)} \|f_2\|_{L_{\mu}^{p_2}(A)}$$

dim. Esercizio.

Corollario 2. (la disuguaglianza moltiplicativa)

Siano $(X, \mathcal{K}, \mu)$ uno spazio misurato, μ una misura completa, $A \in \mathcal{K}$ e $0 < p_1 < p_2 \leq \infty$. Allora
 per ogni $p_1 < p < p_2$

$$L_{\mu}^{p_1}(A) \cap L_{\mu}^{p_2}(A) \subset L_{\mu}^p(A)$$

e

$$\|f\|_{L_{\mu}^p(A)} \leq \|f\|_{L_{\mu}^{p_1}(A)}^{\alpha} \|f\|_{L_{\mu}^{p_2}(A)}^{1-\alpha}$$

per ogni $f \in L_{\mu}^{p_1}(A) \cap L_{\mu}^{p_2}(A)$ ove α è definito da

$$\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p_1} + \frac{1-\alpha}{p_2}$$

dim. Esercizio.

Def. 1. Sia $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile. Si dice che una funzione $\nu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (non necess. ≥ 0) è una misura con segno su $\mathcal{M}$ se

$$(i) \quad \nu(\emptyset) = 0$$

$$(ii) \quad \left(\nu(E) < +\infty \quad \forall E \in \mathcal{M} \right)$$

o

$$\left(\nu(E) > -\infty \quad \forall E \in \mathcal{M} \right)$$

(iii) per ogni successione $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ di insiemi in $\mathcal{M}$ a 2 a 2 disgiunti

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j)$$

e se $\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)$ è finita allora

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\nu(E_j)| < \infty$$

Esempi

1) Una misura standard è una misura con segno.

Adesso diremo che una misura standard è una misura positiva.

2) Se μ_1 e μ_2 sono misure positive e almeno una di μ_1 e μ_2 è finita allora

$$\nu = \mu_1 - \mu_2 \quad \Leftrightarrow \quad \forall E \in \mathcal{M} \quad \nu(E) = \mu_1(E) - \mu_2(E)$$

è una misura con segno.

3) Se μ è una misura positiva su $\mathcal{M}$,

$f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è μ -integrabile allora la funzione

ν definita da

$$\nu(E) = \int_E f d\mu, \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

$\bar{\nu}$ è una misura con segno. $\left(\sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} f d\mu < \infty \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \left| \int_{E_j} f d\mu \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} |f| d\mu < \infty \right)$
 perché f μ -integrabile $\Rightarrow |f|$ μ -integrabile

Lemma 1. Siano $(X, \mathcal{K})$ uno spazio misurabile e

ν una misura con segno su $\mathcal{K}$.

1) Se $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è una successione crescente di insiemi $E_j \in \mathcal{K}$ allora

$$\nu \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \nu(E_j).$$

2) Se $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è una successione decrescente e $\nu(E_1)$ è finita allora

$$\nu \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \nu(E_j).$$

dim. Allo stesso modo che per le misure positive.

Lemma 2. Siano $(X, \mathcal{K})$ uno spazio misurabile e ν una misura con segno su $\mathcal{K}$.

Se gli insiemi $P_j \in \mathcal{K}$ sono positivi $\forall j \in \mathbb{N}$ allora l'insieme $\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$ è positivo.

Def. 2. Si dice che un insieme $E \in \mathcal{K}$ è positivo

(negativo, ullo) se

$$\nu(F) \geq 0 \quad \forall F \in \mathcal{K}: F \subset E$$

(in particolare, $\nu(E) \geq 0$)

(resp. ≤ 0 , $=$).

dim. Sia

$$Q_1 = P_1, \quad Q_m = P_m \setminus \bigcup_{j=1}^{m-1} P_j, \quad m \in \mathbb{N}, m \geq 2$$

Allora Q_m sono a 2 a 2 disgiunti e

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j = \bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m$$

$$\text{Sia } E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \quad \text{...}$$

$$\begin{aligned}
 \nu(E) &= \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E \cap P_j) = \nu(E \cap (\bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m)) = \textcircled{91} \\
 &= \nu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \underbrace{(E \cap Q_m)}_{\substack{\text{a 2 a 2} \\ \text{disgiunti}}}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \nu\left(\underbrace{(E \cap Q_m)}_{\substack{\cap \\ P_m \\ \downarrow \\ 0 \\ \text{poich\'e } P_m \text{ \u00e9 positivo}}}\right) \geq 0.
 \end{aligned}$$

C.V.D.

Teorema 1 (il Teorema di decomposizione di Hahn)

Siano $(X, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile e ν una misura con segno. Allora esistono un insieme positivo $P \in \mathcal{A}$ e un insieme negativo $N \in \mathcal{A}$ t.c.

$$X = P \cup N, \quad P \cap N = \emptyset \quad (\text{dunque } N = X \setminus P)$$

Se P', N' \u00e8 un'altra coppia di tali insiemi ($P', N' \in \mathcal{A}$, $X = P' \cup N'$, $P' \cap N' = \emptyset$, P' positivo, N' negativo) allora l'insieme

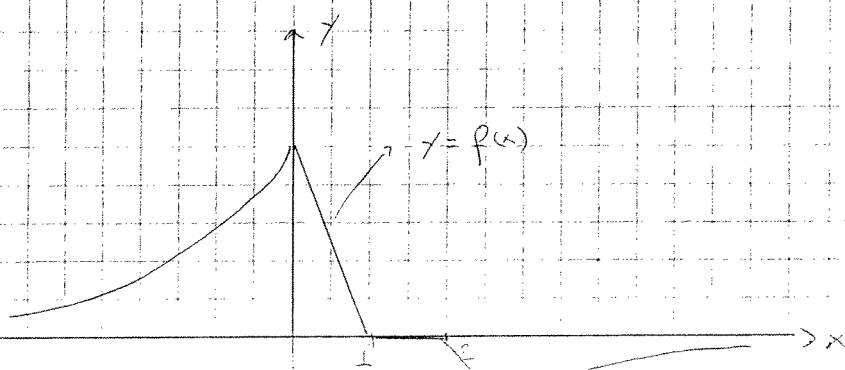
$$P \Delta P' (= N \Delta N')$$

\u00e8 un insieme nullo o.e.

$P \Delta P' = (P \setminus P') \cup (P' \setminus P)$ \u00e8 la differenza simmetrica di P e P' .

Senza dim.

Esempio. $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_{\mathbb{R}}, m)$ ove m \u00e8 la misura di Lebesgue, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\nu(E) = \int_E f \, dm$.



$$P =]-\infty, 1], \quad \Pi =]1, +\infty[$$

$$P' =]-\infty, 2], \quad \Pi' =]2, +\infty[$$

$$P \Delta P' =]1, 2] = \Pi \Delta \Pi' \quad \text{non vuoto.}$$

Spazi L^p

~~Esercizio 1~~ Siano $\delta, \gamma \in \mathbb{R}$ e $0 < p, r < +\infty$. Allora

$$|x|^\gamma (1 + |\ln |x||)^\delta \in L^p(B(0, r)) = L^p_{m^+}(B(0, r))$$

$$\Leftrightarrow \left(\gamma > -\frac{m}{p} \text{ e } -\infty < \delta < +\infty \right) \vee \left(\gamma = -\frac{m}{p} \text{ e } \delta < -\frac{1}{p} \right).$$

Soluzione. Consideriamo (la funzione è non negativa)

$$I = \int_{B(0, r)} |x|^{\gamma p} (1 + |\ln |x||)^\delta dx = \sigma_m \int_0^r \rho^{\gamma p} (1 + |\ln \rho|)^\delta \rho^{m-1} d\rho.$$

Notiamo che $\forall \varepsilon > 0$

$$\underline{1 + |\ln \rho| \leq c_\varepsilon \rho^{-\varepsilon} \quad \forall \rho \in]0, r]}.$$

($\rho^\varepsilon (1 + |\ln \rho|)$ è continua su $]0, r]$, ha $\lim_{\rho \rightarrow 0} < \infty$ (e per $\rho \rightarrow 0$ e quindi è limitata).

Sia $\gamma > -\frac{m}{p}$. Se $\delta \leq 0$.

$$I \leq \sigma_m \int_0^r \rho^{\overbrace{\gamma p + m}^{> 0}} d\rho < \infty$$

Se $\delta > 0$ e $0 < \varepsilon < \frac{m + \gamma p}{\delta p}$ allora

$$I \leq \sigma_m c_\varepsilon \int_0^r \rho^{\overbrace{\gamma p + m - \varepsilon \delta p}^{> 0}} d\rho < \infty$$

Se $\gamma < -\frac{m}{p}$, Se $\delta \geq 0$ allora $((1 + |\ln \rho|)^\delta \geq 1)$

$$I \geq \sigma_m \int_0^r p^{\overbrace{\delta p + m - 1}^{< 0}} dp = +\infty$$

Se $\delta < 0$ e $\varepsilon > 0$ ε sufficientemente piccolo allora

$$I \geq \sigma_m c_{\varepsilon}^{\delta p} \int_0^r p^{\overbrace{\delta p + m - \varepsilon \delta p - 1}^{< 0}} dp = +\infty$$

Sia $\chi = -\frac{m}{p}$ Allora

$$\begin{aligned} I &= \sigma_m \int_0^r (1 + |\ln p|)^{\delta p} \frac{dp}{p} = \int_0^r p = e^{-u} \\ &= \sigma_m \int_{-\ln r}^{+\infty} (1 + |u|)^{\delta p} du < \infty \quad \left(\begin{aligned} dp &= -e^{-u} du \\ \frac{dp}{p} &= -1 du \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \delta < -\frac{1}{p}$$

Se $B(o, r) \hookrightarrow B(o, r)^c$, in quest'ultima caso

$$II = \sigma_m \int_{\ln r}^{\infty} (1 + |u|)^{\delta p} du < \infty \quad p = e^u$$

$$\Leftrightarrow \delta < -\frac{1}{p}$$

La disuguaglianza di Hölder :

$$\|fg\|_{L^1_\mu(A)} \leq \|f\|_{L^p_\mu(A)} \|g\|_{L^{p'}_\mu(A)}, \text{ ove}$$

$$1 < p < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad A \in \mathcal{M}, \quad (X, \mathcal{M}, \mu) \text{ spazio}$$

misurato.

~~C.P.A.~~ Se $0 < p \leq p_1, p_2 \leq \infty$ e $(*) \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}$ allora

$$(**) \|f_1 f_2\|_{L^p_\mu(A)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}_\mu(A)} \|f_2\|_{L^{p_2}_\mu(A)}$$

Soluzione. Consideriamo

$$\int_A |f_1 f_2|^p d\mu = \int_A \underbrace{|f_1|^p}_f \underbrace{|f_2|^p}_g d\mu = \|fg\|_{L^1_\mu(A)} \stackrel{\text{Hölder, } \frac{p_1}{p} \geq 1}{\leq}$$

$$\leq \|f\|_{L^{p_1/p}_\mu(A)} \|g\|_{L^{(p_1/p)'}_\mu(A)}$$

$$\left(\frac{p_1}{p}\right)' = \frac{p_2}{p}$$

perché $\frac{1}{(p_1/p)} + \frac{1}{(p_2/p)} = 1$

Dalla (*) segue che $\left(\frac{p_1}{p}\right)' = \frac{p_2}{p}$.

Quindi,

$$= \| |f_1|^p \|_{L^{p_1/p}_\mu(A)} \| |f_2|^p \|_{L^{p_2/p}_\mu(A)} =$$

$$= \left(\int_A |f_1|^{p \cdot \frac{p_1}{p}} d\mu \right)^{\frac{p}{p_1}} \left(\int_A |f_2|^{p \cdot \frac{p_2}{p}} d\mu \right)^{\frac{p}{p_2}} =$$

$$= \|f_1\|_{L^{p_1}_\mu(A)}^p \|f_2\|_{L^{p_2}_\mu(A)}^p$$

$$\Rightarrow (**).$$

~~C. 2.1.1~~

Sia $0 < p \leq p_1, p_2, \dots, p_m \leq \infty$ e

(93)

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{p} \quad \text{allora}$$

$$(***) \quad \left\| \prod_{j=1}^m f_j \right\|_{L_{\mu}^p(A)} \leq \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L_{\mu}^{p_j}(A)},$$

ove $f_j \in L_{\mu}^{p_j}(A)$, $A \in \mathcal{M}$, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio misurato.

Soluzione Induzione

Sia $m=2$, $(***)$ è vera

Assumiamo che $(***)$ sia vera per $m=n$, cioè se

$$0 < q \leq q_1, \dots, q_m \leq \infty \quad \text{e} \quad \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \dots + \frac{1}{q_m} = \frac{1}{q} \quad \text{si ha}$$

$$\left\| \prod_{j=1}^m f_j \right\|_{L_{\mu}^q(A)} \leq \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L_{\mu}^{q_j}(A)}$$

Sia $m=n+1$ e $0 < p \leq p_1, \dots, p_{n+1} \leq \infty$ e

$$(\dagger) \quad \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_{n+1}} = \frac{1}{p} \quad \text{Allora}$$

$m=2$
per $(**)$

$$\left\| \underbrace{f_1 \dots f_n}_{\substack{m=n \\ \text{per } (**)}} \underbrace{f_{n+1}}_{\substack{m=2 \\ \text{per } (**)}} \right\|_{L_{\mu}^p(A)} \leq \left\| f_1 \dots f_n \right\|_{L_{\mu}^r(A)} \|f_{n+1}\|_{L_{\mu}^{p_{n+1}}(A)} \leq$$

$$\text{ove} \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{p_{n+1}} = \frac{1}{p}$$

$$\leq \|f_1\|_{L_{\mu}^{p_1}(A)} \dots \|f_n\|_{L_{\mu}^{p_n}(A)} \|f_{n+1}\|_{L_{\mu}^{p_{n+1}}(A)},$$

perché allora $(\dagger) \quad \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p_{n+1}}$

Esercizio. Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio misurato, $E \in \mathcal{A}$ e

$$A(x) = \| a_{kl}(x) \|_{k,l=1}^m, \quad x \in E$$

una matrice di funzioni, ove $a_{kl} \in L^\infty_\mu(E)$ (esattamente quell' m). Allora

$$\det(A) \in L^1_\mu(E).$$

Soluzione. Poiché

$$\det(A) = \sum_{(l_1, \dots, l_m)} \varepsilon_{l_1, \dots, l_m} \prod_{k=1}^m a_{kl_k}$$

ove $\varepsilon_{l_1, \dots, l_m} = +1$ o -1 , si ha

$$\| \det(A) \|_{L^1_\mu(A)} \stackrel{=, \text{Pila Hölder}}{\leq} \sum_{(l_1, \dots, l_m)} \left\| \prod_{k=1}^m a_{kl_k} \right\|_{L^1_\mu(A)} \leq \left(\|\varepsilon_{l_1, \dots, l_m}\| = 1 \right)$$

$$\left(\underbrace{\frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m}}_m = 1 \right)$$

$$\leq \sum_{(l_1, \dots, l_m)} \prod_{k=1}^m \| a_{kl_k} \|_{L^\infty_\mu(A)} < \infty$$

~~Così si ha~~ Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio misurato,

$A \in \mathcal{A}$, $0 < p_1 < p_2 \leq \infty$. Allora se $p_1 < p < p_2$

$$\| f \|_{L^p_\mu(A)} \leq \| f \|_{L^{p_1}_\mu(A)}^\alpha \| f \|_{L^{p_2}_\mu(A)}^{1-\alpha},$$

$$\forall f \in L^{p_1}_\mu(A) \cap L^{p_2}_\mu(A), \quad \text{ove} \quad \frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p_1} + \frac{1-\alpha}{p_2}$$

Soluzione Sia $f \in L_{\mu}^{p_1}(A) \cap L_{\mu}^{p_2}(A)$ Allora

94

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_{\mu}^p(A)} &= \left\| \underbrace{|f|^{\alpha}}_{f_1} \underbrace{|f|^{1-\alpha}}_{f_2} \right\|_{L_{\mu}^p(A)} \leq \\ &\leq \| |f|^{\alpha} \|_{L_{\mu}^{\frac{p_1}{\alpha}}(A)} \| |f|^{1-\alpha} \|_{L_{\mu}^{\frac{p_2}{1-\alpha}}(A)} = \end{aligned}$$

perché $\frac{p_1}{\alpha} \geq 1$, $\frac{p_2}{1-\alpha} \geq 1$ e $\frac{1}{(\frac{p_1}{\alpha})} + \frac{1}{(\frac{p_2}{1-\alpha})} = \frac{1}{p}$

$$= \left(\int_A |f|^{\alpha \cdot \frac{p_1}{\alpha}} d\mu \right)^{\frac{\alpha}{p_1}} \cdot \left(\int_A |f|^{(1-\alpha) \cdot \frac{p_2}{1-\alpha}} d\mu \right)^{\frac{1-\alpha}{p_2}} =$$

$$= \|f\|_{L_{\mu}^{p_1}(A)}^{\alpha} \|f\|_{L_{\mu}^{p_2}(A)}^{1-\alpha}$$

μ complet

Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio misurato, $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) < \infty$. Se $0 < p < q \leq \infty$ allora

$$L_{\mu}^q(A) \subset L_{\mu}^p(A)$$

Soluzione Sia $f \in L_{\mu}^q(A) \Leftrightarrow$ 1) f è $\mathcal{A}$ -misurabile

e 2) $\|f\|_{L_{\mu}^q(A)} < \infty$

Allora

$$\int_A |f|^p d\mu = \int_A 1 \cdot \underbrace{|f|^p}_{\|1\|_{L_{\mu}^{\frac{q}{q-p}}(A)}} d\mu \leq$$

$$\leq \| |f|^p \|_{L_{\mu}^{\frac{q}{q-p}}(A)} \|1\|_{L_{\mu}^{\frac{q}{q-p}}(A)} = \left(\frac{q}{q-p} > 1 \right)$$

$$= \left(\int_A |f|^p \cdot \frac{q}{q-p} d\mu \right)^{\frac{q-p}{q}} \cdot \left(\int_A 1 d\mu \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \|f\|_{L_{\mu}^q(A)}^p \cdot \mu(A)^{\frac{1}{q}}$$

$$\|f\|_{L_{\mu}^p(A)} \leq \mu(A)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L_{\mu}^q(A)}$$

$\Rightarrow$ 1) f è $\mathcal{M}$ -misurabile

$$2) \|f\|_{L^p_\mu(A)} < \infty$$

$$\Rightarrow f \in L^p_\mu(A)$$

Osservazione Se $\mu(A) = +\infty$ (p.e. $A = \mathbb{R}^n$) e $0 < p < q < \infty$

$$\text{allora } L^q_\mu(A) \not\subset L^p_\mu(A)$$

Provare questo per $(X, \mathcal{M}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}_\mathbb{R}, m)$ e

$$A =]0, +\infty[.$$

Soluzione. Poniamo

$$f(x) = x^{-\frac{1}{p}} (1 + |\ln x|)^{-\frac{1}{2p}}$$

Dall'esercizio 1,

$$f(x)^q = x^{-\frac{q}{p}} (1 + |\ln x|)^{-\frac{q}{2p}} \in L^1(0, +\infty)$$

$$\Rightarrow f \in L^q(]0, +\infty[).$$

$$\text{E } f \notin L^p(]0, +\infty[).$$

Osservazione importante

La morale delle dim. viste in precedenza è la seguente:

se si parte da $\int_A |f|^p d\mu$ allora si vuole scrivere

$|f|^p$ come prodotto di 2 funzioni $|g|h$, cioè $\int_A |g|h d\mu$ che è la $\|gh\|_{L^1_\mu(A)}$. Da qui, si applica direttamente la disuguaglianza di Hölder.

Se invece si parte da $\|f\|_{L^p_\mu(A)}$ allora si applicano i Corollari della disuguaglianza di Hölder.

~~esercizio~~ Sia $0 < p < \infty$. Costruire una funzione f t.c. $p \in L^p(0, \infty)$ e $f \notin L^q(0, \infty)$ per ogni $0 < q < \infty$ t.c. $q \neq p$.

Soluzione. Per esempio,

$$f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{p}} (1 + |\log x|)^{\frac{2}{p}}}, \quad x > 0.$$

Osservare che elevando alla p , $1 + |\log x|$ rende f integrabile su $(0, \infty)$.

Allora, $f \in L^p(0, \infty)$

Però, se $q < p$ allora $f \in L^q(0, 1)$ ma $f \notin L^q(1, \infty)$, mentre se $q > p$ allora $f \in L^q(1, \infty)$ ma $f \notin L^q(0, 1)$.

($1 + |\log x|$ conta solo quando c'è $\frac{1}{x}$).

Def. 3. Sia $(X, \mathcal{K})$ uno spazio misurabile e ν_1, ν_2 misure con segno su $\mathcal{K}$. Si dice che ν_1 e ν_2 sono mutuamente singolari (brevemente $\nu_1 \perp \nu_2$) se esistono $E_1, E_2 \in \mathcal{K}$ t.c.
 $X = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, E_1 è nullo per ν_1 ,
 E_2 è nullo per ν_2 .

(ν_1 agisce su E_2 , ν_2 agisce su E_1).

Ad esempio, m e δ_0 sono mutuamente singolari.
 $(\mathbb{R} = \{0\} \cup \mathbb{R} \setminus \{0\}, m(\{0\}) = 0, \delta_0(A) = 0)$
 $\forall A \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}, A \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$

Teorema 2 (di Decomposizione di Jordan)

Siano $(X, \mathcal{K})$ uno spazio misurabile, ν una misura con segno su $\mathcal{K}$. Allora esistono uniche misure positive ν^+, ν^- t.c.

$$\nu = \nu^+ - \nu^-, \quad \nu^+ \perp \nu^-$$

dim. (Esistenza). Sia $X = P \cup \Pi$ una decomposizione di Hahn. Poniamo

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap P), \quad \nu^-(E) = -\nu(E \cap \Pi)$$

$$\forall E \in \mathcal{K}$$

Ovviamente, ν^+, ν^- sono positive. ν^+ è nullo su Π

($\mathcal{W} \cap P = \emptyset, \forall \mathcal{W} \subset \Pi$), ν^- è nullo su P e

$$\nu = \nu^+ - \nu^-$$

(Unicità). Facoltativa (partire da $\nu = \nu^+ - \nu^+, \nu^+ \perp \nu^-$ e arrivare ad Hahn).

CVD

Def. 4 Si dice che le misure ν^+, ν^- del Teorema 2 sono la variazione positiva, negativa rispettivamente di ν . Inoltre, la misura positiva $|\nu|$ definita da

$$|\nu| \equiv \nu^+ + \nu^-$$

si dice la variazione totale di ν .

Inoltre, si dice che ν è finita (risp. σ -finita) se tale è $|\nu|$.

Esempio 2 Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio misurato, μ positiva, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L^1_\mu(X)$, $\nu(E) = \int_E f d\mu \quad \forall E \in \mathcal{M}$.

□ Allora $P \equiv \{x \in X : f(x) \geq 0\}$, $N \equiv \{x \in X : f(x) < 0\}$

è una decomposizione di Hahn per ν .

$$\nu^+(E) = \int_{E \cap P} f d\mu, \quad \nu^-(E) = - \int_{E \cap N} f d\mu,$$

$$|\nu|(E) = \int_E |f| d\mu = \left(\int_{E \cap P} f d\mu + \int_{E \cap N} (-f) d\mu \right) = \int_{E \cap P} |f| d\mu + \int_{E \cap N} |f| d\mu = \int_E |f| d\mu$$

Def. 5 Sia $(X, \mathcal{M})$ spazio misurabile e ν una misura con segno su $\mathcal{M}$, $A \in \mathcal{M}$. Allora

$$L^1_\nu(A) \equiv L^1_{\nu^+}(A) \cap L^1_{\nu^-}(A)$$

e $\forall f \in L^1_\nu(A)$

$$\int_A f d\nu = \int_A f d\nu^+ - \int_A f d\nu^-$$

CAPITOLO 15: TEOREMA DI RÁDOŃ-NIKODŹYŃ

Def. 1. Sia $(X, \mathcal{K})$ uno spazio misurabile, ν una misura con segno su $\mathcal{K}$ e μ una misura positiva su $\mathcal{K}$. Si dice che ν è assolutamente continua rispetto a μ e si scrive $\nu \ll \mu$ se

$$E \in \mathcal{K}, \mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0.$$

(quando μ fa zero, ν deve fare zero: $\nu \ll \mu$).

Esempio. Sia $(X, \mathcal{K}, \mu)$ spazio misurato, μ positiva, $f \in L^1_\mu(X)$. Allora ν definita da

$$\nu(E) \equiv \int_E f \, d\mu, \quad \forall E \in \mathcal{K}$$

è assolutamente continua rispetto a μ .

Infatti se $\mu(E) = 0 \Rightarrow \int_E f \, d\mu = 0$.

(le abs. continue sono in realtà tutte così).

Esempio. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}, m^n)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, δ_{x_0} delta di Dirac concentrata in x_0 .

Ovviamente, δ_{x_0} non è assolutamente continua risp. a m^n , perché $m^n(\{x_0\}) = 0$ ma $\delta_{x_0}(\{x_0\}) = 1$.

Inoltre, $\delta_{x_0} \perp m^n$ perché $E_1 = \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$ è nullo per δ_{x_0} , $E_2 = \{x_0\}$ è nullo per m^n e $E_1 \cup E_2 = \mathbb{R}^n$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

Esercizio 1

$$v \ll \mu \Leftrightarrow |v| \ll \mu \Leftrightarrow v^+, v^- \ll \mu$$

(97)

Teorema

Sia $(X, \mathcal{M})$ spazio misurabile, v misura con segno limitata su $\mathcal{M}$, μ misura positiva su $\mathcal{M}$. Allora

$$v \ll \mu \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c.}$$

se $\mu(E) < \delta$ con $E \in \mathcal{M}$ allora

$$|v(E)| < \varepsilon$$

(pensare alla versione particolare con $v(E) = \int_E f d\mu$, $f \in L^1_\mu(X)$)

dim " $\Leftarrow$ ". Se $\mu(E) = 0$ allora $\mu(E) < \delta, \forall \delta > 0$

$$\Rightarrow |v(E)| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow v(E) = 0$$

" $\Rightarrow$ ". Per l'esercizio precedente, possiamo assumere che v sia positiva (ciò consideriamo $|v|$).

Supponiamo per assurdo che $\exists \varepsilon > 0$ t.c. ($\forall \delta > 0$)

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists E_n \in \mathcal{M} \text{ con } \mu(E_n) < 2^{-n} \text{ e}$$

$$v(E_n) \geq \varepsilon. \text{ Poniamo}$$

$$F_k = \bigcup_{n=k+1}^{\infty} E_n, \quad F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k.$$

$$F_{k+1} \subset F_k, \quad \forall k \quad (\text{decrecenti})$$

$$\mu(F_k) \stackrel{\text{subadd}}{\leq} \sum_{n=k+1}^{\infty} \mu(E_n) \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-n} = 2^{-k}$$

$$\Rightarrow \mu(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(F_k) = 0 \quad (\text{continuità dall'alto}).$$

$$\text{Ma } v(F_k) \geq v(E_{k+1}) \geq \varepsilon$$

$$\Rightarrow v(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} v(F_k) \geq \varepsilon, \quad \text{assurdo} (v \ll \mu).$$

C.V.D.

Corollario 1 (Continuità assoluta dell'integrale). Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio misurato, μ positiva, $f \in L^1_\mu(X)$. Allora
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. se $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) < \delta$
 allora $|\int_E f d\mu| < \varepsilon$.

(è una stima uniforme).

dim. Segue dal precedente perché la misura
 $\nu(E) = \int_E f d\mu$ è assolutamente continua rispetto a μ .

C.V.D

Teorema 2 (Radon-Nikodym)

Sia $(X, \mathcal{M})$ spazio misurabile, ν misura con segno su $\mathcal{M}$, μ misura positiva su $\mathcal{M}$, entrambe σ -finite.
 $\downarrow$
 a.s. continua o s.s. singolare

Allora esistono due uniche misure ν_a, ν_s su $\mathcal{M}$ con segno e σ -finite t.c.

$$\nu = \nu_a + \nu_s, \quad \nu_a \ll \mu, \quad \nu_s \perp \mu$$

(decomposizione di Radon-Nikodym) (es. $\int = \nu_a, \int_{\nu_s} = \nu_s$)

Inoltre, esiste una funzione $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ μ -integrabile in senso generalizzato unica a meno di modifiche su insiemi di misura μ -nulla t.c.

$$\nu_a(E) = \int_E f d\mu$$

f integrabile in senso generalizzato significa che almeno uno dei due $\int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu$ è finito, per cui ha senso scrivere $\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$.

Osservazione 1. Se ν è finita allora ν_a e ν_s sono finite (ovvio) e f è integrabile (perché $\int_E f d\mu = \nu_a(E) < \infty$, $\forall E \in \mathcal{K}$).

Se ν è positiva allora ν_a e ν_s sono positive e $f \geq 0$ q.v. (risp. a μ) (*)

dim (idea). Dappprima ν, μ siano positive e finite.

Si pone

$$\mathcal{F} = \left\{ \varphi: X \rightarrow [0, +\infty] : \int_E \varphi d\mu \leq \nu(E), \forall E \in \mathcal{K} \right\}$$

$$\left(f \in \mathcal{F}, \text{ per cui } \nu(E) = \int_E f d\mu + \nu_s(E) \right)$$

Posto $a = \sup_{\varphi \in \mathcal{F}} \int_X \varphi d\mu$, si può dimostrare che

esiste $f \in \mathcal{F}$ t.c. $\int_X f d\mu = a$ ($< \infty$, per cui $\mu(X) < \infty$).

Si può scegliere f a valori reali.

Si pone $\nu_a(E) = \int_E f d\mu$ e $\nu_s(E) = \nu(E) - \nu_a(E)$

e si dimostra che $\nu_s \perp \mu$.

(dettagli facoltativi).

Osservazione 2. Si dice che f è la derivata di ν rispetto a μ e si scrive $f = \frac{d\nu}{d\mu}$.

Così si scrive anche $d\nu = f d\mu + d\nu_s$.

$$(*) \quad \nu_a(E) > 0 \quad \forall E \in \mathcal{K}, \text{ cioè } \int_E f d\mu > 0 \quad \forall E \in \mathcal{K}$$

$\Rightarrow \mu(\{x \in X : f(x) < 0\}) = 0$. Infatti, se esistesse $F \in \mathcal{K}$ con $\mu(F) > 0$ t.c. $f(x) < 0 \quad \forall x \in F$ allora

$$\int_F f d\mu = \int_F f^+ d\mu - \int_F f^- d\mu = - \int_F f^- d\mu < 0, \text{ assurdo.}$$

Def. 6. Sia μ una misura Borelliana su $\mathbb{R}^n$ positiva

μ si dice regolare se

(i) $\mu(K) < \infty \quad \forall K$ compatto

(ii) $\mu(E) = \inf \{ \mu(U) : U \text{ aperto}, U \supset E \},$
 $\forall E$ borelliana.

Se ν è una misura con segno, allora ν si dice regolare se ν^+ e ν^- sono regolari.

Osservazione 3. Si può dimostrare che (i) $\Rightarrow$ (ii) (es. m^n). In particolare, una misura finita è regolare.

Osservazione 4. Le misure regolari sono univocamente determinate sugli aperti.

Teorema 3

Sia ν una misura borelliana regolare su $\mathbb{R}^n$, e sia $\nu = \nu_a + \nu_s$ con $d\nu_a = f dm$ la sua decomposizione di Radon-Nikodym rispetto alla misura $m (= m^n)$ di Lebesgue. Allora

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(B(x, r))}{m(B(x, r))} \quad \text{q.o.}$$

(il 2° membro c'è la media integrale)

dim. Fac. Si basa sul Teorema di Differenziazione di Lebesgue, che afferma che se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (i.e. f è integrabile sui compatti) allora

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{B(x, r)} f(y) dy}{m(B(x, r))} \quad \text{q.o.}$$

(una f ~~unif.~~ continua sui compatti è unif. continua).

Osservazione Nel Teorema 3 al posto della famiglia di
palle $\{B(x, r)\}_{r>0}$ si può scegliere una famiglia
di insiemi misurabili $\{E_r\}_{r>0}$ che "si stringe bene
attorno a x ", cioè:

(i) $E_r \subset B(x, r)$ ($\Rightarrow m(E_r)$ si controlla con
 $m(B(x, r))$)

(ii) $\exists \alpha > 0$ t.c.

$$m(B(x, r)) \leq \alpha m(E_r).$$

(la misura di B si controlla con quella di E_r)

(ad esempio, se $m=1$, si può scegliere una famiglia
di intorni destri e sinistri di x)

CAPITOLO 17 : FUNZIONI BV (Bounded Variation)

Ricordiamo il seguente

Teorema 1

Sia $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotona crescente e sia

$$G(x) = F(x^+) = \lim_{\gamma \rightarrow x^+} F(\gamma)$$

(a) L'insieme dei punti di discontinuità di F è numerabile (sono solo salti).

(b) F, G sono derivabili q.o. e $F'(x) = G'(x)$ q.o.

Def. 1. Sia $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$ poniamo

$$T_F(x) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})| : -\infty < x_0 < x_1 < \dots < x_n = x, n \in \mathbb{N} \right\}$$

(è il sup su tutte le partizioni).

T_F è detta funzione di variazione totale di F e

$\sup_{x \in \mathbb{R}} T_F(x)$ è detta variazione totale di F .

Inoltre, F si dice a variazione limitata (BV) se

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} T_F(x) < \infty.$$

(ciò si prende una partizione di $\mathbb{R}$ in n punti,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} T_F(x) < \infty)$$

Osservazione 1. T_F è monotona crescente (esercizio:

se aumento x ci sono più partizioni).

$$\text{Quindi, } \sup_{x \in \mathbb{R}} T_F(x) = T_F(\infty) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})| \right.$$

$$\left. -\infty < x_0 < x_1 < \dots < x_n < \infty, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice a variazione limitata (BV $[a, b]$) se tale è la funzione

(10)

$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \begin{cases} f(a) & \text{se } x < a \\ f(x) & \text{se } x \in [a, b] \\ f(b) & \text{se } x > b \end{cases}$$

(così fuori da $[a, b]$ non ci sono variazioni).

Esempi

a) Se $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è monotona crescente (decrecente) limitata allora $F \in BV$

~~Altrimenti~~ F non limitata $\Rightarrow F \notin BV$.

$$\begin{aligned} \text{Se } F \text{ è crescente, } \sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})| &= \\ = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) &= F(x_n) - F(x_0) < 2 \sup_{x \in \mathbb{R}} F(x) < \infty \end{aligned}$$

b) Se $F_1, F_2 \in BV$ allora $\alpha F_1 + \beta F_2 \in BV$,
 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (ricordare che $\sup(\sum_i) \leq \sum_i(\sup)$)

c) Se $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ è lipschitziana allora $F \in BV[a, b]$

$$|F(x_i) - F(x_{i-1})| \leq K |x_i - x_{i-1}|$$

$$\sum |F(x_i) - F(x_{i-1})| \leq K \sum |x_i - x_{i-1}| \leq K(b-a) < \infty$$

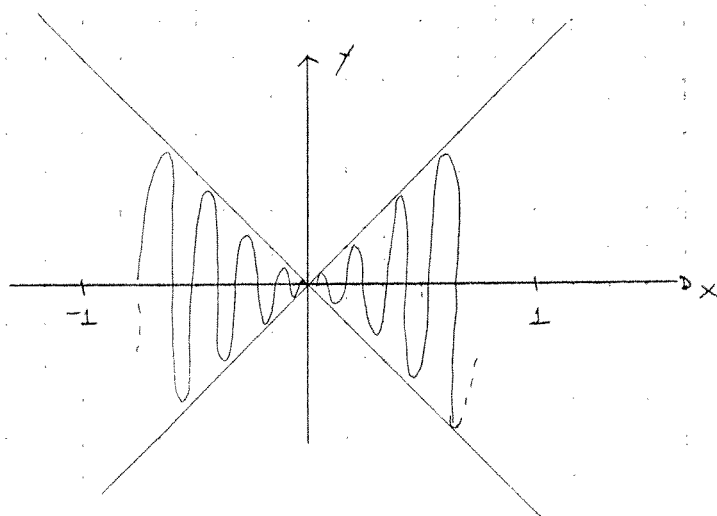
~~Altrimenti~~ $a, b \in \mathbb{R}$ ($F(x) = x \notin BV(\mathbb{R})$)

d) La funzione $F(x) = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ non è BV,
 ma $F|_{[a, b]}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ è BV $[a, b]$

($F|_{[a, b]}$ è lipschitziana $\Rightarrow BV[a, b]$. Ma $\sin x$ non è BV: $\uparrow \uparrow \uparrow 1+1+1+1+\dots = \infty$)

e) La funzione

$$F(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



non è BV $[-1, 1]$ (oscillazioni che aumentano con una opportuna successione)

Lemma 1. Sia $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione BV. Allora le funzioni $T_F + F$, $T_F - F$ sono monotone crescenti e limitate (in particolare, sono BV).

(è chiaro che sono limitate).

dim. Facoltativa.

F è limitata (BV $\Rightarrow$ limitata).

Teorema 2

$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è BV se e solo se $F = \varphi - \psi$, dove φ, ψ sono monotone crescenti e limitate. In particolare, se F è BV si può scegliere $\varphi = \frac{T_F + F}{2}$ e $\psi = \frac{T_F - F}{2}$ (decomposizione di Jordan). (4)

$\varphi, \psi \in BV$

dim. Se $F = \varphi - \psi$ con $\varphi, \psi \in BV \Rightarrow F \in BV$.

Viceversa segue dal lemma 1.

CVD

Corollario 1 Se F è BV allora l'insieme dei punti di discontinuità di F è numerabile e F è derivabile q.o.

dim. Dal Teorema 1 e Teorema 2. CVD

Def. Sia $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che F è ΠBV (Π = normalized) se F è BV, F è continua a destra e $F(-\infty) = 0$ (così è univoc. determinata, cioè non c'è l'aggiunta di costanti).

Lemma 2 Se $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è ΠBV allora le funzioni in (1) sono ΠBV .

(sappiamo già che sono BV, perché monotone crescenti e limitate)

dim. Fac.

Teorema 3 (Caratterizzazione delle misure Borelliane con segno finite su $\mathbb{R}$)

a) Se ν è una misura Borelliana con segno finite (su $\mathbb{R}$) e $F(x) = \nu(-\infty, x]$, allora F è ΠBV .

b) Se $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è ΠBV allora esiste una unica misura Borelliana ν_F con segno finite t.c.

$$\nu_F(-\infty, x] = F(x).$$

(versione per le misure con segno di un teorema già visto)

dim. a) Sia $\nu = \nu^+ - \nu^-$ ove ν^+, ν^- sono misure positive finite. E' noto che le funzioni $F_1(x) = \nu^+(-\infty, x]$, $F_2(x) = \nu^-(-\infty, x]$ perché ν finita $\Rightarrow \nu^+, \nu^-$ finite $\Rightarrow F_1, F_2$ limitate sono monotone crescenti, continue a destra, limitate e che $F_1(-\infty) = F_2(-\infty) = 0$. Quindi, la funzione $F(x) = \nu(-\infty, x] = \underbrace{\nu^+(-\infty, x]}_{HBV} - \underbrace{\nu^-(-\infty, x]}_{HBV} = F_1(x) - F_2(x)$ è HBV.

b) Sia $F = \varphi - \psi$ con φ, ψ come in (1).

Dal lemma 2, φ, ψ sono monotone crescenti, limitate, continue a destra e $\varphi(-\infty) = \psi(-\infty) = 0$.

E' noto che esistono due misure Borelliane finite, positive μ_φ, μ_ψ t.c.

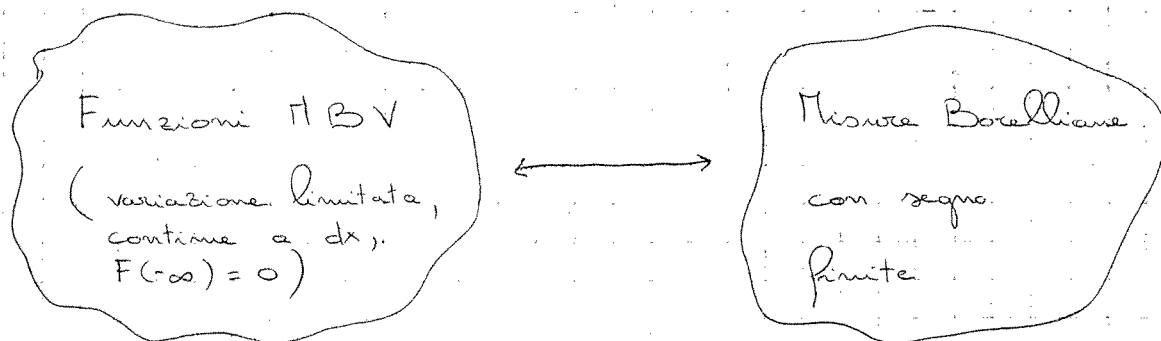
$$\mu_\varphi(-\infty, x] = \varphi(x), \quad \mu_\psi(-\infty, x] = \psi(x)$$

La misura $\nu = \mu_\varphi - \mu_\psi$ soddisfa a quanto richiesto:

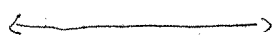
$$\nu(-\infty, x] = \mu_\varphi(-\infty, x] - \mu_\psi(-\infty, x] = \varphi(x) - \psi(x) = F(x)$$

L'unicità segue dal fatto che una misura regolare, in particolare una misura finita, è univocamente determinata sugli aperti e quindi sugli intervalli $(-\infty, x]$.

C.V.D



F



ν_F

$$\nu_F(-\infty, x] = F(x)$$

Chi sono le corrispondenti delle misure assd. continue?

Lemma 3. Sia $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ MBV.

(102)

a) $F' \in L^1_m(\mathbb{R})$ (esiste per il Teorema 1)

b) $\nu_F \perp m \Leftrightarrow F' = 0$ q.o. ($F' = 0 \Rightarrow F$ cost., u.d.c. F_c)

c) $\nu_F \ll m \Leftrightarrow F(x) = \int_{-\infty}^x F'(t) dt$

dim. a) Dal Teorema di Radon-Nikodym

$$\nu_F = (\nu_F)_a + (\nu_F)_s,$$

$$(\nu_F)_a(E) = \int_E f dm, \text{ ove } f \in L^1_m(\mathbb{R}).$$

Inoltre, $f(x) = \frac{d\nu_F}{dm} = \lim_{\pi \rightarrow 0} \left(\frac{\nu_F(x, x+\pi]}{m(x, x+\pi]} \right) = \left(\left(x, x+\pi \right] \text{ su } (-\infty, x] \subset (-\infty, x+\pi] \right)$
 stringe bene attorno a x) $\Rightarrow \nu_F((-\infty, x+\pi] \setminus (-\infty, x]) =$
 $= \nu_F((-\infty, x+\pi]) - \nu_F((-\infty, x]) = F(x+\pi) - F(x)$
 $= \lim_{\pi \rightarrow 0} \frac{F(x+\pi) - F(x)}{\pi} = F'(x) \text{ q.o.}$

Quindi, $F' = f \in L^1_m(\mathbb{R})$.

b) $\nu_F \perp m \Leftrightarrow (\nu_F)_a = 0 \Leftrightarrow f = 0$ q.o.

$\Leftrightarrow F' = 0$ q.o.

c) $\nu_F \ll m \Leftrightarrow \nu_F = (\nu_F)_a \Leftrightarrow \nu_F(E) = \int_E f dm, \forall E \in \mathcal{M}$

(le misure sono univ. det. sugli intervalli $(-\infty, x]$)

$$\Leftrightarrow \nu_F((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^x f dm \quad \forall x$$

$$\Leftrightarrow F(x) = \int_{-\infty}^x F'(t) dt.$$

C.V.D.

Notare che c) è una versione del Teo. Fondamentale del Calcolo Integrale. Per quali funzioni è vero?

Teo. 4. $(\nu_F)_a(E) = \int_E f dm, \exists f \in L^1_m(\mathbb{R})$ e

$f = F'$ q.o.

CAPITOLO 18 : FUNZIONI AC

Def. Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$, $F: I \rightarrow \mathbb{R}$.

F si dice assolutamente continua se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c.

se $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ sono intervalli disgiunti

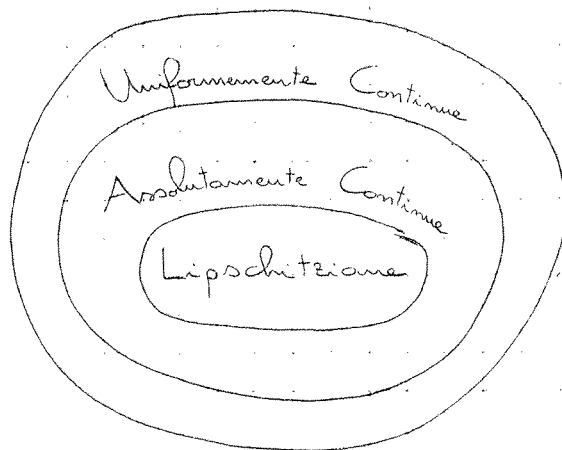
contenuti in I t.c. $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$ allora

$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ (brevemente, $F \in AC(I)$).

(se $n=1$ si ottiene la def. di uniformemente continua.

Se si toglie "disgiunti" si ottiene che F è Lipschitziana).

Osservazione.



(Le Lipschitziane sono Assol. Continue perché
 $|f(b_i) - f(a_i)| < L |b_i - a_i|$, $\forall i=1, \dots, n$).

(Osservare che $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \Leftrightarrow m(\cdot) < \delta$
implica $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| = v_F(\cdot) < \varepsilon$, cioè
 $v_F < \varepsilon$ m. Lo vedremo bene).

Osservazione. Se $F \in AC]a, b[$ allora F si estende univocamente su $[a, b]$ (perché F è uniformemente continua, e ammette una estensione sulla chiusura).

Inoltre se $F \in AC [a, b]$ intendiamo che F si estende canonicamente a $\mathbb{R}$ ponendo

$$F(x) = F(a) \quad \forall x < a,$$

$$F(x) = F(b) \quad \forall x > b$$

Teorema 1

Sia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ HBV. Allora

$$v_F < +\infty \iff F \in AC(\mathbb{R}).$$

(dim. Preso E con $m(E) = 0$, lo si ricopre con gli $(a_i, b_i), \dots, (a_m, b_m)$ con $\sum_{i=1}^m (b_i - a_i) < \delta$ e allora $v_F \left(\bigcup_i (a_i, b_i) \right) < \epsilon$)

Lemma Se $F \in AC [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ allora $F \in BV [a, b]$.

Attenzione! $a, b \in \mathbb{R}$ (ad esempio, $\text{id}_{\mathbb{R}} \in AC(\mathbb{R})$ ma non $BV(\mathbb{R})$).

Teorema 2

Sia $-\infty < a < b < \infty$, $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni

(1) $F \in AC[a, b]$

(2) $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t) dt$, $\exists f \in L^1[a, b]$

(3) F è differenziabile q.o. in $[a, b]$, $F' \in L^1[a, b]$,
 $F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t) dt$

P.B. L'integrale è quello di Lebesgue.

dim. (3) $\Rightarrow$ (2) Ovvio

(2) $\Rightarrow$ (1). Da (2) segue che $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$,

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt, \text{ quindi}$$

$$|F(x_2) - F(x_1)| \leq \int_{[x_1, x_2]} |f| dm$$

Poniamo $\mu(E) = \int_E |f| dm$ (μ è una misura su $[a, b]$).

E' noto che μ è assolutamente continua (risp. m)

Quindi $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. se $m(E) < \delta$ allora

$$\mu(E) < \varepsilon.$$

Posto $E = \bigcup_{i=1}^m (a_i, b_i)$, $(a_i, b_i) \subset [a, b]$, si ha che

$$\text{se } \underbrace{\sum_{i=1}^m (b_i - a_i)}_{m(E)} < \delta \text{ allora } \underbrace{\sum_{i=1}^m \int_{(a_i, b_i)} |f| dm}_{\mu(E)} < \varepsilon$$

$$\text{Quindi } \sum_{i=1}^m |F(b_i) - F(a_i)| \leq \sum_{i=1}^m \int_{(a_i, b_i)} |f| dm < \varepsilon$$

Quindi, $F \in AC[a, b]$.

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x F'(t) dt.$$

(tali funzioni sono quelle dello Spazio di Sobolev: $W_{loc}^{1,1}$)

Esercizio. Sia I intervallo limitato, $f \in \mathcal{C}^1(I)$. Allora

$$f \in AC(I) \Leftrightarrow f' \in L^1(I).$$

Soluzione. " $\Rightarrow$ ". Unico del Teorema F.C.

" $\Leftarrow$ ". Il teorema classico del Calcolo dice che

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt.$$

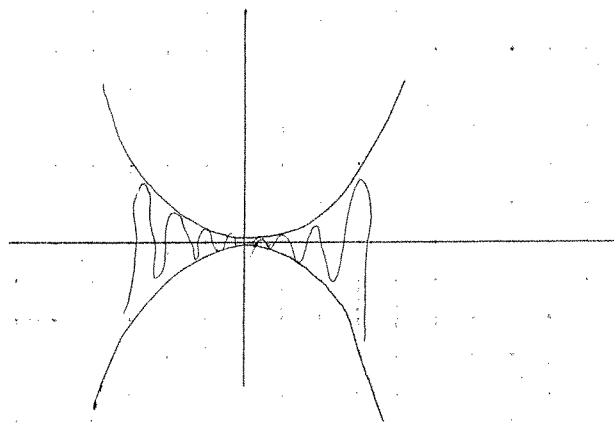
Quindi vale (3) $\Rightarrow$ (1), cioè $f \in AC(I)$.

Esercizio. Sia $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Provare che $f(x) = \int_0^x f'(t) dt$.

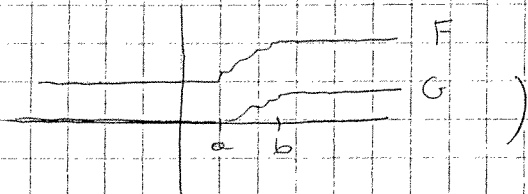
Soluzione.



$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(verificare)

(1) $\Rightarrow$ (3). $F \in AC[a, b] \Rightarrow F \in BV[a, b]$ per il (104) lemma. Si estenda F a $\mathbb{R}$ ponendo
 $F(x) = F(a) \quad \forall x < a, \quad F(x) = F(b) \quad \forall x > b$ (allora
 $F \in AC(\mathbb{R})$ e $F \in BV(\mathbb{R})$), e si ponga
 $G(x) = F(x) - F(a), \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (così F è normalizzata,
 perché $G(x) = 0 \quad \forall x < a$).



Allora $G \in \{HBV\} \cap \{AC\}$

Dal Teorema 1 segue che VG è assolutamente
 continua rispetto a m e quindi dal lemma 3 cap. 17,

G è derivabile q.o., $G' \in L^1(\mathbb{R})$ e

$$F(x) - F(a) = G(x) = \int_{-\infty}^x G'(t) dt = \quad (\text{per } x \leq a \quad G'(x) = 0)$$

$$= \int_a^x G'(t) dt = \int_a^x F'(t) dt \quad \text{CVD}$$

~~Osservazione 1~~ Al posto di $[a, b]$ si può considerare
 un qualsiasi intervallo limitato I (e $a = x_0 \in I$).

Il Teorema non vale con I illimitato. Ad esempio,

$F(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ è $AC(\mathbb{R})$ ma $F'(x) \equiv 1 \notin L^1(\mathbb{R})$.

Ma vale una versione locale:

Sia I intervallo di $\mathbb{R}$. Allora sono equivalenti:

(1) $F \in AC_{loc}(I)$

(2) $\exists f \in L^1_{loc}(I)$ t.c. dato $x_0 \in I$ si abbia

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

(3) F è derivabile q.o., $F' \in L^1_f(I)$ e dato $x_0 \in I$