Istituzioni di Matematiche (CH-CI-MT) - Mod A

prova scritta del 3 febbraio 2003

ESERCIZIO 1. *Si studi la funzione*

$$f(x) = 2\sin\left|x + \frac{1}{3}\right| - x^2$$

e si tracci un grafico indicativo del suo andamento.

Svolgimento. La funzione è definita e continua su tutta la retta reale ed è derivabile per $x \neq -\frac{1}{3}$. Inoltre, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$.

La derivata prima di f è

$$f'(x) = \begin{cases} 2\cos\left(x+\frac{1}{3}\right) - 2x & \text{per } x > -\frac{1}{3} \\ -2\cos\left(x+\frac{1}{3}\right) - 2x & \text{per } x < -\frac{1}{3} \end{cases}$$

essendo il coseno una funzione pari. Inoltre, per la Regola di de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to-\frac{1}{3}^+} \frac{f(x) - f(-\frac{1}{3})}{x+\frac{1}{3}} = \lim_{x\to-\frac{1}{3}^+} f'(x) = \frac{8}{3} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\frac{1}{3}^-} \frac{f(x) - f(-\frac{1}{3})}{x+\frac{1}{3}} = \lim_{x\to-\frac{1}{3}^-} f'(x) = -\frac{4}{3}$$

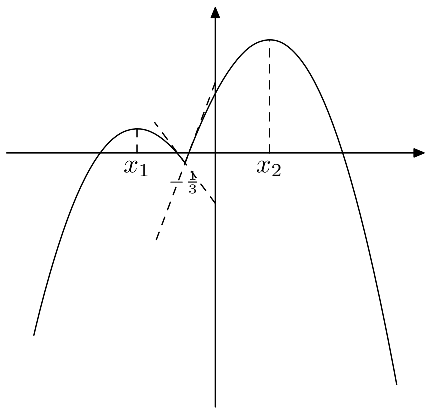
da cui si conclude che $x = -\frac{1}{3}$ è un punto angoloso.

La derivata prima si annulla nei due punti $x_1 < -\frac{1}{3} < x_2$ su cui le rette $y = -x$ ed $y = x$, rispettivamente, intersecano la curva $y = \cos\left(x + \frac{1}{3}\right)$. Si ha quindi che $f(x)$ è crescente per $x < x_1$ e per $-\frac{1}{3} < x < x_2$, mentre $f(x)$ è decrescente per $x_1 < x < -\frac{1}{3}$ e per $x > x_2$. Dunque, x_1 ed x_2 sono punti di massimo relativo, mentre $-\frac{1}{3}$ è un punto di minimo relativo.

Osserviamo infine che la derivata seconda è

$$f''(x) = \begin{cases} -2\sin\left(x+\frac{1}{3}\right) - 2 & \text{per } x > -\frac{1}{3} \\ 2\sin\left(x+\frac{1}{3}\right) - 2 & \text{per } x < -\frac{1}{3} \end{cases}$$

ed è quindi minore o uguale a zero in ogni punto in cui è definita. Dunque il grafico di f è concavo sulle due semirette $(-\infty, -\frac{1}{3})$ e $(-\frac{1}{3}, +\infty)$.



Abbiamo quindi tracciato un grafico indicativo dell'andamento di $f(x)$. □

ESERCIZIO 2. *Si calcoli*

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\cos(2\sqrt{x})\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Svolgimento. Ricordiamo che, dalle formule di addizione, si ricava

$$2\cos\alpha\,\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$$

e quindi l'integrale proposto si decompone nella somma

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\cos(2\sqrt{x})\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^{\pi^2} \frac{\sin 3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx - \int_0^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx.$$

Inoltre, con la sostituzione $y = \sqrt{x}$, si ricava immediatamente che l'integrale proposto è uguale a

$$\left[-\frac{\cos 3\sqrt{x}}{3} + \cos\sqrt{x}\right]_0^{\pi^2} = -\frac{4}{3}.$$

Fine del calcolo. □

ESERCIZIO 3. *Si calcoli la somma della serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2-1}.$$

Svolgimento. Osserviamo che

$$\frac{2}{4n^2-1} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

e quindi

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{2}{4n^2-1} = \sum_{n=0}^{k}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = -1 - \frac{1}{2k+1}.$$

Si conclude che la somma della serie è $\lim_{k\to\infty} s_k = -1$. □

ESERCIZIO 4. *Si disegni il sottoinsieme D del piano formato dai punti $\binom{x}{y}$ tali che*

$$\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ (x-1) + |x-1| \le y \le |2-(x-2)^2| \end{cases}$$

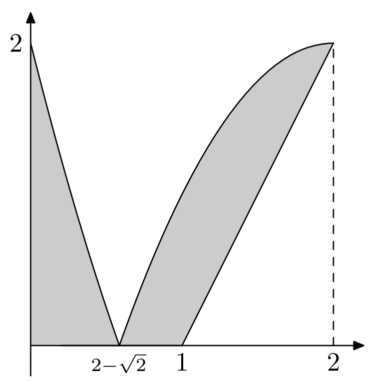
e si determini il volume del solido generato dalla rotazione di D attorno all'asse delle ascisse.

Svolgimento. Si tratta dell'area posta al di sopra dell'intervallo $[0,2]$ e racchiusa tra i grafici delle due funzioni

$$f(x) = (x-1) + |x-1| = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 \le x < 1 \\ 2(x-1) & \text{per } 1 \le x \le 2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) = |2-(x-2)^2|.$$

Il grafico di f è l'unione di due segmenti di rette, mentre il grafico di g si deduce con facili considerazioni di simmetria dal grafico della parabola $y = 2-(x-2)^2$. Possiamo quindi disegnare i due grafici ed evidenziare in grigio l'insieme D. Il volume del solido di rotazione è quindi uguale a

$$V = \pi\left(\int_0^2 [2-(x-2)^2]^2 dx - \int_1^2 4(x-1)^2 dx\right) =$$
$$= \pi\left(\left[4(x-2) - \frac{4(x-2)^3}{3} + \frac{(x-2)^5}{5}\right]_0^2 - \left[\frac{4(x-1)^3}{3}\right]_1^2\right) = \frac{58}{5}\pi.$$



Fine del calcolo. □

ESERCIZIO 5. *Si considerino le rette r ed s, di equazioni*

$$r : \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \qquad ed \qquad s : \begin{cases} x - z = 1 \\ y - 2z = 0 \end{cases}.$$

(a) Si verifichi che le due rette sono sghembe e si calcoli la distanza reciproca.
(b) Si determinino le equazioni cartesiane della retta h, perpendicolare ed incidente sia ad r che ad s.
(c) Detti rispettivamente R ed S i punti di intersezione della retta h con la retta r e la retta s, si determini un punto P appartenente alla retta r tale che $\|\overrightarrow{PS}\|^2 = 2\|\overrightarrow{PR}\|^2$.

Svolgimento. (a). La retta r passa per il punto $R_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, mentre la retta s passa per il punto $S_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dunque le rette non sono parallele, possiamo quindi calcolarne la distanza

$$d = \frac{|\overrightarrow{R_0S_0} \cdot v \times w|}{\|v \times w\|} = \frac{1}{\sqrt{11}}.$$

Avendo distanza positiva, le due rette non possono essere incidenti e quindi sono due rette sghembe.
(b). Un vettore perpendicolare alle due rette è $v \times w = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e quindi la retta h è l'intersezione tra il piano ρ, contenente r e parallelo a $v \times w$, ed il piano ρ, contenente s e parallelo a $v \times w$. Un generico piano contenente la retta r ha equazione $\alpha(x - y - 2) + \beta(2x - z) = 0$, ed imponendo la condizione che il suo vettore normale sia ortogonale a $v \times w$, si ricava il piano $\rho : x + 7y - 4z + 14 = 0$. Analogamente si ricava l'equazione di $\sigma : x - 4y + 7z - 1 = 0$, e dunque

$$h : \begin{cases} x + 7y - 4z + 14 = 0 \\ x - 4y + 7z - 1 = 0 \end{cases}.$$

(c). Osserviamo che $\{R\} = r \cap h = r \cap \sigma$ e quindi $R = \begin{pmatrix} -7/11 \\ -29/11 \\ -14/11 \end{pmatrix}$ ed, analogamente, $\{S\} = s \cap h = s \cap \rho$ e quindi $S = \begin{pmatrix} -4/11 \\ -30/11 \\ -15/11 \end{pmatrix}$. Il punto P deve appartenere alla retta r ed avere distanza $\|\overrightarrow{PR}\| = \|\overrightarrow{RS}\| = 1/\sqrt{11}$, come si vede immediatamente applicando il Teorema di Pitagora al triangolo PRS. Quindi vi sono due possibilità di scelta per il punto P, ovvero

$$P = R \pm \frac{1}{\sqrt{11}} \frac{v}{\|v\|} = \begin{pmatrix} -7/11 \\ -29/11 \\ -14/11 \end{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{66}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Fine del compito. □