Istituzioni di Matematiche (CH-CI-MT) - Mod A

prova scritta del 17 febbraio 2003

ESERCIZIO 1. *Si studi la funzione*

$$f(x) = \log|1-x| + 2x$$

e se ne tracci un grafico indicativo che evidenzi estremi locali, concavità, convessità ed eventuali asintoti.

Svolgimento. La funzione è definita per $x \neq 1$ e, nell'insieme di definizione, è continua e derivabile. Per $x \to \pm\infty$, $\log|1-x| = o(x)$ e quindi si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \text{e, inoltre,} \qquad \lim_{x\to 1} f(x) = -\infty.$$

La derivata prima è uguale a

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} + 2 = \frac{2x-1}{x-1} \qquad \text{(per } x \neq 1\text{)}$$

e quindi la funzione f è crescente per $x < \frac{1}{2}$ e per $x > 1$, mentre è decrescente per $\frac{1}{2} < x < 1$. Il punto $x = \frac{1}{2}$ è quindi un punto di massimo relativo, con $f(\frac{1}{2}) = 1 - \log 2 > 0$.

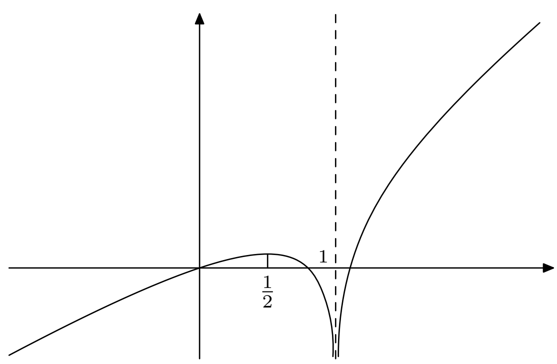
Non vi sono asintoti, perchè

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \qquad \text{ma} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 2x) = +\infty.$$

La derivata seconda è uguale ad

$$f''(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} \qquad \text{(sempre per } x \neq 1\text{)}$$

e quindi la funzione è concava (convessa verso l'alto) sulle due semirette aperte $(-\infty, 1)$, ed $(1, +\infty)$ in cui si decompone il dominio.



Possiamo quindi riassumere la discussione tracciando il grafico qui sopra. □

ESERCIZIO 2. *Si calcoli*

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{\sin^2 x\,(\mathrm{tg}^2 x - 1)}\,dx.$$

Svolgimento. Si osservi che

$$\frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{\sin^2 x\,(\mathrm{tg}^2 x - 1)}\,dx = \frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{tg}^2 x\,(\mathrm{tg}^2 x - 1)}\,\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{2}{y(y^2-1)}\,dy \qquad \text{ove } y = \mathrm{tg}\,x.$$

Inoltre, $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ e la tangente di x tende a $+\infty$ per $x \to \frac{\pi}{2}$. Dunque, l'integrale proposto è equivalente all'integrale improprio

$$\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{2}{y(y^2-1)}\,dy.$$

La frazione si decompone nelle sue parti principali, ovvero

$$\frac{2}{y(y^2-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} + \frac{C}{y+1} \qquad \text{ove} \qquad \begin{cases} A+B+C=0 \\ B-C=0 \\ -A=2 \end{cases} \qquad \text{e quindi} \qquad \begin{cases} A=-2 \\ B=1 \\ C=1 \end{cases}.$$

Si ha quindi

$$\int \frac{2}{y(y^2-1)}\, dy = \log \frac{y^2-1}{y^2} + c \qquad \text{e} \qquad \lim_{y\to+\infty} \log \frac{y^2-1}{y^2} = \log 1 = 0.$$

Si conclude che l'integrale proposto è uguale a $\log 3 - \log 2$. □

ESERCIZIO 3. *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{-x^2} - x\,\sin x}{x^2 \log(1+x^2)}.$$

Svolgimento. È una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Possiamo quindi utilizzare gli sviluppi di Mc Laurin

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} + o(x^4), \qquad x \sin x = x^2 - \frac{x^4}{3!} + o(x^4), \qquad \log(1+x^2) = x^2 + o(x^2),$$

per concludere che

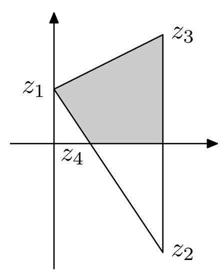
$$\frac{1 - e^{-x^2} - x\,\sin x}{x^2 \log(1+x^2)} = \frac{-\frac{x^4}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = -\frac{x^4 + o(x^4)}{3x^4 + o(x^4)}$$

e quindi, per $x \to 0$, la frazione tende a $-\frac{1}{3}$. □

ESERCIZIO 4. *Si disegni sul piano di Gauß il triangolo avente come vertici le soluzioni dell'equazione* $(x-i)(x^2-4x+8) = 0$ *e si determini l'area della porzione di triangolo posta al di sopra dell'asse delle ascisse.*

Svolgimento. I tre numeri cercati sono $z_1 = i$ e le due soluzioni dell'equazione $x^2 - 4x + 8 = 0$, ovvero $z_2 = 2 - 2i$ e $z_3 = 2 + 2i$.

L'area cercata è indicata in grigio nel disegno qui a fianco, ed è la differenza tra l'area del triangolo $z_1z_2z_3$ e l'area del triangolo delimitato dall'asse delle ascisse e dal vertice z_2. I numeri complessi z_2 e z_3 sono coniugati e quindi il lato z_2z_3, di lunghezza 4, viene tagliato a metà dall'asse delle ascisse. Non ci resta che trovare il punto di intersezione tra l'asse delle ascisse ed il lato z_1z_2 per poter concludere i nostri calcoli. Il lato z_1z_2 è contenuto nella retta di equazione $y = 1 - \frac{3}{2}x$ e quindi il punto di intersezione con l'asse delle ascisse è $z_4 = \frac{2}{3}$ da cui si deduce che l'area del triangolo al di sotto dell'asse è uguale a $\frac{4}{3}$.



In conclusione l'area cercata misura $4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$. □

ESERCIZIO 5. [Vecchio Ordinamento] *Si considerino le rette r ed s, di equazioni cartesiane*

$$r: \begin{cases} x + y = 3 \\ z = 2 \end{cases} \qquad\qquad s: \begin{cases} x - z = -3 \\ y + z = 6 \end{cases}$$

(a) *Verificare che r e s sono incidenti e trovare il punto P di intersezione.*
(b) *Trovare i punti Q e Q' di r a distanza $3\sqrt{2}$ da P ed i piani π e π', passanti rispettivamente per Q e Q' e perpendicolari a s.*
(c) *Determinare il volume del cilindro con le basi contenute nei piani π e π', con asse contenuto nella retta s, e con le circonferenze di base passanti per i punti Q e Q'.*

Svolgimento. (a). Le due rette si intersecano nel punto $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b). La retta r è parallela al vettore $v_r = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e quindi i suoi punti hanno coordinate $X_t = \begin{pmatrix} -1-t \\ 4+t \\ 2 \end{pmatrix}$, al variare del parametro t in $\mathbb{R}$. La distanza di X_t da P è $\|\overrightarrow{PX_t}\| = |t|\sqrt{2}$, e quindi i punti cercati sono $Q = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $Q' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

La retta s è parallela al vettore $v_s = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e quindi i piani cercati sono $\pi = \left\{ X \;\middle|\; v_s \cdot \overrightarrow{QX} = 0 \right\}$ e $\pi' = \left\{ X \;\middle|\; v_s \cdot \overrightarrow{Q'X} = 0 \right\}$. Si determinano in questo modo le due equazioni

$$\pi : x - y + z + 9 = 0 \qquad \text{e} \qquad \pi' : x - y + z - 3 = 0.$$

(c). L'altezza, h, del cilindro coincide con la distanza tra i due piani paralleli π e π', ovvero $h = 4\sqrt{3}$. Per trovare il raggio di base, r, possiamo determinare il punto S di intersezione tra l'asse s ed il piano π, ovvero $S = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, ed osservare che $r = \|\overrightarrow{SQ}\| = \sqrt{6}$. In conclusione il Volume del cilindro è uguale a $\pi r^2 = 24\pi\sqrt{3}$

$\square$