Istituzioni di Matematiche (CH-CI-MT) - Mod A

prova scritta del 23 giugno 2003

ESERCIZIO 1. *Si studi la funzione*

$$f(x) = \log \frac{e^{2x}}{|x-2|}$$

e se ne tracci un grafico indicativo che evidenzi estremi locali, concavità, convessità ed eventuali asintoti.

Svolgimento. La funzione è definita per $x \neq 2$ e, nell'insieme di definizione, è continua e derivabile. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \text{e, inoltre,} \qquad \lim_{x\to 2} f(x) = +\infty.$$

La derivata prima è uguale a

$$f'(x) = \frac{2x-5}{x-2} \qquad (\text{per } x \neq 2)$$

e quindi la funzione f è crescente per $x < 2$ e per $x > \frac{5}{2}$, mentre è decrescente per $2 < x < \frac{5}{2}$. Il punto $x = \frac{5}{2}$ è quindi un punto di minimo relativo, ed $f(\frac{5}{2}) = 5 + \log 2 > 0$.

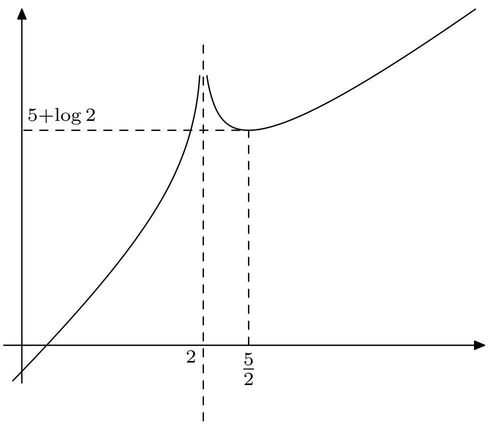
Non vi sono asintoti, perchè

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \qquad \text{ma} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 2x) = -\infty.$$

La derivata seconda è uguale ad

$$f''(x) = \frac{1}{(x-2)^2} \qquad (\text{sempre per } x \neq 2)$$

e quindi la funzione è convessa (convessa verso il basso) sulle due semirette aperte $(-\infty, 2)$, ed $(2, +\infty)$ in cui si decompone il dominio.



Possiamo quindi concludere con il grafico tracciato qui sopra. □

ESERCIZIO 2. *Si calcoli*

$$\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{1}{x^2(x^2+1)}\, dx.$$

Svolgimento. La frazione si decompone nelle sue parti principali, ovvero

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \qquad \text{ove} \qquad \begin{cases} A + C = 0 \\ B + D = 0 \\ A = 0 \\ B = 1 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \\ C = 0 \\ D = -1 \end{cases}.$$

Si ha quindi

$$\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\, dx = -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + c \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Si conclude che l'integrale proposto è uguale a $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}$. □

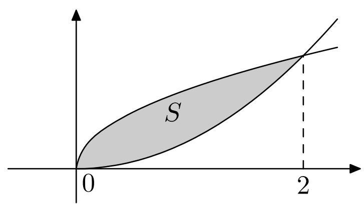
ESERCIZIO 3. *Si calcoli*
$$\lim_{x\to 0}\frac{2-x^2e^x+x^3-2\cos x}{2-x\sin x-2\cos x}.$$

Svolgimento. È una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Possiamo quindi utilizzare gli sviluppi di Mc Laurin
$$x^2e^x=x^2+x^3+\frac{x^4}{2}+o(x^4),\qquad 2\cos x=2-x^2-2\frac{x^4}{4!}+o(x^4),\qquad x\sin x=x^2-\frac{x^4}{3!}+o(x^4),$$
per concludere che
$$\frac{2-x^2e^x+x^3-2\cos x}{2-x\sin x-2\cos x}=\frac{-\frac{x^4}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{\frac{x^4}{6}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}=\frac{-\frac{7}{12}x^4+o(x^4)}{\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}$$
e quindi, per $x\to 0$, la frazione tende a -7. □

ESERCIZIO 4. *Si disegni la porzione di piano, S, delimitata dai grafici delle funzioni $f(x)=\frac{x^2}{4}$ e $g(x)=\sqrt{\frac{x}{2}}$ e si calcoli il volume del solido ottenuto ruotando S attorno all'asse delle ascisse.*

Svolgimento. La funzione $g(x)$ è definita solo sulla semiretta $[0,+\infty)$ ed entrambo le funzioni sono crescenti su questa semiretta.

Si intersecano per $x=0$ e si ha $f(0)=g(0)=0$. Inoltre, si ha ancora $f(x)=g(x)$ quando $x^3=8$, ovvero per $x=2$. È facile verificare che queste sono le uniche intersezioni tra le due curve, ad esempio studiando il segno della derivata prima della differenza $f(x)-g(x)$. La superficie S è quindi evidenziata nel disegno qui a fianco.



Il volume del solido generato dalla rotazione di S, si ottiene per differenza
$$V=\pi\left[\int_0^2 g(x)^2dx-\int_0^2 f(x)^2dx\right]=\pi\left[\int_0^2\frac{x}{2}dx-\int_0^2\frac{x^4}{16}dx\right]=\left[\frac{x^2}{4}-\frac{x^5}{80}dx\right]_0^2.$$
In conclusione il volume cercato misura $\frac{3}{5}\pi$. □

ESERCIZIO 5. [Vecchio Ordinamento] *Si considerino le rette r ed s, di equazioni cartesiane*
$$r:\begin{cases}x-2=0\\ y+3=0\end{cases}\qquad s:\begin{cases}x-z=0\\ x+y=0\end{cases}$$

(a) Verificare che r e s sono sghembe e calcolare la reciproca distanza.
(b) Scrivere l'equazione del piano π, contenente la retta s e parallelo ad r.
(c) Determinare il volume di un cilindro avente la retta r come asse, tangente al piano π e di altezza uguale a 2.

Svolgimento. (a). La retta r passa per il punto $R=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}$, ed è parallela al vettore $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, mentre la retta s passa per l'origine $O=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, ed è parallela al vettore $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$. Dunque le due rette non sono parallele e non sono nemmeno incidente perché nessun punto $S_t=\begin{pmatrix}t\\-t\\t\end{pmatrix}$ della retta s può soddisfare alle equazioni della retta r. La distanza tra le due rette è uguale a
$$d(r,s)=\frac{|\overrightarrow{OR}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|}{\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|}=1.$$

(b). Il vettore $\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è ortogonale ad entrambo le rette e quindi il piano π è formato dai punti X tali che $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OX} = 0$ e quindi ha equazione $\pi : x + y = 0$.

(c). Il raggio di base, r, del cilindro coincide con la distanza di r da π, che è uguale alla distanza tra le due rette, e quindi $r = 1$. L'altezza del cilindro è $h = 2$ e quindi il volume è $V = \pi r^2 h = 2\pi$. $\square$