Istituzioni di Matematiche (CH-CI-MT) - Mod A

prova scritta del 7 luglio 2003

ESERCIZIO 1. *Si studi la funzione*

$$f(x) = \log \sqrt{\frac{3x^2 - 2x}{(x+2)^2}}$$

e se ne tracci un grafico indicativo che evidenzi estremi locali, concavità, convessità ed eventuali asintoti.

Svolgimento. La funzione è definita in $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \notin \{-2\} \cup [0, \frac{2}{3}] \right\}$ e, nell'insieme di definizione, è continua e derivabile. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{1}{2}\log 3, \quad \lim_{x\to-2} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\frac{2}{3}^+} f(x) = -\infty, .$$

e vi è quindi un asintoto orizzontale a $\pm\infty$ ed asintoti verticali per $x = -2$, $x = 0$, $x = \frac{2}{3}$.

La derivata prima è uguale a

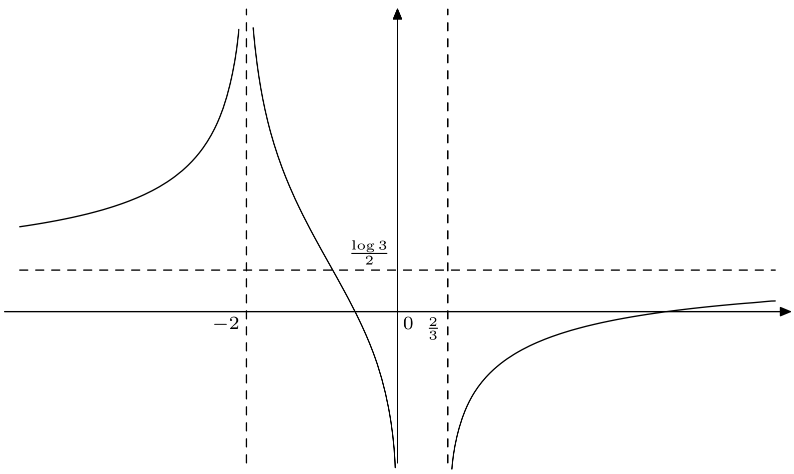
$$f'(x) = \sqrt{\frac{(x+2)^2}{3x^2-2x}} \frac{1}{2\sqrt{\frac{3x^2-2x}{(x+2)^2}}} \frac{(6x-2)(x+2) - 2(3x^2-2x)}{(x+2)^3} = \frac{7x-2}{x(3x-2)(x+2)} \qquad (\text{per } x \in D).$$

Il punto $x_0 = 2/7$ non appartiene a D e quindi la funzione f è crescente per $x < -2$ e per $x > \frac{2}{3}$, mentre è decrescente per $-2 < x < 0$. Non vi sono massimi o minimi, né relativi né assoluti.

La derivata seconda è uguale ad

$$f''(x) = -\frac{42x^3 + 10x^2 - 16x + 8}{x^2(3x-2)^2(x+2)^2}$$

sempre per $x \in D$, ed il suo segno coincide col segno del numeratore.



Il numeratore è un polinomio di terzo grado con un unica radice reale (come si può vedere studiandone gli estremi locali) e quindi il grafico cambia la sua convessità un'unica volta su un punto $x_0 \in (-2, -\frac{4}{9})$. Possiamo quindi concludere con il grafico tracciato qui sopra. $\square$

ESERCIZIO 2. *Si calcoli*

$$\int_{-\infty}^{-\sqrt{2}} \frac{x^2-2}{(x^2-1)^2}\, dx.$$

Svolgimento. La frazione si decompone nelle sue parti principali, ovvero

$$\frac{x^2-2}{(x^2-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} \quad \text{ove} \quad \begin{cases} A + C = 0 \\ A + B - C + D = 0 \\ -A + 2B - C - 2D = 0 \\ -A + B + C + D = -2 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} A = \frac{3}{4} \\ B = -\frac{1}{4} \\ C = -\frac{3}{4} \\ D = -\frac{1}{4} \end{cases}.$$

Si ha quindi

$$\int \frac{x^2-2}{(x^2-1)^2}\,dx = \frac{3}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right) + c \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right) = 0.$$

Si conclude che l'integrale proposto è uguale a $\frac{3}{4}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}}$. □

ESERCIZIO 3. *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)-\log(1-x)-2\sin x}{\sin x\cosh x - \sinh x\cos x}.$$

Svolgimento. È una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Possiamo quindi utilizzare gli sviluppi di Mc Laurin

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \qquad \log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$
$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \qquad \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

per concludere che

$$\frac{\log(1+x)-\log(1-x)-2\sin x}{\sin x\cosh x - \sinh x\cos x} = \frac{x^3+o(x^3)}{\frac{2}{3}x^3+o(x^3)}$$

e quindi, per $x \to 0$, la frazione tende a $\frac{3}{2}$. □

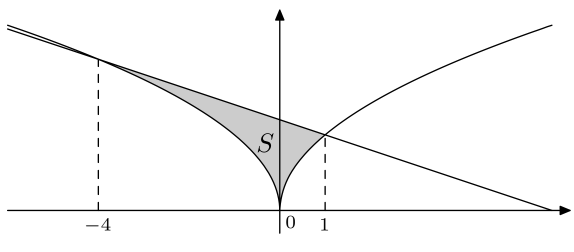
ESERCIZIO 4. *Si disegni la porzione di piano, S, formata dai punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che*

$$x \in [-6, 6] \qquad e \qquad \sqrt{|x|} \le y \le \frac{6-x}{5}$$

e si calcoli il volume del solido che si ottiene ruotando S attorno all'asse delle ascisse.

Svolgimento. La regione S è delimitata dai grafici di due funzioni sopra l'intervallo chiuso $[-6, 6]$; ovvero le funzioni $f(x) = \sqrt{|x|}$ e $g(x) = \frac{6-x}{5}$.

Sopra l'intervallo $[-6, 6]$, i due grafici intersecano per $x = -4$ e per $x = 1$ ed il grafico di $g(x)$ si trova al disopra del grafico di $f(x)$ al di sopra dell'intervallo $[-4, 1]$. La superficie S è quindi evidenziata nel disegno qui a fianco.



Il volume del solido generato dalla rotazione di S, si ottiene per differenza

$$V = \pi\left[\int_{-4}^{1} g(x)^2 dx - \int_{-4}^{1} f(x)^2 dx\right] = \pi\left[\frac{1}{25}\int_{-4}^{1}(6-x)^2 dx - \int_{-4}^{1}|x| dx\right].$$

In conclusione il volume cercato misura 2π. □

ESERCIZIO 5. [Vecchio Ordinamento] *Si considerino le rette r ed s, di equazioni cartesiane*

$$r : \begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x+y-1=0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

(a) Verificare che r e s sono sghembe e calcolare la reciproca distanza.
(b) Scrivere l'equazione del piano π, contenente la retta s e parallelo ad r.
(c) Determinare il volume di un cilindro avente la retta r come asse, tangente al piano π e di altezza uguale a 2.

Svolgimento. (a). La retta r passa per il punto $R = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, ed è parallela al vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, mentre la retta s passa per l'origine $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ed è parallela al vettore $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dunque le due rette non sono parallele e non sono nemmeno incidente perché nessun punto $S_t = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix}$ della retta s può soddisfare alle equazioni della retta r. La distanza tra le due rette è uguale a

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{OR} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|} = 1.$$

(b). Il vettore $\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è ortogonale ad entrambo le rette e quindi il piano π è formato dai punti X tali che $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OX} = 0$ e quindi ha equazione $\pi : x + y = 0$.

(c). Il raggio di base, r, del cilindro coincide con la distanza di r da π, che è uguale alla distanza tra le due rette, e quindi $r = 1$. L'altezza del cilindro è $h = 2$ e quindi il volume è $V = \pi r^2 h = 2\pi$. $\square$