Istituzioni di Matematiche (CH-CI-MT) - Mod A

prova scritta del 5 settembre 2003

ESERCIZIO 1. *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x}.$$

Si determinino il dominio di definizione, i limiti agli estremi di tale dominio, la derivata prima e gli insiemi su cui la funzione è crescente e quelli su cui è decrescente.

Si determinino eventuali asintoti, massimi e minimi locali o globali ed eventuali rette tangenti agli estremi del dominio di definizione.

Si tracci un grafico indicativo dell'andamento della funzione e si dica, al variare del parametro k in $\mathbb{R}$, quante soluzioni vi sono all'equazione $f(x) = k$.

Svolgimento. La funzione è definita quando l'argomento della radice non è negativo ed il denominatore della frazione non si annulla. Dunque il dominio della funzione è l'insieme D dei numeri reali x soddisfacenti alle condizioni $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$; ovvero $D = (-\infty, 0) \cup (0, 1] \cup [2, +\infty)$. Si ha

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1; \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty; \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1,$$

e quindi vi sono asintoti orizzontali a $\pm\infty$ ed un asintoto verticale per $x = 0$. Nei punti $x = 1$ ed $x = 2$, il valore della funzione coincide con il limite (destro o sinistro) ed è uguale a 0.

La derivata prima è

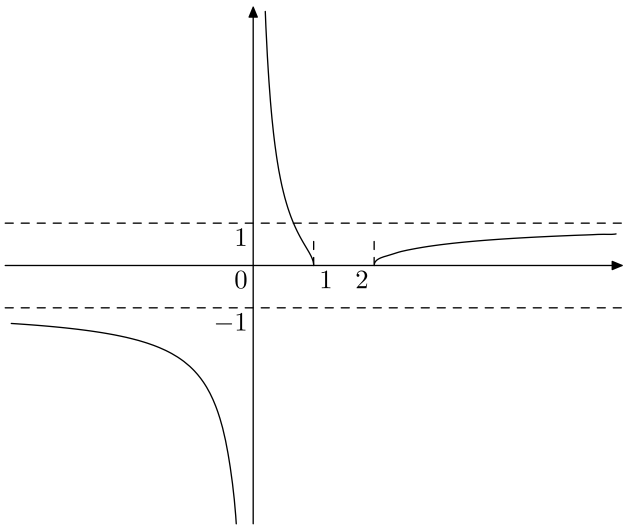
$$f'(x) = \frac{3x - 4}{2x^2 \sqrt{x^2 - 3x + 2}}$$

per $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (2, +\infty)$, e

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 2^+} f'(x) = +\infty.$$

Dunque la funzione è derivabile nei soli punti interni a D, mentre nei due punti $x = 1$ ed $x = 2$ il grafico ha tangenti verticali.

Guardando al segno della derivata prima si conclude che la funzione è decrescente sulla semiretta $(-\infty, 0)$ e sull'intervallo $(0, 1)$, mentre è crescente sulla semiretta $(2, +\infty)$.



Possiamo riassumere le considerazioni sin qui fatte nel grafico qui sopra, da cui si vede che l'equazione $f(x) = k$ ha una soluzione quando $k < -1$ e quando $k \geq 1$, non ha soluzioni se $-1 \leq k < 0$, mentre ha due soluzioni se $0 \leq k < 1$. □

ESERCIZIO 2. *Si calcoli*

$$\int_3^{+\infty} \frac{5x^2 - 4x - 6}{(x-2)^2(x^2+2)}\, dx.$$

Svolgimento. Si tratta di un integrale improprio certamente convergente, perché asintoticamente equivalente all'integrale di $1/x^2$. Calcoliamolo e cominciamo col determinare una primitiva della funzione integranda. La funzione razionale si decompone nella somma

$$\frac{5x^2-4x-6}{(x-2)^2(x^2+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2} \quad \text{ove} \quad \begin{cases} A+C=0 \\ -2A+B-4C+D=5 \\ 2A+4C-4D=-4 \\ -4A+2B+4D=-6 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} A=2 \\ B=1 \\ C=-2 \\ D=0 \end{cases}.$$

Si conclude che

$$\int \frac{5x^2-4x-6}{(x-2)^2(x^2+2)}\,dx = \int \frac{2}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx - \int \frac{2x}{x^2+2}\,dx = \log\frac{(x-2)^2}{x^2+2} - \frac{1}{x-2} + c.$$

Dunque l'integrale improprio è uguale al

$$\lim_{b\to+\infty}\left[\log\frac{(x-2)^2}{x^2+2} - \frac{1}{x-2}\right]_3^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\log\frac{(b-2)^2}{b^2+2} - \frac{1}{b-2}\right) - \log\frac{(3-2)^2}{11} + 1 = 1 + \log 11.$$

Fine del calcolo richiesto. □

ESERCIZIO 3. *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x + 2x\log(1-x) + x^3}{x^2\cos^2 x - \operatorname{tg}^2 x}.$$

Svolgimento. Servendosi degli sviluppi di Mc Laurin, si ricava

$$\begin{aligned}
\sin^2 x &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4), \\
x\log(1-x) &= x\left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = -x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{3} + o(x^4), \\
x^2\cos^2 x &= x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 = x^2 - x^4 + o(x^4), \\
\operatorname{tg}^2 x &= \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 = x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4);
\end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{2\sin^2 x + 2x\log(1-x) + x^3}{x^2\cos^2 x - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{-\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)}{-\frac{5}{3}x^4 + o(x^4)}.$$

Passando al limite si cancellano i termini trascurabili e si ottiene così che la frazione data tende a $\frac{4}{5}$. □

ESERCIZIO 4. *Si dica se converge assolutamente la serie*

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{12-2n}{n(n^2-4)}$$

e se ne calcoli l'eventuale somma.

Svolgimento. La serie è definitivamente a termini negativi e

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{12-2n}{n(n^2-4)}\right|}{\frac{1}{n^2}} = 2.$$

La serie di termine generale $1/n^2$ è una serie convergente e quindi, per il criterio del confronto asintotico, la serie data è assolutamente convergente.

Per calcolarne la somma osserviamo che

$$\frac{12-2n}{n(n^2-4)} = \frac{A}{n-2} + \frac{B}{n} + \frac{C}{n+2} \quad \text{ove} \quad \begin{cases} A+B+C=0 \\ 2A-2C=-2 \\ -4B=12 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} A=1 \\ B=-3 \\ C=2 \end{cases}.$$

Possiamo quindi concludere che, nelle somme parziali $s_k = \sum_{n=3}^{k} \frac{12-2n}{n(n^2-4)}$, per $k \geq 6$, molti dei termini si semplificano e si ha

$$s_k = \sum_{n=3}^{k} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{3}{n} + \frac{2}{n+2} \right) = \frac{1}{3} - \frac{2k-1}{k(k-1)} + \frac{4k+6}{(k+1)(k+2)}.$$

Passando al limite per $k \to \infty$, si ottiene la somma della serie, ovvero

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{2k-1}{k(k-1)} + \frac{4k+6}{(k+1)(k+2)} \right) = \frac{1}{3}.$$

Fine della discussione. □

ESERCIZIO 5. *Si considerino le rette r ed s, di equazioni*

$$r : \begin{cases} x-2y-2z=-3 \\ x-y-2z=-1 \end{cases} \qquad \textit{ed} \qquad s : \begin{cases} 2x+y+z=-1 \\ 2x-2y+z=5 \end{cases}.$$

(a) Si verifichi che le due rette sono sghembe e si calcoli la distanza reciproca.
(b) Si determini il punto X della retta s avente minima distanza da r.
(c) Scelti due punti A e B sulla retta r, a distanza 2 tra loro, si calcoli l'area del triangolo ABX.

Svolgimento. (a). La retta r è parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e passa per il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, mentre la retta s è parallela al vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ e passa per il punto $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; quindi le due rette non sono parallele tra loro. La loro distanza è uguale a

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot (v \times w)|}{\|v \times w\|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{5} = 4.$$

Dunque le due rette, non essendo né parallele né incidenti, sono sghembe.

(b). Il punto X è l'intersezione tra la retta s ed il piano π, passante per r e parallelo al vettore $v \times w = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il piano π ha equazione $x - 2z = 1$ e quindi

$$X : \begin{cases} 2x+y+z=-1 \\ 2x-2y+z=5 \\ x-2z=1 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad X = \begin{pmatrix} 3/5 \\ -2 \\ -1/5 \end{pmatrix}.$$

(c). Comunque si prendano due punti A e B sulla retta r, a distanza 2 tra loro, il triangolo ABX, viene ad avere un base di lunghezza 2 e la relativa altezza uguale alla distanza di X da r, ovvero $d(r,s) = 4$; quindi l'area misura 4. □