Istituzioni di Matematiche (CH-CI-MT) - Mod A

prova scritta del 22 settembre 2003

ESERCIZIO 1. *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \log \frac{(x+1)^2}{x^2+1}.$$

Si determinino il dominio di definizione, i limiti agli estremi di tale dominio, la derivata prima e gli insiemi su cui la funzione è crescente e quelli su cui è decrescente.

Si determinino eventuali asintoti, massimi e minimi locali o globali e flessi.

Si tracci un grafico indicativo dell'andamento della funzione e si dica, al variare del parametro k in $\mathbb{R}$, quante soluzioni vi sono all'equazione $f(x) = k$.

Svolgimento. La funzione è definita quando l'argomento del logaritmo è positivo, ovvero per $x \neq -1$. Si ha

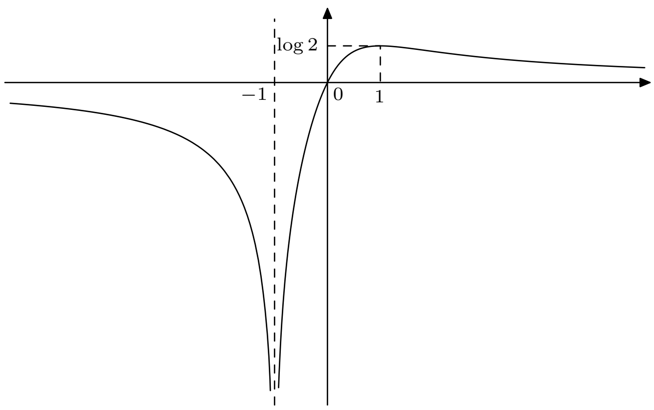
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0; \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-1} f(x) = -\infty.$$

Quindi vi è l'asintoto orizzontale $y = 0$ a $\pm\infty$ ed un asintoto verticale per $x = -1$.

La derivata prima è

$$f'(x) = \frac{2(1-x)}{(1+x)(1+x^2)}.$$

Guardando al segno della derivata prima si conclude che la funzione è decrescente sulle due semirette $(-\infty, -1)$ e $(1, +\infty)$, mentre è crescente sull'intervallo $(-1, 1)$. Quindi vi è un massimo relativo (ed assoluto) per $x = 1$, con $f(1) = \log 2$. La funzione è illimitata inferiormente e non vi sono punti di minimo relativo.



La derivata seconda è

$$f''(x) = 4\frac{x^3 - x^2 - x - 1}{(1+x)^2(1+x^2)^2},$$

il cui segno coincide con il segno del numeratore, $P(x) = x^3 - x^2 - x - 1$. Si ha $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$, e $P'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 3(x + \frac{1}{3})(x - 1)$. Dunque, $P(x)$ è crescente sulla semiretta $(-\infty, -\frac{1}{3})$, con $P(-\frac{1}{3}) = -\frac{7}{9} < 0$; è poi decrescente sull'intervallo $(-\frac{1}{3}, 1)$, con $P(1) = -2$; infine $P(x)$ è crescente sulla semiretta $(1, +\infty)$, ove si annulla per un opportuno $x_0 \in (1, 2)$ ($P(2) = 1 > 0$). Dunque, per $x = x_0$ si ha un punto di flesso per il grafico di $f(x)$.

Possiamo riassumere le considerazioni sin qui fatte in un grafico, da cui si vede che l'equazione $f(x) = k$ ha due soluzioni per $k < 0$ e per $0 < k < \log 2$, e vi è un'unica soluzione per $k = 0$ e $k = \log 2$. Non vi sono soluzioni per $k > \log 2$. □

ESERCIZIO 2. *Si calcoli*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\, dx.$$

Svolgimento. La funzione integranda è illimitata per $x \to 0^+$ e quindi consideriamo separatamente i due integrali
$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\,dx.$$
Entrambo gli integrali impropri sono convergenti: il primo perché asintoticamente equivalente a $\int_0^1 x^{-1/2}dx$, ed il secondo perché asintoticamente equivalente a $\int_1^{+\infty} x^{-3/2}dx$. Quindi l'integrale proposto converge ed è uguale alla somma dei due integrali scritti qui sopra. Dalla sostituzione $y = \sqrt{x}$, si ricava $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$, e
$$2\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = 2\operatorname{arctg} y + c.$$
Quindi, una primitiva della funzione integranda è $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$ e si ha
$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\,dx = \frac{\pi}{2} - \lim_{a\to 0^+} 2\operatorname{arctg}\sqrt{a} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{e} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to+\infty} 2\operatorname{arctg}\sqrt{b} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$
Dunque l'integrale proposto è uguale alla somma dei due, ovvero a π. □

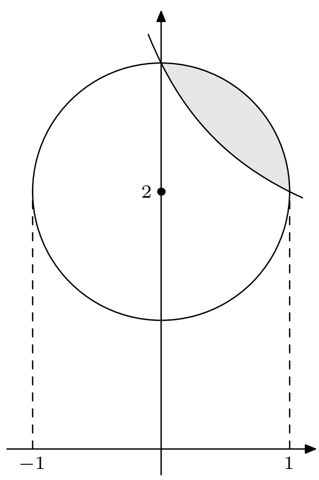
ESERCIZIO 3. *Si calcoli*
$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sinh^2 x - 2x\log(1+x) - x^3}{\pi x^5}.$$

Svolgimento. Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Servendosi degli sviluppi di Mc Laurin, si ricava
$$\sinh^2 x = \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)^2 = x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + o(x^6) = x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^5),$$
$$x\log(1+x) = x\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + o(x^5);$$
e quindi
$$\frac{2\sinh^2 x - 2x\log(1+x) - x^3}{\pi x^5} = \frac{\frac{1}{2}x^5 + o(x^5)}{\pi x^5}.$$
Passando al limite si cancellano i termini trascurabili e si ottiene così che la frazione data tende a $\frac{1}{2\pi}$. □

ESERCIZIO 4. *Si disegni nel piano cartesiano il sottoinsieme S, formato dai punti (x,y), interni alla circonferenza di centro $(0,2)$ e raggio 1 e soddisfacenti alla condizione $y \ge \frac{x+3}{x+1}$. Si calcoli il volume del solido ottenuto ruotando S attorno all'asse delle x.*

Svolgimento. Cominciamo col determinare l'insieme S.

I punti di S sono posti al di sopra del grafico della funzione $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$ ed all'interno della circonferenza di equazione $x^2 + (y-2)^2 = 1$. Nel piano reale, le due curve si intersecano per $x = 0$ ed $x = 1$, come si vede sostituendo $f(x)$ nell'equazione della circonferenza. Sull'intervallo $[0,1]$, la funzione $f(x)$ è decrescente e convessa, essendo $f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2}$ ed $f''(x) = \frac{4}{(x+1)^3}$; dunque il grafico di $f(x)$ sta al di sotto dell'arco di circonferenza rappresentato dal grafico della funzione $g(x) = 2 + \sqrt{1-x^2}$. Possiamo quindi affermare che l'insieme S è la regione che appare in grigio nel disegno qui a fianco.



Il volume si può quindi calcolare come differenza dei volumi ottenuti dalla rotazione dei due grafici, ovvero
$$V = \pi\left[\int_0^1 g(x)^2\,dx - \int_0^1 f(x)^2\,dx\right] = \pi\left(\frac{5}{3} + \pi - 4\log 2\right).$$

Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 5. *Si considerino le rette r ed s, di equazioni*

$$r : \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - z = -2 \end{cases} \qquad \textit{ed} \qquad s : \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}.$$

(a) Si verifichi che le due rette sono sghembe e si calcoli la distanza reciproca.
(b) Si determini il punto X della retta s avente minima distanza da r.
(c) Scelti due punti A e B sulla retta r, a distanza 1 tra loro, si calcoli l'area del triangolo ABX.

Svolgimento. (a). La retta r è parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e passa per il punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, mentre la retta s è parallela al vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e passa per l'origine $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; quindi non sono parallele tra loro. La loro distanza è uguale a

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{PO} \cdot (v \times w)|}{\|v \times w\|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{2}{\sqrt{11}}.$$

Dunque le due rette non possono avere punti in comune e perciò sono sghembe.

(b). Il punto X è l'intersezione tra la retta s ed il piano π, passante per r e parallelo al vettore $v \times w = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il piano π ha equazione $x + 7y - 4z + 8 = 0$ e quindi

$$X : \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ x + 7y - 4z + 8 = 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad X = \begin{pmatrix} -8/11 \\ -16/11 \\ -8/11 \end{pmatrix}.$$

(c). Comunque si prendano due punti A e B sulla retta r, a distanza 1 tra loro, il triangolo ABX, viene ad avere base 1 ed altezza uguale alla distanza di X da r, ovvero $d(r, s) = \frac{2}{\sqrt{11}}$, quindi la sua area misura $\frac{1}{\sqrt{11}}$.
□