# Istituzioni di Matematiche (CH-CI-MT) - Mod A

prova scritta del 3 febbraio 2003

**ESERCIZIO 1**. *Si studi la funzione*

$$f(x) = 2\sin\left|x + \frac{1}{3}\right| - x^2$$

*e si tracci un grafico indicativo del suo andamento.*

*Svolgimento.* La funzione è definita e continua su tutta la retta reale ed è derivabile per $x \neq -\frac{1}{3}$. Inoltre, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$.

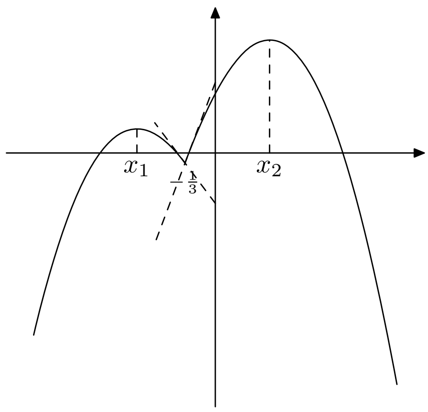
La derivata prima di $f$ è

$$f'(x) = \begin{cases} 2\cos\left(x+\frac{1}{3}\right) - 2x & \text{per } x > -\frac{1}{3} \\ -2\cos\left(x+\frac{1}{3}\right) - 2x & \text{per } x < -\frac{1}{3} \end{cases}$$

essendo il coseno una funzione pari. Inoltre, per la Regola di de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to -\frac{1}{3}^+} \frac{f(x) - f(-\frac{1}{3})}{x+\frac{1}{3}} = \lim_{x\to -\frac{1}{3}^+} f'(x) = \frac{8}{3} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to -\frac{1}{3}^-} \frac{f(x) - f(-\frac{1}{3})}{x+\frac{1}{3}} = \lim_{x\to -\frac{1}{3}^-} f'(x) = -\frac{4}{3}$$

da cui si conclude che $x = -\frac{1}{3}$ è un punto angoloso.




La derivata prima si annulla nei due punti $x_1 < -\frac{1}{3} < x_2$ su cui le rette $y = -x$ ed $y = x$, rispettivamente, intersecano la curva $y = \cos\left(x + \frac{1}{3}\right)$. Si ha quindi che $f(x)$ è crescente per $x < x_1$ e per $-\frac{1}{3} < x < x_2$, mentre $f(x)$ è decrescente per $x_1 < x < -\frac{1}{3}$ e per $x > x_2$. Dunque, $x_1$ ed $x_2$ sono punti di massimo relativo, mentre $-\frac{1}{3}$ è un punto di minimo relativo.

Osserviamo infine che la derivata seconda è

$$f''(x) = \begin{cases} -2\sin\left(x+\frac{1}{3}\right) - 2 & \text{per } x > -\frac{1}{3} \\ 2\sin\left(x+\frac{1}{3}\right) - 2 & \text{per } x < -\frac{1}{3} \end{cases}$$

ed è quindi minore o uguale a zero in ogni punto in cui è definita. Dunque il grafico di $f$ è concavo sulle due semirette $(-\infty, -\frac{1}{3})$ e $(-\frac{1}{3}, +\infty)$.

Abbiamo quindi tracciato un grafico indicativo dell'andamento di $f(x)$. □

**ESERCIZIO 2**. *Si calcoli*

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\cos(2\sqrt{x})\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx.$$

*Svolgimento.* Ricordiamo che, dalle formule di addizione, si ricava

$$2\cos\alpha\, \sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$$

e quindi l'integrale proposto si decompone nella somma

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\cos(2\sqrt{x})\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^{\pi^2} \frac{\sin 3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\, dx - \int_0^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\, dx.$$

Inoltre, con la sostituzione $y = \sqrt{x}$, si ricava immediatamente che l'integrale proposto è uguale a

$$\left[-\frac{\cos 3\sqrt{x}}{3} + \cos\sqrt{x}\right]_0^{\pi^2} = -\frac{4}{3}.$$

Fine del calcolo. □

**ESERCIZIO 3**. *Si calcoli la somma della serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2-1}.$$

*Svolgimento.* Osserviamo che

$$\frac{2}{4n^2-1} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

e quindi

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{2}{4n^2-1} = \sum_{n=0}^{k}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = -1 - \frac{1}{2k+1}.$$

Si conclude che la somma della serie è $\lim_{k\to\infty} s_k = -1$. □

**ESERCIZIO 4**. *Si disegni il sottoinsieme $D$ del piano formato dai punti $\binom{x}{y}$ tali che*

$$\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ (x-1) + |x-1| \le y \le |2-(x-2)^2| \end{cases}$$

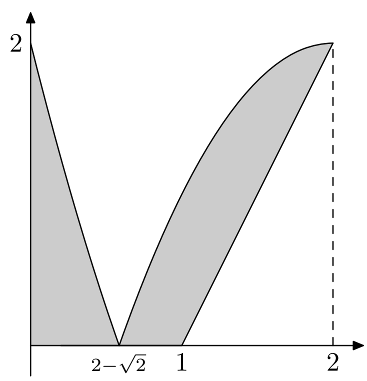
*e si determini il volume del solido generato dalla rotazione di $D$ attorno all'asse delle ascisse.*

*Svolgimento.* Si tratta dell'area posta al di sopra dell'intervallo $[0,2]$ e racchiusa tra i grafici delle due funzioni

$$f(x) = (x-1) + |x-1| = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 \le x < 1 \\ 2(x-1) & \text{per } 1 \le x \le 2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) = |2-(x-2)^2|.$$

Il grafico di $f$ è l'unione di due segmenti di rette, mentre il grafico di $g$ si deduce con facili considerazioni di simmetria dal grafico della parabola $y = 2-(x-2)^2$. Possiamo quindi disegnare i due grafici ed evidenziare in grigio l'insieme $D$. Il volume del solido di rotazione è quindi uguale a

$$V = \pi\left(\int_0^2 [2-(x-2)^2]^2 dx - \int_1^2 4(x-1)^2 dx\right) =$$
$$= \pi\left(\left[4(x-2) - \frac{4(x-2)^3}{3} + \frac{(x-2)^5}{5}\right]_0^2 - \left[\frac{4(x-1)^3}{3}\right]_1^2\right) = \frac{58}{5}\pi.$$




Fine del calcolo. □

**ESERCIZIO 5**. *Si considerino le rette $r$ ed $s$, di equazioni*

$$r : \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \qquad ed \qquad s : \begin{cases} x - z = 1 \\ y - 2z = 0 \end{cases}.$$

*(a) Si verifichi che le due rette sono sghembe e si calcoli la distanza reciproca.*
*(b) Si determinino le equazioni cartesiane della retta $h$, perpendicolare ed incidente sia ad $r$ che ad $s$.*
*(c) Detti rispettivamente $R$ ed $S$ i punti di intersezione della retta $h$ con la retta $r$ e la retta $s$, si determini un punto $P$ appartenente alla retta $r$ tale che $\|\overrightarrow{PS}\|^2 = 2\|\overrightarrow{PR}\|^2$.*

*Svolgimento.* (a). La retta $r$ passa per il punto $R_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, mentre la retta $s$ passa per il punto $S_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dunque le rette non sono parallele, possiamo quindi calcolarne la distanza

$$d = \frac{|\overrightarrow{R_0S_0} \cdot v \times w|}{\|v \times w\|} = \frac{1}{\sqrt{11}}.$$

Avendo distanza positiva, le due rette non possono essere incidenti e quindi sono due rette sghembe.
($b$). Un vettore perpendicolare alle due rette è $v \times w = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e quindi la retta $h$ è l'intersezione tra il piano $\rho$, contenente $r$ e parallelo a $v \times w$, ed il piano $\rho$, contenente $s$ e parallelo a $v \times w$. Un generico piano contenente la retta $r$ ha equazione $\alpha(x - y - 2) + \beta(2x - z) = 0$, ed imponendo la condizione che il suo vettore normale sia ortogonale a $v \times w$, si ricava il piano $\rho : x + 7y - 4z + 14 = 0$. Analogamente si ricava l'equazione di $\sigma : x - 4y + 7z - 1 = 0$, e dunque

$$h : \begin{cases} x + 7y - 4z + 14 = 0 \\ x - 4y + 7z - 1 = 0 \end{cases}.$$

($c$). Osserviamo che $\{R\} = r \cap h = r \cap \sigma$ e quindi $R = \begin{pmatrix} -7/11 \\ -29/11 \\ -14/11 \end{pmatrix}$ ed, analogamente, $\{S\} = s \cap h = s \cap \rho$ e quindi $S = \begin{pmatrix} -4/11 \\ -30/11 \\ -15/11 \end{pmatrix}$. Il punto $P$ deve appartenere alla retta $r$ ed avere distanza $\|\overrightarrow{PR}\| = \|\overrightarrow{RS}\| = 1/\sqrt{11}$, come si vede immediatamente applicando il Teorema di Pitagora al triangolo $PRS$. Quindi vi sono due possibilità di scelta per il punto $P$, ovvero

$$P = R \pm \frac{1}{\sqrt{11}} \frac{v}{\|v\|} = \begin{pmatrix} -7/11 \\ -29/11 \\ -14/11 \end{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{66}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Fine del compito. □

## Istituzioni di Matematiche (CH-CI-MT) - Mod A

prova scritta del 17 febbraio 2003

**ESERCIZIO 1**. *Si studi la funzione*

$$f(x) = \log|1-x| + 2x$$

*e se ne tracci un grafico indicativo che evidenzi estremi locali, concavità, convessità ed eventuali asintoti.*

*Svolgimento.* La funzione è definita per $x \neq 1$ e, nell'insieme di definizione, è continua e derivabile. Per $x \to \pm\infty$, $\log|1-x| = o(x)$ e quindi si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \text{e, inoltre,} \quad \lim_{x\to 1} f(x) = -\infty.$$

La derivata prima è uguale a

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} + 2 = \frac{2x-1}{x-1} \qquad\qquad (\text{per } x \neq 1)$$

e quindi la funzione $f$ è crescente per $x < \frac{1}{2}$ e per $x > 1$, mentre è decrescente per $\frac{1}{2} < x < 1$. Il punto $x = \frac{1}{2}$ è quindi un punto di massimo relativo, con $f(\frac{1}{2}) = 1 - \log 2 > 0$.

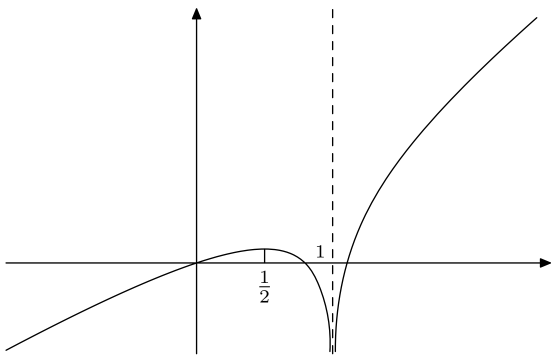
Non vi sono asintoti, perchè

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \qquad \text{ma} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 2x) = +\infty.$$

La derivata seconda è uguale ad

$$f''(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} \qquad\qquad (\text{sempre per } x \neq 1)$$

e quindi la funzione è concava (convessa verso l'alto) sulle due semirette aperte $(-\infty, 1)$, ed $(1, +\infty)$ in cui si decompone il dominio.




Possiamo quindi riassumere la discussione tracciando il grafico qui sopra. □

**ESERCIZIO 2**. *Si calcoli*

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{\sin^2 x\,(\mathrm{tg}^2 x - 1)}\,dx.$$

*Svolgimento.* Si osservi che

$$\frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{\sin^2 x\,(\mathrm{tg}^2 x - 1)}\,dx = \frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{tg}^2 x\,(\mathrm{tg}^2 x - 1)}\,\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{2}{y(y^2-1)}\,dy \qquad \text{ove } y = \mathrm{tg}\,x.$$

Inoltre, $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ e la tangente di $x$ tende a $+\infty$ per $x \to \frac{\pi}{2}$. Dunque, l'integrale proposto è equivalente all'integrale improprio

$$\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{2}{y(y^2-1)}\,dy.$$

La frazione si decompone nelle sue parti principali, ovvero

$$\frac{2}{y(y^2-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} + \frac{C}{y+1} \qquad \text{ove} \qquad \begin{cases} A+B+C=0 \\ B-C=0 \\ -A=2 \end{cases} \qquad \text{e quindi} \quad \begin{cases} A=-2 \\ B=1 \\ C=1 \end{cases}.$$

Si ha quindi
$$\int \frac{2}{y(y^2-1)}\,dy = \log\frac{y^2-1}{y^2} + c \qquad \text{e} \qquad \lim_{y\to+\infty} \log\frac{y^2-1}{y^2} = \log 1 = 0.$$
Si conclude che l'integrale proposto è uguale a $\log 3 - \log 2$. □

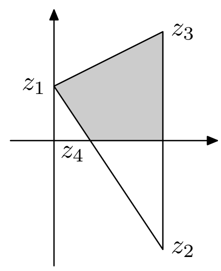
**ESERCIZIO 3**. *Si calcoli*
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x^2} - x\sin x}{x^2\log(1+x^2)}.$$

*Svolgimento.* È una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Possiamo quindi utilizzare gli sviluppi di Mc Laurin
$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} + o(x^4), \qquad x\sin x = x^2 - \frac{x^4}{3!} + o(x^4), \qquad \log(1+x^2) = x^2 + o(x^2),$$
per concludere che
$$\frac{1-e^{-x^2} - x\sin x}{x^2\log(1+x^2)} = \frac{-\frac{x^4}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = -\frac{x^4 + o(x^4)}{3x^4 + o(x^4)}$$
e quindi, per $x \to 0$, la frazione tende a $-\frac{1}{3}$. □

**ESERCIZIO 4**. *Si disegni sul piano di Gauß il triangolo avente come vertici le soluzioni dell'equazione $(x-i)(x^2-4x+8) = 0$ e si determini l'area della porzione di triangolo posta al di sopra dell'asse delle ascisse.*

*Svolgimento.* I tre numeri cercati sono $z_1 = i$ e le due soluzioni dell'equazione $x^2 - 4x + 8 = 0$, ovvero $z_2 = 2 - 2i$ e $z_3 = 2 + 2i$.

L'area cercata è indicata in grigio nel disegno qui a fianco, ed è la differenza tra l'area del triangolo $z_1z_2z_3$ e l'area del triangolo delimitato dall'asse delle ascisse e dal vertice $z_2$. I numeri complessi $z_2$ e $z_3$ sono coniugati e quindi il lato $z_2z_3$, di lunghezza 4, viene tagliato a metà dall'asse delle ascisse. Non ci resta che trovare il punto di intersezione tra l'asse delle ascisse ed il lato $z_1z_2$ per poter concludere i nostri calcoli. Il lato $z_1z_2$ è contenuto nella retta di equazione $y = 1 - \frac{3}{2}x$ e quindi il punto di intersezione con l'asse delle ascisse è $z_4 = \frac{2}{3}$ da cui si deduce che l'area del triangolo al di sotto dell'asse è uguale a $\frac{4}{3}$.




In conclusione l'area cercata misura $4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$. □

**ESERCIZIO 5**. [Vecchio Ordinamento] *Si considerino le rette $r$ ed $s$, di equazioni cartesiane*
$$r : \begin{cases} x + y = 3 \\ z = 2 \end{cases} \qquad\qquad s : \begin{cases} x - z = -3 \\ y + z = 6 \end{cases}$$

*(a) Verificare che $r$ e $s$ sono incidenti e trovare il punto $P$ di intersezione.*
*(b) Trovare i punti $Q$ e $Q'$ di $r$ a distanza $3\sqrt{2}$ da $P$ ed i piani $\pi$ e $\pi'$, passanti rispettivamente per $Q$ e $Q'$ e perpendicolari a $s$.*
*(c) Determinare il volume del cilindro con le basi contenute nei piani $\pi$ e $\pi'$, con asse contenuto nella retta $s$, e con le circonferenze di base passanti per i punti $Q$ e $Q'$.*

*Svolgimento.* (a). Le due rette si intersecano nel punto $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$(b)$. La retta $r$ è parallela al vettore $v_r = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e quindi i suoi punti hanno coordinate $X_t = \begin{pmatrix} -1-t \\ 4+t \\ 2 \end{pmatrix}$, al variare del parametro $t$ in $\mathbb{R}$. La distanza di $X_t$ da $P$ è $\|\overrightarrow{PX_t}\| = |t|\sqrt{2}$, e quindi i punti cercati sono $Q = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $Q' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

La retta $s$ è parallela al vettore $v_s = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e quindi i piani cercati sono $\pi = \left\{ X \;\middle|\; v_s \cdot \overrightarrow{QX} = 0 \right\}$ e $\pi' = \left\{ X \;\middle|\; v_s \cdot \overrightarrow{Q'X} = 0 \right\}$. Si determinano in questo modo le due equazioni

$$\pi : x - y + z + 9 = 0 \qquad \text{e} \qquad \pi' : x - y + z - 3 = 0.$$

$(c)$. L'altezza, $h$, del cilindro coincide con la distanza tra i due piani paralleli $\pi$ e $\pi'$, ovvero $h = 4\sqrt{3}$. Per trovare il raggio di base, $r$, possiamo determinare il punto $S$ di intersezione tra l'asse $s$ ed il piano $\pi$, ovvero $S = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, ed osservare che $r = \|\overrightarrow{SQ}\| = \sqrt{6}$. In conclusione il Volume del cilindro è uguale a $\pi r^2 = 24\pi\sqrt{3}$

$\square$

## Istituzioni di Matematiche (CH-CI-MT) - Mod A

prova scritta del 23 giugno 2003

**ESERCIZIO 1**. *Si studi la funzione*

$$f(x) = \log \frac{e^{2x}}{|x-2|}$$

*e se ne tracci un grafico indicativo che evidenzi estremi locali, concavità, convessità ed eventuali asintoti.*

*Svolgimento.* La funzione è definita per $x \neq 2$ e, nell'insieme di definizione, è continua e derivabile. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \text{e, inoltre,} \qquad \lim_{x\to 2} f(x) = +\infty.$$

La derivata prima è uguale a

$$f'(x) = \frac{2x-5}{x-2} \qquad (\text{per } x \neq 2)$$

e quindi la funzione $f$ è crescente per $x < 2$ e per $x > \frac{5}{2}$, mentre è decrescente per $2 < x < \frac{5}{2}$. Il punto $x = \frac{5}{2}$ è quindi un punto di minimo relativo, ed $f(\frac{5}{2}) = 5 + \log 2 > 0$.

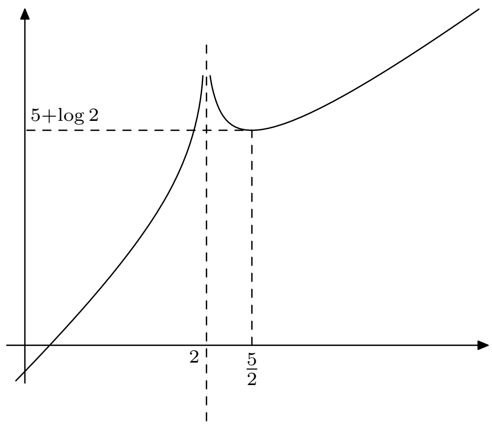
Non vi sono asintoti, perchè

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \qquad \text{ma} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 2x) = -\infty.$$

La derivata seconda è uguale ad

$$f''(x) = \frac{1}{(x-2)^2} \qquad (\text{sempre per } x \neq 2)$$

e quindi la funzione è convessa (convessa verso il basso) sulle due semirette aperte $(-\infty, 2)$, ed $(2, +\infty)$ in cui si decompone il dominio.




Possiamo quindi concludere con il grafico tracciato qui sopra. □

**ESERCIZIO 2**. *Si calcoli*

$$\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{1}{x^2(x^2+1)}\, dx.$$

*Svolgimento.* La frazione si decompone nelle sue parti principali, ovvero

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \qquad \text{ove} \qquad \begin{cases} A + C = 0 \\ B + D = 0 \\ A = 0 \\ B = 1 \end{cases} \qquad \text{e quindi} \qquad \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \\ C = 0 \\ D = -1 \end{cases}.$$

Si ha quindi

$$\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\, dx = -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + c \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Si conclude che l'integrale proposto è uguale a $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}$. □

**ESERCIZIO 3**. *Si calcoli*
$$\lim_{x\to 0}\frac{2-x^2e^x+x^3-2\cos x}{2-x\sin x-2\cos x}.$$

*Svolgimento.* È una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Possiamo quindi utilizzare gli sviluppi di Mc Laurin

$$x^2e^x = x^2+x^3+\frac{x^4}{2}+o(x^4), \qquad 2\cos x = 2-x^2-2\frac{x^4}{4!}+o(x^4), \qquad x\sin x = x^2-\frac{x^4}{3!}+o(x^4),$$

per concludere che

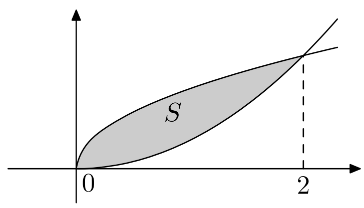
$$\frac{2-x^2e^x+x^3-2\cos x}{2-x\sin x-2\cos x} = \frac{-\frac{x^4}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{\frac{x^4}{6}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)} = \frac{-\frac{7}{12}x^4+o(x^4)}{\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}$$

e quindi, per $x\to 0$, la frazione tende a $-7$. □

**ESERCIZIO 4**. *Si disegni la porzione di piano, $S$, delimitata dai grafici delle funzioni $f(x)=\frac{x^2}{4}$ e $g(x)=\sqrt{\frac{x}{2}}$ e si calcoli il volume del solido ottenuto ruotando $S$ attorno all'asse delle ascisse.*

*Svolgimento.* La funzione $g(x)$ è definita solo sulla semiretta $[0,+\infty)$ ed entrambo le funzioni sono crescenti su questa semiretta.

Si intersecano per $x=0$ e si ha $f(0)=g(0)=0$. Inoltre, si ha ancora $f(x)=g(x)$ quando $x^3=8$, ovvero per $x=2$. È facile verificare che queste sono le uniche intersezioni tra le due curve, ad esempio studiando il segno della derivata prima della differenza $f(x)-g(x)$. La superficie $S$ è quindi evidenziata nel disegno qui a fianco.




Il volume del solido generato dalla rotazione di $S$, si ottiene per differenza

$$V=\pi\left[\int_0^2 g(x)^2dx-\int_0^2 f(x)^2dx\right]=\pi\left[\int_0^2\frac{x}{2}dx-\int_0^2\frac{x^4}{16}dx\right]=\left[\frac{x^2}{4}-\frac{x^5}{80}dx\right]_0^2.$$

In conclusione il volume cercato misura $\frac{3}{5}\pi$. □

**ESERCIZIO 5**. [Vecchio Ordinamento] *Si considerino le rette $r$ ed $s$, di equazioni cartesiane*

$$r:\begin{cases} x-2=0\\ y+3=0\end{cases} \qquad s:\begin{cases} x-z=0\\ x+y=0\end{cases}$$

(a) *Verificare che $r$ e $s$ sono sghembe e calcolare la reciproca distanza.*
(b) *Scrivere l'equazione del piano $\pi$, contenente la retta $s$ e parallelo ad $r$.*
(c) *Determinare il volume di un cilindro avente la retta $r$ come asse, tangente al piano $\pi$ e di altezza uguale a 2.*

*Svolgimento.* (a). La retta $r$ passa per il punto $R=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}$, ed è parallela al vettore $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, mentre la retta $s$ passa per l'origine $O=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, ed è parallela al vettore $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$. Dunque le due rette non sono parallele e non sono nemmeno incidente perché nessun punto $S_t=\begin{pmatrix}t\\-t\\t\end{pmatrix}$ della retta $s$ può soddisfare alle equazioni della retta $r$. La distanza tra le due rette è uguale a

$$d(r,s)=\frac{|\overrightarrow{OR}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|}{\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|}=1.$$

$(b)$. Il vettore $\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è ortogonale ad entrambo le rette e quindi il piano $\pi$ è formato dai punti $X$ tali che $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OX} = 0$ e quindi ha equazione $\pi : x + y = 0$.

$(c)$. Il raggio di base, $r$, del cilindro coincide con la distanza di $r$ da $\pi$, che è uguale alla distanza tra le due rette, e quindi $r = 1$. L'altezza del cilindro è $h = 2$ e quindi il volume è $V = \pi r^2 h = 2\pi$. $\square$

**ESERCIZIO 1**. *Si studi la funzione*

$$f(x) = \log\sqrt{\frac{3x^2-2x}{(x+2)^2}}$$

*e se ne tracci un grafico indicativo che evidenzi estremi locali, concavità, convessità ed eventuali asintoti.*

*Svolgimento.* La funzione è definita in $D = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \notin \{-2\} \cup [0, \frac{2}{3}] \,\right\}$ e, nell'insieme di definizione, è continua e derivabile. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{1}{2}\log 3, \quad \lim_{x\to -2} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to \frac{2}{3}^+} f(x) = -\infty, .$$

e vi è quindi un asintoto orizzontale a $\pm\infty$ ed asintoti verticali per $x = -2$, $x = 0$, $x = \frac{2}{3}$.

La derivata prima è uguale a

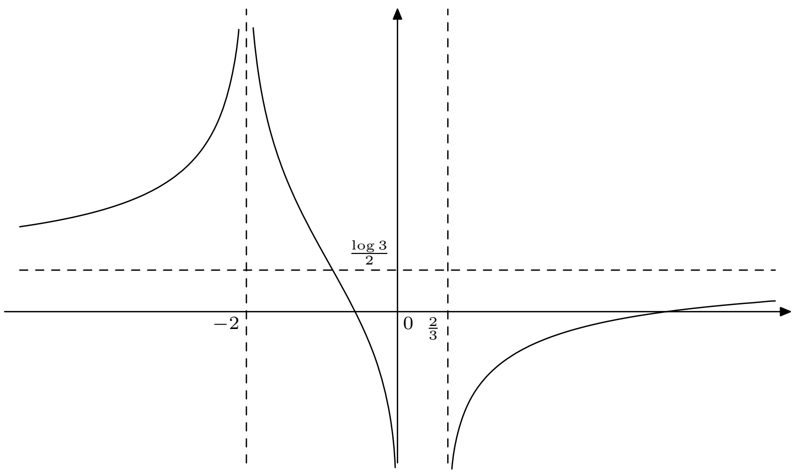
$$f'(x) = \sqrt{\frac{(x+2)^2}{3x^2-2x}}\,\frac{1}{2\sqrt{\frac{3x^2-2x}{(x+2)^2}}}\,\frac{(6x-2)(x+2)-2(3x^2-2x)}{(x+2)^3} = \frac{7x-2}{x(3x-2)(x+2)} \qquad (\text{per } x \in D).$$

Il punto $x_0 = 2/7$ non appartiene a $D$ e quindi la funzione $f$ è crescente per $x < -2$ e per $x > \frac{2}{3}$, mentre è decrescente per $-2 < x < 0$. Non vi sono massimi o minimi, né relativi né assoluti.

La derivata seconda è uguale ad

$$f''(x) = -\frac{42x^3+10x^2-16x+8}{x^2(3x-2)^2(x+2)^2}$$

sempre per $x \in D$, ed il suo segno coincide col segno del numeratore.




Il numeratore è un polinomio di terzo grado con un unica radice reale (come si può vedere studiandone gli estremi locali) e quindi il grafico cambia la sua convessità un'unica volta su un punto $x_0 \in (-2, -\frac{4}{9})$. Possiamo quindi concludere con il grafico tracciato qui sopra. □

**ESERCIZIO 2**. *Si calcoli*

$$\int_{-\infty}^{-\sqrt{2}} \frac{x^2-2}{(x^2-1)^2}\,dx.$$

*Svolgimento.* La frazione si decompone nelle sue parti principali, ovvero

$$\frac{x^2-2}{(x^2-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} \quad \text{ove} \quad \begin{cases} A+C=0 \\ A+B-C+D=0 \\ -A+2B-C-2D=0 \\ -A+B+C+D=-2 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} A=\frac{3}{4} \\ B=-\frac{1}{4} \\ C=-\frac{3}{4} \\ D=-\frac{1}{4} \end{cases}.$$

Si ha quindi

$$\int \frac{x^2-2}{(x^2-1)^2}\,dx = \frac{3}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right) + c \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right) = 0.$$

Si conclude che l'integrale proposto è uguale a $\frac{3}{4}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}}$. □

**ESERCIZIO 3**. *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - \log(1-x) - 2\sin x}{\sin x \cosh x - \sinh x \cos x}.$$

*Svolgimento.* È una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Possiamo quindi utilizzare gli sviluppi di Mc Laurin

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), & \log(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3),\\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3), & \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),\\ \sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3), & \cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \end{aligned}$$

per concludere che

$$\frac{\log(1+x) - \log(1-x) - 2\sin x}{\sin x \cosh x - \sinh x \cos x} = \frac{x^3 + o(x^3)}{\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}$$

e quindi, per $x \to 0$, la frazione tende a $\frac{3}{2}$. □

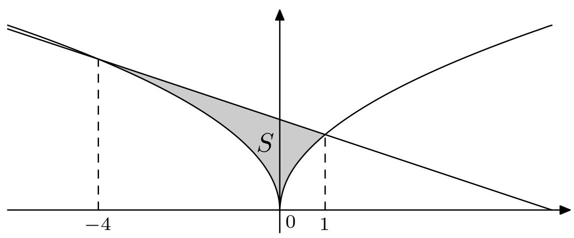
**ESERCIZIO 4**. *Si disegni la porzione di piano, $S$, formata dai punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che*

$$x \in [-6,6] \qquad e \qquad \sqrt{|x|} \le y \le \frac{6-x}{5}$$

*e si calcoli il volume del solido che si ottiene ruotando $S$ attorno all'asse delle ascisse.*

*Svolgimento.* La regione $S$ è delimitata dai grafici di due funzioni sopra l'intervallo chiuso $[-6,6]$; ovvero le funzioni $f(x) = \sqrt{|x|}$ e $g(x) = \frac{6-x}{5}$.

Sopra l'intervallo $[-6,6]$, i due grafici intersecano per $x = -4$ e per $x = 1$ ed il grafico di $g(x)$ si trova al disopra del grafico di $f(x)$ al di sopra dell'intervallo $[-4,1]$. La superficie $S$ è quindi evidenziata nel disegno qui a fianco.




Il volume del solido generato dalla rotazione di $S$, si ottiene per differenza

$$V = \pi\left[\int_{-4}^{1} g(x)^2 dx - \int_{-4}^{1} f(x)^2 dx\right] = \pi\left[\frac{1}{25}\int_{-4}^{1}(6-x)^2 dx - \int_{-4}^{1}|x|dx\right].$$

In conclusione il volume cercato misura $2\pi$. □

**ESERCIZIO 5**. [Vecchio Ordinamento] *Si considerino le rette $r$ ed $s$, di equazioni cartesiane*

$$r : \begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x+y-1=0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

*(a) Verificare che $r$ e $s$ sono sghembe e calcolare la reciproca distanza.*
*(b) Scrivere l'equazione del piano $\pi$, contenente la retta $s$ e parallelo ad $r$.*
*(c) Determinare il volume di un cilindro avente la retta $r$ come asse, tangente al piano $\pi$ e di altezza uguale a 2.*

*Svolgimento.* (a). La retta $r$ passa per il punto $R = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, ed è parallela al vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, mentre la retta $s$ passa per l'origine $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ed è parallela al vettore $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dunque le due rette non sono parallele e non sono nemmeno incidente perché nessun punto $S_t = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix}$ della retta $s$ può soddisfare alle equazioni della retta $r$. La distanza tra le due rette è uguale a

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{OR} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|} = 1.$$

$(b)$. Il vettore $\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è ortogonale ad entrambo le rette e quindi il piano $\pi$ è formato dai punti $X$ tali che $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OX} = 0$ e quindi ha equazione $\pi : x + y = 0$.

$(c)$. Il raggio di base, $r$, del cilindro coincide con la distanza di $r$ da $\pi$, che è uguale alla distanza tra le due rette, e quindi $r = 1$. L'altezza del cilindro è $h = 2$ e quindi il volume è $V = \pi r^2 h = 2\pi$. □

**ESERCIZIO 1**. *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x}.$$

*Si determinino il dominio di definizione, i limiti agli estremi di tale dominio, la derivata prima e gli insiemi su cui la funzione è crescente e quelli su cui è decrescente.*

*Si determinino eventuali asintoti, massimi e minimi locali o globali ed eventuali rette tangenti agli estremi del dominio di definizione.*

*Si tracci un grafico indicativo dell'andamento della funzione e si dica, al variare del parametro $k$ in $\mathbb{R}$, quante soluzioni vi sono all'equazione $f(x) = k$.*

*Svolgimento.* La funzione è definita quando l'argomento della radice non è negativo ed il denominatore della frazione non si annulla. Dunque il dominio della funzione è l'insieme $D$ dei numeri reali $x$ soddisfacenti alle condizioni $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$; ovvero $D = (-\infty, 0) \cup (0, 1] \cup [2, +\infty)$. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1; \qquad \lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty; \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1,$$

e quindi vi sono asintoti orizzontali a $\pm\infty$ ed un asintoto verticale per $x = 0$. Nei punti $x = 1$ ed $x = 2$, il valore della funzione coincide con il limite (destro o sinistro) ed è uguale a 0.

La derivata prima è

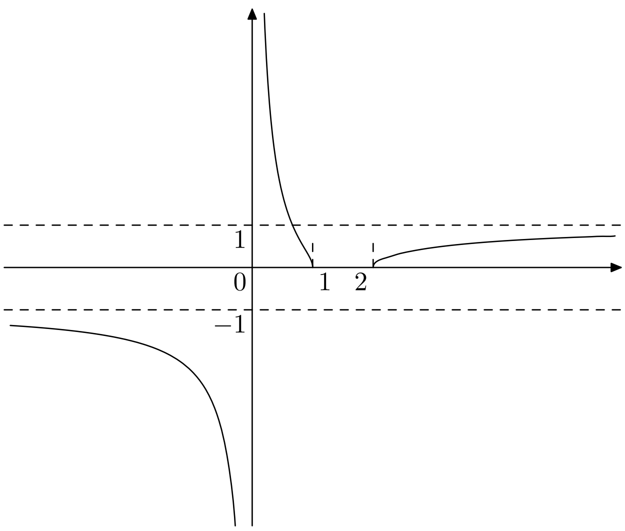
$$f'(x) = \frac{3x - 4}{2x^2\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$$

per $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (2, +\infty)$, e

$$\lim_{x\to1^-} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to2^+} f'(x) = +\infty.$$

Dunque la funzione è derivabile nei soli punti interni a $D$, mentre nei due punti $x = 1$ ed $x = 2$ il grafico ha tangenti verticali.

Guardando al segno della derivata prima si conclude che la funzione è decrescente sulla semiretta $(-\infty, 0)$ e sull'intervallo $(0, 1)$, mentre è crescente sulla semiretta $(2, +\infty)$.




Possiamo riassumere le considerazioni sin qui fatte nel grafico qui sopra, da cui si vede che l'equazione $f(x) = k$ ha una soluzione quando $k < -1$ e quando $k \geq 1$, non ha soluzioni se $-1 \leq k < 0$, mentre ha due soluzioni se $0 \leq k < 1$. $\square$

**ESERCIZIO 2**. *Si calcoli*

$$\int_3^{+\infty} \frac{5x^2 - 4x - 6}{(x - 2)^2(x^2 + 2)}\, dx.$$

*Svolgimento.* Si tratta di un integrale improprio certamente convergente, perché asintoticamente equivalente all'integrale di $1/x^2$. Calcoliamolo e cominciamo col determinare una primitiva della funzione integranda. La funzione razionale si decompone nella somma

$$\frac{5x^2-4x-6}{(x-2)^2(x^2+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2} \quad \text{ove} \quad \begin{cases} A+C=0 \\ -2A+B-4C+D=5 \\ 2A+4C-4D=-4 \\ -4A+2B+4D=-6 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} A=2 \\ B=1 \\ C=-2 \\ D=0 \end{cases}.$$

Si conclude che

$$\int \frac{5x^2-4x-6}{(x-2)^2(x^2+2)}\,dx = \int \frac{2}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx - \int \frac{2x}{x^2+2}\,dx = \log\frac{(x-2)^2}{x^2+2} - \frac{1}{x-2} + c.$$

Dunque l'integrale improprio è uguale al

$$\lim_{b\to+\infty} \left[\log\frac{(x-2)^2}{x^2+2} - \frac{1}{x-2}\right]_3^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\log\frac{(b-2)^2}{b^2+2} - \frac{1}{b-2}\right) - \log\frac{(3-2)^2}{11} + 1 = 1 + \log 11.$$

Fine del calcolo richiesto. □

**ESERCIZIO 3**. *Si calcoli*

$$\lim_{x\to0} \frac{2\sin^2 x + 2x\log(1-x) + x^3}{x^2\cos^2 x - \operatorname{tg}^2 x}.$$

*Svolgimento.* Servendosi degli sviluppi di Mc Laurin, si ricava

$$\begin{aligned}
\sin^2 x &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4),\\
x\log(1-x) &= x\left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = -x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{3} + o(x^4),\\
x^2\cos^2 x &= x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 = x^2 - x^4 + o(x^4),\\
\operatorname{tg}^2 x &= \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 = x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4);
\end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{2\sin^2 x + 2x\log(1-x) + x^3}{x^2\cos^2 x - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{-\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)}{-\frac{5}{3}x^4 + o(x^4)}.$$

Passando al limite si cancellano i termini trascurabili e si ottiene così che la frazione data tende a $\frac{4}{5}$. □

**ESERCIZIO 4**. *Si dica se converge assolutamente la serie*

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{12-2n}{n(n^2-4)}$$

*e se ne calcoli l'eventuale somma.*

*Svolgimento.* La serie è definitivamente a termini negativi e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{12-2n}{n(n^2-4)}\right|}{\frac{1}{n^2}} = 2.$$

La serie di termine generale $1/n^2$ è una serie convergente e quindi, per il criterio del confronto asintotico, la serie data è assolutamente convergente.

Per calcolarne la somma osserviamo che

$$\frac{12-2n}{n(n^2-4)} = \frac{A}{n-2} + \frac{B}{n} + \frac{C}{n+2} \quad \text{ove} \quad \begin{cases} A+B+C=0 \\ 2A-2C=-2 \\ -4B=12 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} A=1 \\ B=-3 \\ C=2 \end{cases}.$$

Possiamo quindi concludere che, nelle somme parziali $s_k = \sum_{n=3}^{k} \frac{12-2n}{n(n^2-4)}$, per $k \geq 6$, molti dei termini si semplificano e si ha

$$s_k = \sum_{n=3}^{k} \left( \frac{1}{n-2} - \frac{3}{n} + \frac{2}{n+2} \right) = \frac{1}{3} - \frac{2k-1}{k(k-1)} + \frac{4k+6}{(k+1)(k+2)}.$$

Passando al limite per $k \to \infty$, si ottiene la somma della serie, ovvero

$$\lim_{k\to\infty} \left( \frac{1}{3} - \frac{2k-1}{k(k-1)} + \frac{4k+6}{(k+1)(k+2)} \right) = \frac{1}{3}.$$

Fine della discussione. □

**ESERCIZIO 5**. *Si considerino le rette $r$ ed $s$, di equazioni*

$$r: \begin{cases} x-2y-2z=-3 \\ x-y-2z=-1 \end{cases} \qquad ed \qquad s: \begin{cases} 2x+y+z=-1 \\ 2x-2y+z=5 \end{cases}.$$

*(a) Si verifichi che le due rette sono sghembe e si calcoli la distanza reciproca.*
*(b) Si determini il punto $X$ della retta $s$ avente minima distanza da $r$.*
*(c) Scelti due punti $A$ e $B$ sulla retta $r$, a distanza 2 tra loro, si calcoli l'area del triangolo $ABX$.*

*Svolgimento.* (a). La retta $r$ è parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e passa per il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, mentre la retta $s$ è parallela al vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ e passa per il punto $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; quindi le due rette non sono parallele tra loro. La loro distanza è uguale a

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot (v \times w)|}{\|v \times w\|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{5} = 4.$$

Dunque le due rette, non essendo né parallele né incidenti, sono sghembe.

($b$). Il punto $X$ è l'intersezione tra la retta $s$ ed il piano $\pi$, passante per $r$ e parallelo al vettore $v \times w = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il piano $\pi$ ha equazione $x - 2z = 1$ e quindi

$$X: \begin{cases} 2x+y+z=-1 \\ 2x-2y+z=5 \\ x-2z=1 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad X = \begin{pmatrix} 3/5 \\ -2 \\ -1/5 \end{pmatrix}.$$

($c$). Comunque si prendano due punti $A$ e $B$ sulla retta $r$, a distanza 2 tra loro, il triangolo $ABX$, viene ad avere un base di lunghezza 2 e la relativa altezza uguale alla distanza di $X$ da $r$, ovvero $d(r,s) = 4$; quindi l'area misura 4. □

## Istituzioni di Matematiche (CH-CI-MT) - Mod A

prova scritta del 22 settembre 2003

**ESERCIZIO 1**. *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \log \frac{(x+1)^2}{x^2+1}.$$

*Si determinino il dominio di definizione, i limiti agli estremi di tale dominio, la derivata prima e gli insiemi su cui la funzione è crescente e quelli su cui è decrescente.*

*Si determinino eventuali asintoti, massimi e minimi locali o globali e flessi.*

*Si tracci un grafico indicativo dell'andamento della funzione e si dica, al variare del parametro $k$ in $\mathbb{R}$, quante soluzioni vi sono all'equazione $f(x) = k$.*

*Svolgimento.* La funzione è definita quando l'argomento del logaritmo è positivo, ovvero per $x \neq -1$. Si ha

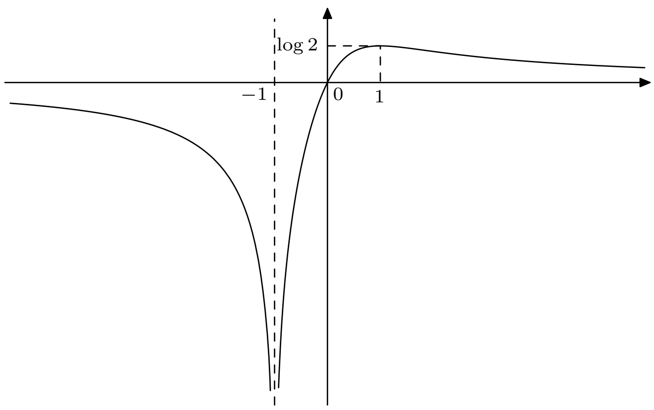
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0; \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to -1} f(x) = -\infty.$$

Quindi vi è l'asintoto orizzontale $y = 0$ a $\pm\infty$ ed un asintoto verticale per $x = -1$.

La derivata prima è

$$f'(x) = \frac{2(1-x)}{(1+x)(1+x^2)}.$$

Guardando al segno della derivata prima si conclude che la funzione è decrescente sulle due semirette $(-\infty, -1)$ e $(1, +\infty)$, mentre è crescente sull'intervallo $(-1, 1)$. Quindi vi è un massimo relativo (ed assoluto) per $x = 1$, con $f(1) = \log 2$. La funzione è illimitata inferiormente e non vi sono punti di minimo relativo.




La derivata seconda è

$$f''(x) = 4\frac{x^3 - x^2 - x - 1}{(1+x)^2(1+x^2)^2},$$

il cui segno coincide con il segno del numeratore, $P(x) = x^3 - x^2 - x - 1$. Si ha $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$, e $P'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 3(x + \frac{1}{3})(x - 1)$. Dunque, $P(x)$ è crescente sulla semiretta $(-\infty, -\frac{1}{3})$, con $P(-\frac{1}{3}) = -\frac{7}{9} < 0$; è poi decrescente sull'intervallo $(-\frac{1}{3}, 1)$, con $P(1) = -2$; infine $P(x)$ è crescente sulla semiretta $(1, +\infty)$, ove si annulla per un opportuno $x_0 \in (1, 2)$ ($P(2) = 1 > 0$). Dunque, per $x = x_0$ si ha un punto di flesso per il grafico di $f(x)$.

Possiamo riassumere le considerazioni sin qui fatte in un grafico, da cui si vede che l'equazione $f(x) = k$ ha due soluzioni per $k < 0$ e per $0 < k < \log 2$, e vi è un'unica soluzione per $k = 0$ e $k = \log 2$. Non vi sono soluzioni per $k > \log 2$. □

**ESERCIZIO 2**. *Si calcoli*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\, dx.$$

*Svolgimento.* La funzione integranda è illimitata per $x \to 0^+$ e quindi consideriamo separatamente i due integrali

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\,dx.$$

Entrambo gli integrali impropri sono convergenti: il primo perché asintoticamente equivalente a $\int_0^1 x^{-1/2}dx$, ed il secondo perché asintoticamente equivalente a $\int_1^{+\infty} x^{-3/2}dx$. Quindi l'integrale proposto converge ed è uguale alla somma dei due integrali scritti qui sopra. Dalla sostituzione $y = \sqrt{x}$, si ricava $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$, e

$$2\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = 2\operatorname{arctg} y + c.$$

Quindi, una primitiva della funzione integranda è $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$ e si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\,dx = \frac{\pi}{2} - \lim_{a\to 0^+} 2\operatorname{arctg}\sqrt{a} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{e} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to+\infty} 2\operatorname{arctg}\sqrt{b} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Dunque l'integrale proposto è uguale alla somma dei due, ovvero a $\pi$. □

**ESERCIZIO 3**. *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sinh^2 x - 2x\log(1+x) - x^3}{\pi x^5}.$$

*Svolgimento.* Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Servendosi degli sviluppi di Mc Laurin, si ricava

$$\sinh^2 x = \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)^2 = x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + o(x^6) = x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^5),$$

$$x\log(1+x) = x\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + o(x^5);$$

e quindi

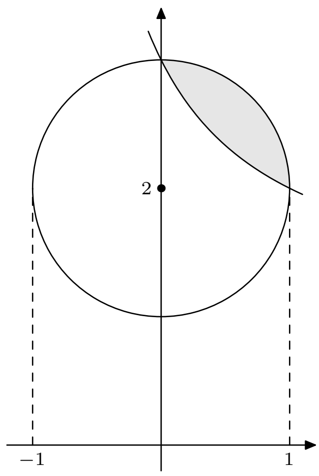
$$\frac{2\sinh^2 x - 2x\log(1+x) - x^3}{\pi x^5} = \frac{\frac{1}{2}x^5 + o(x^5)}{\pi x^5}.$$

Passando al limite si cancellano i termini trascurabili e si ottiene così che la frazione data tende a $\frac{1}{2\pi}$. □

**ESERCIZIO 4**. *Si disegni nel piano cartesiano il sottoinsieme $S$, formato dai punti $(x,y)$, interni alla circonferenza di centro $(0,2)$ e raggio 1 e soddisfacenti alla condizione $y \geq \frac{x+3}{x+1}$. Si calcoli il volume del solido ottenuto ruotando $S$ attorno all'asse delle $x$.*

*Svolgimento.* Cominciamo col determinare l'insieme $S$.

I punti di $S$ sono posti al di sopra del grafico della funzione $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$ ed all'interno della circonferenza di equazione $x^2 + (y-2)^2 = 1$. Nel piano reale, le due curve si intersecano per $x = 0$ ed $x = 1$, come si vede sostituendo $f(x)$ nell'equazione della circonferenza. Sull'intervallo $[0,1]$, la funzione $f(x)$ è decrescente e convessa, essendo $f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2}$ ed $f''(x) = \frac{4}{(x+1)^3}$; dunque il grafico di $f(x)$ sta al di sotto dell'arco di circonferenza rappresentato dal grafico della funzione $g(x) = 2 + \sqrt{1-x^2}$. Possiamo quindi affermare che l'insieme $S$ è la regione che appare in grigio nel disegno qui a fianco.




Il volume si può quindi calcolare come differenza dei volumi ottenuti dalla rotazione dei due grafici, ovvero

$$V = \pi\left[\int_0^1 g(x)^2\,dx - \int_0^1 f(x)^2\,dx\right] = \pi\left(\frac{5}{3} + \pi - 4\log 2\right).$$

Ciò conclude la discussione. □

**ESERCIZIO 5**. *Si considerino le rette $r$ ed $s$, di equazioni*

$$r : \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - z = -2 \end{cases} \qquad \textit{ed} \qquad s : \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}.$$

*(a) Si verifichi che le due rette sono sghembe e si calcoli la distanza reciproca.*
*(b) Si determini il punto $X$ della retta $s$ avente minima distanza da $r$.*
*(c) Scelti due punti $A$ e $B$ sulla retta $r$, a distanza 1 tra loro, si calcoli l'area del triangolo $ABX$.*

*Svolgimento.* (a). La retta $r$ è parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e passa per il punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, mentre la retta $s$ è parallela al vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e passa per l'origine $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; quindi non sono parallele tra loro. La loro distanza è uguale a

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{PO} \cdot (v \times w)|}{\|v \times w\|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{2}{\sqrt{11}}.$$

Dunque le due rette non possono avere punti in comune e perciò sono sghembe.

$(b)$. Il punto $X$ è l'intersezione tra la retta $s$ ed il piano $\pi$, passante per $r$ e parallelo al vettore $v \times w = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il piano $\pi$ ha equazione $x + 7y - 4z + 8 = 0$ e quindi

$$X : \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ x + 7y - 4z + 8 = 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad X = \begin{pmatrix} -8/11 \\ -16/11 \\ -8/11 \end{pmatrix}.$$

$(c)$. Comunque si prendano due punti $A$ e $B$ sulla retta $r$, a distanza 1 tra loro, il triangolo $ABX$, viene ad avere base 1 ed altezza uguale alla distanza di $X$ da $r$, ovvero $d(r, s) = \frac{2}{\sqrt{11}}$, quindi la sua area misura $\frac{1}{\sqrt{11}}$. □