Istituzioni di Matematiche (CH-CI-MT) - Mod A

prova di accertamento del 29 ottobre 2002 – Compito A

ESERCIZIO 1. *Si determini il sottoinsieme formato dai numeri reali x per cui si abbia*

$$\log(4e^x - 1) - 2x > 1.$$

(Con $\log x$ si indica il *logaritmo naturale* di x.)

Svolgimento. Osserviamo che $2x = \log e^{2x}$ e quindi il termine a sinistra della disuguaglianza coincide con $\log(4e^x - 1) - \log(e^{2x}) = \log \frac{4e^x-1}{e^{2x}}$. Dunque, la disuguaglianza proposta è equivalente a

$$\log \frac{4e^x - 1}{e^{2x}} > 1, \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{4e^x - 1}{e^{2x}} > e.$$

Ponendo $y = e^x$, dobbiamo quindi cercare i numeri reali positivi, y, per cui si abbia $ey^2 - 4y + 1 < 0$. Le due radici dell'equazione di secondo grado associata alla disuguaglianza sono i numeri reali positivi

$$\alpha_1 = \frac{2 - \sqrt{4 - e}}{e} \qquad \text{ed} \qquad \alpha_2 = \frac{2 + \sqrt{4 - e}}{e}$$

e l'ultima disuguaglianza è soddisfatta per $\alpha_1 < y < \alpha_2$. Quindi la disuguaglianza proposta è soddisfatta quando $x \in (\log \alpha_1, \log \alpha_2)$. □

ESERCIZIO 2. *Si determinino (se esistono) due numeri reali a e b tali che la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sin(1-x)}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ a + bx & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

sia continua e derivabile su tutti i punti della retta reale.

Svolgimento. Qualunque siano i valori dei parametri a e b, la funzione proposta è continua e derivabile in tutti i punti, eccetto $x = 1$, perchè composizione di funzioni derivabili. Perchè sia continua per $x = 1$, devono esistere il limite destro e sinistro in tale punto e coincidere entrambi con il valore della funzione f in quel punto. Si ha

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} -2\frac{\sin(x-1)}{x-1} = -2 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = a + b = f(1),$$

e quindi $f(x)$ è continua su tutta la retta reale se $a + b = -2$, ovvero $a = -(b + 2)$.

Consideriamo ora la derivata prima di f che è uguale a

$$f'(x) = \begin{cases} 2\dfrac{\sin(x-1) - (x-1)\cos(x-1)}{(x-1)^2} & \text{se } x < 1 \\ b & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

e scegliamo a in modo che $f(x)$ sia continua per $x = 1$. Considerando derivata destra e derivata sinistra di f per $x = 1$, ed applicando la regola di de L'Hôpital, si ha

$$f'_+(1) \overset{H}{=} \lim_{x \to 1^+} f'(x) = b \qquad \text{e} \qquad f'_-(1) \overset{H}{=} \lim_{x \to 1^-} 2\frac{\sin(x-1) - (x-1)\cos(x-1)}{(x-1)^2} = 0.$$

Ove l'ultimo limite si può calcolare osservando che, tramite la sostituzione $y = x - 1$, viene a coincidere con

$$\lim_{y\to 0^-} 2\frac{\sin y - y\cos y}{y^2} \overset{H}{=} \lim_{y\to 0^-} \frac{y\sin y}{y} = 0$$

ove si è applicata di nuovo la regola di de L'Hôpital. Dunque deve aversi $b = 0$ ed $a = -2$. □

ESERCIZIO 3. *Si studi la funzione*

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+2\cos x}}$$

e si tracci un grafico indicativo del suo andamento.

(Non è richiesto lo studio della derivata seconda.)

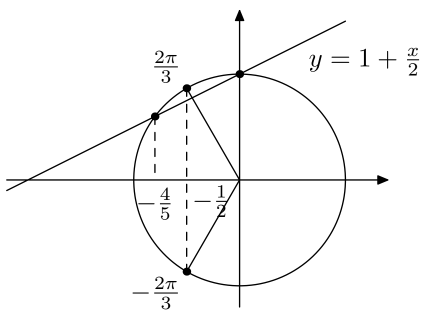
Svolgimento. La funzione è periodica, di periodo 2π, e quindi è sufficiente studiare il suo comportamento nell'intersezione tra il suo dominio, D, ed un intervallo di ampiezza uguale al periodo. La funzione è definita quando l'argomento della radice non è negativo e ciò accade quando $1 + 2\cos x > 0$, ovvero per $\cos x > -\frac{1}{2}$, dunque possiamo limitarci a studiare il comportamento della funzione nell'insieme $D_0 = D \cap [-\pi, \pi] = (-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$[(†)]. Agli estremi dell'intervallo D_0, si ha

$$\lim_{x\to -\frac{2\pi}{3}^+} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to \frac{2\pi}{3}^-} f(x) = +\infty.$$

La funzione è certamente derivabile nei punti di D_0 in cui non si annulla l'argomento della radice perchè è composizione di funzioni derivabili, e quindi si ha

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+2\cos x}{1-\sin x}} \cdot \frac{-\cos x(1+2\cos x) + 2\sin x(1-\sin x)}{(1+2\cos x)^2} &= \\ = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+2\cos x}{1-\sin x}} \cdot \frac{2\sin x - \cos x - 2}{(1+2\cos x)^2} &\qquad \text{per } x \in D_0 \setminus \{\tfrac{\pi}{2}\}. \end{aligned}$$

Il segno della derivata coincide con il segno di $2\sin x - \cos x - 2$. Per determinare i valori di $x \in D_0$ per cui questa espressione è maggiore di 0, osserviamo che corrispondono ai punti della circonferenza unitaria che si trovano al di sopra della retta di equazione $2Y = X + 2$ (si veda il disegno a fianco). La retta interseca la circonferenza nei punti $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$ ed essendo $-\frac{4}{5} < -\frac{1}{2}$, possiamo concludere che, per $x \in D_0$, $f'(x) < 0$ se $x \in (-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ ed $f'(x) > 0$ se $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$. Nel punto $x = \frac{\pi}{2}$ si ha quindi un minimo relativo (ed assoluto) per la funzione ($f(\frac{\pi}{2}) = 0$). Per quanto riguarda la derivabilità di f nel punto di minimo, possiamo osservare che



$$\begin{aligned} f'_-(\tfrac{\pi}{2}) \overset{H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+2\cos x}{1-\sin x}} \cdot \frac{2\sin x - \cos x - 2}{(1+2\cos x)^2} &= \\ = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+2\cos x}}{(1+2\cos x)^2}\left(2\sqrt{1-\sin x} + \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}\right) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}; \end{aligned}$$

(†) Il dominio di f è uguale a $D = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi)$.

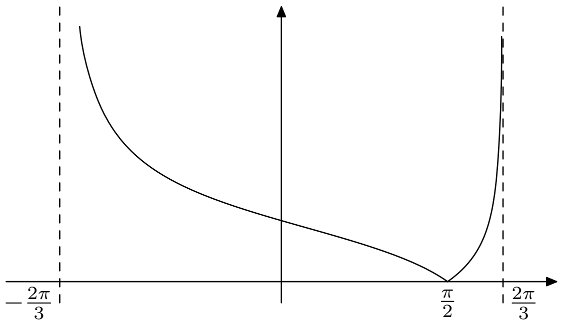
perchè i limiti dei singoli termini sono evidenti e, per $x < \frac{\pi}{2}$, si ha

$$\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} = \sqrt{\frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}} = \sqrt{1+\sin x}.$$

Per $x > \frac{\pi}{2}$, si ha invece $\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} = -\sqrt{1+\sin x}$, e quindi

$$f'_+(\tfrac{\pi}{2}) \overset{H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+2\cos x}{1-\sin x}} \cdot \frac{2\sin x - \cos x - 2}{(1+2\cos x)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

e quindi f non è derivabile per $x = \frac{\pi}{2}$, che è un *punto angoloso* per il grafico di f.



Il disegno qui sopra da un'indicazione approssimativa del comportamento di $f(x)$ sull'intervallo D_0. □

Istituzioni di Matematiche (CH-CI-MT) - Mod A

prova di accertamento del 29 ottobre 2002 – Compito B

ESERCIZIO 1. *Si determini il sottoinsieme formato dai numeri reali x per cui si abbia*

$$\log(6e^x - 1) - 2x \leq 2.$$

(Con $\log x$ si indica il *logaritmo naturale* di x.)

Svolgimento. Osserviamo che $2x = \log e^{2x}$ e quindi il termine a sinistra della disuguaglianza coincide con $\log(6e^x - 1) - \log(e^{2x}) = \log \frac{6e^x-1}{e^{2x}}$. Dunque, la disuguaglianza proposta è equivalente a

$$\log \frac{6e^x - 1}{e^{2x}} \leq 2, \qquad \text{ovvero} \qquad 0 < \frac{6e^x - 1}{e^{2x}} \leq e^2.$$

Ponendo $y = e^x$, dobbiamo quindi cercare i numeri reali $y > \frac{1}{6}$ per cui si abbia $e^2y^2 - 6y + 1 \geq 0$. Le due radici dell'equazione di secondo grado associata alla disuguaglianza sono i numeri reali positivi

$$\alpha_1 = \frac{3 - \sqrt{9 - e^2}}{e^2} \qquad \text{ed} \qquad \alpha_2 = \frac{3 + \sqrt{9 - e^2}}{e^2}$$

e l'ultima disuguaglianza è soddisfatta per $\frac{1}{6} < y \leq \alpha_1$ e per $y \geq \alpha_2$. Quindi la disuguaglianza proposta è soddisfatta quando $x \in (-\log 6, \log \alpha_1] \cup [\log \alpha_2, +\infty)$. □

ESERCIZIO 2. *Si determinino (se esistono) due numeri reali a e b tali che la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{\log(1 - 2x)} & \text{se } x < 0 \\ a + bx & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

sia continua e derivabile su tutti i punti della retta reale.

Svolgimento. Qualunque siano i valori dei parametri a e b, la funzione proposta è continua e derivabile in tutti i punti, eccetto $x = 0$, perchè composizione di funzioni derivabili. Perchè sia continua per $x = 0$, devono esistere il limite destro e sinistro in tale punto e coincidere entrambi con il valore della funzione f in quel punto. Si ha

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = a = f(0) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{3x}{\log(1 - 2x)} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{3(1 - 2x)}{-2} = -\frac{3}{2},$$

e quindi $f(x)$ è continua su tutta la retta reale se $a = -\frac{3}{2}$, condizione che, d'ora in poi, supporremo soddisfatta.

Consideriamo ora la derivata prima di f che è uguale a

$$f'(x) = \begin{cases} 3\dfrac{2x + (1 - 2x)\log(1 - 2x)}{(1 - 2x)\log^2(1 - 2x)} & \text{se } x < 0 \\ b & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Considerando derivata destra e derivata sinistra di f per $x = 0$, ed applicando la regola di de L'Hôpital, si ha

$$f'_+(0) \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} f'(x) = b \qquad \text{e} \qquad f'_-(0) \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^-} 3\frac{2x + (1 - 2x)\log(1 - 2x)}{(1 - 2x)\log^2(1 - 2x)} = \frac{3}{2}.$$

Ove l'ultimo limite si può calcolare applicando di nuovo la regola di de L'Hôpital, ovvero

$$\lim_{x\to 0^-} 3\frac{2x+(1-2x)\log(1-2x)}{(1-2x)\log^2(1-2x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^-} 3\frac{-2}{-2(\log(1-2x)+2)} = \frac{3}{2}.$$

Dunque deve aversi $b = \frac{3}{2}$ ed $a = -\frac{3}{2}$. □

ESERCIZIO 3. *Si studi la funzione*

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-\sin x}{1-2\cos x}}$$

e si tracci un grafico indicativo del suo andamento.

(Non è richiesto lo studio della derivata seconda.)

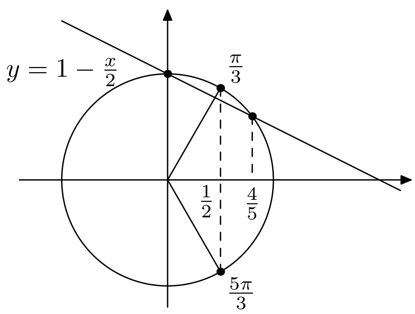
Svolgimento. La funzione è periodica, di periodo 2π, e quindi è sufficiente studiare il suo comportamento nell'intersezione tra il suo dominio, D, ed un intervallo di ampiezza uguale al periodo. La funzione è definita quando l'argomento della radice non è negativo e ciò accade quando $1 - 2\cos x > 0$, ovvero per $\cos x < \frac{1}{2}$, dunque possiamo limitarci a studiare il comportamento della funzione nell'insieme $D_0 = D \cap [0, 2\pi] = (\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$[†]. Agli estremi dell'intervallo D_0, si ha

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{3}^+} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to \frac{4\pi}{3}^-} f(x) = +\infty.$$

La funzione è certamente derivabile nei punti di D_0 in cui non si annulla l'argomento della radice, perchè è composizione di funzioni derivabili, e quindi si ha

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-2\cos x}{1-\sin x}} \cdot \frac{-\cos x(1-2\cos x) - 2\sin x(1-\sin x)}{(1-2\cos x)^2} &= \\ = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-2\cos x}{1-\sin x}} \cdot \frac{2-2\sin x-\cos x}{(1-2\cos x)^2} & \qquad \text{per } x \in D_0 \setminus \{\tfrac{\pi}{2}\}. \end{aligned}$$

Il segno della derivata coincide con il segno di $2-2\sin x-\cos x$. Per determinare i valori di $x \in D_0$ per cui questa espressione è maggiore di 0, osserviamo che corrispondono ai punti della circonferenza unitaria che si trovano al di sotto della retta di equazione $2Y = 2 - X$ (si veda il disegno a fianco). La retta interseca la circonferenza nei punti $\binom{0}{1}$ e $\binom{4/5}{3/5}$ ed essendo $\frac{4}{5} > \frac{1}{2}$, possiamo concludere che, per $x \in D_0$, $f'(x) < 0$ se $x \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ ed $f'(x) > 0$ se $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{3})$. Nel punto $x = \frac{\pi}{2}$ si ha quindi un minimo relativo (ed assoluto) per la funzione ($f(\frac{\pi}{2}) = 0$). Per quanto riguarda la derivabilità di f nel punto di minimo, possiamo osservare che



$$\begin{aligned} f'_-(\tfrac{\pi}{2}) \overset{H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-2\cos x}{1-\sin x}} \cdot \frac{2-2\sin x-\cos x}{(1-2\cos x)^2} &= \\ = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-2\cos x}}{(1-2\cos x)^2}\left(2\sqrt{1-\sin x} - \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}\right) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}; \end{aligned}$$

[†] Il dominio di f è uguale a $D = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi)$.

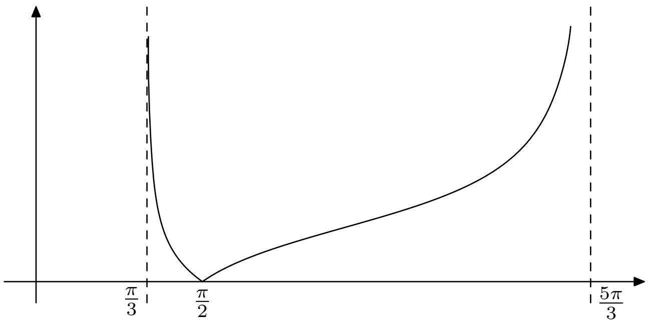
perchè i limiti dei singoli termini sono evidenti e, per $x < \frac{\pi}{2}$, si ha

$$\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} = \sqrt{\frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}} = \sqrt{1+\sin x}.$$

Per $x > \frac{\pi}{2}$, si ha invece $\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} = -\sqrt{1+\sin x}$, e quindi

$$f'_+(\tfrac{\pi}{2}) \overset{H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-2\cos x}{1-\sin x}} \cdot \frac{2-2\sin x-\cos x}{(1-2\cos x)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

e quindi f non è derivabile per $x = \frac{\pi}{2}$, che è un *punto angoloso* per il grafico di f.



Il disegno qui sopra da un'indicazione approssimativa del comportamento di $f(x)$ sull'intervallo D_0. □

Istituzioni di Matematiche (CH-CI-MT) - Mod A

prova di accertamento del 29 ottobre 2002 – Compito C

ESERCIZIO 1. *Si determini il sottoinsieme formato dai numeri reali x per cui si abbia*

$$\log(6e^x + 5) - 2x \geq 3.$$

(Con $\log x$ si indica il *logaritmo naturale* di x.)

Svolgimento. Osserviamo che $2x = \log e^{2x}$ e quindi il termine a sinistra della disuguaglianza coincide con $\log(6e^x + 5) - \log(e^{2x}) = \log \frac{6e^x+5}{e^2x}$. Dunque, la disuguaglianza proposta è equivalente a

$$\log \frac{6e^x + 5}{e^{2x}} \geq 3, \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{6e^x + 5}{e^{2x}} \geq e^3.$$

Ponendo $y = e^x$, dobbiamo quindi cercare i numeri reali positivi, y, per cui si abbia $e^3y^2 - 6y - 5 \leq 0$. Le due radici dell'equazione di secondo grado associata alla disuguaglianza sono i numeri reali

$$\alpha_1 = \frac{3 - \sqrt{9 + 5e^3}}{e^3} < 0 \qquad \text{ed} \qquad \alpha_2 = \frac{3 + \sqrt{9 + 5e^3}}{e^3} > 0$$

e l'ultima disuguaglianza è soddisfatta per $\alpha_1 \leq y \leq \alpha_2$. Quindi la disuguaglianza proposta è soddisfatta quando $x \in (-\infty, \log \alpha_2]$. □

ESERCIZIO 2. *Si determinino (se esistono) due numeri reali a e b tali che la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(x - 2)}{3(x - 2)^2} & \text{se } x > 2 \\ a + bx & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$$

sia continua e derivabile su tutti i punti della retta reale.

Svolgimento. Qualunque siano i valori dei parametri a e b, la funzione proposta è continua e derivabile in tutti i punti, eccetto $x = 1$, perchè composizione di funzioni derivabili. Perchè sia continua per $x = 2$, devono esistere il limite destro e sinistro in tale punto e coincidere entrambi con il valore della funzione f in quel punto. Si ha

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = a + 2b = f(2) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{1 - \cos(x - 2)}{3x - 2^2} = \lim_{y\to 0^-} \frac{1}{3} \frac{1 - \cos y}{y^2} = \frac{1}{6},$$

e quindi $f(x)$ è continua su tutta la retta reale se $a + 2b = \frac{1}{6}$, ovvero $a = \frac{1}{6} - 2b$.

Consideriamo ora la derivata prima di f che è uguale a

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(x - 2)\sin(x - 2) - 2(1 - \cos(x - 2))}{3(x - 2)^3} & \text{se } x > 2 \\ b & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

e scegliamo a in modo che $f(x)$ sia continua per $x = 2$. Considerando derivata destra e derivata sinistra di f per $x = 2$, ed applicando la regola di de L'Hôpital, si ha

$$f'_+(2) \overset{H}{=} \lim_{x\to 1^+} f'(x) = b \qquad \text{e} \qquad f'_-(2) \overset{H}{=} \lim_{x\to 2^-} \frac{(x - 2)\sin(x - 2) - 2(1 - \cos(x - 2))}{3(x - 2)^3} = 0.$$

Ove l'ultimo limite si può calcolare osservando che, tramite la sostituzione $y = x - 2$, viene a coincidere con

$$\lim_{y\to 0^-} \frac{y \sin y - 2(1-\cos y)}{3y^3} \overset{H}{=} \lim_{y\to 0^-} \frac{y\cos y - \sin y}{9y^2} \overset{H}{=} \lim_{y\to 0^-} \frac{-y\sin y}{18y} = 0,$$

ove si è applicata di nuovo la regola di de L'Hôpital. Dunque deve aversi $b = 0$ ed $a = \frac{1}{6}$. □

ESERCIZIO 3. *Si studi la funzione*

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+2\sin x}}$$

e si tracci un grafico indicativo del suo andamento.

(Non è richiesto lo studio della derivata seconda.)

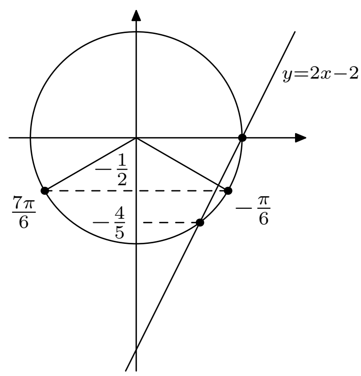
Svolgimento. La funzione è periodica, di periodo 2π, e quindi è sufficiente studiare il suo comportamento nell'intersezione tra il suo dominio, D, ed un intervallo di ampiezza uguale al periodo. La funzione è definita quando l'argomento della radice non è negativo e ciò accade quando $1 + 2\sin x > 0$, ovvero per $\sin x > -\frac{1}{2}$, dunque possiamo limitarci a studiare il comportamento della funzione nell'insieme $D_0 = D \cap [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] = (-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6})^{(\dagger)}$. Agli estremi dell'intervallo D_0, si ha

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{6}^+} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to \frac{7\pi}{6}^-} f(x) = +\infty.$$

La funzione è certamente derivabile nei punti di D_0 in cui non si annulla l'argomento della radice, perchè è composizione di funzioni derivabili, e quindi si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+2\sin x}{1-\cos x}} \cdot \frac{\sin x(1+2\sin x) - 2\cos x(1-\cos x)}{(1+2\sin x)^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+2\sin x}{1-\cos x}} \cdot \frac{2+\sin x - 2\cos x}{(1+2\sin x)^2} \qquad \text{per } x \in D_0 \setminus \{0\}.$$

Il segno della derivata coincide con il segno di $2+\sin x - 2\cos x$. Per determinare i valori di $x \in D_0$ per cui questa espressione è maggiore di 0, osserviamo che corrispondono ai punti della circonferenza unitaria che si trovano al di sopra della retta di equazione $Y = 2X - 2$ (si veda il disegno a fianco). La retta interseca la circonferenza nei punti $\binom{1}{0}$ e $\binom{3/5}{-4/5}$ ed essendo $-\frac{4}{5} < -\frac{1}{2}$, possiamo concludere che, per $x \in D_0$, $f'(x) < 0$ se $x \in (-\frac{\pi}{6}, 0)$ ed $f'(x) > 0$ se $x \in (0, \frac{7\pi}{6})$. Nel punto $x = 0$ si ha quindi un minimo relativo (ed assoluto) per la funzione ($f(0) = 0$). Per quanto riguarda la derivabilità di f nel punto di minimo, possiamo osservare che



$$f'_-(0) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+2\sin x}{1-\cos x}} \cdot \frac{2+\sin x - 2\cos x}{(1+2\sin x)^2} =$$
$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+2\sin x}}{(1+2\sin x)^2}\left(2\sqrt{1-\cos x} + \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$^{(\dagger)}$ Il dominio di f è uguale a $D = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi)$.

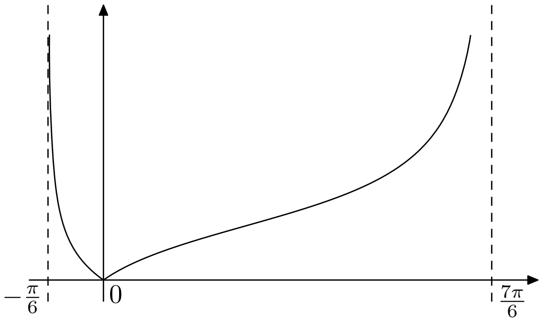
perchè i limiti dei singoli termini sono evidenti e, per $x < 0$, si ha

$$\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{-\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sqrt{1-\cos x}} = -\sqrt{1+\cos x}.$$

Per $x > 0$, si ha invece $\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} = \sqrt{1+\cos x}$, e quindi

$$f'_+(0) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+2\sin x}{1-\cos x}} \cdot \frac{2+\sin x - 2\cos x}{(1+2\sin x)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

e quindi f non è derivabile per $x = 0$, che è un *punto angoloso* per il grafico di f.



Il disegno qui sopra da un'indicazione approssimativa del comportamento di $f(x)$ sull'intervallo D_0. □