Istituzioni di Matematiche (CH-CI-MT) - Mod A

prova di accertamento del 19 novembre 2002 – Compito A

ESERCIZIO 1. *Si consideri la funzione razionale* $f(x) = \dfrac{5(1-x)}{x^3+3x^2+x+3}$ *e si osservi che il denominatore si annulla per* $x = -3$. *Si determini una primitiva per* $f(x)$ *e si calcolino*

$$\int_0^1 f(x)\,dx \qquad \text{ed} \qquad \int_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Svolgimento. Si ha $x^3 + 3x^2 + x + 3 = (x + 3)(x^2 + 1)$ e quindi

$$\frac{5(1-x)}{x^3+3x^2+x+3} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} A+B=0 \\ 3B+C=-5 \\ A+3C=5 \end{cases}.$$

Possiamo quindi concludere che

$$\int \frac{5(1-x)}{x^3+3x^2+x+3}\,dx = \int \frac{2}{x+3}\,dx - \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \log\frac{(x+3)^2}{x^2+1} + \operatorname{arctg} x + c.$$

Applicando la formula di Barrow, si ottiene

$$\int_0^1 \frac{5(1-x)}{x^3+3x^2+x+3}\,dx = \left[\log\frac{(x+3)^2}{x^2+1} + \operatorname{arctg} x\right]_0^1 = \log\frac{8}{9} + \frac{\pi}{4}$$

e

$$\int_1^{+\infty} \frac{5(1-x)}{x^3+3x^2+x+3}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\log\frac{(b+3)^2}{b^2+1} + \operatorname{arctg} b - \log 8 - \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{4} - \log 8.$$

Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 2. *Si disegni sul piano di Gauss il triangolo che ha come vertici le soluzioni dell'equazione* $x^3 - (2+i)x^2 + (2-2i)x = 0$ *e si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione del triangolo attorno all'asse orizzontale.*

Svolgimento. Si ha $x^3 - (2+i)x^2 + (2-2i)x = x[x^2 - (2+i)x + (2-2i)]$ e quindi una soluzione è $z_1 = 0$. Le soluzioni dell'equazione di secondo grado $x^2 - (2+i)x + (2-2i) = 0$ sono

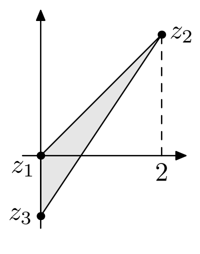
$$z_{2,3} = \frac{(2+i) \pm [(2+i)^2 - 4(2-2i)]^{1/2}}{2} = \frac{(3i-1) \pm [12i-5]^{1/2}}{2},$$

ove $[12i - 5]^{1/2}$ indica una, qualsiasi, delle radici quadrate di $12i - 5$.

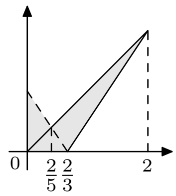
Il numero complesso $x + iy$, con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, è una radice di $12i - 5$ se, e solo se,

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 3 \end{cases}.$$

Dunque $z_2 = 2 + 2i$ e $z_3 = -i$ e nel piano di Gauß, i tre punti sono i vertici del triangolo evidenziato qui a fianco.



Per determinare il volume, può essere utile ribaltare la parte del triangolo che si trova al di sotto dell'asse e considerare il volume del solido generato dalla rotazione della figura così ottenuta. Il volume del solido è quindi



$$V = \pi\left[\int_0^{2/5}\left(1-\frac{3}{2}x\right)^2 dx + \int_{2/5}^2 x^2 dx - \int_{2/3}^2\left(\frac{3}{2}x-1\right)^2 dx\right] = \frac{242}{225}\pi.$$

Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 3. *Si calcoli la somma della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\log\sqrt{2^n}}{2ne^{2n}}.$$

Svolgimento. Osserviamo che $\log\sqrt{2^n} = \dfrac{n\log 2}{2}$ e quindi si tratta di calcolare la somma della serie

$$\frac{\log 2}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{e^{2n}} = \frac{\log 2}{4e^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{e^{2n}} = \frac{\log 2}{4e^2}\cdot\frac{1}{1-e^{-2}} = \frac{\log 2}{4(e^2-1)};$$

essendo, a meno del prodotto per una costante, la somma della serie geometrica di ragione e^{-2}. □

ESERCIZIO 4. *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2\cos x}{\cos x(1-\cos x)\log(1-x^2)}.$$

Svolgimento. Utilizzando gli sviluppi di McLaurin, si ha

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4), \qquad x^2\cos x = x^2\left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4),$$
$$\log(1-x^2) = -x^2 + o(x^2);$$

e quindi

$$\frac{\sin^2 x - x^2\cos x}{\cos x(1-\cos x)\log(1-x^2)} = \frac{-\frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{2} + o(x^4)}{(1+o(1))(\frac{x^2}{2} + o(x^2))(-x^2 + o(x^2))} = \frac{\frac{x^4}{6} + o(x^4)}{-\frac{x^4}{2} + o(x^4)}.$$

Passando al limite per $x \to 0$, possiamo cancellare gli addendi trascurabili ed ottenere il valore del limite richiesto, ovvero $-\frac{1}{3}$. □

ESERCIZIO 1. *Si consideri la funzione razionale* $f(x) = \dfrac{2-9x}{x^3+2x^2+x+2}$ *e si osservi che il denominatore si annulla per* $x=-2$. *Si determini una primitiva per* $f(x)$ *e si calcolino*

$$\int_0^1 f(x)\,dx \qquad ed \qquad \int_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Svolgimento. Si ha $x^3+2x^2+x+2 = (x+2)(x^2+1)$ e quindi

$$\frac{2-9x}{x^3+2x^2+x+2} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} A+B=0 \\ 2B+C=-9 \\ A+2C=2 \end{cases}.$$

Possiamo quindi concludere che

$$\int \frac{2-9x}{x^3+2x^2+x+2}\,dx = \int \frac{4}{x+2}\,dx - \int \frac{4x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \log\frac{(x+2)^4}{(x^2+1)^2} - \operatorname{arctg} x + c.$$

Applicando la formula di Barrow, si ottiene

$$\int_0^1 \frac{2-9x}{x^3+2x^2+x+2}\,dx = \left[\log\frac{(x+2)^4}{(x^2+1)^2} - \operatorname{arctg} x\right]_0^1 = \log\frac{81}{64} - \frac{\pi}{4}$$

e

$$\int_1^{+\infty} \frac{2-9x}{x^3+2x^2+x+2}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\log\frac{(b+2)^4}{(b^2+1)^2} - \operatorname{arctg} x - \log\frac{81}{4} + \frac{\pi}{4}\right] = -\frac{\pi}{4} - \log\frac{81}{4}.$$

Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 2. *Si disegni sul piano di Gauss il triangolo che ha come vertici le soluzioni dell'equazione* $x^3-(2-i)x^2+(2-4i)x=0$ *e si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione del triangolo attorno all'asse orizzontale.*

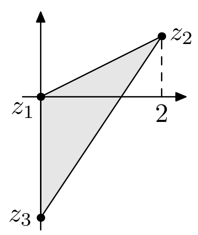
Svolgimento. Si ha $x^3-(2-i)x^2+(2-4i)x = x[x^2-(2-i)x+(2-4i)]$ e quindi una soluzione è $z_1=0$. Le soluzioni dell'equazione di secondo grado $x^2-(2-i)x+(2-4i)=0$ sono

$$z_{2,3} = \frac{(2-i)\pm[(2-i)^2-4(2-4i)]^{1/2}}{2} = \frac{(2-i)\pm[12i-5]^{1/2}}{2},$$

ove $[12i-5]^{1/2}$ indica una, qualsiasi, delle radici quadrate di $12i-5$.

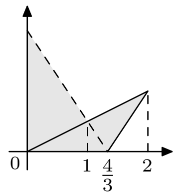
Il numero complesso $x+iy$, con $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, è una radice di $12i-5$ se, e solo se,

$$\begin{cases} x^2-y^2=-5 \\ 2xy=4 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} x=\pm2 \\ y=\pm3 \end{cases}.$$



Dunque $z_2 = 2+i$ e $z_3=-2i$ e nel piano di Gauß, i tre punti sono i vertici del triangolo evidenziato qui a fianco.

Per determinare il volume, può essere utile ribaltare la prte del triangolo che si trova al di sotto dell'asse e considerare il volume del solido generato dalla rotazione della figura così ottenuta. Il volume del solido è quindi



$$V = \pi \left[\int_0^1 \left(2 - \frac{3}{2}x\right)^2 dx + \int_1^2 \frac{x^2}{4}\, dx - \int_{4/3}^2 \left(\frac{3}{2}x - 2\right)^2 dx \right] = \frac{19}{9}\pi.$$

Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 3. *Si calcoli la somma della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log \sqrt{3^n}}{3ne^{3n}}.$$

Svolgimento. Osserviamo che $\log \sqrt{3^n} = \dfrac{n \log 3}{2}$ e quindi si tratta di calcolare la somma della serie

$$\frac{\log 3}{6} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{3n}} = \frac{\log 3}{6e^3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e^{3n}} = \frac{\log 3}{6e^3} \cdot \frac{1}{1 - e^{-3}} = \frac{\log 3}{6(e^3 - 1)};$$

essendo, a meno del prodotto per una costante, la somma della serie geometrica di ragione e^{-3}. □

ESERCIZIO 4. *Si calcoli*

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x - \operatorname{tg}^2 x}{e^x (\sin x - x) \log(1 + x)}.$$

Svolgimento. Utilizzando gli sviluppi di McLaurin, si ha

$$x \sin x = x \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) = x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4), \qquad \operatorname{tg}^2 x = \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 = x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4),$$
$$\log(1 + x) = x + o(x);$$

e quindi

$$\frac{x \sin x - \operatorname{tg}^2 x}{e^x (\sin x - x) \log(1 + x)} = \frac{-\frac{x^4}{6} - \frac{2x^4}{3} + o(x^4)}{(1 + o(1))(-\frac{x^3}{6} + o(x^3))(x + o(x))} = \frac{-\frac{5x^4}{6} + o(x^4)}{-\frac{x^4}{6} + o(x^4)}.$$

Passando al limite per $x \to 0$, possiamo cancellare gli addendi trascurabili ed ottenere il valore del limite richiesto, ovvero 5. □

ESERCIZIO 1. *Si consideri la funzione razionale* $f(x) = \dfrac{5x+1}{x^3+x^2+x+1}$ *e si osservi che il denominatore si annulla per* $x=-1$. *Si determini una primitiva per* $f(x)$ *e si calcolino*

$$\int_0^1 f(x)\,dx \qquad \textit{ed} \qquad \int_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Svolgimento. Si ha $x^3+x^2+x+1 = (x+1)(x^2+1)$ e quindi

$$\frac{5x+1}{x^3+x^2+x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} A+B=0 \\ B+C=5 \\ A+C=1 \end{cases}.$$

Possiamo quindi concludere che

$$\int \frac{5x+1}{x^3+x^2+x+1}\,dx = \int \frac{-2}{x+1}\,dx + \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + 3\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \log\frac{x^2+1}{(x+1)^2} + 3\operatorname{arctg} x + c.$$

Applicando la formula di Barrow, si ottiene

$$\int_0^1 \frac{5x+1}{x^3+x^2+x+1}\,dx = \left[\log\frac{x^2+1}{(x+1)^2} + 3\operatorname{arctg} x\right]_0^1 = \frac{3\pi}{4} - \log 2$$

e

$$\int_1^{+\infty} \frac{5x+1}{x^3+x^2+x+1}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\log\frac{b^2+1}{(b+1)^2} + 3\operatorname{arctg} b + \log 2 - \frac{3\pi}{4}\right] = \frac{3\pi}{4} + \log 2.$$

Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 2. *Si disegni sul piano di Gauss il triangolo che ha come vertici le soluzioni dell'equazione* $x^3-2x^2+(1-2i)x=0$ *e si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione del triangolo attorno all'asse orizzontale.*

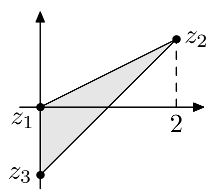
Svolgimento. Si ha $x^3-2x^2+(1-2i)x = x[x^2-2x+(1-2i)]$ e quindi una soluzione è $z_1=0$. Le soluzioni dell'equazione di secondo grado $x^2-2x+(1-2i)=0$ sono

$$z_{2,3} = 1 \pm [1-(1-2i)]^{1/2} = 1 \pm [2i]^{1/2},$$

ove $[2i]^{1/2}$ indica una, qualsiasi, delle radici quadrate di $2i$.

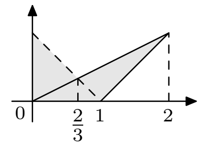
Il numero complesso $x+iy$, con $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, è una radice di $2i$ se, e solo se,

$$\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ 2xy=2 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} x=\pm1 \\ y=\pm1 \end{cases}.$$



Dunque $z_2 = 2+i$ e $z_3=-i$ e nel piano di Gauß, i tre punti sono i vertici del triangolo evidenziato qui a fianco.

Per determinare il volume, può essere utile ribaltare la parte del triangolo che si trova al di sotto dell'asse e considerare il volume del solido generato dalla rotazione della figura così ottenuta. Il volume del solido è quindi



$$V = \pi \left[\int_0^{2/3} (1-x)^2 dx + \int_{2/3}^{2} \frac{x^2}{4}\, dx - \int_1^2 (x-1)^2 dx \right] = \frac{17}{27}\pi.$$

Ciò conclude la discussione. $\square$

ESERCIZIO 3. *Si calcoli la somma della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log \sqrt{5^n}}{5ne^{5n}}.$$

Svolgimento. Osserviamo che $\log \sqrt{5^n} = \frac{n \log 5}{2}$ e quindi si tratta di calcolare la somma della serie

$$\frac{\log 5}{10} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{5n}} = \frac{\log 5}{10e^5} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e^{5n}} = \frac{\log 5}{10e^5} \cdot \frac{1}{1-e^{-5}} = \frac{\log 5}{10(e^5-1)};$$

essendo, a meno del prodotto per una costante, la somma della serie geometrica di ragione e^{-5}. $\square$

ESERCIZIO 4. *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log^2(1+x) - x^2 e^{-x}}{(x+1)(x-\sinh x)\operatorname{tg} x}.$$

Svolgimento. Utilizzando gli sviluppi di McLaurin, si ha

$$x^2 e^{-x} = x^2 \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right) = x^2 - x^3 + \frac{x^4}{2} + o(x^4),$$
$$\log^2(1+x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 = x^2 - x^3 + \frac{11x^4}{12} + o(x^4),$$
$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \qquad \operatorname{tg} x = x + o(x);$$

e quindi

$$\frac{\log^2(1+x) - x^2 e^{-x}}{(x+1)(x-\sinh x)\operatorname{tg} x} = \frac{\frac{11x^4}{12} - \frac{x^4}{2} + o(x^4)}{(1+o(1))(-\frac{x^3}{6} + o(x^3))(x+o(x))} = \frac{\frac{5x^4}{12} + o(x^4)}{-\frac{x^4}{6} + o(x^4)}.$$

Passando al limite per $x \to 0$, possiamo cancellare gli addendi trascurabili ed ottenere il valore del limite richiesto, ovvero $-\frac{5}{2}$. $\square$