Istituzioni di Matematiche (CH-CI-MT)

I^o foglio di esercizi

ESERCIZIO 1. *Si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha*

$$\frac{2}{x-1} \le \frac{x+1}{3x^2-2}.$$

Svolgimento. La disuguaglianza proposta è equivalente a

$$\frac{2(3x^2-2)-(x-1)(x+1)}{(x-1)(3x^2-2)} \le 0, \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{5x^2-3}{(x-1)(3x^2-2)} \le 0,$$

e si tratta quindi di determinare l'insieme su cui i segni di numeratore e denominatore sono discordi. Osservando i singoli fattori, si ha

$$\begin{array}{llcll}
5x^2-3>0 & \text{se } x<-\sqrt{\frac{3}{5}} \text{ oppure } x>\sqrt{\frac{3}{5}}; & \text{e} & 5x^2-3\le 0 & \text{se } -\sqrt{\frac{3}{5}}\le x\le\sqrt{\frac{3}{5}}; \\
3x^2-2>0 & \text{se } x<-\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ oppure } x>\sqrt{\frac{2}{3}}; & \text{e} & 3x^2-2<0 & \text{se } -\sqrt{\frac{2}{3}}<x<\sqrt{\frac{2}{3}}; \\
x-1>0 & \text{se } x>1; & \text{e} & x-1<0 & \text{se } x<1.
\end{array}$$

Confrontando i segni dei tre termini e ricordando che $\frac{3}{5} < \frac{2}{3}$, si può concludere che la disuguaglianza è soddisfatta se

$$x \in \left(-\infty, -\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) \cup \left[-\sqrt{\tfrac{3}{5}}, \sqrt{\tfrac{3}{5}}\right] \cup \left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}, 1\right).$$

Si osservi che vanno esclusi gli estremi su cui si annulla il denominatore, ma non quelli su cui si annulla il numeratore. □

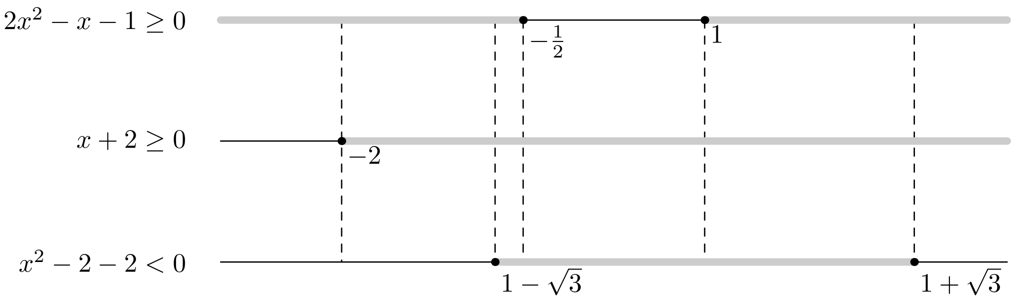
ESERCIZIO 2. *Si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha*

$$x+2 > \sqrt{4x^2-2x-2}.$$

Svolgimento. La disuguaglianza è equivalente alle condizioni

$$\begin{cases} 4x^2-2x-2 \ge 0 \\ x+2 \ge 0 \\ (x+2)^2 > 4x^2-2x-2 \end{cases}.$$

La prima perchè esista la radice in $\mathbb{R}$, la seconda perchè la radice quadrata di un numero reale è sempre non negativa e la successiva elevazione al quadrato può introdurre soluzioni della terza condizione con $x+2<0$. La terza condizione è equivalente a $3(x^2-2x-2)<0$ e quindi, mettendo insieme le tre condizioni si può ottenere la seguente tabella, ove sono evidenziati in grigio i sottoinsiemi della retta dove è soddisfatta la disuguaglianza indicata a fianco.



Quindi la disuguaglianza proposta è soddisfatta per $x \in \left(1-\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[1, 1+\sqrt{3}\right)$. □

ESERCIZIO 3. *Si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha*

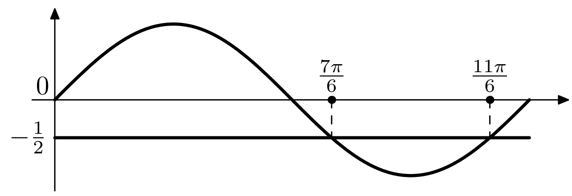
$$\frac{\sin 2x + \cos x}{\cos 2x} \leq 0.$$

Svolgimento. Si tratta di funzioni periodiche, di periodo 2π, quindi possiamo ridurci a studiare la questione sull'intervallo $[0, 2\pi]$. Per le formule di duplicazione $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$; quindi si ha $\sin 2x + \cos x = \cos x(2 \sin x + 1)$. Il problema è quindi di determinare il segno del quoziente

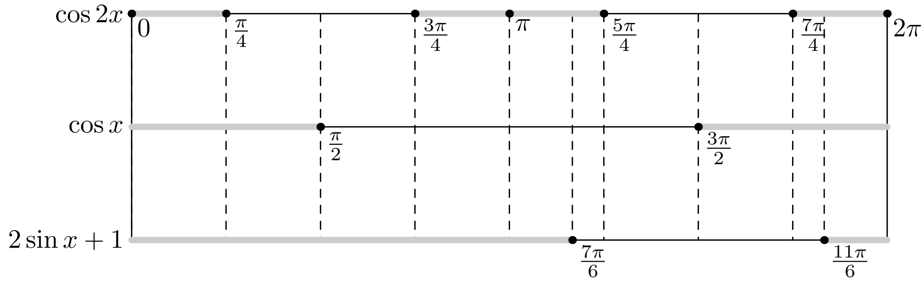
$$\frac{\cos x(2 \sin x + 1)}{\cos 2x}$$

ovvero il segno di ciascuno dei termini che compaiono in esso: $\cos 2x$ $\cos x$ e $2 \sin x + 1$.

Per quanto riguarda i primi due, si tratta di ricordare il segno del coseno, col procedere della variabile; nel terzo caso, si osservi che $2 \sin x + 1 > 0$ se, e solo se, $\sin x > -\frac{1}{2}$, e si ricordi l'andamento della funzione seno (cf. la figura qui sotto)



Possiamo raccogliere i segni dei tre termini nella tabella qui sotto, evidenziando gli intervalli su cui i termini sono positivi.



La conclusione è che $\frac{\sin 2x+\cos x}{\cos 2x} \leq 0$ quando x varia nell'insieme

$$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left(\frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}\right].$$

Notare la presenza o meno degli estremi degli intervalli per evitare i punti in cui si annulla il denominatore.

□

ESERCIZIO 4. *Si disegnino nel piano i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ per cui si ha*

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 - 2x + 1 > 1 \\ y + x - 2 \leq 0 \end{cases}.$$

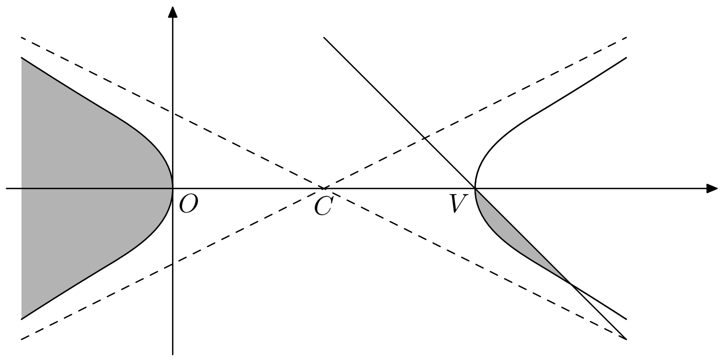
Svolgimento. La curva di equazione $x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 1$, ovvero $(x-1)^2 - 4y^2 = 1$, è un'iperbole con gli assi paralleli agli assi coordinati ed il centro nel punto $C = (1, 0)$. Gli asintoti sono le rette $a_1 : x - 1 + 2y = 0$ ed $a_2 : x - 1 - 2y = 0$ ed i vertici sono i punti $O = (0, 0)$ e $V = (2, 0)$ (intersezioni con gli assi). I punti che soddisfano alla disuguaglianza $x^2 - 4y^2 - 2x + 1 > 1$, ovvero $(x - 1)^2 - 4y^2 > 1$, sono quelli che si trovano dall'altra parte del centro rispetto all'iperbole.

La curva di equazione $y + x - 2 = 0$ è invece la retta, passante per i punti $(2, 0)$ e $(0, 2)$, ed i punti che soddisfano alla disuguaglianza $y + x - 2 \leq 0$, ovvero $y \leq 2 - x$, sono quelli che si trovano al di sotto della retta.

Si osservi che la curva e la retta si intersecano nei due punti soluzione del sistema

$$\begin{cases} (x - 1)^2 - 4y^2 = 1 \\ y = 2 - x \end{cases}$$

ovvero $V = (2, 0)$ e $P = (\frac{8}{3}, -\frac{2}{3})$ e quindi la soluzione del problema è data dall'intersezione dei due insiemi di soluzioni, ovvero dalla regione evidenziata nella figura qui sotto.



Il bordo costituito dal segmento di retta è compreso nella regione perchè è richiesta una disuguaglianza debole, mentre non sono compresi gli archi di iperbole. □

ESERCIZIO 5. *Si indichino con t_C e t_F le misure della temperatura fatte rispettivamente in gradi Celsius e Fahrenheit. Sapendo che*

	t_C	t_F
ghiaccio fondente	0	32
ebollizione	100	212

si scrivano la funzione lineare che esprime t_F in funzione di t_C e la sua inversa. Si esprima in gradi Fahrenheit la temperatura umana normale (36.5^oC).

Svolgimento. □

ESERCIZIO 6. *Si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha*

(a) $2x - 7 = |x + 1|$;
(b) $|4x + 5| = |8x - 3|$;
(c) $|x - 3|^2 - 4|x - 3| > 12$;
(d) $1 - x < (1 - |x|)^2$;
(e) $\sqrt{(3x - 2)^2} = 2 - 3x$;
(f) $\left|\dfrac{x + 5}{2 - x}\right| < 6$;
(g) $\dfrac{x - 1}{x + 2} < \dfrac{2x + 1}{x + 1}$;
(h) $|x - |x|| \geq 1$;
(i) $\dfrac{|x| - x}{x^2 - |x| + 2} < 1$;
(j) $\log\left|\dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}\right| < 0$;
(k) $\log\left|\dfrac{x - 1}{x^2 + 1}\right| < 0$;
(l) $\dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} > 0$;
(m) $\sqrt{\cos x - \sin x} > 1$;
(n) $0 < \dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \leq 1$;
(o) $\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x + \cos x} \leq 0$;
(p) $\dfrac{1}{x} + \sqrt{4 - x^2} > 0$;
(q) $\dfrac{\sqrt{x + 4} - \sqrt{x - 1}}{\sqrt{x - 4} + \sqrt{x + 1}} \leq 1$;
(r) $\sqrt{x^2 + 16} - \sqrt{6x + 5} \geq 0$;
(s) $2^{2x+1} \geq 5^x$;
(t) $2\log_2 x \leq 1 + \log_2(3x - 2)$.

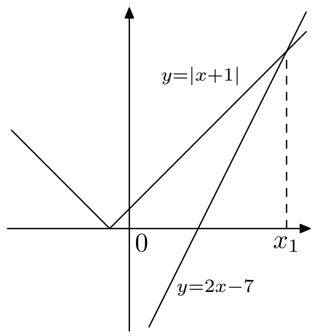
Svolgimento. Rispondiamo alla domanda (a), lasciando le altre al lettore.

(a). L'equazione data è equivalente alle condizioni

$$\begin{cases} 2x - 7 = x + 1 & \text{per } x \geq -1 \\ 2x - 7 = -x - 1 & \text{per } x < -1 \end{cases}$$

e quindi vi è un'unica soluzione $x_1 = 8$.

La risposta può essere illustrata graficamente osservando che la soluzione del problema corrisponde all'ascissa dell'intersezione tra i grafici delle due funzioni $f(x) = 2x - 7$ e $g(x) = |x + 1|$. La situazione è descritta nel disegno qui a fianco.



I rimanenti casi sono lasciati al lettore. □

ESERCIZIO 7. *Si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha*

$$
\begin{aligned}
&(a)\ \sin 2x + \sin 4x = 0;\\
&(b)\ \mathrm{tg}2x - 2\cos x = 0;\\
&(c)\ \cos^2 2x - \cos^2 x = 0;\\
&(d)\ \sin 2x(2\sin x - 1) = 2\cos x;\\
&(e)\ \mathrm{tg}(\tfrac{\pi}{3} + x) = \mathrm{tg}(\tfrac{\pi}{3} - x) + 4;\\
&(f)\ \sin(\tfrac{2\pi}{3} + x) + \sin(\tfrac{\pi}{3} - x) = 1;\\
&(g)\ \sin x > 2\cos^2 x - 1;\\
&(h)\ \sin 3x = 1 - 3\sin x - \cos 2x.
\end{aligned}
$$

Svolgimento. Svolgiamo, ad esempio, l'esercizio (b), lasciando gli altri al lettore.

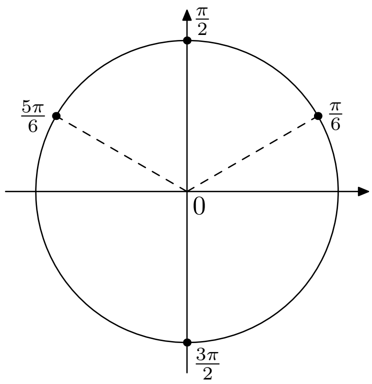
Osserviamo che $\mathrm{tg}2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$ è definita per $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$, e per questi valori della x, l'equazione data è equivalente a

$$2\cos x(\sin x - \cos 2x) = 0.$$

Il primo fattore si annulla per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, mentre il secondo, ricordando che $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, si annulla quando $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ ovvero per $\sin x = -1$, e $\sin x = \frac{1}{2}$. In conclusione, le soluzioni dell'equazione data sono gli elementi dell'insieme

$$S = \left\{\, k\pi + (-1)^k \tfrac{\pi}{6},\ \tfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \,\right\}.$$

Qui a fianco si possono vedere le soluzioni rappresentate come punti della circonferenza goniometrica e quindi a meno di multipli di 2π.



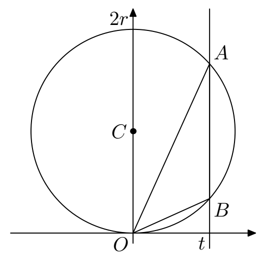
Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 8. *Si consideri la circonferenza di raggio r, con centro C sulla semiretta positiva dell'asse verticale e tangente all'asse orizzontale nell'origine e se ne scriva l'equazione cartesiana.*

Fissato un punto $(t, 0)$ dell'asse orizzontale, come nel disegno a fianco, si consideri la retta verticale $x = t$ e siano A e B le intersezioni di questa retta con la circonferenza.

Si determinino le coordinate dei punti A e B e la lunghezza del segmento AB in funzione dell'ascissa $t \in [-r, r]$.

Si determini l'area $A(t)$ del triangolo AOB come funzione dell'ascissa t.



Svolgimento. La circonferenza ha equazione $x^2 + (y - r)^2 = r^2$ e quindi i punti A e B sono determinati risolvendo il sistema

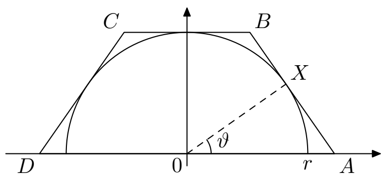
$$\begin{cases} x = t \\ x^2 + y^2 - 2ry = 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad A = \begin{pmatrix} t \\ r + \sqrt{r^2 - t^2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} t \\ r - \sqrt{r^2 - t^2} \end{pmatrix},$$

ove $t \in [-r, r]$. La lunghezza del segmento AB si ottiene facendo la differenza delle ordinate dei due punti (che hanno la stessa ascissa) e quindi $|AB| = 2\sqrt{r^2 - t^2}$.

Il triangolo AOB ha come base il segmento AB e come altezza il valore assoluto dell'ascissa comune ai due punti della base e quindi la sua area è uguale ad $A(t) = |t|\sqrt{r^2 - t^2}$. □

ESERCIZIO 9. *Si consideri un trapezio isoscele $ABCD$ circoscritto ad una semicirconferenza di raggio r, centrata nell'origine, come nella figura sottostante.*

(a) Si determinino l'equazione della retta contenente il segmento AB e le coordinate dei due estremi A e B in funzione dell'angolo ϑ.
(b) Si determinino il perimetro, $P(\vartheta)$, e l'area, $A(\vartheta)$, del trapezio in funzione dell'angolo ϑ.



Svolgimento. Come nel disegno, indichiamo con X il punto di tangenza alla circonferenza del lato AB. Le sue coordinate sono $X = \binom{r\cos\vartheta}{r\sin\vartheta}$ e quindi la retta contenente il segmento AB è la retta t, perpendicolare al raggio OX e passante per X, ovvero $t : \cos\vartheta x + \sin\vartheta y - r = 0^{(*)}$. I punti A e B sono le intersezioni di questa retta con le rette $y = 0$ ed $y = r$ rispettivamente e quindi si tratta dei punti $A = \binom{r\frac{1}{\cos\vartheta}}{0}$ e $B = \binom{r\frac{1-\sin\vartheta}{\cos\vartheta}}{r}$, al variare di ϑ in $[0, \frac{\pi}{2})$.

Da quanto visto possiamo dedurre che

$$\|\overrightarrow{AD}\| = 2r\frac{1}{\cos\vartheta}, \qquad \|\overrightarrow{BC}\| = 2r\frac{1-\sin\vartheta}{\cos\vartheta}, \qquad \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{r^2\mathrm{tg}^2\vartheta + r^2} = r\frac{1}{\cos\vartheta};$$

quindi, il perimetro e l'area del trapezio sono

$$P(\vartheta) = 2r\frac{3-\sin\vartheta}{\cos\vartheta} \qquad \text{e} \qquad A(\vartheta) = r^2\frac{2-\sin\vartheta}{\cos\vartheta}.$$

Fine della discussione. □

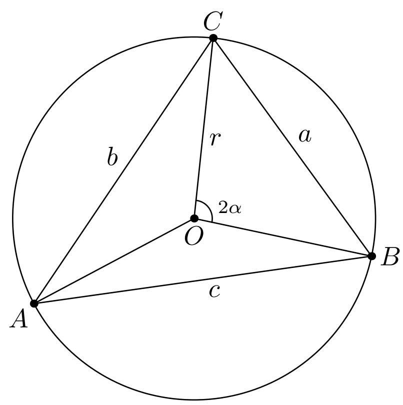
ESERCIZIO 10. *Si consideri un triangolo di angoli α, β e γ, inscritto in una circonferenza di raggio r, e si determinino le relazioni tra il raggio e le lunghezze dei lati del triangolo.*

Svolgimento. Indichiamo. come di consueto con A, B e C i vertici degli angoli α, β e γ e con a, b e c i lati opposti a tali vertici.

Indicato con O il centro della circonferenza circoscritta al triangolo [cf. il disegno qui a lato], osserviamo che il triangolo COB è un triangolo isoscele, in quanto i lati BO e CO sono raggi della circonferenza e che l'angolo racchiuso tra tali lati è il doppio di α perchè un angolo al centro è il doppio del corrispondente angolo alla circonferenza. Dunque, applicando il *Teorema dei Coseni* al triangolo COB, si ricava che

$$a^2 = 2r^2(1 - \cos 2\alpha) = 4r^2\sin^2\alpha,$$

perchè $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, e quindi $a = 2r\sin\alpha$. Analogamente, si ricava che $b = 2r\sin\beta$ e $c = 2r\sin\gamma$.



A margine osserviamo che la lunghezza del diametro della circonferenza circoscritta al triangolo è uguale al rapporto tra la lunghezza di un lato ed il seno dell'angolo opposto e che talvolta viene enunciato in questo modo il *Teorema dei Seni*. □

(*) Il raggio OX è contenuto nella retta di equazione $y = \mathrm{tg}\vartheta x$ e quindi la retta t, essendo perpendicolare, ha coefficiente angolare $-1/\mathrm{tg}\vartheta$. La condizione di passaggio per X determina completamente l'equazione.

ESERCIZIO 11. *Si deduca dall'esercizio precedente che, dati tre angoli α, β e γ, con $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, si ha*

$$\sin^2\gamma = \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma.$$

Svolgimento. Essendo $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, i tre angoli, α, β e γ sono gli angoli interni di un triangolo, i cui lati opposti, a b e c, sono determinati a meno di un fattore di proporzionalità. In particolare, se inscriviamo il triangolo in una circonferenza di diametro 1, deduciamo dall'esercizio precedente che le misure dei tre lati coincidono con il seno dei tre angoli, ovvero $a=\sin\alpha$, $b=\sin\beta$, $c=\sin\gamma$. Applicando il Teorema dei Coseni, si ha che $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$, e ciò è quanto dovevamo verificare. □

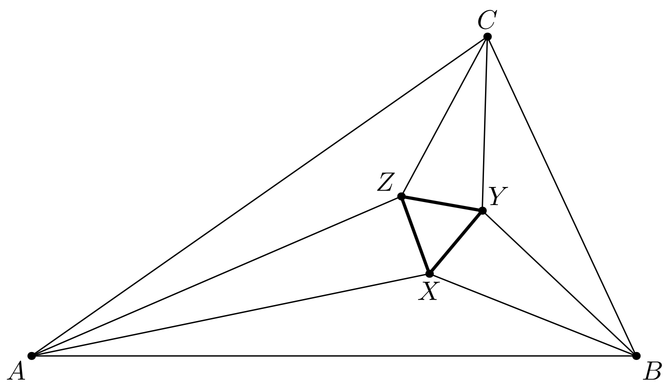
ESERCIZIO 12. Ricaviamo attraverso l'uso delle formule trigonometriche una proprietà notevole dei triangoli, nota col nome di *Teorema di Morley* [1899] (si veda la figura qui sotto).

Sia dato un triangolo ABC e, per ogni angolo, si considerino i segmenti che lo dividono in tre parti uguali (trisettrici). Detti X, Y, Z i punti di intersezione tra le coppie di trisettrici adiacenti ad ogni lato, il triangolo XYZ è un triangolo equilatero.

Svolgimento. Indichiamo con 3α, 3β e 3γ le misure degli angoli del triangolo ABC, e con a, b e c le misure dei lati opposti ai vertici omonimi. Dunque, si ha $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{3}$.

È chiaro che il problema non cambia se si sostituisce al triangolo dato un qualsiasi triangolo ad esso simile. Supponiamo quindi, come nell'esercizio precedente, che il triangolo ABC sia inscritto in una circonferenza di diametro 1, e perciò che le misure dei suoi lati siano $a=\sin 3\alpha$, $b=\sin 3\beta$ e $c=\sin 3\gamma$. Nel triangolo AXB i due angoli adiacenti al lato AB, misurano α e β, quindi, applicando il *Teorema dei Seni*, si ricava

$$|AX| = \frac{c\sin\beta}{\sin(\pi-\alpha-\beta)} = \frac{\sin 3\gamma\,\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sin 3\gamma\,\sin\beta}{\sin(\frac{\pi}{3}-\gamma)}.$$



Ora si osservi che, dalle formule di addizione, si deduce che

$$\sin 3\gamma = 3\sin\gamma - 4\sin^3\gamma = 4\sin\gamma\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \sin^2\gamma\right] = 4\sin\gamma\left(\sin\frac{\pi}{3}-\sin\gamma\right)\left(\sin\frac{\pi}{3}+\sin\gamma\right).$$

Applicando le formule di prostaferesi e poi le formule di duplicazione, si ricava

$$\left(\sin\frac{\pi}{3}-\sin\gamma\right)\left(\sin\frac{\pi}{3}+\sin\gamma\right) = 2\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\gamma\right)\,2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\gamma\right) = \\ = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\gamma\right)$$

e, mettendo insieme le due osservazioni precedenti, si può scrivere

$$\sin 3\gamma = 4\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\gamma\right).$$

Dunque, per quanto visto,

$$|AX| = \frac{\sin 3\gamma \, \sin\beta}{\sin(\frac{\pi}{3}-\gamma)} = 4\sin\gamma\,\sin\beta\,\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right).$$

Ragionando analogamente sul triangolo AZC, si ricava che

$$|AZ| = 4\sin\gamma\,\sin\beta\,\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right).$$

Dunque, applicando il *Teorema dei Coseni* al triangolo AXZ, si ottiene

$$|ZX|^2 = |AX|^2 + |AZ|^2 - 2|AZ||AX|\cos\alpha =$$
$$= 16\sin^2\beta\sin^2\gamma\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)\cos\alpha\right].$$

Ricordando che la somma dei tre angoli $\frac{\pi}{3}+\gamma$, $\frac{\pi}{3}+\beta$, α, è uguale a π, possiamo applicare quanto visto nell'esercizio precedente e concludere che

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)\cos\alpha = \sin^2\alpha$$

e quindi $|ZX| = 4\sin\beta\sin\gamma\sin\alpha$. In modo analogo si ottiene che i lati XY ed YZ hanno la stessa lunghezza e quindi il triangolo è equilatero.

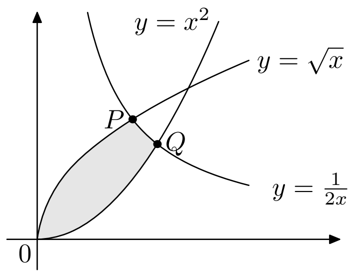
Questa dimostrazione è dovuta ad A. Letac [*Solution (Morley's triangle)*, Problem 490, Sphinx 9 (1939), p.46] ed è stata riprodotta dal sito di Alexander Bogomolny (`http://www.cut-the-knot.com/triangle/Morley/index.shtml`) dove si possono trovare altre dimostrazioni di questo risultato ed interessanti approfondimenti sul Teorema di Morley. □

ESERCIZIO 13. *Si Considerino i sottoinsiemi del piano*

$$S_1 = \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x>0, y<\frac{1}{2x} \right\} \qquad \text{ed} \qquad S_2 = \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2<y<\sqrt{x} \right\}$$

e si disegni nel piano il sottoinsieme $S_1\cap S_2$.

Svolgimento. Si consideri il disegno qui sotto.



L'insieme S_1 è la porzione di piano che si trova al di sopra della semiretta positiva dell'asse delle ascisse ed al di sotto del grafico della funzione $f(x) = 1/2x$ sulla stessa semiretta. L'insieme S_2 è la porzione limitata di piano racchiusa tra i grafici delle funzioni $g(x) = x^2$ ed $h(x) = \sqrt{x}$. L'intersezione tra i due insiemi è quindi la porzione di piano evidenziata in grigio nel disegno qui a fianco.

Possiamo aggiungere le coordinate dei due punti di intersezione tra il grafico di f ed i grafici di h e g, ovvero $P = \binom{1/\sqrt[3]{4}}{1/\sqrt[3]{2}}$ e $Q = \binom{1/\sqrt[3]{2}}{1/\sqrt[3]{4}}$.

Fine della discussione. □

ESERCIZIO 14. *Si disegnino i seguenti sottoinsiemi del piano $\mathbb{R}^2$.*

$$(a)\quad \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x+y}{x-y}\ge 0 \right\};$$
$$(b)\quad \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{y-x^2}{x+y}> 0 \right\};$$
$$(c)\quad \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+y<0,\; x^2+y^2=1 \right\};$$
$$(d)\quad \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; xy\ge\tfrac{1}{2},\; x^2+y^2=1 \right\};$$
$$(e)\quad \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \sin x - y\le 0,\; y\le 2 \right\};$$
$$(f)\quad \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \cos x\le y\le \sin x+2 \right\};$$
$$(g)\quad \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x\le y\le 2\sin(x-3),\; x\in[0,5] \right\};$$
$$(h)\quad \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \sqrt{2|3-x^2|}\le y\le |x+1| \right\}.$$

$\square$

ESERCIZIO 15. *Per ciascuna delle seguenti disuguaglianze, si determini un intero n_0 tale che la disuguaglianza sia soddisfatta per $n > n_0$.*

$$(a)\ \left|\frac{2n}{2n-1} - 1\right| < 0.01;$$
$$(b)\ \left|\frac{3n^2+4}{2n^2+1} - \frac{3}{2}\right| < 0.01;$$
$$(c)\ \left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right| < 0.01.$$

$\square$

ESERCIZIO 16. *Si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ è definita la funzione* $\log(\log(\cos x + \sin x))$. $\square$

ESERCIZIO 17. *Si risolva il sistema* $\begin{cases} xy = 27 \\ 2\log_y x + 2\log_x y = 5 \end{cases}$.

Svolgimento. Cominciamo occupandoci dell'equazione $2\log_y x + 2\log_x y = 5$. Posto $t = \log_y x$, si ha $\log_x y = \frac{1}{t}$ e l'equazione è equivalente ($t \neq 0$) a $2t^2 - 5t + 2 = 0$, che ha le due soluzioni reali $t = 2$ e $t = \frac{1}{2}$. Quindi il problema posto è equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} x = y^2 \\ xy = 27 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x^2 = y \\ xy = 27 \end{cases}$$

le cui soluzioni (reali) sono $x = 9$, $y = 3$ ed $x = 3$, $y = 9$. $\square$

ESERCIZIO 18. *Siano x, y e z numeri reali positivi, tali che $y = \log_2 x^3$ e $z = \log_x 2$. Si verifichi che $yz = 3$, qualunque sia il valore di x, e si determinino i tre numeri nel caso in cui* $\log_2 y - \log_2 z = \log_2 27$.

$\square$

ESERCIZIO 19. *Si verifichino le seguenti affermazioni*[(†)]*:*

(a) $0 \leq \log_{17} 34 - \log_{34} 68 < \frac{1}{20}$.

(b) dati due numeri reali positivi, a e b; se $a^2 + b^2 = 23ab$, allora $\log a + \log b = 2\log(\frac{a+b}{5})$*;*

(c) dati due numeri reali positivi, a e b, si ha $a^a b^b \geq a^b b^a$;

(d) dati tre numeri reali positivi, diversi da 1, a, b e c, si ha $\log_a b \log_b c \log_c a = 1$;

(e) dati tre numeri reali, maggiori di 1, a, b e c, si ha

$$\log_a x \cdot \log_b x + \log_b x \cdot \log_c x + \log_c x \cdot \log_a x = \frac{\log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x}{\log_{abc} x},$$

per ogni numero reale positivo $x \neq 1$;

(f) dati due numeri reali positivi, a e b, si ha $\log(a+b) \geq \log 2 + \frac{1}{2}(\log a + \log b)$.

Svolgimento. Svolgiamo, a titolo di esempio, il punto (*e*). Nella formula le basi e l'argomento dei vari logaritmi sono tutti diversi da 1, quindi, valgono le relazioni fondamentali

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}, \qquad \log_b x = \frac{1}{\log_x b}, \qquad \log_c x = \frac{1}{\log_x c};$$

e possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \log_a x \cdot \log_b x + \log_b x \cdot \log_c x + \log_c x \cdot \log_a x &= \frac{1}{\log_x a \cdot \log_x b} + \frac{1}{\log_x b \cdot \log_x c} + \frac{1}{\log_x a \cdot \log_x c} \\ &= \frac{\log_x a + \log_x b + \log_x c}{\log_x a \cdot \log_x b \cdot \log_x c} \\ &= \frac{\log_x (abc)}{\log_x a \cdot \log_x b \cdot \log_x c}. \end{aligned}$$

A questo punto, applicando di nuovo le relazioni fondamentali ($abc \neq 1$), si ottiene

$$\frac{\log_x (abc)}{\log_x a \cdot \log_x b \cdot \log_x c} = \frac{\log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x}{\log_{abc} x},$$

che è quanto volevamo. □

[(†)] Quando non sia esplicitamente indicata, la base dei logaritmi è il numero di Neper, ovvero indichiamo con $\log x$ il *logaritmo naturale* di x.