Istituzioni di Matematiche (CH-CI-MT)

II^o foglio di esercizi

ESERCIZIO 1. *Ricordiamo alcune formule, tutte verificabili per induzione sul numero N degli addendi:*

$$(a)\ \sum_{n=1}^{N}(2n-1)=N^2;$$

$$(b)\ \sum_{n=1}^{N} n=\frac{N(N+1)}{2};$$

$$(c)\ \sum_{n=1}^{N} n^2=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6};$$

$$(d)\ \sum_{n=1}^{N} n^3=\frac{N^2(N+1)^2}{4};$$

$$(e)\ \sum_{k=0}^{N} x^k=\frac{1-x^{N+1}}{1-x},\qquad (x\neq 1);$$

Il lettore provi a scrivere delle formule esplicite per le somme

$$\sum_{n=1}^{N} n^4 \qquad e \qquad \sum_{n=1}^{N} n^5,$$

quali funzioni di N.

Svolgimento. Le formule $(a)-(e)$ si verificano tutte per induzione sul numero N degli addendi. Mostriamo, ad esempio, la (b). Se $N=1$, a sinistra del segno di uguale si ha un unico addendo uguale ad 1 ed a destra si ha $\frac{1(1+1)}{2}=1$; quindi l'uguaglianza è verificata. Supponiamo ora che l'uguaglianza sia vera per l'intero N (*ipotesi induttiva*) e mostriamo che questo implica che l'uguaglianza vale anche per il successivo intero $N+1^{(*)}$. Infatti, in base all'ipotesi induttiva, si ha

$$\sum_{n=1}^{N+1} n=(N+1)+\sum_{n=1}^{N} n=(N+1)+\frac{N(N+1)}{2}=\frac{(N+1)(N+2)}{2}$$

che è proprio la formula (b), con $N+1$ in luogo di N.

In modo analogo si verificano le altre uguaglianze. Vogliamo ora esporre un idea di Fermat per calcolare le somme di potenze di interi. Poniamo

$$S_m(N)=\sum_{n=1}^{N} n^m,$$

e ricordiamo che, come abbiamo visto sopra,

$$S_1(N)=\sum_{n=1}^{N} n=\frac{N(N+1)}{2}.$$

$^{(*)}$ Ricordiamo che il Principio di Induzione si basa sul fatto che ogni numero naturale positivo si costruisce, a partire da 1, iterando un certo numero di volte l'operazione di *passaggio al successore*, cioè l'operazione di sommare 1. In questo modo, l'uguaglianza scritta, essendo vera per $N=1$, e per il successore di ogni numero per cui è vera, risulta essera vera per tutti i numeri naturali.

L'idea di Fermat consiste nel determinare le somme $S_m(N)$ con una formula ricorsiva al crescere dell'esponente m. Dalle proprietà elementari del coefficiente binomiale, si ha

- $\binom{N+m}{m+1} = \binom{N+m-1}{m} + \binom{N+m-1}{m+1}$, da cui si deduce, per induzione su N, la relazione

$$(*) \qquad \binom{N+m}{m+1} = \sum_{n=1}^{N} \binom{n+m-1}{m}$$

- inoltre, per $n \geq 1$, si ha

$$\binom{n+m-1}{m} = \frac{1}{m!} n(n+1)\cdots(n+m-1) = \frac{1}{m!}\left(n^m + A_1 n^{m-1} + \cdots + A_{m-1} n\right)$$

  ove $A_1, \dots, A_{m-1}$ sono opportuni coefficienti numerici. Allora, sommando i due membri dell'uguaglianza per $n = 1, \dots, N$, e tenuto conto di $(*)$, si ottiene

$$\binom{N+m}{m+1} = \frac{1}{m!}\left(S_m(N) + A_1 S_{m-1}(N) + \cdots + A_{m-1} S_1(N)\right)$$

  e quindi l'uguaglianza

$$\frac{N(N+1)\cdots(N+m)}{m+1} = \left(S_m(N) + A_1 S_{m-1}(N) + \cdots + A_{m-1} S_1(N)\right).$$

Esempi. Per $m = 1$ si ottiene così la formula nota. Per $m = 2$, $A_1 = 1$ e quindi

$$\frac{N(N+1)(N+2)}{3} = S_2(N) + S_1(N), \qquad \text{da cui si deduce} \qquad S_2(N) = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

Per $m = 3$, si ha $\binom{n+2}{3} = \frac{1}{3!} n(n+1)(n+2) = \frac{1}{6}(n^3 + 3n^2 + 2n)$ e quindi $A_1 = 3$ ed $A_2 = 2$, da cui si deduce

$$\frac{N(N+1)(N+2)(N+3)}{4} = S_3(N) + 3S_2(N) + 2S_1(N), \qquad \text{e quindi} \qquad S_3(N) = \frac{N^2(N+1)^2}{4}.$$

Per $m = 4$, si ha $\binom{n+3}{4} = \frac{1}{4!} n(n+1)(n+2)(n+3) = \frac{1}{4!}(n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n)$ e quindi $A_1 = 6$, $A_2 = 11$ ed $A_3 = 6$, da cui si deduce

$$\frac{N(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)}{5} = S_4(N) + 6S_3(N) + 11S_2(N) + 6S_1(N),$$

e quindi

$$S_4(N) = \frac{N(N+1)(6N^3 + 9N^2 + N - 1)}{30}.$$

Lasciamo al lettore il calcolo per $m = 5$. □

ESERCIZIO 2. *Siano $x_1, \dots, x_n$ numeri reali positivi Si mostri che, per ogni intero positivo n, si ha*(†)

$$x_1 \cdots x_n \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n.$$

(†) Dati n numeri reali positivi, si definiscono media aritmetica e geometrica dei numeri dati come

$$\mu = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \quad (\textit{media aritmetica}) \qquad \text{e} \qquad \gamma = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \quad (\textit{media geometrica})$$

Quindi, la disuguaglianza da dimostrare si può enunciare come il fatto che la media geometrica di n numeri reali positivi è sempre inferiore della loro media aritmetica.

Svolgimento. Dimostriamolo per induzione su n. Per $n = 1$ la tesi è $x_1 \leq \left(\frac{x_1}{1}\right)^1$ che è banalmente vera. Supponiamo quindi vera la disuguaglianza in questione per n numeri positivi e dimostriamo che la disuguaglianza analoga deve valere anche per $n + 1$ numeri.

Se $x_1 = \cdots = x_{n+1}$, la tesi è vera. Altrimenti vi è almeno un numero al di sotto della media ed uno al di sopra e non è restrittivo supporre che siano gli ultimi due, dato che la tesi non dipende dall'ordine con cui vengono presi i numeri. Sia quindi $\mu = \frac{x_1+\cdots+x_{n+1}}{n+1}$ ed $x_{n+1} = \mu - a < \mu < x_n = \mu + b$, con $a > 0 < b$. Consideriamo ora gli $n + 1$-numeri reali positivi così definiti

$$y_1 = x_1, \quad \ldots, \quad y_{n-1} = x_{n-1}, \quad y_n = \mu + b - a, \quad y_{n+1} = \mu,$$

ed osserviamo che si ha

$$\mu = \frac{x_1 + \cdots + x_{n+1}}{n+1} = \frac{y_1 + \cdots + y_{n+1}}{n+1} = \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n}, \qquad \text{e} \qquad x_n x_{n+1} < y_n y_{n+1}.$$

Essendo $y_1 = x_1, \ldots, y_{n-1} = x_{n-1}$ si deduce che

$$x_1 \ldots x_{n+1} \leq y_1 \ldots y_{n+1} = y_1 \ldots y_n \mu \leq \mu^n \mu = \mu^{n+1},$$

ove si è usata l'ipotesi induttiva $y_1 \cdots y_n \leq \mu^n$; e questa è la conclusione voluta. □

ESERCIZIO 3. *Si deduca come conseguenza dell'esercizio precedente che, per ogni intero positivo n, si ha*

$$(a) \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1};$$

$$(b) \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

Svolgimento. (a). Si considerino i numeri reali $x_1 = 1$, $x_2 = \cdots = x_{n+1} = 1 + \frac{1}{n}$ e si osservi che

$$\frac{x_1 + \cdots + x_{n+1}}{n+1} = \frac{1 + n(1 + \frac{1}{n})}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Allora, per quanto visto nell'esercizio precedente, si ha

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = x_1 \cdots x_{n+1} \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1};$$

che è la disuguaglianza voluta.

(b). Si considerino i numeri reali $x_1 = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^2$, $x_2 = \cdots = x_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$ e si osservi che

$$\frac{x_1 + \cdots + x_{n+1}}{n+1} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^2 + n\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}{n+1} = 1 + \frac{n+2}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} < 1 + \frac{1}{n}.$$

Allora, per quanto visto nell'esercizio precedente, si ha

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} = x_1 \cdots x_{n+1} \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1};$$

che è la disuguaglianza voluta. □

ESERCIZIO 4. *Si mostri che* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Svolgimento. Poichè $n \geq 1$, si ha $\sqrt[n]{n} = 1 + p_n$ con $p_n \geq 0$. Vogliamo mostrare che la successione $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente decrescente$^{(*)}$ e converge a zero. Si osservi che

$$p_{n+1} \leq p_n \iff (1+p_{n+1})^{n+1} \leq (1+p_n)^{n+1} \iff n+1 \leq n\sqrt[n]{n} \iff (n+1)^n \leq n^n n \iff \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq n.$$

L'ultima disuguaglianza è verificata per $n \geq 3$; quindi la successione $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente decrescente e limitata inferiormente e perciò convergente ad un numero reale $\ell \geq 0$. Si osservi poi che, per $n \geq 2$, dalla formula del binomio di Newton si ricava $0 \leq \binom{n}{2} p_n^2 \leq (1+p_n)^n = n$ e quindi $0 \leq p_n^2 \leq \frac{2n}{n(n-1)}$. Per il Teorema dei Carabinieri si conclude che $\ell^2 = 0$ e quindi la tesi. □

ESERCIZIO 5. *Si consideri la successione* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *di termine generale* $a_n = \dfrac{\log(n!)}{n}$.

(a) *Si mostri che la successione è crescente.*
(b) *Si mostri che, qualunque sia* $n \geq 1$, $a_{2n} - a_n \geq \frac{\log 2}{2}$.
(c) *Si deduca dai punti precedenti che,* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
(d) *Osservando che, qualunque sia* $n \geq 1$, $\sqrt[n]{n!} = e^{a_n}$, *si calcoli* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$.

Svolgimento. (a). Mostriamo che, qualunque sia $n \geq 1$, $a_{n+1} - a_n > 0$. Infatti,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{\log((n+1)!)}{n+1} - \frac{\log(n!)}{n} = \frac{\log((n+1)!^n) - \log(n!^{n+1})}{n(n+1)} > 0$$

se, e solo se,

$$\log\frac{(n+1)!^n}{n!^{n+1}} > 0 \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{(n+1)!^n}{n!^{n+1}} = \frac{(n+1)^n}{n!} > 1.$$

L'ultima disuguaglianza è evidente perchè $\frac{(n+1)^n}{n!} = \frac{n+1}{n}\frac{n+1}{n-1}\cdots\frac{n+1}{1} \geq n+1 > 1$.

(b). Si ha

$$\begin{aligned} a_{2n} - a_n &= \frac{\log((2n)!)}{2n} - \frac{\log(n!)}{n} = \frac{\log((2n)!) - 2\log(n!)}{2n} \\ &= \frac{\log(2n) + \log(2n-1) + \cdots + \log(n+1) - \log n - \log(n-1) - \cdots - \log 1}{2n} \\ &= \frac{\log(\frac{2n}{n}) + \log(\frac{2n-1}{n-1}) + \cdots + \log(\frac{n+1}{1})}{2n} \geq \frac{n\log 2}{2n} = \frac{\log 2}{2}. \end{aligned}$$

Infatti, per $j = 0, \dots, n-1$, $\frac{2n-j}{n-j} \geq \frac{2(n-j)}{n-j} = 2$.

(c). La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente ed illimitata e quindi diverge. Infatti, fissato comunque un numero reale $K > 0$, esiste un intero positivo k, tale che $k\frac{\log 2}{2} > K$ e si ha

$$a_{2^k} = a_{2^k} - a_0 = (a_{2^k} - a_{2^{k-1}}) + (a_{2^{k-1}} - a_{2^{k-2}}) + \cdots + (a_1 - a_0) \geq k\frac{\log 2}{2} > K.$$

Dunque, poiché la successione è crescente, per $n \geq 2^k$ si ha $a_n > K$ e, per l'arbitriarietà di K, ciò significa esattamente che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(d). È immediato. □

$^{(*)}$ Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice *definitivamente decrescente* se esiste un indice N_0 per cui si abbia $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni $n \geq N_0$.

ESERCIZIO 6. *Si calcolino i limiti*

$$(a)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4 - 2x^2 + 4x\sqrt[3]{x}}{2x^4 - \sqrt[3]{x^{10}}};$$
$$(b)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{4x\sqrt[3]{x} - x}{\sqrt[3]{2x^4} + 1};$$
$$(c)\ \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}};$$
$$(d)\ \lim_{x\to0} \frac{x\log(1-x)}{\sin x};$$
$$(e)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{3\log x}{2\sqrt[3]{x^2}};$$
$$(f)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{3\cos x}{5\sqrt[5]{x^3}};$$
$$(g)\ \lim_{x\to0} \frac{\cos x - 1}{x^2};$$
$$(h)\ \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x;$$
$$(i)\ \lim_{x\to0} \frac{\log_{10}(1+x)}{x};$$
$$(j)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{3-2x}{\sqrt{x^2+1}};$$
$$(k)\ \lim_{x\to0} 2^{\frac{\sin 2x}{\sin 3x}};$$

Svolgimento. (a). Mettiamo in evidenza i termini dominanti al numeratore ed al denominatore:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4 - 2x^2 + 4x\sqrt[3]{x}}{2x^4 - \sqrt[3]{x^{10}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4(1 - \frac{2}{3x^2} + \frac{4}{3x^2\sqrt[3]{x^2}})}{2x^4(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})}.$$

I termini tra parentesi tendono ad 1, per $x \to +\infty$, e $\frac{3x^4}{2x^4}$ tende, ovviamente, a $\frac{3}{2}$, che è quindi il valore del limite proposto.

(b). Analogamente al caso precedente, si conclude che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x\sqrt[3]{x} - x}{\sqrt[3]{2x^4} + 1} = 2\sqrt[3]{4}.$$

(c). Ricordando il limite fondamentale $\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$, si ha

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x}\sqrt{x} = 0.$$

(d). Analogamente al caso precedente, si conclude che

$$\lim_{x\to0} \frac{x\log(1-x)}{\sin x} = 0.$$

(e). Ricordando che $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$ qualunque sia il numero reale positivo α, si conclude che il limite proposto vale 0.

(f). Poichè $-1 \leq \cos x \leq 1$ per ogni valore di x ($\cos x$ è una funzione limitata), si ha

$$\frac{-3}{5\sqrt[5]{x^3}} \leq \frac{3\cos x}{5\sqrt[5]{x^3}} \leq \frac{3}{5\sqrt[5]{x^3}}, \qquad \text{e quindi} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{3\cos x}{5\sqrt[5]{x^3}} = 0.$$

(g). Senza usare metodi sofisticati, basta ricordare che $\cos 0 = 1$ e quindi, per le formule di prostaferesi, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2(x/2)}{4(x/2)^2} = -\frac{1}{2}.$$

(h). Si osservi che

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty} \left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} =$$
$$= \lim_{y\to+\infty} \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \left(1+\frac{1}{y-1}\right) = e;$$

ove si è ricordato il limite fondamentale $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

(i). Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Consideriamo quindi il cambiamento di variabile $x = \frac{1}{y}$, tramite il quale il limite diventa

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_{10}(1+x)}{x} = \lim_{y\to\infty} y \log_{10}\left(1+\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to\infty} \log_{10}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y.$$

E, per la continuità della funzione logaritmo, questo limite vale $\log_{10} e$ sia per $y \to +\infty$ (limite fondamentale) che per $y \to -\infty$, come abbiamo appena visto.

(j). Mettendo in evidenza i termini dominanti, si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3-2x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x(1-3/2x)}{|x|\sqrt{1+1/x^2}} = 2,$$

perchè, per $x < 0$, $|x| = -x$.

(k). Dobbiamo calcolare il limite dell'esponente, che è una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$, ma si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{3}\frac{\sin 2x}{2x}\frac{3x}{\sin 3x} = \frac{2}{3};$$

ove si è ricordato il limite fondamentale $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Dunque, per la continuità delle funzioni esponenziali, il limite proposto è uguale a $2^{2/3} = \sqrt[3]{4}$. □

ESERCIZIO 7. *Si consideri la funzione $f(x)$ così definita*

$$f(x) = \begin{cases} e^{1-x^2}\cos(\pi x) & \text{se } |x| \geq 1 \\ a + bx^2 & \text{se } |x| < 1 \end{cases}.$$

Si determinino (se esistono) le costanti a e b affinché la funzione $f(x)$ sia derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si tracci un grafico indicativo dell'andamento di $f(x)$ e si disegnino le rette tangenti al grafico nei punti $x = 0$ ed $x = 1$.

Svolgimento. $f(x)$ è una funzione *pari* (ovvero $f(x) = f(-x)$) ed è continua e derivabile per $x \neq \pm 1$, indipendentemente dal valore che si attribuisca ai parametri a e b; dunque $f(x)$ è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$ se, e solo se, lo è per $x = 1$. In base alla definizione di f, si ha

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = -1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = a + b.$$

Dunque f è continua(per $x = 1$) se i due limiti coincidono, ovvero se $a + b = -1$. Supponiamo soddisfatta questa condizione ed osserviamo che, per $x \neq 1$, si ha

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{1-x^2}[2x\cos(\pi x) + \pi\sin(\pi x)] & \text{se } |x| > 1 \\ 2bx & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$$

quindi (supponendo f continua per $x = 1$), si ha

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = 2 \qquad \text{e} \qquad f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = 2b.$$

In conclusione, $f(x)$ è continua e derivabile se, e solo se, $\begin{cases} a + b = -1 \\ 2b = 2 \end{cases}$, ovvero quando $a = -2$ e $b = 1$. Le rette tangenti al grafico nei punti $x = 0$ ed $x = 1$ sono rispettivamente $r_0 : y = -2$ ed $r_1 : y = 2x - 3$. □

ESERCIZIO 8. *Si consideri la funzione $f(x)$ così definita*

$$f(x) = \begin{cases} e^{1-x^2} \sin\frac{\pi x}{2} & \text{se } |x| \geq 1 \\ ax + bx^3 & \text{se } |x| < 1 \end{cases}.$$

Si determinino (se esistono) le costanti a e b affinché la funzione $f(x)$ sia derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si tracci un grafico indicativo dell'andamento di $f(x)$ e si disegnino le rette tangenti al grafico nei punti $x = 0$ ed $x = 1$.

Svolgimento. $f(x)$ è una funzione *dispari* (ovvero $f(-x) = -f(x)$) ed è continua e derivabile per $x \neq \pm 1$, indipendentemente dal valore che si attribuisca ai parametri a e b; dunque $f(x)$ è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$ se, e solo se, lo è per $x = 1$. In base alla definizione di f, si ha

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = a + b.$$

Dunque f è continua(per $x = 1$) se i due limiti coincidono, ovvero se $a + b = 1$. Supponiamo soddisfatta questa condizione ed osserviamo che, per $x \neq 1$, si ha

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{1-x^2}\left[2x\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\right] & \text{se } |x| > 1 \\ a + 3bx^2 & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$$

quindi (supponendo f continua per $x = 1$), si ha

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = -2 \qquad \text{e} \qquad f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = a + 3b.$$

In conclusione, $f(x)$ è continua e derivabile se, e solo se, $\begin{cases} a + b = 1 \\ a + 3b = -2 \end{cases}$, ovvero quando $a = \frac{5}{2}$ e $b = -\frac{3}{2}$. Le rette tangenti al grafico nei punti $x = 0$ ed $x = 1$ sono rispettivamente $r_0 : y = \frac{5}{2}x$ ed $r_1 : y = -2x + 3$). □

ESERCIZIO 9. *Si determinino le costanti a e b affinchè la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2\sinh x} & \textit{se } x \leq 0 \\ x^2 + ax + b & \textit{se } x > 0 \end{cases}$$

sia continua e derivabile su tutta la retta reale. Si scriva l'equazione della tangente al grafico di f per $x = 0$.

Svolgimento. Sulla semiretta $(-\infty, 0)$ la funzione data coincide con la funzione composta di due funzioni derivabili ed è quindi (continua e) derivabile. Sulla semiretta $(0, +\infty)$ la funzione data coincide con un polinomio ed è quindi derivabile indipendentemente dai valori delle costanti a e b. Bisogna quindi discutere il comportamento della funzione per $x = 0$. Ora

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{-2\mathrm{sinh}x} = f(0) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 + ax + b = b.$$

Dunque f è continua per $x = 0$ (e quindi su tutta la retta reale) se, e solo se, $b = 1$. Inoltre, per $x \neq 0$, si ha

$$f'(x) = \begin{cases} -2\mathrm{cosh}x\, e^{-2\mathrm{sinh}x} & \text{se } x < 0 \\ 2x + a & \text{se } x < 0 \end{cases};$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -2 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = a,$$

dove la prima uguaglianza nei due limiti discende dalla regola di de L'Hôpital, che può essere applicata perchè f è continua per $x = 0$. Dunque f è derivabile per $x = 0$ (e quindi su tutta la retta reale) se, e solo se, $a = -2$ e $b = 1$.

Possiamo quindi concludere osservando che la tangente al grafico di f per $x = 0$ è la retta di equazione $y = f'(0)x + f(0)$, ovvero $y = -2x + 1$. □

ESERCIZIO 10. *Si determinino le costanti a e b affinchè la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \textit{se } x < 0 \\ e^{2\sin x} & \textit{se } x \geq 0 \end{cases}$$

sia continua e derivabile su tutta la retta reale. Si scriva l'equazione della tangente al grafico di f per $x = 0$.

Svolgimento. Sulla semiretta $(-\infty, 0)$ la funzione data coincide con un polinomio ed è quindi (continua e) derivabile indipendentemente dai valori delle costanti a e b. Sulla semiretta $(0, +\infty)$ la funzione data coincide con la funzione composta di due funzioni derivabili ed è quindi derivabile. Bisogna quindi discutere il comportamento della funzione per $x = 0$. Ora

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 + ax + b = b \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{2\sin x} = f(0) = 1.$$

Dunque f è continua per $x = 0$ (e quindi su tutta la retta reale) se, e solo se, $b = 1$. Inoltre, per $x \neq 0$, si ha

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{se } x < 0 \\ 2\cos x\, e^{2\sin x} & \text{se } x > 0 \end{cases};$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = a \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 2,$$

dove la prima uguaglianza discende dalla regola di de L'Hôpital, che può essere applicata perchè f è continua per $x = 0$. Dunque f è derivabile per $x = 0$ (e quindi su tutta la retta reale) se, e solo se, $a = 2$ e $b = 1$.

Possiamo quindi concludere osservando che la tangente al grafico di f per $x = 0$ è la retta di equazione $y = f'(0)x + f(0)$, ovvero $y = 2x + 1$. □