Istituzioni di Matematiche (CH-CI-MT)

III^o foglio di esercizi

ESERCIZIO 1. *Si determinino (se esistono) due numeri reali a e b tali che la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi x^2)}{x\cos\frac{\pi}{x^2}} & \textit{se } |x| \geq \sqrt{3} \\ ax + bx^3 & \textit{se } |x| < \sqrt{3} \end{cases}$$

sia continua e derivabile su tutti i punti della retta reale.

Svolgimento. Se $|x| \geq \sqrt{3}$, il denominatore $x\cos\frac{\pi}{x^2}$ non si annulla (tutti i suoi zeri sono nell'intervallo $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$) e quindi $f(x)$ è definita e continua per tali valori della x e derivabile nei punti interni, ovvero per $|x| > \sqrt{3}$. Per $|x| < \sqrt{3}$, $f(x)$ coincide con un polinomio e quindi è certamente continua e derivabile, qualsiasi siano le costanti a e b. Resta quindi il problema del comportamento della funzione e della sua derivata per $|x| = \sqrt{3}$, ed essendo f una funzione dispari ($f(-x) = -f(x)$), possiamo limitarci a studiarla per $x = \sqrt{3}$.

Osserviamo che

$$\lim_{x\to\sqrt{3}^+} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{3}^+} \frac{\sin(\pi x^2)}{x\cos\frac{\pi}{x^2}} = 0 = f(\sqrt{3}), \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to\sqrt{3}^-} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{3}^-} ax + bx^3 = (a+3b)\sqrt{3};$$

quindi f è continua nel punto x se, e solo se, $a + 3b = 0$.

Supponiamo soddisfatta questa condizione e studiamo la derivabilità di f. Per $x \neq \sqrt{3}$, si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2\pi x^2 \cos\frac{\pi}{x^2}\cos(\pi x^2) - \sin(\pi x^2)\left(\cos\frac{\pi}{x^2} + \frac{2\pi}{x^2}\sin\frac{\pi}{x^2}\right)}{x^2(\cos\frac{\pi}{x^2})^2} & \text{se } |x| > \sqrt{3} \\ a + 3bx^2 & \text{se } |x| < \sqrt{3} \end{cases}.$$

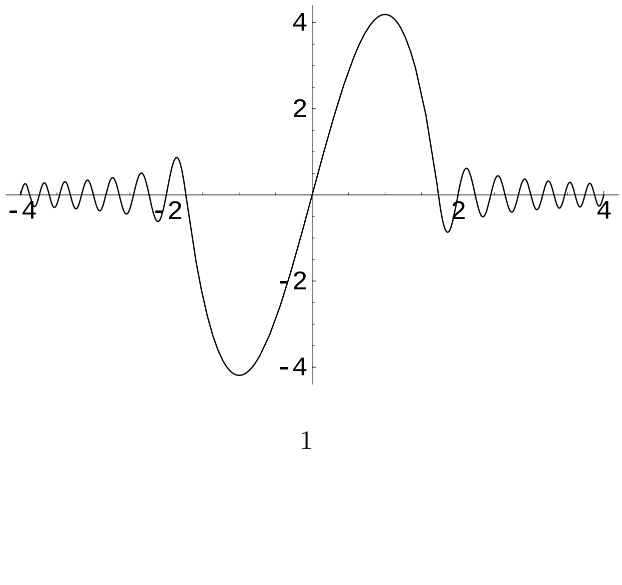
Se f è continua per $x = \sqrt{3}$, il limite del rapporto incrementale in questo punto coincide con il limite della derivata prima (*se quest'ultimo esiste!*). Possiamo quindi considerare

$$\lim_{x\to\sqrt{3}^+} f'(x) = -4\pi \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to\sqrt{3}^-} f'(x) = a + 9b.$$

Dunque, affinchè f sia continua e derivabile, le due costanti a e b devono soddisfare alle condizioni:

$$\begin{cases} a + 3b = 0 \\ a + 9b = -4\pi \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} a = 2\pi \\ b = -\frac{2}{3}\pi \end{cases}.$$

Qui sotto mostriamo un grafico indicativo del comportamento di $f(x)$.



Fine della discussione. □

ESERCIZIO 2. *[Maturità Scientifica 1988] Si dimostri, avvalendosi della definizione di derivata come limite del rapporto incrementale al tendere a zero dell'incremento della variabile indipendente, che la derivata della funzione* $f(x) = \sin^3 x$ *è la funzione* $f'(x) = 3\sin^2 x \cos x$ *e si generalizzi la questione per la funzione* $f(x) = \sin^n x$ *con* n *intero positivo*(†). □

ESERCIZIO 3. *Si consideri la funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita ponendo*

$$f(x) = \begin{cases} \text{arctg} x & \text{se } x < 1 \\ x^2 + bx + c & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Si determinino i valori di b *e* c *per cui la funzione* f *risulti continua e derivabile su tutto* $\mathbb{R}$ *e si disegni un grafico indicativo dell'andamento di* f. □

ESERCIZIO 4. *Si consideri la funzione* $f(x) = e^{3x} \cos 3x$. *Si mostri che la derivata prima di* f *si può scrivere nella forma* $ke^{3x} \cos(3x + \alpha)$, *ove* $k > 0$ *ed* $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ *sono opportune costanti da determinarsi esplicitamente. Si mostri che la derivata seconda di* f *si può scrivere nella forma* $he^{3x} \cos(3x+2\alpha)$, *ove* $h > 0$ *ed* α *è la costante che compare nella formula della derivata prima.* □

ESERCIZIO 5. *In ciascuno dei casi seguenti, si scriva l'equazione della retta tangente al grafico della funzione* $f(x)$ *nel punto di ascissa* $x = 1$.

$$\begin{aligned}
&(a)\ f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}};\\
&(b)\ f(x) = \frac{1}{2x+1};\\
&(c)\ f(x) = x - \frac{1}{x};\\
&(d)\ f(x) = \log \frac{1}{x^2};\\
&(e)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}};\\
&(f)\ f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-2};\\
&(g)\ f(x) = e^{x^2};\\
&(h)\ f(x) = x2^{-x}.
\end{aligned}$$

□

ESERCIZIO 6. *Si considerino le funzioni* $a \sin x + \cos^2 x$, *al variare di* a *tra i numeri reali.*
(a) Si determini a *affinché la funzione abbia un flesso nel punto* $x_0 = \frac{7\pi}{6}$.
(b) Per tale valore di a, *si studi l'andamento della funzione e se ne tracci un grafico indicativo.*

Svolgimento. Qualunque sia il valore di a, si tratta di funzioni definite, continue e derivabili (infinite volte) su tutti i punti della retta reale e periodiche di periodo 2π e quindi possiamo limitarci a studiarle nell'intervallo $[0, 2\pi]$. I punti di flesso, ovvero i punti in cui il grafico della funzione modifica la sua convessità, sono da cercarsi tra i punti in cui si annulla la derivata seconda. Osservando che le derivate prima e seconda sono rispettivamente,

$$(a - 2\sin x)\cos x \qquad \text{e} \qquad 4\sin^2 x - a\sin x - 2,$$

(†) Si usi l'identità $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

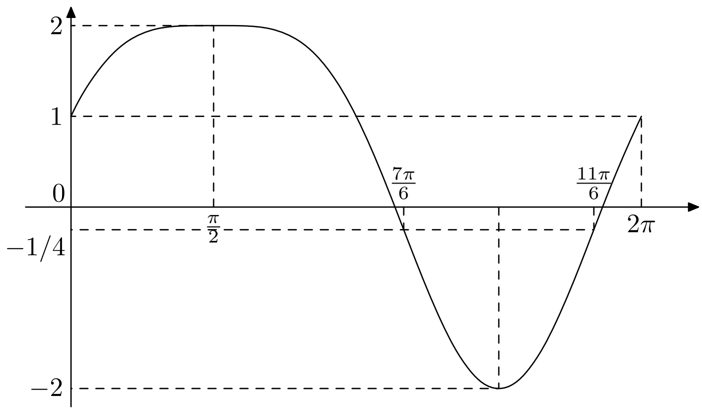
e che $\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, si conclude che la derivata seconda si annulla in x_0 per $a = 2$. Inoltre, per tale valore di a, la derivata seconda ha segni opposti prima e dopo il punto x_0 e quindi si tratta di un punto di flesso.

Dobbiamo quindi studiare la funzione $f(x) = 2\sin x + \cos^2 x$, nell'intervallo $[0, 2\pi]$, e sappiamo che

$$f'(x) = 2(1 - \sin x)\cos x \qquad \text{ed} \qquad f''(x) = 4\sin^2 x - 2\sin x - 2.$$

Il segno della derivata prima coincide con il segno di $\cos x$ e quindi $f(x)$ è crescente per x in $(0, \frac{\pi}{2})$ ed in $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, mentre è decrescente in $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Si han quindi un punto di massimo relativo per $x = \frac{\pi}{2}$, con $f(\frac{\pi}{2}) = 2$ ed un punto di minimo relativo per $x = \frac{3\pi}{2}$, con $f(\frac{3\pi}{2}) = -2$.

Per studiare il segno della derivata seconda consideriamo dapprima il segno del trinomio $4t^2 - 2t - 2$, che è positivo per $t \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$, mentre è negativo nell'intervallo $(-\frac{1}{2}, 1)$. Sostituendo a t i valori di $\sin x$, si conclude che $f''(x) > 0$ per $x \in (0, \frac{7\pi}{6}) \cup (\frac{11\pi}{6}, 2\pi)$, mentre è negativo per $x \in (\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$.



Possiamo quindi concludere che l'andamento della funzione è descritto nel grafico qui sopra. □

ESERCIZIO 7. *Si studino le seguenti funzioni*

$$(a)\ f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}};$$
$$(b)\ f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}};$$
$$(c)\ f(x) = \frac{e^{\frac{x+1}{x-2}}}{x-2};$$
$$(d)\ f(x) = \frac{e^x}{\cosh x};$$
$$(e)\ f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right);$$
$$(f)\ f(x) = \sqrt{\frac{|\sin x|}{2\cos x - 1}};$$
$$(g)\ f(x) = \sqrt{\frac{|\cos x|}{1 + 2\sin x}};$$
$$(h)\ f(x) = \frac{1 - \mathrm{tg}x}{\sin x};$$
$$(i)\ f(x) = |x|\sqrt{4 - x^2};$$
$$(j)\ f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2};$$
$$(k)\ f(x) = x\sqrt{|\log x|};$$
$$(l)\ f(x) = |x|^x;$$

e si tracci un grafico indicativo del loro andamento.

Svolgimento. (c). La funzione è definita, continua e derivabile per $x \neq 2$, e si ha

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 0,$$

ove il primo dei due limiti è di immediata verifica, mentre il secondo si presenta in una forma indeterminata $(\frac{0}{0})$ e può essere calcolato nel modo seguente: dopo la sostituzione $t = \frac{x+1}{x-2}$, il limite proposto risulta uguale al limite $\lim_{t\to-\infty} \frac{(t-1)e^t}{3} = 0$.

Inoltre,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,$$

perchè in entrambo i casi il numeratore della frazione che definisce $f(x)$, tende ad un limite finito, mentre il denominatore diverge.

Possiamo quindi passare ad occuparci della derivata prima, che è uguale a

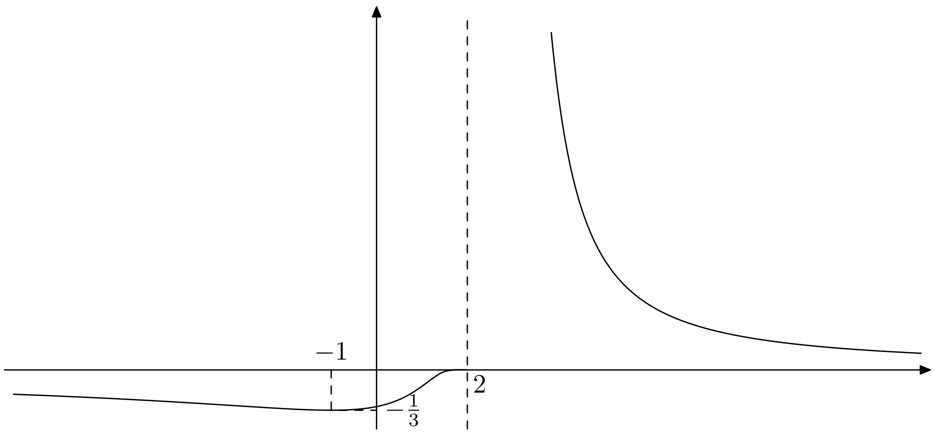
$$f'(x) = -\frac{x+1}{x-2}\frac{e^{\frac{x+1}{x-2}}}{(x-2)^2},$$

e quindi il segno di $f'(x)$ dipende solo dal primo fattore e perciò si ha che

- $f(x)$ è decrescente per $x < -1$ e per $x > 2$, mentre
- $f(x)$ è crescente per $-1 < x < 2$.

Dunque, $x = -1$ è un punto di minimo relativo (ed assoluto) per $f(x)$, mentre, per quanto già visto, f è illimitata superiormente. In particolare, $f(-1) = -\frac{1}{3}$.

In base ai dati raccolti possiamo già tracciare il seguente grafico indicativo dell'andamento della funzione f.



Invitiamo comunque il lettore a studiare anche il segno della derivata seconda della funzione proposta, onde ottenere un risultato più preciso.

(l). La funzione è definita in $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed in tale insieme è continua e derivabile, perchè composizione di funzioni derivabili; in particolare, si ha $|x|^x = e^{x\log|x|}$. Si osservi che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to0} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

come si deduce facilmente calcolando i limiti dell'esponente $x\log|x|$ lungo le varie direzioni. In particolare, si ha

$$\lim_{x\to0} x\log|x| = \lim_{x\to0}\frac{\log|x|}{1/x} = \lim_{x\to0}\frac{1/x}{-1/x^2} = 0$$

ove si è applicata la regola di de L'Hôpital.

Osserviamo quindi che $f(x)$ si può estendere ad una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$ ponendo $f(0) = 1$.

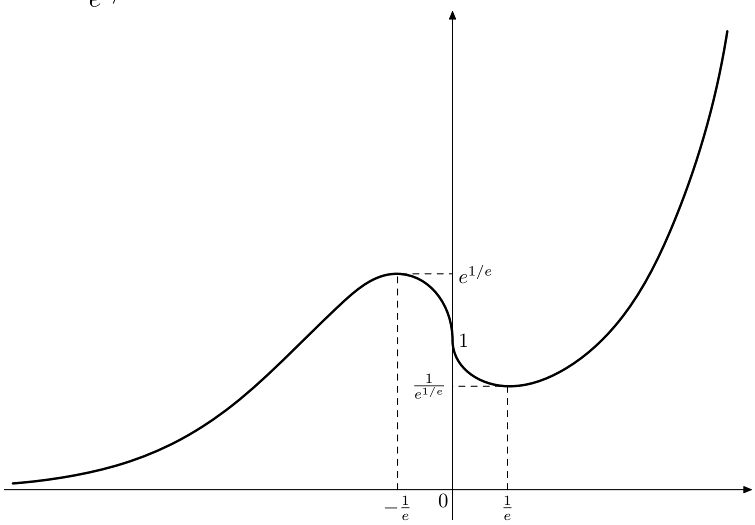
La derivata prima di f è uguale ad $f'(x) = |x|^x(\log|x| + 1)$ per $x \in D$ e si ha

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0} f'(x) = -\infty,$$

e quindi $f(x)$ non si estende ad una funzione derivabile in $x = 0$. Osserviamo poi che

$$f'(x) > 0 \iff \log|x| + 1 > 0 \iff |x| > \frac{1}{e}$$
$$f'(x) < 0 \iff \log|x| + 1 < 0 \iff 0 < |x| < \frac{1}{e}$$

e dunque f è crescente nelle semirette $(-\infty, -\frac{1}{e})$ e $(\frac{1}{e}, +\infty)$ ed è decrescente negli intervalli $(-\frac{1}{e}, 0)$ e $(0, \frac{1}{e})$. In particolare, l'estensione di f ad $\mathbb{R}$ è decrescente in $(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$. Infine, osserviamo che il punto $x = -\frac{1}{e}$ è un punto di massimo relativo per la funzione, mentre il punto $x = -\frac{1}{e}$ è un punto di minimo relativo, e si ha $f(-1/e) = e^{1/e}$ ed $f(1/e) = \dfrac{1}{e^{1/e}}$.



È quindi giustificato il grafico tracciato qui sopra. □

ESERCIZIO 8. *Si calcolino i limiti*

$$(a)\ \lim_{x\to 0}(1 + x^2)^{1/\sin^2 x};$$
$$(b)\ \lim_{x\to 0}(1 + \mathrm{tg}^2 x)^{1/(1-\cos x)};$$
$$(c)\ \lim_{x\to +\infty} x^2 \left|\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}x - \frac{1}{x}\right|;$$
$$(d)\ \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}x - \sin x}{\log(1 + x) + 1 - x - \cos x};$$
$$(e)\ \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2 \log(1 - \sin x)}}{\sin\sqrt{|x|^3}};$$
$$(f)\ \lim_{x\to 0} \frac{\log(1 - x) + \sin x - 1 + \cosh x}{\sin x - \sinh x};$$
$$(g)\ \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{x^2} + \frac{3}{2}x\sinh x}{[\log(1 - x)]^4};$$
$$(h)\ \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - e^{x^2} + \frac{1}{2}x\sin x}{[\log(1 + x)]^4};$$
$$(i)\ \lim_{x\to +\infty} x^4 \left(2e^{1/x^2} - 2\cosh\frac{1}{x} - \frac{\sin(1/x)}{x}\right);$$

Svolgimento. (a). Osservando che $(1+x^2)^{1/\sin^2 x} = e^{\log(1+x^2)/\sin^2 x}$, ci si riduce a calcolare il limite dell'espo-

nente, ovvero
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2(1+x^2)\sin x\cos x}=1,$$
ove si è applicata la regola di de l'Hôpital e si è ricordato il limite fondamentale $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Quindi il limite proposto è uguale ad e.

(b). Analogamente al caso precedente, $(1+\mathrm{tg}^2x)^{1/(1-\cos x)}=e^{\log(1+\mathrm{tg}^2x)/(1-\cos x)}$ e ci si riduce a calcolare il limite dell'esponente, ovvero
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\mathrm{tg}^2x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\mathrm{tg}x(1+\mathrm{tg}^2x)}{(1+\mathrm{tg}^2x)\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\cos x}=2.$$
E quindi il limite proposto è uguale ad e^2.

(c). Osserviamo che la funzione $\mathrm{arctg}x-\frac{1}{x}$ è decrescente per $x\to+\infty$ ed ha come limite $\frac{\pi}{2}$, quindi si ha $\left|\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}x-\frac{1}{x}\right|=\mathrm{arctg}x+\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}$. Il limite proposto è uguale a
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{arctg}x+\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x^2}},$$
che, applicando la regola di de L'Hôpital, diventa
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2x^2(1+x^2)}=0.$$

(d). Ricordando gli sviluppi di Mc Laurin
$$\mathrm{tg}x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3),\qquad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$$
$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3),\qquad \cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^3),$$
si ha
$$\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{\log(1+x)+1-x-\cos x}=\frac{\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)};$$
e quindi
$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{\log(1+x)+1-x-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{\frac{1}{3}x^3}=\frac{3}{2}.$$

(e). Ricordando gli sviluppi di Mc Laurin ed il limite fondamentale $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, si ha $\log(1-\sin x)=-\sin x+o(\sin x)=-x+o(x)$ e $\sin\sqrt{|x|^3}=(-x)^{3/2}+o(x^{3/2})$. Quindi
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2\log(1-\sin x)}}{\sin\sqrt{|x|^3}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{3/2}}{(-x)^{3/2}}=1.$$

(f). Ricordando gli sviluppi di Mc Laurin
$$\mathrm{sinh}x=x+\frac{x^3}{3!}+o(x^3),\qquad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$$
$$\log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3),\qquad \mathrm{cosh}x=1+\frac{x^2}{2}+o(x^3),$$
si ha
$$\frac{\log(1-x)+\sin x-1+\mathrm{cosh}x}{\sin x-\mathrm{sinh}x}=\frac{-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}{-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)};$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x)+\sin x-1+\cosh x}{\sin x-\sinh x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^3}{-\frac{1}{3}x^3}=\frac{3}{2}.$$

(g). Ricordando gli sviluppi di Mc Laurin

$$\sinh x=x+\frac{x^3}{3!}+o(x^3),\qquad e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)$$
$$[\log(1-x)]^4=(-x+o(x))^4=x^4+o(x^4),\qquad \cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4),$$

si ha

$$\frac{\cos x-e^{x^2}+\frac{3}{2}x\sinh x}{[\log(1-x)]^4}=\frac{-\frac{17}{24}x^4+o(x^4)}{x^4+o(x^4)};$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{x^2}+\frac{3}{2}x\sinh x}{[\log(1-x)]^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{17}{24}x^4}{x^4}=-\frac{17}{24}.$$

(h). Ricordando gli sviluppi di Mc Laurin

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3),\qquad e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)$$
$$[\log(1+x)]^4=(x+o(x))^4=x^4+o(x^4),\qquad \cosh x=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4),$$

si ha

$$\frac{\cosh x-e^{x^2}+\frac{1}{2}x\sin x}{[\log(1+x)]^4}=\frac{-\frac{13}{24}x^4+o(x^4)}{x^4+o(x^4)};$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cosh x-e^{x^2}+\frac{1}{2}x\sin x}{[\log(1+x)]^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{13}{24}x^4}{x^4}=-\frac{13}{24}.$$

(i). Consideriamo il cambiamento di variabile $y=\frac{1}{x}$, da cui si deduce che

$$\lim_{x\to+\infty}x^4\left(2e^{1/x^2}-2\cosh\frac{1}{x}-\frac{\sin(1/x)}{x}\right)=\lim_{y\to 0^+}\frac{2e^{y^2}-2\cosh y-y\sin y}{y^4}$$

e, ricordando gli sviluppi di Mc Laurin

$$\sin y=y-\frac{y^3}{3!}+o(y^3),\qquad e^{y^2}=1+y^2+\frac{y^4}{2}+o(y^4)$$
$$\cosh y=1+\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{24}+o(y^4),$$

si ha

$$\frac{2e^{y^2}-2\cosh y-y\sin y}{y^4}=\frac{\frac{13}{12}y^4+o(y^4)}{y^4}$$

e quindi

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{2e^{y^2}-2\cosh y-y\sin y}{y^4}=\lim_{y\to 0^+}\frac{\frac{13}{12}y^4}{y^4}=\frac{13}{12}.$$

□

ESERCIZIO 9. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathscr{C}^2$ in (a, b). Si mostri che f ha un minimo relativo (risp. un massimo relativo) in $x_0 \in (a, b)$ se $f'(x_0) = 0$ ed $f''(x_0) > 0$ (risp. se $f'(x_0) = 0$ ed $f''(x_0) < 0$).*

Svolgimento. Sia $f''(x_0) > 0$. Poichè la derivata seconda di f è continua esiste un numero reale $\delta > 0$ per cui $f''(x) > 0$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ [Teorema di permanenza del segno]. Quindi, sull'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ la derivata prima di f è una funzione crescente (in senso stretto) che si annulla in x_0. Dunque, deve essere $f'(x) < 0$ per $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ ed $f'(x) > 0$ per $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ e perciò deve essere f decrescente in $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ ed f crescente in $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ e da ciò si conclude che $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ovvero che x_0 è un punto di minimo relativo per f.

Il ragionamento è analogo nel caso di un massimo relativo ed è lasciato al lettore. □

ESERCIZIO 10. *Ricordiamo che una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ si dice convessa nel punto $x_0 \in (a, b)$, se è derivabile in x_0 ed esiste un intervallo centrato in x_0 in cui il grafico della funzione resta al di sopra della retta tangente in x_0; ovvero esiste $\delta > 0$ per cui $f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$*[†].

(a) *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathscr{C}^2$ in (a, b). Si mostri che f è convessa in $x_0 \in (a, b)$ se la differenza $d(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)$ ha un minimo relativo in x_0, e quindi se $f''(x_0) > 0$.*

(b) *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathscr{C}^2$ in (a, b). Si mostri che f è concava in $x_0 \in (a, b)$ se la differenza $d(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)$ ha un massimo relativo in x_0, e quindi se $f''(x_0) < 0$.*

(c) *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e di classe $\mathscr{C}^2$ in (a, b). Si mostri che se f è convessa in ogni punto di (a, b) allora il grafico di f in $[a, b]$ sta al di sotto della retta per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$; ovvero si ha $f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) - f(a) \leq 0$ per ogni $x \in [a, b]$.*

Svolgimento. (a). Il grafico di f sta al di sopra della retta tangente in x_0 sull'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ se, e solo se, $d(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0) \geq 0$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Poichè $d(x_0) = 0$, ciò significa esattamente che x_0 è un punto di minimo relativo per d. Osserviamo che $d'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ e $d''(x) = f''(x)$ per ogni $x \in (a, b)$; quindi, per l'esercizio precedente, d ha un minimo relativo in x_0 se $d''(x_0) = f''(x_0) > 0$.

(b). Il ragionamento è analogo a quanto appena esposto.

(c). Poichè f è convessa in ogni punto di (a, b), deve aversi $f''(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b)$. Consideriamo ora la differenza

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a) \qquad \text{per} \quad x \in [a, b]$$

e si osservi che $\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ed $\varphi''(x) = f''(x)$ per ogni $x \in (a, b)$. Allora la funzione ϕ' è monotona crescente in (a, b) e si annulla in un punto $c \in (a, b)$ [Teorema del valor medio (Lagrange)]. Quindi φ è decrescente in (a, c) e crescente in (c, b), ed essendo $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$, si conclude che $\varphi(x) \leq 0$ per ogni $x \in [a, b]$ ovvero che il grafico della funzione f sta al di sotto della retta dell'enunciato. □

(†) Analogamente, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ si dice *concava* nel punto $x_0 \in (a, b)$, se è derivabile in x_0 ed esiste un intervallo centrato in x_0 in cui il grafico della funzione resta al di sotto della retta tangente in x_0; ovvero esiste $\delta > 0$ per cui $f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.