Istituzioni di Matematiche (CH-CI-MT)

V^o foglio di esercizi

ESERCIZIO 1. *Si determinino le soluzioni dell'equazione $x^2 - 2x + 5 = 0$. Indicata con z_0 la soluzione con parte immaginaria positiva, si disegni nel piano di Argand-Gauß l'esagono di vertici z_0, $z_0\zeta_1$, $z_0\zeta_2$, $z_0\zeta_3$, $z_0\zeta_4$, $z_0\zeta_5$, ove $1, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5$, sono le soluzioni dell'equazione $x^6 = 1$.*

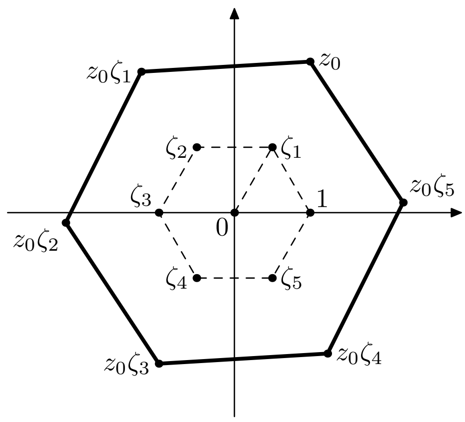
Si determini l'area di tale esagono.

Svolgimento. Le due radici del polinomio $x^2 - 2x + 5$ sono $1 \pm 2i$ e quindi $z_0 = 1 + 2i$. In base alle *formule di de Moivre*, le soluzioni dell'equazione $x^6 = 1$ sono tutte e sole le potenze del numero complesso $\zeta_1 = \cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; ovvero i numeri complessi

$$\zeta_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \zeta_2 = \zeta_1^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \zeta_3 = \zeta_1^3 = -1,$$
$$\zeta_4 = \zeta_1^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \zeta_5 = \zeta_1^5 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \zeta_6 = \zeta_1^6 = 1.$$

Questi sei numeri formano un esagono regolare inscritto nella circonferenza unitaria del piano di Argand-Gauß, ovvero l'esagono tratteggiato della figura qui a fianco. L'area A di questo esagono è 6 volte l'area del triangolo di vertici $0, 1, \zeta_1$, ovvero $A = 3\sin\frac{2\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Moltiplicare per il numero complesso z_0, significa dilatare questa figura del fattore $|z_0| = \sqrt{5}$ e ruotarla dell'angolo $\operatorname{Arg} z_0 = \operatorname{arctg} 2$ (cf. la figura a fianco). Le rotazioni sono isometrie e perciò lasciano invariate le aree, dunque per ottenere l'area richiesta, dobbiamo moltiplicare l'area A dell'esagono tratteggiato per il fattore $|z_0|^2 = 5$ e quindi l'area cercata è uguale a $\frac{15\sqrt{3}}{2}$.



Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 2. *Si disegni nel piano di Argand-Gauss il triangolo avente come vertici le soluzioni dell'equazione*

$$z^3 - iz^2 + (5 + 2i)z + 6 + 3i = 0,$$

e si determinino il centro ed il raggio della circonferenza passante per i tre vertici del triangolo.

Svolgimento. Il polinomio dato è divisibile per $z + 1$ e quindi si ha

$$z^3 - iz^2 + (5 + 2i)z + 6 + 3i = (z + 1)(z - 3i)(z + 2i - 1),$$

da cui si conclude che i vertici del triangolo sono i punti $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Il centro della circonferenza circoscritta al triangolo è il punto di intersezione delle rette perpendicolari ai lati, passanti per il punto medio degli stessi (gli *assi* di tali segmenti); Dunque considerando i lati P_1P_2 e P_1P_3, si determinano le equazioni degli assi

$$a_1 : x + 3y = 4 = 0 \qquad \text{ed} \qquad a_2 : x - y = 1.$$

Il centro della circonferenza cercata è quindi il punto $C = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}$ e quindi il raggio è uguale alla distanza di C dai tre vertici del triangolo, ovvero: $r = d(P_1, C) = d(P_2, C) = d(P_3, C) = \frac{\sqrt{130}}{4}$. □

ESERCIZIO 3. *Si disegnino nel piano di Argand-Gauß le soluzioni dell'equazione*

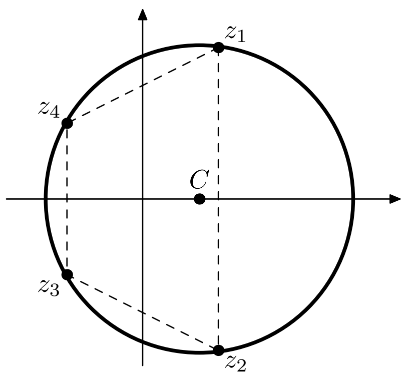
$$(x^2 - 2x + 5)(x^2 + 2x + 2) = 0$$

e si determini (se esiste) la circonferenza passante per questi punti indicandone il centro, il raggio e l'equazione cartesiana.

Svolgimento. Le soluzioni dell'equazione proposta sono i numeri complessi

$$z_1 = 1 + 2i, \qquad z_2 = 1 - 2i, \qquad z_3 = -1 - i, \qquad z_4 = i - 1.$$

Nel piano di Argand-Gauß si tratta quindi dei vertici di un trapezio isoscele. Una generica circonferenza del piano ha equazione $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$, ove il punto (x_0, y_0) è il suo centro ed il numero reale positivo r è il raggio. Imponendo le condizioni che la circonferenza passi per i quattro punti dati, si ottiene il sistema



$$\begin{cases} (-1 - 1x_0)^2 + (1 - y_0)^2 = r^2 \\ (-1 - x_0)^2 + (-1 - y_0)^2 = r^2 \\ (1 - x_0)^2 + (2 - y_0)^2 = r^2 \\ (1 - x_0)^2 + (-2 - y_0)^2 = r^2 \end{cases}.$$

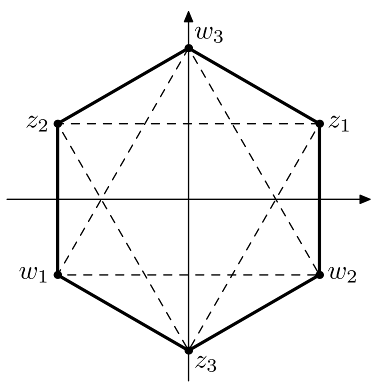
Il sistema è verificato per $x_0 = \frac{3}{4}$, $y_0 = 0$, $r^2 = \frac{65}{16}$; si tratta quindi della circonferenza di equazione $2x^2 + 2y^2 - 3x - 7 = 0$. □

ESERCIZIO 4. *Si disegnino nel piano di Argand-Gauß i punti z_1, z_2, z_3, corrispondenti alle soluzioni dell'equazione $z^3 - 8i = 0$. Siano w_1, w_2, w_3, i punti simmetrici rispetto all'origine dei tre punti dati e si scriva l'equazione di cui w_1, w_2, w_3 sono le soluzioni. Si determini infine l'area del poligono convesso avente i sei punti come vertici.*

Svolgimento. Dobbiamo determinare le radici cubiche del numero complesso $8i$.

Scritto in forma trigonometrica, si tratta del numero $8(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2})$ e quindi, applicando le Formule di de Moivre, si ottiene che le sue radici cubiche sono

$$\begin{aligned} z_1 &= 2(\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6}) = \sqrt{3} + i, \\ z_2 &= 2(\cos\tfrac{5\pi}{6} + i\sin\tfrac{5\pi}{6}) = -\sqrt{3} + i, \\ z_3 &= 2(\cos\tfrac{9\pi}{6} + i\sin\tfrac{9\pi}{6}) = -2i. \end{aligned}$$



Due punti del piano di Gauß sono simmetrici rispetto all'origine se, e solo se, rappresentano numeri complessi opposti e quindi i tre punti w_1, w_2, w_3 sono

$$w_1 = -z_1 = -\sqrt{3} - i, \quad w_2 = -z_2 = \sqrt{3} - i, \quad w_2 = -z_3 = 2i;$$

ed i tre punti sono quindi le soluzioni dell'equazione $z^3 + 8i = 0$.

Il poligono convesso avente i sei punti come vertici è un esagono regolare, inscritto nella circonferenza di centro nell'origine e raggio $|z_1| = 2$ (si veda la figura qui sopra). Dunque la sua area A è sei volte l'area del triangolo di vertici 0, z_1, w_2, (triangolo equilatero di lato 2) cioè $A = 6\sqrt{3}$. □

ESERCIZIO 5. *Si disegni nel piano di Argand-Gauss il triangolo avente come vertici le soluzioni dell'equazione*

$$z^3 + z^2 + (2i - 1)z - 1 - 2i = 0,$$

e se ne calcolino il perimetro e l'area.

Svolgimento. Si ha

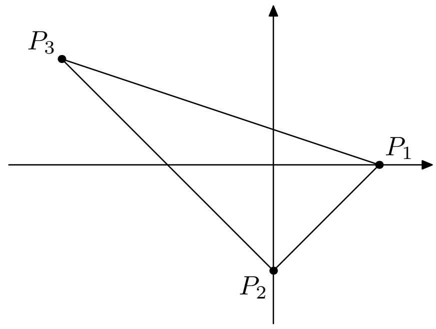
$$z^3 + z^2 + (2i - 1)z - 1 - 2i = (z - 1)(z^2 + 2z + 1 + 2i) = (z - 1)(z + i)(z + 2 - i).$$

Quindi si tratta di calcolare il perimetro e l'area del triangolo di vertici $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si ha quindi

$$\textit{perimetro} = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| + \|\overrightarrow{P_1P_3}\| + \|\overrightarrow{P_2P_3}\| = 3\sqrt{2} + \sqrt{10},$$

ed

$$\textit{area} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\| = 2,$$



e ciò conclude la discussione[(*)]. □

ESERCIZIO 6. *Si disegni nel piano di Argand-Gauss il triangolo avente come vertici le soluzioni dell'equazione*

$$z^3 - (2 + i)z^2 + (7i - 1)z = 0,$$

e si determini l'area di tale triangolo.

Svolgimento. □

ESERCIZIO 7. *Si disegnino nel piano di Argand-Gauss i quattro punti corrispondenti alle soluzioni dell'equazione*

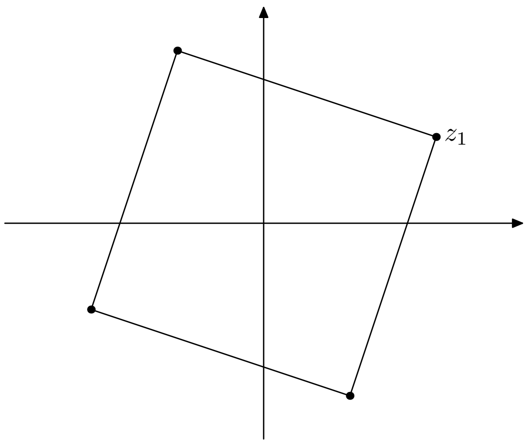
$$z^4 + 7 - 24i = 0,$$

e si determinino il perimetro e l'area del quadrilatero (convesso) avente tali punti come vertici.

Svolgimento. Si tratta di determinare le quattro radici quarte del numero complesso $-7 + 24i$.

Se z_1 è una di queste radici, i quattro numeri cercati sono $z_1, iz_1, -z_1, -iz_1$, che formano i vertici di un quadrato, centrato nell'origine e con la diagonale uguale a $2|z_1|$. Dunque, l'area ed il perimetro del quadrato sono rispettivamente $2|z_1|^2$ e $4\sqrt{2}|z_1|$.

Non ci resta quindi altro da fare che determinare $z_1 = 2+i$, tramite due successive estrazioni di radice quadrata, e concludere che Area = 10, Perimetro = $4\sqrt{10}$. A fianco tracciamo il disegno della situazione. La risposta è ora completa.



(*) Si poteva anche notare che i vettori $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_2P_3}$ sono perpendicolari tra loro e quindi $\textit{area} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{P_1P_2}\|\,\|\overrightarrow{P_2P_3}\|$

□

ESERCIZIO 8. *Si disegnino nel piano di Argand-Gauss i quattro punti corrispondenti alle soluzioni dell'equazione*

$$z^4 + 4(1+i)z^2 + 3 + 4i = 0,$$

e si determini l'area del quadrilatero (convesso) avente tali punti come vertici.

Svolgimento. □

ESERCIZIO 9. *Si consideri l'insieme*

$$I = \left\{ z^i \in \mathbb{C} \;\middle|\; z^4 + 2 + 2i\sqrt{3},\ i = 1,2,3,4 \right\}.$$

Si disegni il poligono convesso avente come vertici gli elementi di $V = \left\{ z \in I \;\middle|\; |z| = 2\sqrt{2} \right\}$ *e se ne calcoli il perimetro.*

Svolgimento. □

ESERCIZIO 10. *Si disegni nel piano di Argand-Gauss il triangolo avente come vertici le soluzioni dell'equazione*

$$z^3 + (3-2i)z + 4 - 2i = 0,$$

e se ne determini il baricentro.

Svolgimento. □

ESERCIZIO 11. *Si disegnino nel piano di Argand-Gauss i quattro punti corrispondenti alle soluzioni dell'equazione*

$$z^4 + 3iz^2 - 2 = 0,$$

e si determini il raggio del più piccolo disco chiuso, centrato nell'origine, contenente i quattro punti.

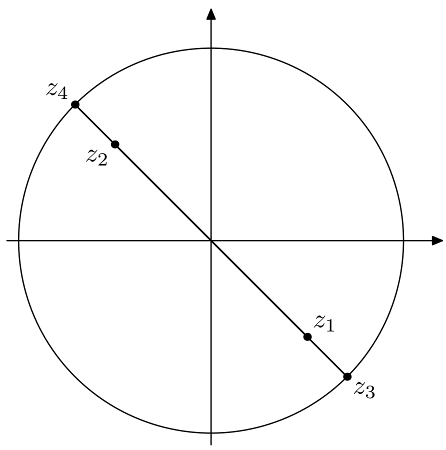
Svolgimento. Si tratta di un'equazione biquadratica.

Posto $w = z^2$, deve aversi, $w^2 + 3iw - 2 = 0$, e quindi $w = \frac{-3i \pm i}{2}$.

Si ha così $z^2 = -i$, oppure $z^2 = -2i$, e le soluzioni di queste due ultime equazioni sono

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i), \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i-1),$$
$$z_3 = 1 - i, \quad z_4 = i - 1.$$

I quattro punti sono tutti multipli di $1 - i$ e quindi sono allineati e determinano così un quadrilatero di area nulla, contenuto nel disco di raggio $\sqrt{2}$. Si veda il disegno qui a fianco.



Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 12. *Si disegnino nel piano di Argand-Gauß le soluzioni dell'equazione*

$$[x^2 - 2(1+i)x + 2i - 1][x^2 - 2(1+3i)x + 6i - 12] = 0$$

e si determini, se esiste, una parabola con asse verticale passante per questi punti indicandone il vertice e l'equazione cartesiana.

Svolgimento. $z_1 = 3i - 1$, $z_2 = 3i + 3$, $z_3 = i$, $z_4 = 2 + i$.

Vertice $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$; equazione $3y = 2x^2 - 4x + 3$ □

ESERCIZIO 13. *Sia* $P(z) = z^4 + 3z^2 - 6z + 10$.

(a) *Si determini il polinomio* $Q(z)$ *tale che* $P(z) = Q(z)(z^2 - 2z + 2)$.

(b) *Si disegni nel piano di Argand-Gauss il quadrilatero avente come vertici le soluzioni dell'equazione* $P(z) = 0$.

(c) *Si determini il volume del solido che si ottiene ruotando il quadrilatero detto attorno all'asse delle ascisse.*

Svolgimento. Osserviamo che $P(z)$ è un polinomio a coefficienti reali e quindi che, se z_0 è una radice di $P(z)$ anche $\overline{z}_0$ è radice di $P(z)$.

(a). Applicando l'algoritmo euclideo di divisione, si ottiene che $Q(z) = z^2 + 2z + 5$.

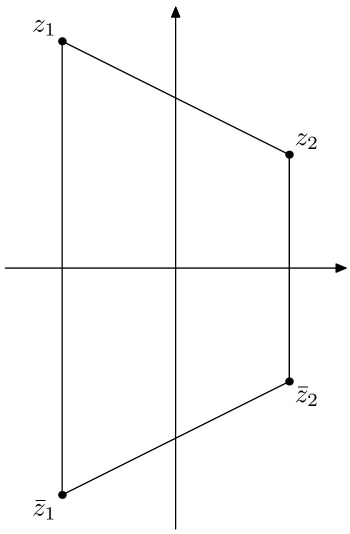
(b). le radici di $Q(z)$ sono

$$z_1 = -1 + 2i \quad \text{e} \quad \overline{z}_1 = -1 - 2i,$$

mentre le radici di $z^2 - 2z + 2$ sono

$$z_2 = 1 + i \quad \text{e} \quad \overline{z}_2 = 1 - i.$$

Dunque i quattro punti sono i vertici di un trapezio isoscele, simmetrico rispetto all'asse delle ascisse. Tracciamo qui a fianco un disegno del quadrilatero.



(c). Si tratta di determinare il volume del solido (tronco di cono) che si ottiene ruotando attorno all'asse delle ascisse il grafico della funzione $f(x) = \frac{3-x}{2}$ sull'intervallo $[-1, 1]$. Dunque

$$\text{Vol} = \pi \int_{-1}^{1} \frac{(3-x)^2}{4}\, dx = \frac{3\pi}{2}.$$

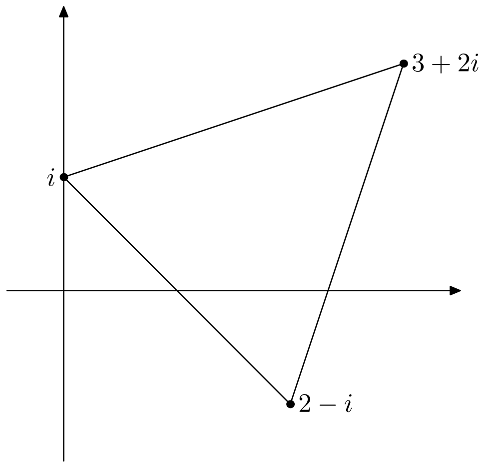
Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 14. *Sia* $P(z) = z^3 - (5 + 2i)z^2 + (7 + 6i)z + (1 - 8i)$.

(a) *Si verifichi che* $P(i) = 0$ *e si disegni nel piano di Argand-Gauss il triangolo avente come vertici le soluzioni dell'equazione* $P(z) = 0$.

(b) *Si determini l'area di tale triangolo.*

Svolgimento. (a). La verifica che $P(i)=0$ è un facile calcolo ed implica che $P(z)$ è divisibile per $z-i$.



In particolare, si ha

$P(z)=(z-i)(z^2-(5+i)z+(8+i))=(z-i)(z-2+i)(z-3-2i)$.

Il triangolo che ha come vertici le soluzioni dell'equazione è quindi disegnato qui a fianco.

(b). I vertici del triangolo sono i punti di coordinate

$$P_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\qquad P_2=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\qquad P_3=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}.$$

Dunque l'area del triangolo è $A=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}\|=4$ e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 15. *Si disegni nel piano di Argand-Gauss il triangolo avente come vertici le radici del polinomio*

$$f(z)=z^3+(2+3i)z+3-i,$$

e se ne determini l'area.

Svolgimento. □

ESERCIZIO 16. *Sia fissato un intero $n\geq 3$ e si consideri il numero complesso*

$$\zeta=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

(a) *Si mostri che $\zeta^n=1$ e quindi che $1+\zeta+\zeta^2+\cdots+\zeta^{n-1}=0$.*
(b) *Si consideri il poligono di vertici $z_0=1, z_1=1+\zeta, z_2=1+\zeta+\zeta^2,\dots,z_{n-1}=1+\zeta+\zeta^2+\cdots+\zeta^{n-1}$, e si mostri che si tratta di un poligono regolare di n lati. In particolare, per $n=8$, si disegni tale poligono nel piano di Argand-Gauss.*
(c) *Si mostri che il perimetro del poligono del punto (b) è uguale ad n e che la sua area è uguale a $\frac{n}{4\mathrm{tg}(\pi/n)}$.*

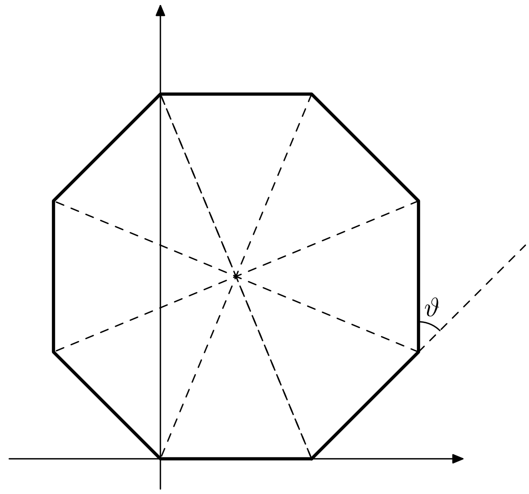
Svolgimento. (a). Si osservi che ζ è un numero complesso di modulo 1, scritto in forma trigonometrica e, in base alle Formule di de Moivre, si ha $\zeta^k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$ per ogni intero positivo k. In particolare, per

$k = n$ si ottiene $\zeta^n = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$.

Inoltre, essendo $1 - \zeta \neq 0$ e

$$(1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{n-1})(1 - \zeta) = 1 - \zeta^n = 0,$$

si conclude che $1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{n-1} = 0$.

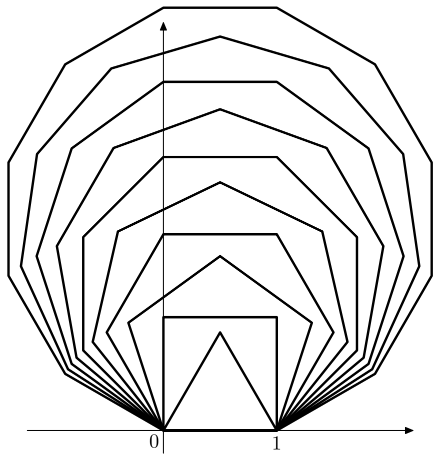


(b). Per $k = 1, \ldots, n-1$ i lati del poligono in questione coincidono coi vettori $z_k - z_{k-1} = \zeta^k$ che hanno lunghezza $|\zeta|^k = 1$. Inoltre, $z_0 - z_{n-1} = 1 - 0 = 1$, e quindi tutti gli n lati del poligono hanno la stessa lunghezza. Resta quindi da verificare che anche gli angoli tra due lati consecutivi sono uguali tra loro; e per fare ciò è sufficiente calcolare il prodotto scalare tra i vettori (di lunghezza 1) corrispondenti a due lati consecutivi, ovvero, con una facile applicazione delle formule di addizione per il coseno, si ottiene

$$\begin{aligned}\langle \zeta^k, \zeta^{k+1} \rangle = \cos\tfrac{2k\pi}{n}\cos\tfrac{2(k+1)\pi}{n} + \\ + \sin\tfrac{2k\pi}{n}\sin\tfrac{2(k+1)\pi}{n} = \cos\tfrac{2\pi}{n};\end{aligned}$$

da cui si conclude che l'angolo tra due lati consecutivi è uguale a $\vartheta = \frac{2\pi}{n}$.

Qui a fianco abbiamo disegnato il poligono richiesto e, più sotto, i vari poligoni che si ottengono per $n = 3, \ldots, 10$.



(c). Da quanto abbiamo visto nel punto precedente, ogni lato del poligono ha lunghezza 1 e quindi il perimetro è lungo n. Per calcolare l'area possiamo ragionare come segue: il poligono si decompone in n triangoli isosceli, tra loro congruenti, aventi come base i lati del poligono e come vertice il centro della circonferenza circoscritta; dunque è sufficiente determinare l'area di un tale triangolo e moltiplicarla per il numero dei lati.

Il triangolo in questione ha l'angolo al vertice uguale a $2\pi/n$ e la base di lunghezza 1, quindi la sua altezza è uguale a $\dfrac{1}{2\mathrm{tg}(\pi/n)}$ e la sua area è quindi $\dfrac{1}{4\mathrm{tg}(\pi/n)}$. Poichè il poligono si decompone in n di questi triangoli, si ottiene la formula voluta. $\square$

ESERCIZIO 17. *Si disegni nel piano di Argand-Gauß l'insieme S dei numeri complessi soddisfacenti alla condizione*

$$\left|\frac{2-\overline{z}}{2z+3i}\right| > 1$$

e si dica per quali valori di m la retta $Imz = m(Rez)$ interseca S.

Svolgimento. Sia $z = x + iy$, con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Se $z \neq -\frac{3i}{2}$, la disuguaglianza proposta è equivalente alla disuguaglianza

$$|2 - \overline{z}| > |2z + 3i| \qquad \text{ovvero} \qquad x^2 + y^2 + \frac{4}{3}x + 4y + \frac{5}{3} < 0.$$

Dunque S è formato da tutti i punti interni alla circonferenza di centro $C = (-\frac{2}{3}, -2)$ e raggio $\frac{5}{3}$, escluso $(0, -\frac{3}{2})$.

La retta $y = mx$ interseca S se, e solo se, interseca la circonferenza che lo delimita in due punti distinti, ovvero se, e solo se, il sistema

$$\begin{cases} y = mx \\ x^2 + y^2 + \frac{4}{3}x + 4y + \frac{5}{3} = 0 \end{cases}$$

ha due soluzioni reali distinte. Ciò significa che l'equazione

$$3(1 + m^2)x^2 + 4(1 + 3m)x + 5 = 0$$

deve avere il discriminante positivo, ovvero deve aversi: $4(1 + 3m)^2 - 15(1 + m^2) > 0$. Ciò accade se $m < -\frac{12+5\sqrt{15}}{21}$ oppure se $m > \frac{5\sqrt{15}-12}{21}$. □

ESERCIZIO 18. *Si disegnino sul piano di Argand-Gauß i numeri complessi z soddisfacenti alla condizione*

$$\left| \frac{\bar{z} + 2i}{z - 2} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Svolgimento. Scriviamo, come di consueto $z = x + iy$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Allora

$$\left| \frac{\bar{z} + 2i}{z - 2} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \frac{x^2 + (y - 2)^2}{(x - 2)^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}$$

che, per $z \neq 2$, è equivalente alla condizione

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 \leq 0 \qquad \text{ovvero} \qquad (x + 2)^2 + (y - 4)^2 \leq 16.$$

Dunque, si tratta dei punti interni al cerchio di centro $C = (-2, 4)$ e raggio 4, compreso il bordo. Da ultimo, osserviamo che il punto $(2, 0)$ è esterno a questo cerchio e quindi la condizione $z \neq 2$ non modifica l'insieme delle soluzioni. □

ESERCIZIO 19. *Si disegni nel piano di Argand-Gauss l'insieme dei numeri complessi z, soddisfacenti alla condizione*

$$\left| \frac{2\bar{z} - i}{z + 2i + 1} \right| > 1.$$

Svolgimento. Esercizio! □

ESERCIZIO 20. *Si disegni nel piano di Argand-Gauss l'insieme dei numeri complessi z, soddisfacenti alla condizione*

$$\left| \frac{2i - z}{\bar{z} + i - 1} \right| > 2.$$

Svolgimento. Esercizio! □

ESERCIZIO 21. *Si disegni nel piano di Argand-Gauss il sottoinsieme*

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left| \frac{z - 2}{\bar{z} + 2i} \right| \leq \sqrt{2} \right\}.$$

Svolgimento. Esercizio! □

ESERCIZIO 22. *Si disegni nel piano di Argand-Gauss l'insieme dei numeri complessi z, soddisfacenti alla condizione*

$$\left| \frac{2 - z}{z - 3} \right| > \left| \frac{z}{1 - z} \right|.$$

Svolgimento. Esercizio! □

ESERCIZIO 23. *Si enunci il Criterio di Leibniz e lo si applichi allo studio della convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\log(1+n)}{n}.$$

La serie converge assolutamente?

Svolgimento. L'enunciato richiesto è

Criterio di Leibniz. *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione decrescente di numeri reali non negativi. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ converge se, e solo se, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Dobbiamo quindi verificare che la successione di termine generale $a_n = \frac{\log(1+n)}{n}$ soddisfa alle ipotesi del Criterio enunciato. Si tratta evidentemente di una successione di numeri reali positivi e $\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+n)}{n} = 0$, perchè il logaritmo è trascurabile rispetto a qualsiasi potenza della variabile, quando quest'ultima tende a $+\infty$. Resta quindi da verificare che si tratta di una successione decrescente, ovvero che

$$\frac{\log(1+n)}{n} > \frac{\log(2+n)}{n+1}$$

qualunque sia l'intero $n \geq 1$. Si osservi che

$$\frac{\log(1+n)}{n} > \frac{\log(2+n)}{n+1} \iff (1+n)^{1+n} > (2+n)^n \iff 1+n > \left(\frac{2+n}{1+n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{1+n}\right)^n$$

e quest'ultima è chiaramente verificata (perchè?).

Dunque la serie proposta soddisfa a tutte le ipotesi del Criterio di Leibniz e quindi converge, ma non converge assolutamente perchè $\frac{\log(1+n)}{n} \geq \frac{1}{n}$, per $n \geq 2$, e quindi il termine generale della serie dei valori assoluti è maggiore, per $n \geq 2$, del termine generale della serie armonica che diverge. Per il *Criterio del confronto* la serie dei valori assoluti è quindi divergente. □

ESERCIZIO 24. *Si dica se converge le serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log\sqrt[3n]{2^4}}{3^n}$$

e se ne calcoli la somma.

Svolgimento. Si osservi che $\log\sqrt[3n]{2^4} = \frac{4}{3n}\log 2$ e quindi la serie proposta è

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log\sqrt[3n]{2^4}}{3^n} = \frac{4}{3}\log 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1/3)^n}{n}$$

e ricordando la serie di Mc Laurin $-\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, che converge per $|x| < 1$, si conclude che la serie proposta converge a $\frac{4}{3}\log 2\log(3/2)$. □

ESERCIZIO 25. *Si determini un numero reale R (raggio di convergenza) tale che la serie di potenze*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,(x-2)^n}{3^{2n-1}n^n}$$

converga assolutamente per i numeri complessi z tali che $|z-2| < R$ e diverga se $|z-2| > R$. Si dica se la serie converge assolutamente per $x = 2i - 1 \in \mathbb{C}$.

Svolgimento. Sia z un numero complesso e consideriamo la serie dei valori assoluti

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \text{ove} \qquad a_n = \frac{n!\,|z-2|^n}{3^{2n-1}n^n}.$$

Si tratta di una serie a termini reali positivi e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!\,|z-2|^{n+1}}{3^{2n+1}(n+1)^{n+1}} \frac{3^{2n-1}n^n}{n!\,|z-2|^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|z-2|}{3^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{|z-2|}{9e}.$$

Quindi, per il *criterio del rapporto*, la serie dei valori assoluti converge se $\frac{|z-2|}{9e} < 1$ e diverge se $\frac{|z-2|}{9e} > 1$. Si conclude che $R = 9e$ è il raggio di convergenza cercato.

Da ultimo osserviamo che, per $x = 2i - 1$, si ha $|x-2| = |2i-3| = \sqrt{13} < 9e$ e quindi la serie proposta converge assolutamente sul punto $x = 2i - 1$. □

ESERCIZIO 26. *Si determini il raggio di convergenza (vedi esercizio precedente) della serie di potenze*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!\,(x+1)^n}{n^{2n}}.$$

Si dica se la serie converge assolutamente per $x = \dfrac{i}{4} \in \mathbb{C}$.

Svolgimento. Esercizio! □

ESERCIZIO 27. *Si calcoli la somma della serie*

$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+4^n}{5^n}; \qquad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n};$$

$$(b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-2^n}{3^n}; \qquad (d)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(2n+2)}$$

Svolgimento. (a). Si osservi che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+4^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{5^n} = \frac{1}{1-\frac{3}{5}} + \frac{1}{1-\frac{4}{5}} = \frac{15}{2};$$

perchè le due serie sono le serie geometriche di ragione $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{5}$, rispettivamente.

(b). Il ragionamento è analogo al caso precedente.

(c). Osserviamo che

$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}, \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases}, \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}.$$

Consideriamo quindi la somma parziale di ordine k della serie ed osserviamo che si ha

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2+n} = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) + \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1},$$

per ogni $k \geq 2$. Quindi la somma dela serie è

$$\lim_{k\to+\infty} s_k = \lim_{k\to+\infty} 1 - \frac{1}{k+1} = 1;$$

il che conclude la discussione.

(b). Il ragionamento è analogo al caso precedente, quando si osservi che

$$\frac{1}{(n+2)(2n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right);$$

quindi la somma della serie è $\frac{1}{2}$. □

ESERCIZIO 28. *Si mostri che, per ogni intero $k \geq 3$ si ha,*

$$\sum_{n=2}^{k} \frac{3-n}{n^3-n} = \frac{k-1}{k(k+1)},$$

e si utilizzi questa osservazione per calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3-n}{n^3-n}$.

Svolgimento. Si osservi che

$$\frac{3-n}{n^3-n} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n} + \frac{C}{n+1}, \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} A+B+C=0 \\ A-C=-1 \\ -B=3 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} A=1 \\ B=-3 \\ C=2 \end{cases}.$$

Si deduce che

$$\begin{aligned} s_k = \sum_{n=2}^{k} \frac{3-n}{n^3-n} &= 1 - \frac{3}{2} + \frac{2}{3} \\ &+ \frac{1}{2} - \frac{3}{3} + \frac{2}{4} \\ &+ \frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{2}{5} \\ &+ \frac{1}{4} - \frac{3}{5} + \frac{2}{6} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{1}{k-2} - \frac{3}{k-1} + \frac{2}{k} \\ &+ \frac{1}{k-1} - \frac{3}{k} + \frac{2}{k+1} = 1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{k} + \frac{2}{k+1}; \end{aligned}$$

perchè gli addendi che nelle diverse righe hanno lo stesso denominatore si cancellano in modo opportuno.

Dunque, essendo $s_k = \frac{1}{k} + \frac{2}{k+1} = \frac{k-1}{k(k+1)}$, si conclude che la somma della serie è $\lim_{k\to+\infty} s_k = 0$. □

ESERCIZIO 29. *Si dica se converge la serie*

$$(a)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{n^2+n}; \qquad (f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \log\frac{n+1}{n};$$

$$(b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n + \sin n + 5n}{\sqrt[3]{n^7}}; \qquad (g)\ \sum_{n=1}^{\infty} \log\frac{n^2+1}{n^2};$$

$$(c)\ \sum_{n=2}^{\infty} e^{\frac{-n^2}{n-1}}; \qquad (h)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\frac{n+1}{n};$$

$$(d)\ \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-5n^2}{3n+\sqrt{2}}}; \qquad (i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos(n\pi)}{n^2+1};$$

$$(e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}; \qquad (j)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n};$$

Svolgimento. (a). Si tratta di una serie a termini positivi e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2n}{n^2+n}}{\frac{1}{n}} = 2;$$

quindi, per il *Criterio del confronto asintotico*, la serie diverge come la serie armonica.

(c). Si tratta di una serie a termini positivi e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\log n + \sin n + 5n}{\sqrt[3]{n^7}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}} = 5;$$

quindi, per il *Criterio del confronto asintotico*, la serie data converge come la serie armonica generalizzata di esponente $\frac{4}{3}$.

(c). Si tratta di una serie a termini positivi e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{-n^2}{n-1}}}{e^{-n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{-n^2}{n-1}+n} = e^{-1};$$

quindi, per il *Criterio del confronto asintotico*, la serie data converge se, e solo se, converge la serie $\sum_{n=2}^{\infty} e^{-n}$, che è una serie geometrica di ragione minore di 1 e quindi converge.

(d). Il ragionamento è analogo a quanto appena visto.

(e). Si tratta di una serie a termini positivi e si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} < 1.$$

Quindi per il *Criterio della radice* la serie data converge.

(f). Si osservi che, per $n \to +\infty$, si deduce dalla formula di Mc Laurin per la funzione $\log(1+x)$ che

$$\log\frac{n+1}{n} = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o(1/n)$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log \frac{n+1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Per il *Criterio del confronto asintotico*, la serie diverge come la serie armonica.

(g). Ragionando come nel punto precedente, si ha che

$$\log \frac{n^2+1}{n^2} = \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} + o(1/n^2)$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log \frac{n^2+1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Per il *Criterio del confronto asintotico*, la serie converge come la serie armonica generalizzata di esponente 2.

(h). Si tratta di una serie a termini di segno alterno ed, essendo $n \geq 1$, si ha

$$\log \frac{n+1}{n} > \log \frac{n+2}{n+1} \iff \frac{n+1}{n} > \frac{n+2}{n+1} \iff (n+1)^2 > (n+2)n \iff 1 > 0.$$

Abbiamo quindi una serie a termini di segno alterno il cui termine generale decresce in valore assoluto e inoltre,

$$\lim_{n\to+\infty} \log \frac{n+1}{n} = 0.$$

Possiamo applicare il *Criterio di Leibniz* e concludere che la serie converge.

(i). Si tratta di osservare che $\cos(n\pi) = (-1)^n$ e verificare che siamo nelle ipotesi del *Criterio di Leibniz*.

(j). Si tratta di una serie a termini positivi e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Quindi per il *Criterio del rapporto*, si tratta di una serie convergente. □

ESERCIZIO 30. *Ricordiamo che ad ogni serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *è associata la successione delle sue somme parziali* $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$*, definita ponendo* $s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$*. In particolare, se la successione delle somme parziali è convergente, si ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} s_k.$$

Si mostri che vale un parziale reciproco di questo fatto. Data una successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si ponga* $d_0 = b_0$ *e* $d_n = b_n - b_{n-1}$ *per* $n \geq 1$*. Si mostri che la successione delle somme parziali della serie* $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ *coincide con la successione* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Svolgimento. Esercizio! □

ESERCIZIO 31. *Si mostri che la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ *converge per* $|x| < 1$ *e diverge per* $|x| \geq 1$*.*

Svolgimento. (Si applichi il *Criterio del rapporto* alla serie dei valori assoluti). □