Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova di accertamento del 15 febbraio 2002 – Compito **A**

ESERCIZIO 1. *Nello spazio euclideo* $\mathbb{R}^3$ *si considerino i vettori*

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e \qquad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

(a) Si decomponga il vettore v *come somma* $v_1 + v_2$ *ove* v_1 *sia ortogonale a* w*, e* v_2 *parallelo a* w*.*

(b) Si determinino le superfici dei due parallelogrammi aventi come lati i vettori v*,*v_1 *(primo parallelogramma) e* v*,*v_2 *(secondo parallelogramma)*

(c) Le due superfici del punto precedente risultano uguali: dire se si tratta di un risultato generale (indipendente dai vettori v *e* w *scelti), ed eventualmente giustificarlo e darne una interpretazione in termini di geometria (piana) elementare.*

Svolgimento. (a) Possiamo calcolare subito la proiezione di v nella direzione di w

$$v_2 = \frac{v \cdot w}{w \cdot w} w = \frac{5}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/9 \\ 10/9 \\ 5/9 \end{pmatrix}$$

e di conseguenza la componente di v ortogonale a w sarà la differenza

$$v_1 = v - v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10/9 \\ 10/9 \\ 5/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/9 \\ -1/9 \\ 4/9 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

(b) Per calcolare l'area dei due parallelogrammi possiamo calcolare la norma del prodotto vettore dei due lati. Dette S_1 ed S_2 le superfici, abbiamo:

$$S_1 = \|v \times v_1\| = \frac{1}{9} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{9} \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{9}\sqrt{50} = \frac{5}{9}\sqrt{2}$$

ed analogamente

$$S_2 = \|v \times v_2\| = \frac{5}{9} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{5}{9} \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{5}{9}\sqrt{2} .$$

(c) In effetti le due superfici risultano uguali, ed una facile verifica:

$$S_1 = \|v \times v_1\| = \|v \times (v - v_2)\| = \|(v \times v) - (v \times v_2))\| = \|v \times v_2\| = S_2$$

(abbiamo usato bilinearità del prodotto vettore e che $v \times v = 0$) ci dice che il risultato è generale, indipendente da v e w dell'esercizio. Inoltre l'osservazione che

$$S_1 = \|v \times v_1\| = \|(v_1 + v_2) \times v_1\| = \|(v_1 \times v_1) + (v_2 \times v_1)\| = \|v_2 \times v_1\|$$

ci dice che si tratta dell'area del rettangolo di lati v_1 e v_2. Si può vedere con un disegno che i due parallelogrammi in questione sono due deformazioni dello stesso rettangolo, di cui mantengono fisse una base e l'altezza corrispondente, quindi hanno la stessa area. □

ESERCIZIO 2. *Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino la retta r ed il suo punto P, definiti da*

$$r : \begin{cases} x + y + 3z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}, \qquad P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si verifichi che P è un punto di r e si scriva l'equazione cartesiana del cono $\mathscr{C}$, di asse r, vertice P e semiapertura $\frac{\pi}{4}$.
(b) Si determinino i punti di intersezione, Q_1 e Q_2, tra il cono $\mathscr{C}$ e la retta s, di equazione

$$s : \begin{cases} x - y - z = 2 \\ 3x - 3y - 2z = 4 \end{cases}.$$

(c) Si determini, nel fascio di asse s, un piano π ortogonale alla retta r e si scrivano le coordinate del punto $Q_3 = \pi \cap r$.
(d) Si calcoli il volume del tetraedro di vertici P, Q_1, Q_2, Q_3.

Svolgimento. (a) Le coordinate del punto P soddisfano alle equazioni di r e quindi si tratta di un punto della retta. Un vettore parallelo ad r è una soluzione non-banale del sistema omogeneo associato; ad esempio, possiamo prendere $\mathbf{v} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Un punto $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$, dello spazio appartiene al cono $\mathscr{C}$ se, e solo se, il vettore $\overrightarrow{PX}$ forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con la retta r, ovvero se, e solo se,

$$\frac{|\overrightarrow{PX} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{v}\|\|\overrightarrow{PX}\|} = \cos\tfrac{\pi}{4}, \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{|(x-2) - y|}{\sqrt{2}\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Da ciò si deduce che l'equazione del cono è $\mathscr{C} : (z+1)^2 + 2y(x-2) = 0$.
(b) Per determinare l'intersezione, dobbiamo risolvere il sistema (di secondo grado) che si ottiene unendo le equazioni di s all'equazione di $\mathscr{C}$, ovvero

$$\mathscr{C} \cap s : \begin{cases} x - y - z = 2 \\ 3x - 3y - 2z = 4 \\ (z+1)^2 + 2y(x-2) = 0 \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad Q_1 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -2 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(c) I piani del fascio di asse s hanno equazione

$$\lambda(x - y - z - 2) + \mu(3x - 3y - 2z - 4) = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad (\lambda + 3\mu)x - (\lambda + 3\mu)y - (\lambda + 2\mu)z - 2(\lambda + 2\mu) = 0,$$

al variare dei parametri omogenei (λ, μ). Un tale piano è ortogonale alla retta r se, e solo se, i coefficienti della parte omogenea (di grado 1) della sua equazione sono proporzionali alle componenti del vettore $\mathbf{v}$. Ciò accade se, e solo se, $\lambda + 2\mu = 0$; quindi si ha $\pi : x - y = 0$. L'intersezione tra π ed r è la soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} x + y + 3z = -1 \\ x + y + z = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad Q_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Sia V il volume cercato. È sufficiente ricordare che il volume del tetraedro che ha come vertici i quattro punti P, Q_1, Q_2, Q_3 è uguale ad $\frac{1}{6}$ del volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $\overrightarrow{PQ_1}$, $\overrightarrow{PQ_2}$, $\overrightarrow{PQ_3}$; ovvero

$$V = \frac{1}{6}|\overrightarrow{PQ_1} \cdot \overrightarrow{PQ_2} \times \overrightarrow{PQ_3}| = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Fine dell'esercizio. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri la curva piana di equazione* $12x^2 + 7xy - 12y^2 - 31x + 17y + 5 = 0$. *Si dica se si tratta di una conica non degenere e se ne determini il tipo, gli eventuali asintoti ed assi e l'eventuale centro. Se ne scriva infine l'equazione canonica.*

Svolgimento. Cominciamo osservando che la componente omogenea di grado 2 si decompone nel prodotto di due forme lineari distinte; ovvero

$$12x^2 + 7xy - 12y^2 = (4x - 3y)(3x + 4y).$$

Possiamo quindi determinare le costanti α e β affinché si abbia

$$\alpha(4x - 3y) + \beta(3x + 4y) = -31x + 17y \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} \alpha = -7 \\ \beta = -1 \end{cases};$$

e perciò l'equazione di partenza si riscrive nella forma $(4x-3y-1)(3x+4y-7)-2 = 0$, da cui si può concludere che la curva di partenza è un iperbole non degenere di cui le rette $\ell_1 : 4x - 3y - 1 = 0$ ed $\ell_2 : 3x + 4y - 7 = 0$ sono gli asintoti. Queste due rette si intersecano nel punto $C = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, che è il centro dell'iperbole. Detti $n_1 = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$ ed $n_2 = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ rispettivamente, due vettori ortogonali alle rette ℓ_1 ed ℓ_2 determinati dai coefficienti delle equazioni date, si ha che $\|n_1\| = \|n_2\|$ e quindi possiamo facilmente determinare le bisettrici, ovvero le rette determinate dai polinomi lineari

$$x_1 = \frac{\ell_1 + \ell_2}{2} = \frac{7}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}(y - 1), \qquad \text{ed} \qquad x_2 = \frac{\ell_1 - \ell_2}{2} = \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{7}{2}(y - 1);$$

l'equazione dell'iperbole si può scrivere nella forma: $x_1^2 - x_2^2 = 2$. Normalizzando i polinomi lineari x_1 ed x_2 otteniamo una coppia di coordinate ortonormali nel piano, ovvero

$$\begin{cases} X = \frac{\sqrt{2}}{5} x_1 = \frac{7}{5\sqrt{2}}(x - 1) + \frac{1}{5\sqrt{2}}(y - 1) \\ Y = \frac{\sqrt{2}}{5} x_2 = \frac{1}{5\sqrt{2}}(x - 1) - \frac{7}{5\sqrt{2}}(y - 1) \end{cases}$$

ed in questo sistema di coordinate la conica assume equazione canonica, ovvero $\frac{25}{4}X^2 - \frac{25}{4}Y^2 = 1$. □

Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova di accertamento del 15 febbraio 2002 – Compito **B**

ESERCIZIO 1. *Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori*

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e \qquad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

(a) Si decomponga il vettore v come somma $v_1 + v_2$ ove v_1 sia ortogonale a w, e v_2 parallelo a w.

(b) Si determinino le superfici dei due parallelogrammi aventi come lati i vettori v,v_1 (primo parallelogramma) e v,v_2 (secondo parallelogramma)

(c) Le due superfici del punto precedente risultano uguali: dire se si tratta di un risultato generale (indipendente dai vettori v e w scelti), ed eventualmente giustificarlo e darne una interpretazione in termini di geometria (piana) elementare.

Svolgimento. (a) Possiamo calcolare subito la proiezione di v nella direzione di w

$$v_2 = \frac{v \cdot w}{w \cdot w} w = \frac{-1}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/9 \\ -1/9 \\ 2/9 \end{pmatrix}$$

e di conseguenza la componente di v ortogonale a w sarà la differenza

$$v_1 = v - v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2/9 \\ -1/9 \\ 2/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/9 \\ -8/9 \\ 7/9 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 11 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

(b) Per calcolare l'area dei due parallelogrammi possiamo calcolare la norma del prodotto vettore dei due lati. Dette S_1 ed S_2 le superfici, abbiamo:

$$S_1 = \|v \times v_1\| = \frac{1}{9} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 11 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{9} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{9}\sqrt{26}$$

ed analogamente

$$S_2 = \|v \times v_2\| = \frac{1}{9} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{9} \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{9}\sqrt{26} .$$

(c) In effetti le due superfici risultano uguali, ed una facile verifica:

$$S_1 = \|v \times v_1\| = \|v \times (v - v_2)\| = \|(v \times v) - (v \times v_2))\| = \|v \times v_2\| = S_2$$

(abbiamo usato bilinearità del prodotto vettore e che $v \times v = 0$) ci dice che il risultato è generale, indipendente da v e w dell'esercizio. Inoltre l'osservazione che

$$S_1 = \|v \times v_1\| = \|(v_1 + v_2) \times v_1\| = \|(v_1 \times v_1) + (v_2 \times v_1)\| = \|v_2 \times v_1\|$$

ci dice che si tratta dell'area del rettangolo di lati v_1 e v_2. Si può vedere con un disegno che i due parallelogrammi in questione sono due deformazioni dello stesso rettangolo: ciascuno dei due mantiene fisse una base e l'altezza corrispondente, quindi hanno la stessa area. $\square$

ESERCIZIO 2. *Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino la retta r ed il suo punto P, definiti da*

$$r : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = -10 \end{cases}, \qquad P = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si verifichi che P è un punto di r e si scriva l'equazione cartesiana del cono $\mathscr{C}$, di asse r, vertice P e semiapertura $\frac{\pi}{4}$.*
(b) *Si determinino i punti di intersezione, Q_1 e Q_2, tra il cono $\mathscr{C}$ e la retta s, di equazione*

$$s : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y + 2z = 7 \end{cases}.$$

(c) *Si determini, nel fascio di asse s, un piano π ortogonale alla retta r e si scrivano le coordinate del punto $Q_3 = \pi \cap r$.*
(d) *Si calcoli il volume del tetraedro di vertici P, Q_1, Q_2, Q_3.*

Svolgimento. (a) Le coordinate del punto P soddisfano alle equazioni di r e quindi si tratta di un punto della retta. Un vettore parallelo ad r è una soluzione non-banale del sistema omogeneo associato; ad esempio, possiamo prendere $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Un punto $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, dello spazio appartiene al cono $\mathscr{C}$ se, e solo se, il vettore $\overrightarrow{PX}$ forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con la retta r, ovvero se, e solo se,

$$\frac{|\overrightarrow{PX} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{v}\|\|\overrightarrow{PX}\|} = \cos\tfrac{\pi}{4}, \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{|(x+1) + (z-1)|}{\sqrt{2}\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Da ciò si deduce che l'equazione del cono è $\mathscr{C} : (y-2)^2 - 2(x+1)(z-1) = 0$.
(b) Per determinare l'intersezione, dobbiamo risolvere il sistema (di secondo grado) che si ottiene unendo le equazioni di s all'equazione di $\mathscr{C}$, ovvero

$$\mathscr{C} \cap s : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y + 2z = 7 \\ (y-2)^2 - 2(x+1)(z-1) = 0 \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad Q_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

(c) I piani del fascio di asse s hanno equazione

$$\lambda(x+y+z-3) + \mu(2x+3y+2z-7) = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad (\lambda+2\mu)x + (\lambda+3\mu)y + (\lambda+2\mu)z - (3\lambda+7\mu) = 0,$$

al variare dei parametri omogenei (λ, μ). Un tale piano è ortogonale alla retta r se, e solo se, i coefficienti della parte omogenea (di grado 1) della sua equazione sono proporzionali alle componenti del vettore $\mathbf{v}$. Ciò accade se, e solo se, $\lambda + 3\mu = 0$; quindi si ha $\pi : x + z = 2$. L'intersezione tra π ed r è la soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = -10 \\ x + z = 2 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad Q_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(d) Sia V il volume cercato. È sufficiente ricordare che il volume del tetraedro che ha come vertici i quattro punti P, Q_1, Q_2, Q_3 è uguale ad $\frac{1}{6}$ del volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $\overrightarrow{PQ_1}$, $\overrightarrow{PQ_2}$, $\overrightarrow{PQ_3}$; ovvero

$$V = \frac{1}{6}|\overrightarrow{PQ_1} \cdot \overrightarrow{PQ_2} \times \overrightarrow{PQ_3}| = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Fine dell'esercizio. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri la curva piana di equazione* $2x^2 + 5xy + 2y^2 - 9x - 9y + 7 = 0$. *Si dica se si tratta di una conica non degenere e se ne determini il tipo, gli eventuali asintoti ed assi e l'eventuale centro. Se ne scriva infine l'equazione canonica.*

Svolgimento. Cominciamo osservando che la componente omogenea di grado 2 si decompone nel prodotto di due forme lineari distinte; ovvero

$$2x^2 + 5xy + 2y^2 = (2x + y)(x + 2y).$$

Possiamo quindi determinare le costanti α e β affinché si abbia

$$\alpha(2x + y) + \beta(x + 2y) = -9x - 9y \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = -3 \end{cases};$$

e perciò l'equazione di partenza si riscrive nella forma $(2x+y-3)(x+2y-3)-2 = 0$, da cui si può concludere che la curva di partenza è un iperbole non degenere di cui le rette $\ell_1 : 2x + y - 3 = 0$ ed $\ell_2 : x + 2y - 3 = 0$ sono gli asintoti. Queste due rette si intersecano nel punto $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, che è il centro dell'iperbole. Detti $n_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed $n_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ rispettivamente, due vettori ortogonali alle rette ℓ_1 ed ℓ_2 determinati dai coefficienti delle equazioni date, si ha che $\|n_1\| = \|n_2\|$ e quindi possiamo facilmente determinare gli assi dell'iperbole, ovvero le bisettrici degli asintoti, che sono le rette determinate dai polinomi lineari

$$x_1 = \frac{\ell_1 + \ell_2}{2} = \frac{3}{2}(x - 1) + \frac{3}{2}(y - 1), \qquad \text{ed} \qquad x_2 = \frac{\ell_1 - \ell_2}{2} = \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{2}(y - 1).$$

L'equazione dell'iperbole si può scrivere nella forma: $x_1^2 - x_2^2 = 2$ e, normalizzando i polinomi lineari x_1 ed x_2, otteniamo una coppia di coordinate ortonormali nel piano, ovvero

$$\begin{cases} X = \frac{\sqrt{2}}{3}x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - 1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(y - 1) \\ Y = \sqrt{2}x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - 1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(y - 1) \end{cases}$$

ed in questo sistema di coordinate la conica assume equazione canonica, ovvero $\frac{9}{4}X^2 - \frac{1}{4}Y^2 = 1$. □

Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova di accertamento del 26 marzo 2002

ESERCIZIO 1. *Si considerino gli spazi vettoriali V e W su $\mathbb{R}$ con le rispettive basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$.*

(a) Si dica se esiste un'applicazione lineare $\phi : V \to W$ che soddisfa alle seguenti condizioni

$$\phi(v_1 + v_2) = 2w_1 + w_2 + 3w_3, \qquad \phi(v_1 + v_2 + v_3) = 4w_1 + 2w_2 + 6w_3,$$
$$\phi(v_2 + v_3) = 2w_1 + 2w_2 + 5w_3, \qquad \phi(v_2 + v_3 + v_4) = 4w_1 + w_2 + 4w_3;$$

e se ne scriva la matrice rispetto alle basi date.

(b) Si mostri che il sottoinsieme $A = \{\, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) \mid \phi \circ \psi = 0 \,\}$ è un sottospazio dello spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ e se ne calcoli la dimensione. Sia $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) \to M_4(\mathbb{R})$ l'applicazione che ad ogni endomorfismo di V associa la sua matrice, rispetto alla base $\mathcal{V}$. Si determini una base per il sottospazio immagine di A.

(c) Si mostri che il sottoinsieme $B = \{\, \theta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, W) \mid \theta \circ \phi = 0 \,\}$ è un sottospazio dello spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, W)$ e se ne calcoli la dimensione. Sia $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, W) \to M_3(\mathbb{R})$ l'applicazione che ad ogni endomorfismo di W associa la sua matrice, rispetto alla base $\mathcal{W}$. Si determini una base per il sottospazio immagine di B.

**(d) Si consideri il sottinsieme $C = \{\, (\psi, \theta) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, W) \mid \theta \circ \phi \circ \psi = 0 \,\}$ del prodotto cartesiano $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, W)$, e si mostri che $A \times B$ è contenuto in C. È vero o falso che $A \times B = C$? È vero o falso che C sia un sottospazio di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, W)$?*

Svolgimento. (a) Imponendo la condizione che ϕ sia un'applicazione lineare, si deduce facilmente dalle condizioni date che deve aversi

$$\phi(v_1) = 2w_1 + w_3, \qquad \phi(v_2) = w_2 + 2w_3, \qquad \phi(v_3) = 2w_1 + w_2 + 3w_3, \qquad \phi(v_4) = 2w_1 - w_2 - w_3;$$

quindi ϕ è unicamente determinata dalle condizioni poste, e

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) L'insieme A è formato da tutte le applicazioni lineari ψ tali $\phi \circ \psi = 0$; ovvero, ψ varia nel sottospazio $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \ker\phi) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$. Dunque la sua dimensione è

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \ker\phi) = (\dim V)(\dim \ker\phi) = 4 \dim \ker\phi = 8,$$

dato che ϕ ha rango 2 e $\ker\phi = \langle v_1 + v_2 - v_3, v_1 - v_2 - v_4 \rangle$. Possiamo pertanto scrivere una base $A_1, \dots, A_8$ dello spazio immagine $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(A)$, usando le matrici delle applicazioni che mandano la base data nei generatori del nucleo:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ -1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&-1&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&-1 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},$$
$$A_5 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ -1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ -1&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&-1&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&-1&0&0 \end{pmatrix}, \quad A_7 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&-1&0 \end{pmatrix}, \quad A_8 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&0&-1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix},$$

(c) L'insieme B è formato da tutte le applicazioni lineari θ di W in sè tali che $\theta \circ \phi = 0$; ovvero, θ deve annullare i vettori di $\mathrm{im}\,\phi = \langle 2w_1 + w_3, w_2 + 2w_3 \rangle$. Detto U un sottospazio complementare di $\mathrm{im}\,\phi$ in W (per esempio $U = \langle w_3 \rangle$) abbiamo che

$$\dim B = \dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U, W) = (\dim U)(\dim W) = 3,$$

dato che U ha dimensione 1. Una volta scelto $\theta(w_3)$ abbiamo necessariamente $\theta(w_1) = -\frac{1}{2}\theta(w_3)$ e $\theta(w_2) = -2\theta(w_3)$; dunque le matrici in $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(B)$ si scrivono come

$$\begin{pmatrix} -\alpha/2 & -2\alpha & \alpha \\ -\beta/2 & -2\beta & \beta \\ -\gamma/2 & -2\gamma & \gamma \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1/2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui si ricava una base per quello spazio.

(d) Certo se $(\psi, \theta) \in A \times B$, cioè $\psi \in A$ e $\theta \in B$ allora $\theta \circ \phi \circ \psi = 0$, dunque $(\psi, \theta) \in C$, il che dimostra che $A \times B \subseteq C$.

Più generalmente è vero che $A \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, W) \subseteq C$ e $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) \times B \subseteq C$, per cui certamente $C \neq A \times B$.

D'altra parte C non è un sottospazio vettoriale: per esempio contiene le coppie $(\mathrm{id}_V, 0)$ e $(0, \mathrm{id}_W)$ (0 indica le applicazioni nulle), ma non la somma $(\mathrm{id}_V, 0) + (0, \mathrm{id}_W) = (\mathrm{id}_V, \mathrm{id}_W)$, visto che $\mathrm{id}_W \circ \phi \circ \mathrm{id}_V = \phi \neq 0$. In effetti lo spazio vettoriale generato da C in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, W)$ è tutto lo spazio, come si deduce facilmente dal fatto che contiene tutti gli elementi del tipo $(f, 0)$ e $(0, g)$ con $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, W)$. $\square$

ESERCIZIO 2. *Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$, si considerino i piani*

$$\sigma_1 : \begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_4 = -1 \end{cases}, \quad \sigma_2 : \begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \quad \text{e la retta} \quad r : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

(a) Si mostri che σ_1 e σ_2 hanno in comune un unico punto P e si determinino le coordinate di tale punto.
(b) Si mostri che la retta r interseca entrambo i piani e si determinino le coordinate dei punti $Q_1 = r \cap \sigma_1$ e $Q_2 = r \cap \sigma_2$.
(c) Si determinino il baricentro G e l'area del triangolo PQ_1Q_2.
(d) Si scrivano le equazioni cartesiane del piano π, passante per G e perpendicolare al piano contenente il triangolo PQ_1Q_2.

Svolgimento. (a) L'intersezione tra i due piani è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\sigma_1 \cap \sigma_2 : \begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}.$$

La matrice dei coefficienti del sistema ha rango 4 ed ha quindi lo stesso rango della matrice completa. Per il *Teorema di Rouché-Capelli*, ciò significa che le soluzioni del sistema sono una sottovarietà lineare di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 0, cioè un punto; precisamente il punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) Considerando i due sistemi lineari

$$\sigma_1 \cap r : \begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \sigma_2 \cap r : \begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases},$$

si vede che entrambo i sistemi hanno matrici complete ed incomplete di rango 4 e quindi ammettono entrambo un'unica soluzione, ovvero $Q_1 = r \cap \sigma_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $Q_2 = r \cap \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) Il baricentro è il punto

$$G = \frac{1}{3}(P + Q_1 + Q_2) = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}.$$

I vettori corrispondenti ai due lati del triangolo uscenti da Q_1 sono $\overrightarrow{Q_1P} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ e $\overrightarrow{Q_1Q_2} = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Considerando la matrice Y che ha come colonne le coordinate di questi due vettori, l'area cercata è uguale a

$$\frac{1}{2}\sqrt{\det({}^tYY)} = \frac{1}{2}\sqrt{\det \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{\det \left(\begin{smallmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 6 \end{smallmatrix}\right)} = \frac{\sqrt{26}}{2}.$$

(d) Le direzioni parallele al piano π devono essere ortogonali ai due vettori $\overrightarrow{Q_1P}$ e $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ scritti sopra; inoltre il piano deve passare per il punto G. Quindi, π ha equazioni

$$\pi : \begin{cases} 6x_2 - 3x_4 = 1 \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 7 \end{cases}.$$

Fine della risoluzione. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri l'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

(a) Si determini il polinomio caratteristico di ϕ e si dica se ϕ è invertibile.
(b) Si determinino gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori per ϕ.
(c) Si determinino (se esistono) una matrice invertibile P ed una matrice diagonale Δ tali che $P^{-1}AP = \Delta$.
**(d) Si determinino (se esistono) una matrice invertibile Q ed una matrice diagonale Δ' tali che $Q^{-1}(A^4 - 3A^2)Q = \Delta'$.*

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è

$$\det(A - x\mathbf{1}) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -4-x & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -2-x & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3-x \end{pmatrix} = (x-2)^2(x+3)^2.$$

Il termine noto di questo polinomio è $\det A = 36$ e quindi ϕ è invertibile.

(b) Gli autovettori di ϕ sono 2 e -3, entrambo con molteplicità 2. Gli spazi di autovettori corrispondenti sono le soluzioni dei sistemi lineari $(A - 2\mathbf{1})x = 0$ ed $(A + 3\mathbf{1})x = 0$, ovvero

$$\ker(\phi - 2) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle \qquad \text{e} \qquad \ker(\phi + 3) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle.$$

(c) La matrice Δ ha sulla diagonale gli autovalori di ϕ, mentre le colonne della matrice P sono una base di autovettori corrispondenti; ovvero si pone

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e si verifica con un calcolo diretto che P è invertibile (si ricordi ad esempio che autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti) ed $AP = P\Delta$, ovvero $P^{-1}AP = \Delta$.

(d) Da quanto appena dimostrato, si ricava che $A = P\Delta P^{-1}$, e quindi

$$\begin{aligned} A^4 - 3A^2 &= (P\Delta P^{-1})(P\Delta P^{-1})(P\Delta P^{-1})(P\Delta P^{-1}) - 3(P\Delta P^{-1})(P\Delta P^{-1}) = \\ &= P\Delta^4 P^{-1} - 3P\Delta^2 P^{-1} = P(\Delta^4 - 3\Delta^2)P^{-1}. \end{aligned}$$

Si conclude che si possono prendere le matrici

$$Q = P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \Delta' = \Delta^4 - 3\Delta^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 54 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 54 \end{pmatrix}$$

e ciò conclude la discussione. $\square$

Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova scritta del 8 aprile 2002

ESERCIZIO 1. *Si considerino in* $\mathbb{R}^4$ *i sottospazi* $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ *e* $W = \langle w_1, w_2 \rangle$, *ove*

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad e \qquad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si verifichi che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(b) Si scriva la matrice rispetto alla base canonica dell'applicazione $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, *che si ottiene proiettando i vettori di* $\mathbb{R}^4$ *su* W, *parallelamente al sottospazio* U.

(c) Si determinino i vettori w_1' *e* w_2', *simmetrici rispettivamente dei vettori* w_1 *e* w_2 *rispetto al piano* $U^\perp$.

(d) Indicato con W' *il sottospazio generato da* w_1' *e* w_2', *è vero o falso che (la restrizione di)* π *induce un'isometria tra* W' *e* W*?*

Svolgimento. (a) I sottospazi U e W hanno entrambi dimensione 2; quindi $U + W = U \oplus W = \mathbb{R}^4$ se, e solo se, $U \cap W = \langle 0 \rangle$. Un vettore appartenente all'intersezione tra i due sottospazi dovrebbe avere componenti del tipo $\begin{pmatrix} a \\ a \\ b \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c+d \\ c+d \\ d \end{pmatrix}$, e gli unici quattro numeri soddisfacenti a queste condizioni sono $a = b = c = d = 0$, che è quanto volevamo verificare.

(*b*) Un vettore $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ appartiene al sottospazio W se, e solo se, le sue coordinate soddisfano alle equazioni $\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$. Dunque, dato un generico vettore x, la sua proiezione sarà il vettore $\pi(x) = x - \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2$, ove α_1 ed α_2 sono determinate imponendo la condizione che $\pi(x)$ appartenga a W, ovvero $\begin{cases} \alpha_1 = -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \\ \alpha_2 = -x_1 + x_2 - x_4 \end{cases}$. Si conclude così che $\pi(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix}$ e quindi la matrice cercata è

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(*c*) Dato un vettore x di $\mathbb{R}^4 = U \oplus U^\perp$, il suo simmetrico rispetto al piano $U^\perp$, si ottiene sottraendo ad x il doppio della sua componente lungo U. I vettori u_1 ed u_2 sono una base ortogonale di U e quindi la componente del vettore x lungo U è uguale a $\frac{x \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{x \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2$. Si conclude che

$$w_1' = w_1 - 2\left(\frac{w_1 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{w_1 \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_2' = w_2 - 2\left(\frac{w_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{w_2 \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(*d*) Per costruzione, si ha che $w_1' - w_1$ e $w_2' - w_2$ sono vettori di U e quindi $\pi(w_1') = w_1$ e $\pi(w_2') = w_2$. Quindi, dato un generico vettore $w' = y_1 w_1' + y_2 w_2'$ di W', si ha $\pi(w') = y_1 w_1 + y_2 w_2$ e infine

$$\|w'\|^2 = w' \cdot w' = 3y_1^2 + 4y_1 y_2 + 3y_2^2 = \pi(w') \cdot \pi(w') = \|\pi(w')\|^2$$

che permette di concludere che π induce un'isometria tra i due sottospazi. Naturalmente, si poteva anche osservare che la restrizione di π a W' coincide con la restrizione (allo stesso sottospazio) della simmetria rispetto al piano $U^\perp$, che è un'isometria di tutto lo spazio $\mathbb{R}^4$. □

ESERCIZIO 2. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -6 & 6 \\ 0 & -8 & 14 & -9 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 1 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 1 & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}.$$

(a) *Si determinino le entrate delle matrici L ed U affinché si abbia $A = LU$.*
(b) *Si dica se le entrate delle matrici L ed U sono univocamente determinate dalle condizioni date, oppure, in caso contrario, si determinino tutte le possibili soluzioni del problema posto al punto precedente.*
(b) *Si determinino (se esistono) U^{-1} ed L^{-1} e si calcoli A^{-1}.*

Svolgimento. Indichiamo con $a_1, \dots, a_4$ le righe della matrice A e con $u_1, \dots, u_4$ le righe della matrice U. La condizione $LU = A$ equivale alle equazioni

$$u_1 = a_1, \qquad u_2 = a_2 - b_{21}u_1, \qquad u_3 = a_3 - b_{31}u_1 - b_{32}u_2, \qquad u_4 = a_4 - b_{41}u_1 - b_{42}u_2 - b_{43}u_3.$$

Queste equazioni determinano univocamente L ed U se, e solo se, u_{11}, u_{22}, u_{33}, sono diversi da 0. Se qualcuno di questi termini si annulla, possono esservi infinite soluzioni oppure nessuna a seconda della matrice A (lo studente è invitato a costruirsi degli esempi delle diverse situazioni possibili).

Nel caso presente, si ha quindi

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Le matrici L ed U sono entrambe invertibili ($\det L = 1$ e $\det U = 30 = \det A$) e con calcoli standard si ottiene

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Essendo $A = LU$, si ha

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 & 0 \\ 60 & 15 & -10 & 0 \\ 42 & 24 & 6 & 6 \\ 12 & 24 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 3. *Nello spazio tridimensionale si consideri il tetraedro Δ, di vertici*

$$P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si calcoli il volume V di Δ.*
(b) *Si considerino il punto $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ ed il piano $\sigma : y = -4$. Dato un punto X dello spazio, non contenuto nel piano per Q, parallelo a σ, si definisce la sua proiezione, X', dal punto Q sul piano σ come il punto di intersezione tra la retta per X e Q ed il piano σ (in simboli $X' = (X + Q) \cap \sigma$). Si determinino le proiezioni $P_0', \dots, P_3'$ dei vertici di Δ dal punto Q sul piano σ.*
(c) *Si calcolino le coordinate baricentriche del punto P_3' rispetto ai punti P_0', P_1', P_2'.*
(d) *Si calcoli l'area A della proiezione di Δ.*

Svolgimento. (a) Considerati i vettori $\overrightarrow{P_0P_1} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\overrightarrow{P_0P_2} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$,$\overrightarrow{P_0P_3} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, il volume cercato è uguale ad $\frac{1}{6}$ del volume del parallelepipedo avente i tre vettori come spigoli, ovvero

$$V = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right| = \frac{2}{3}.$$

(*b*) Il punto P_0' è l'intersezione tra la retta per Q, parallela al vettore $\overrightarrow{QP_0}$, ed il piano σ, ovvero il punto $P_0' = \left(\begin{smallmatrix} -\frac{14}{5} \\ -4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. Analogamente, si determinano i punti $P_1' = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$, $P_2' = \left(\begin{smallmatrix} -\frac{10}{3} \\ -4 \\ 10 \end{smallmatrix}\right)$ e $P_3' = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ -4 \\ 8 \end{smallmatrix}\right)$.

(*c*) I quattro punti stanno su uno stesso piano e quindi esistono certamente dei numeri reali α, β, γ, con $\alpha + \beta + \gamma = 1$, per cui si abbia $P_3' = \alpha P_0' + \beta P_1' + \gamma P_2'$; precisamente, si ha

$$\alpha = \frac{5}{92}, \qquad \beta = \frac{9}{23}, \qquad \gamma = 1 - \alpha - \beta = \frac{51}{92}.$$

(d) Poichè le tre coordinate baricentriche di P_3' sono tutte positive, si conclude che il punto P_3' è interno al triangolo di vertici P_0', P_1', P_2' e quindi che l'area A si riduce all'area di quest'ultimo triangolo, ovvero

$$A = \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{P_1'P_0'} \times \overrightarrow{P_1'P_2'}\| = \frac{184}{15}.$$

Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 4. *Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori*

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e \qquad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

(a) *calcolare l'angolo formato da v e w;*
(b) *determinare, se ne esistono, tutti i vettori che formano due angoli uguali di ampiezza $30°$ con v e w;*
(c) *determinare, se ne esistono, tutti i vettori che formano due angoli uguali di ampiezza $60°$ con v e w;*
(d) *determinare, se ne esistono, tutti i vettori che formano due angoli uguali di ampiezza $90°$ con v e w;*
(e) *dire se i tre sottinsiemi di $\mathbb{R}^3$ prima trovati sono o no sottospazi vettoriali.*

Svolgimento. (a) Per definizione il coseno dell'angolo θ cercato è

$$\cos\theta = \frac{v \cdot w}{\|v\|\ \|w\|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

e dunque $\theta = 60°$.

(*b*) Siccome i due vettori v e w formano un angolo di $60°$, i vettori che formano angoli uguali di $30°$ con ciascuno dei due sono tutti e soli i multipli scalari *positivi* di un vettore bisettore dell'angolo θ, che si può ottenere tramite la somma dei due vettori normalizzati:

$$\frac{v}{\|v\|} + \frac{w}{\|w\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

(*c*) In questo caso possiamo cercare tutti i multipli scalari *positivi* di un vettore ${}^t(x, y, z)$ di norma 1 e che formi angoli di $60°$ con v e w. Si ottiene un sistema di equazioni

$$\begin{cases} y = 1/2 \\ \dfrac{y + \sqrt{3}z}{2} = 1/2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

da cui si ricavano due possibili soluzioni:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{6}/3 \\ 1/2 \\ \sqrt{3}/6 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} -\sqrt{6}/3 \\ 1/2 \\ \sqrt{3}/6 \end{pmatrix} .$$

(d) In questo caso si tratta di trovare i vettori ortogonali sia a v che a w, dunque si tratta dei multipli scalari (qualsiasi) del loro prodotto vettore, che è ${}^t(\sqrt{3}, 0, 0)$. Dunque si tratta del sottospazio generato da ${}^t(1, 0, 0)$.

(e) Solo il terzo sottinsieme è un sottospazio vettoriale, essendo l'ortogonale del piano contenente v e w; il primo sottinsieme forma una semiretta (sono solo i multipli positivi d'un fissato vettore), e il secondo è l'unione di due semirette; in entrambi i casi per esempio non contengono il vettore nullo. □

ESERCIZIO 5. *Si consideri l'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

(a) Si determini il polinomio caratteristico di ϕ e si dica se ϕ è invertibile.
(b) Si determinino gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori per ϕ.
(c) Si dica se ϕ è, o meno, diagonalizzabile. Se sì, si determinino una matrice invertibile P ed una matrice diagonale Δ tali che $P^{-1}AP = \Delta$.
**(d) Si determini la forma canonica di Jordan J di ϕ, ed una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP = J$.*

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è

$$\det(A - x\mathbf{1}) = \det \begin{pmatrix} 3-x & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2-x & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4-x & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -3-x \end{pmatrix} = (x-1)(x+1)(x-3)^2$$

Il termine noto di questo polinomio è $\det A = -9 \neq 0$ e quindi ϕ è invertibile.

(b) Gli autovalori di ϕ sono 1 e -1 entrambi di molteplicità 1, e 3 di molteplicità 2. Gli spazi di autovettori corrispondenti sono le soluzioni dei sistemi lineari $(A - \mathbf{1})x = 0$, $(A + \mathbf{1})x = 0$ e $(A - 3\mathbf{1})x = 0$, ovvero

$$\ker(\phi - 1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad , \quad \ker(\phi + 1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad \ker(\phi - 3) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

(c) Poiché l'autovalore 3 ha molteplicità 2 e nullità 1 (cioè la dimensione dell'autospazio è strettamente minore della molteplicità come autovalore), l'applicazione ϕ non è diagonalizzabile.

(d) La matrice J ha sulla diagonale gli autovalori di ϕ, ed è necessariamente della forma

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

mentre la matrice P ha come colonne le coordinate dei vettori di una base di autovettori generalizzati. Poiché

$$\ker(\phi - 3)^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

possiamo scegliere come base i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 dati da

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = (\phi - 3)v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dunque

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

ESERCIZIO 6. *Si consideri la curva piana di equazione $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 7y + 4 = 0$. Si dica se si tratta di una conica non-degenere e se ne determinino il tipo, una equazione canonica, la trasformazione ortogonale di coordinate opportuna, gli eventuali assi, asintoti, centro, vertice.*

Svolgimento. Si tratta della conica di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -7/2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -7/2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

da cui si vede che non è degenere, poiché $\det A = -44 - 49/4 \neq 0$, e che si tratta d'una parabola poiché $\det A_\infty = 0$ (A_∞ è la sottomatrice di A che si ottiene cancellando la prima riga e la prima colonna).

Per trovare l'equazione canonica e la relativa trasformazione di coordinate, cominciamo osservando che la componente omogenea di grado 2 si decompone nel quadrato di una forma lineare; ovvero

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = (x - 2y)^2.$$

Possiamo quindi scegliere una retta ortogonale a $x - 2y = 0$, sia $2x + y = 0$, e determinare delle costanti α e β affinché si abbia

$$\alpha(x - 2y) + \beta(2x + y) = -4x - 7y \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -3 \end{cases};$$

perciò l'equazione di partenza si riscrive nella forma $(x - 2y)^2 + 2(x - 2y) - 3(2x + y) + 4 = 0$, ovvero $(x - 2y + 1)^2 - 3(2x + y - 1) = 0$, da cui si può concludere che la curva di partenza è una parabola non degenere di cui la retta $\ell : x - 2y + 1 = 0$ è l'asse. Il vertice è dato dall'intersezione dell'asse con $\ell' : 2x + y - 1$, dunque $V = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$.

Usando la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{5}}(x - 2y + 1) \\ Y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x + y - 1) \end{cases}$$

troviamo l'equazione canonica $X^2 - 3\frac{\sqrt{5}}{5}Y = 0$. □

ESERCIZIO 7. [Vecchio Ordinamento] *Si considerino nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ i punti*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Si determinino una retta r e due punti X ed $\bar{X}$ di r, di modo che il quadrilatero di vertici $P_1, \dots, P_4$ sia un quadrato nel piano euclideo che si ottiene prendendo r come retta impropria ed X, $\bar{X}$ come punti ciclici.

Svolgimento. Un quadrato è un particolare parallelogramma e quindi si deve scegliere come retta impropria una retta che contenga le intersezioni di due coppie di lati opposti. Possiamo quindi prendere i punti

$$P_5 = (P_1 + P_2) \cap (P_3 + P_4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P_6 = (P_1 + P_4) \cap (P_3 + P_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e la retta $r : x_0 + 4x_1 + x_2 = 0$ che li contiene. I punti ciclici X ed $\bar{X}$ vanno scelti in modo che i due punti P_5 e P_6 rappresentino direzioni ortogonali (e quindi il quadrilatero sia un rettangolo) e che le diagonali del quadrilatero siano anch'esse ortogonali (e quindi il quadrilatero sia un rombo). Le diagonali del quadrilatero intersecano r nei punti

$$P_7 = (P_1 + P_3) \cap r = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P_8 = (P_2 + P_4) \cap r = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

e le condizioni di ortogonalità delle direzioni corrispondenti, si scrivono nella forma $(P_5, P_6, X, \bar{X}) = -1 = (P_7, P_8, X, \bar{X})$. Si ottiene quindi

$$X = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \\ 3-i \end{pmatrix}, \qquad \text{ed} \qquad \bar{X} = \begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \\ 3+i \end{pmatrix}.$$

Un altro modo di risolvere il problema, una volta determinata la retta r, era di considerare le forme lineari corrispondenti alle rette $P_1 + P_2 : x_1 = 0$ e $P_1 + P_4 : x_0 - 2x_1 - x_2$ e determinare due costanti, α e β, affinché le coordinate affini

$$X = \alpha \frac{x_0 - 2x_1 - x_2}{x_0 + 4x_1 + x_2}, \qquad Y = \beta \frac{x_1}{x_0 + 4x_1 + x_2}$$

dei punti $P_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $P_2 = \left(\begin{smallmatrix} -\alpha/3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $P_3 = \left(\begin{smallmatrix} -\alpha/3 \\ \beta/6 \end{smallmatrix}\right)$, $P_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \beta/6 \end{smallmatrix}\right)$, siano quelle dei vertici del quadrato unitario[(*)]. Si trova così $\alpha = -3$, $\beta = 6$ ed i punti ciclici si determinano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x_0 + 4x_1 + x_2 = 0 \\ 9(x_0 - 2x_1 - x_2)^2 + 36x_1^2 = 0 \end{cases}.$$

Fine della discussione. □

[(*)] Poiché i punti ciclici determinano la metrica euclidea a meno dell'unità di misura, sarebbe sufficiente chiedere che si tratti di un quadrato e determinare il solo rapporto tra α e β.

Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova scritta del 17 aprile 2002

ESERCIZIO 1. *Nello spazio tridimensionale si consideri il tetraedro Δ, di vertici*

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si calcoli il volume V di Δ.*

(b) *Si consideri la retta r, passante per l'origine e parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si determinino gli estremi del segmento Q_1Q_2, costituito dai punti di r che cadono all'interno di Δ e se ne calcoli la lunghezza.*

(c) *Considerando la retta r orientata concordemente al vettore v, si dica in quale faccia del tetraedro la retta "entra" e da quale faccia "esce"(†).*

Svolgimento. (a) Considerati i vettori

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{P_0P_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{P_0P_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix};,$$

il volume cercato è uguale a

$$V = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}\right| = 1.$$

(b) Per determinare i punti interni al tetraedro è comodo usare coordinate baricentriche, basate sui quattro vertici di Δ perchè i punti del tetraedro sono tutti e soli quelli per cui le quattro coordinate baricentriche, $x_0, \dots, x_3$, appartengono tutte all'intervallo $[0, 1]$.

Un generico punto P dello spazio ha coordinate

$$x_0P_0 + x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_1+x_3 \\ -3x_0+2x_2+x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Il punto P sta sulla retta r se, e solo se,

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_0 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2(x_1 + x_2) - 3(x_1 + x_3) = 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{8-23x_0}{7} \\ x_2 = \frac{1+5x_0}{7} \\ x_3 = \frac{11x_0-2}{7} \end{cases}.$$

Un tale punto appartiene al tetraedro se, e solo se, la coordinata x_0 soddisfa alle disuguaglianze

$$\begin{cases} 0 \le x_0 \le 1 \\ \frac{1}{23} \le x_0 \le \frac{8}{23} \\ -\frac{1}{5} \le x_0 \le \frac{6}{5} \\ \frac{2}{11} \le x_0 \le \frac{9}{11} \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad x_0 \in \left[\tfrac{2}{11}, \tfrac{8}{23}\right].$$

Quindi gli estremi del segmento cercato sono i punti

$$Q_1 = \tfrac{8}{23}P_0 + \tfrac{9}{23}P_2 + \tfrac{6}{23}P_3 = \begin{pmatrix} 9/23 \\ 6/23 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q_2 = \tfrac{2}{11}P_0 + \tfrac{6}{11}P_1 + \tfrac{3}{11}P_2 = \begin{pmatrix} 9/11 \\ 6/11 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(†) Per indicare una faccia del tetraedro è sufficiente dire quali sono i suoi tre vertici.

La lunghezza del segmento Q_1Q_2 è quindi uguale a

$$\|\overrightarrow{Q_1Q_2}\| = (\tfrac{3}{11} - \tfrac{3}{23}) \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \tfrac{36\sqrt{13}}{253}.$$

(c) Osserviamo da ultimo che, ordinando i punti della retta concordemente col verso del vettore v, il punto Q_1 precede il punto Q_2 e quindi il primo è da considerarsi il punto in cui la retta "entra" nel tatraedro ed il secondo il punto da cui la retta "esce". Guardando alle coordinate baricentriche dei due punti si conclude che Q_1 appartiene alla faccia $P_0P_2P_3$, mentre Q_2 appartiene alla faccia $P_0P_1P_2$. $\square$

ESERCIZIO 2. *Si consideri l'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

(a) *Si determini il polinomio caratteristico di ϕ e si dica se ϕ è invertibile.*
(b) *Si determinino gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori per ϕ.*
(c) *Si dica se ϕ è, o meno, diagonalizzabile. Se sì, si determinino una matrice invertibile P ed una matrice diagonale Δ tali che $P^{-1}AP = \Delta$.*
*(d) *Si determini la forma canonica di Jordan J di ϕ, ed una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP = J$.*

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $\det(A - x\mathbf{1}) = (x-1)(x+1)(x-3)^2$. Il termine noto di questo polinomio è $\det A = -9 \neq 0$ e quindi ϕ è invertibile.

(b) Gli autovalori di ϕ sono 1 e -1, entrambi di molteplicità 1, e 3 di molteplicità 2. Gli spazi di autovettori corrispondenti sono le soluzioni dei sistemi lineari $(A - \mathbf{1})x = 0$, $(A + \mathbf{1})x = 0$ e $(A - 3\mathbf{1})x = 0$, ovvero

$$\ker(\phi - 1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle \quad , \quad \ker(\phi + 1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad \ker(\phi - 3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(c) Poiché l'autovalore 3 ha molteplicità 2 e nullità 1 (cioè la dimensione dell'autospazio è strettamente minore della molteplicità come autovalore), l'applicazione ϕ non è diagonalizzabile.

(d) La matrice J ha sulla diagonale gli autovalori di ϕ, ed è necessariamente della forma

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

mentre la matrice P ha come colonne le coordinate dei vettori di una base di autovettori generalizzati. Poiché

$$\ker(\phi - 3)^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

possiamo scegliere come base i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 dati da

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = (\phi - 3)v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dunque

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

□

ESERCIZIO 3. *Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad e \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

(a) *determinare il sottospazio ortogonale a $\langle v_1, v_2 \rangle$;*
(b) *decomporre il vettore $w = {}^t(1, -1, -9)$ come somma $w = w_1 + w_2 + w_3$ ove w_1 sia parallelo a v_1, w_2 sia parallelo a v_2 e w_3 sia ortogonale sia a v_1 che a v_2.*
(c) *mostrare che i volumi dei tre tetraedri formati rispettivamente da*

$$w, w_1, w_2 \qquad , \qquad w, w_1, w_3 \qquad e \qquad w, w_2, w_3$$

sono uguali tra loro.

Svolgimento. (a) Si tratta del sottospazio generato per esempio dal prodotto vettore di v_1 e v_2, che è

$$v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

dunque è il sottospazio generato da $v_3 = {}^t(1, 1, 2)$.
(b) Possiamo calcolare subito la componente di w lungo v_3, che è data da

$$w_3 = \frac{w \cdot v_3}{v_3 \cdot v_3} v_3 = \frac{1 - 1 - 18}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} .$$

Ora automaticamente $w - w_3 = {}^t(4, 2, -3)$ è ortogonale a v_3, e dunque si scriverà come combinazione di v_1 e v_2:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dà subito $\alpha = 2$ e $\beta = -1$. Dunque abbiamo

$$w_1 = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad w_2 = -1 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

(c) Senza fare conti, possiamo ricordare che il volume dei tetraedri è dato da un sesto del valore assoluto del determinante della matrice formata dai tre vettori. Siccome $w = w_1 + w_2 + w_3$, possiamo scrivere, usando la linearità (in ogni colonna) della funzione determinante e il suo annullamento se due colonne coincidono:

$$|\det(w, w_1, w_2)| = |\det(w_1 + w_2 + w_3, w_1, w_2)| = |\det(w_3, w_1, w_2)|,$$

$$|\det(w, w_1, w_3)| = |\det(w_1 + w_2 + w_3, w_1, w_3)| = |\det(w_2, w_1, w_3)|,$$

$$|\det(w, w_2, w_3)| = |\det(w_1 + w_2 + w_3, w_2, w_3)| = |\det(w_1, w_2, w_3)|,$$

da cui si vede che i tre valori coincidono poiché il valore assoluto del determinante non cambia cambiando l'ordine delle colonne. □

ESERCIZIO 4. *Nello spazio affine tridimensionale, sono date tre famiglie di piani di equazioni*

$$a_\lambda : X + \lambda Z = \lambda \qquad b_\lambda : \lambda X + Y + (1+\lambda^2)Z = \lambda^2 \qquad c_\lambda : (1-\lambda)X - Y - Z = 1 - \lambda^2$$

al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) determinare per quali valori di λ i tre piani si intersecano esattamente in un punto, e per tali valori determinare il punto di intersezione P_λ.

(b) determinare se esistono valori di λ per i quali i tre piani si intersecano in una retta, ed eventualmente dare una espressione parametrica per questa retta.

(c) determinare se esistono valori di λ per i quali i tre piani non hanno punti in comune.

(d) è vero che le soluzioni del sistema formato dai tre piani al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ giacciono tutte su uno stesso piano?

Svolgimento. Consideriamo la matrice completa del sistema dato dai tre piani:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & \lambda \\ \lambda & 1 & 1+\lambda^2 & \lambda^2 \\ 1-\lambda & -1 & -1 & 1-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

che possiamo ridurre tramite il procedimento di Gauss a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & \lambda \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Ora siamo in grado di discutere le domande:

(a) per $\lambda \neq 0, 1$ la matrice incompleta ha rango tre, e dunque per il teorema di Rouché-Capelli abbiamo una unica soluzione P_λ che si può ottenere facilmente dal sistema ridotto:

$$P_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda+1 \\ 1/\lambda \\ -1/\lambda \end{pmatrix}$$

(b) se $\lambda = 1$ allora la matrice incompleta del sistema ha rango due, come pure la matrice completa; quindi, ancora per il teorema di Rouché-Capelli, vi è una retta di soluzioni, che è data dal sistema

$$\begin{cases} X + Z = 1 \\ Y + Z = 0 \end{cases}$$

(c) infine se $\lambda = 0$ allora la matrice incompleta del sistema ha rango due, mentre la matrice completa ha rango tre; quindi non vi sono soluzioni per quel sistema (geometricamente si nota che i tre piani a_0, b_0 e c_0 sono a due a due non paralleli e che si intersecano, due a due, in tre rette parallele).

(d) Dal sistema ridotto in forma triangolare si vede che c'è una equazione indipendente dal parametro: dunque tutte le soluzioni dei sistemi giacciono sul piano di equazione $Y + Z = 0$. □

ESERCIZIO 5. *Si consideri la curva piana di equazione $3x^2 + 4xy - 9x - 8y + 11 = 0$. Si dica se si tratta di una conica non-degenere e se ne determinino il tipo, una equazione canonica, la trasformazione ortogonale di coordinate opportuna, gli eventuali assi, asintoti, centro, vertice.*

Svolgimento. Si tratta della conica di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -9/2 & -4 \\ -9/2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si vede che non è degenere, poiché $\det A = -20 \neq 0$, e che si tratta d'un'iperbole poiché $\det A_\infty = -4 < 0$ (A_∞ è la sottomatrice di A che si ottiene cancellando la prima riga e la prima colonna).

Per trovare l'equazione canonica e la relativa trasformazione di coordinate, cominciamo osservando che la componente omogenea di grado 2 si decompone nel prodotto

$$3x^2 + 4xy = x(3x + 4y).$$

Possiamo quindi delle costanti α e β affinché si abbia

$$\alpha x + \beta(3x + 4y) = -9x - 8y \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = -2 \end{cases};$$

perciò l'equazione di partenza si riscrive nella forma $x(3x + 4y) - 3x - 2(3x + 4y) + 11 = 0$, ovvero

$$(x - 2)(3x + 4y - 3) + 5 = 0$$

da cui si può concludere che la curva di partenza è un'iperbole non degenere di cui le rette $\ell : x - 2 = 0$ ed $\ell' : 3x + 4y - 3 = 0$ sono gli asintoti. Il centro è dato dall'intersezione degli asintoti, dunque $C = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -3/4 \end{smallmatrix}\right)$.

Gli assi sono dati dalle bisettrici degli asintoti che si possono calcolare come semisomma e semidifferenza di ℓ ed $\ell'/5$ (asintoti normalizzati), da cui

$$a = \frac{\ell + \ell'/5}{2} : \frac{1}{10}(8x + 4y - 13) = 0 \qquad \text{ed} \qquad a' = \frac{\ell - \ell'/5}{2} : \frac{1}{10}(2x - 4y - 7) = 0\ ,$$

che risultano ovviamente ortogonali tra loro.

Ora l'equazione dell'iperbole si riscrive come

$$\frac{1}{20}(8x + 4y - 13)^2 - \frac{1}{20}(2x - 4y - 7)^2 + 5 = 0.$$

Usando la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} X = \frac{\sqrt{5}}{10}(2x - 4y - 7) \\ Y = \frac{\sqrt{5}}{20}(8x + 4y - 13) \end{cases}$$

troviamo l'equazione canonica $\frac{1}{5}X^2 - \frac{4}{5}Y^2 = 1$. □

ESERCIZIO 6. [Vecchio Ordinamento] *Nello spazio $\mathbb{R}^3$ si considerino i piani (per l'origine)*

$$\pi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad e \qquad \sigma : 2x - 3y + z = 0.$$

(a) *Si scriva la matrice A, rispetto alla base canonica, della simmetria $\phi_\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di asse π.*
(b) *Si scriva la matrice B, rispetto alla base canonica, della simmetria $\phi_\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di asse σ.*
(c) *Si consideri l'applicazione composta $\phi = \phi_\pi \circ \phi_\sigma$. È vero o falso che ϕ è una rotazione? In caso affermativo se ne determinino l'asse e l'angolo di rotazione.*

Svolgimento. (a) Dato un vettore $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$, la simmetria di asse π, lascia invariata la componente di v parallela al piano π, mentre cambia di segno la componente ortogonale a tale sottospazio. Il vettore $n_\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ genera il sottospazio ortogonale a π e quindi possiamo scrivere

$$\phi_\pi(v) = v - 2\frac{v \cdot n_\pi}{n_\pi \cdot n_\pi} n_\pi;$$

da cui si deduce che

$$\phi_\pi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

e perciò la matrice cercata è

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) In modo analogo, possiamo considerare il vettore $n_\sigma = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, che genera il sottospazio ortogonale a σ e scrivere

$$\phi_\sigma(v) = v - 2\frac{v \cdot n_\sigma}{n_\sigma \cdot n_\sigma} n_\sigma; \qquad \text{ovvero} \qquad \phi_\sigma \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{2x_1 - 3x_2 + x_3}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice cercata è quindi

$$B = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

(c) Le due applicazioni ϕ_π e ϕ_σ sono isometrie e quindi tale è l'applicazione composta, che ha determinante 1 e questo è sufficiente per concludere che ϕ è una rotazione (perchè?). Osserviamo che una retta di punti uniti per ϕ è la retta $\pi \cap \sigma = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, perchè i due piani sono i luoghi dei punti uniti delle due simmetrie che compongono ϕ. Per calcolare l'angolo di rotazione, ϑ, consideriamo un vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ortogonale all'asse, e la sua immagine $\phi(w) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$ ed osserviamo che

$$\cos\vartheta = \frac{w \cdot \phi(w)}{\|w\| \, \|\phi(w)\|} = \frac{13}{14}.$$

Tramite la funzione arccos si può così determinare l'angolo $\vartheta \in (-\pi, \pi]$, a meno del segno, che può essere fissato ad arbitrio, a seconda del modo in cui si orienti il piano ortogonale all'asse. Ad esempio, se si sceglie il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ come vettore normale al piano, l'angolo ϑ deve essere scelto negativo(*). □

(*) C'era modo di determinare $\cos\vartheta$ direttamente dalla matrice AB di ϕ?

Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova scritta del 2 settembre 2002

ESERCIZIO 1. *Nello spazio tridimensionale si consideri il tetraedro Δ, di vertici*

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si calcoli il volume V di Δ.
(b) Si consideri il piano π di equazione $2x + y - 3z + 1 = 0$; si mostri che l'intersezione di Δ con π è un triangolo e se ne calcolino i vertici.
(c) Si calcoli l'area del triangolo del punto precedente.

Svolgimento. (a) Il volume del tetraedro si ottiene facendo un sesto del determinante della matrice formata dai vettori che determinano tre spigoli (facciamo le differenze $P_i - P_0$):

$$V = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\right| = \frac{20}{3}\ .$$

(b) L'intersezione di Δ con π è certamente una figura convessa del piano π, e quindi basta considerare le intersezioni del piano con i sei spigoli del tetraedro. Per ogni coppia di vertici P_i e P_j (diciamo $i < j$) consideriamo la retta in equazione parametrica $\alpha P_i + (1-\alpha)P_j$ e sostituiamo nell'equazione di π, ricavando il valore di α: se esso è compreso tra 0 e 1 significa che il punto trovato è effettivamente un punto dello spigolo che appartiene al piano π. Troviamo i seguenti casi:
(0,1) $\alpha = 1/2$, dunque π incontra il lato P_0P_1 nel punto di mezzo $Q_0 = (1, 0, 1)^t$;
(0,2) $\alpha = 1/2$, dunque π incontra il lato P_0P_2 nel punto di mezzo $Q_1 = (0, 2, 1)^t$;
(0,3) $\alpha = 2/3$, dunque π incontra il lato P_0P_3 nel punto $Q_2 = \frac{2}{3}(0, 0, 2)^t + \frac{1}{3}(5, 2, 1)^t = \frac{1}{3}(5, 2, 5)^t$;
(1,2) si trova una condizione impossibile, dunque il lato P_1P_2 è parallelo al piano π;
(1,3) si trova $\alpha = 2$, dunque il lato P_1P_3 non interseca π;
(2,3) si trova $\alpha = 2$, dunque il lato P_2P_3 non interseca π.

In conclusione π interseca gli spigoli del tetraedro in tre punti, e quindi l'intersezione richiesta è il triangolo di vertici i tre punti Q_0, Q_1, Q_2.

(c) Finalmente calcolo l'area del triangolo così trovato:

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{T^tT} = \sqrt{14}/3$$

ove T è la matrice 3×2 delle coordinate dei due vettori $Q_1 - Q_0$ e $Q_2 - Q_0$ □

ESERCIZIO 2. *Si consideri l'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.
(a) Si determini il polinomio caratteristico di ϕ e si dica se ϕ è invertibile.
(b) Si determinino gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori per ϕ.
(c) [nuovo ordinamento] Si dica se ϕ è, o meno, diagonalizzabile. Se sì, si determinino una matrice invertibile P ed una matrice diagonale Δ tali che $P^{-1}AP = \Delta$.

(d) *[vecchio ordinamento] Si determini la forma canonica di Jordan J di ϕ, ed una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP = J$.*

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $\det(A - x\mathbf{1}) = x(x-4)(x-3)^2$. Il termine noto di questo polinomio è $\det A = 0$ e quindi ϕ non è invertibile.

(b) Gli autovalori di ϕ sono 0 e 4, entrambi di molteplicità 1, e 3 di molteplicità 2. Gli spazi di autovettori corrispondenti sono le soluzioni dei sistemi lineari $Ax = 0$, $(A - 4\mathbf{1})x = 0$ e $(A - 3\mathbf{1})x = 0$, ovvero

$$\ker(\phi) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad , \quad \ker(\phi - 4) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad \ker(\phi - 3) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

(c) Poiché l'autovalore 3 ha molteplicità 2 e nullità 1 (cioè la dimensione dell'autospazio è strettamente minore della molteplicità come autovalore), l'applicazione ϕ non è diagonalizzabile.

(d) La matrice J ha sulla diagonale gli autovalori di ϕ, ed è necessariamente della forma

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

mentre la matrice P ha come colonne le coordinate dei vettori di una base di autovettori generalizzati. Poiché

$$(A - 3\mathbf{1})^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e quindi} \qquad \ker(\phi - 3)^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

possiamo scegliere come base i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 dati da

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = (\phi - 3)v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

dunque

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

□

ESERCIZIO 3. *Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si consideri il piano π di equazione $x + y - 2z = 0$.*

(a) *determinare gli angoli formati da π con il piano σ di equazione $x - y + 2z - 2 = 0$, e con la retta r di equazioni $x - y + 2z - 2 = 0$ e $2x - z = 0$;*

(b) *si consideri ora l'applicazione ϕ data dalla proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ su π; si scriva la matrice dell'applicazione rispetto alla base canonica;*

(c) *dati due punti P e Q sulla retta r, si dica se è vero che il rapporto $\frac{d(\phi(P),\phi(Q))}{d(P,Q)}$ (ove d indica la distanza euclidea) è costante, e in tal caso determinarne il valore;*

(d) *stessa domanda del punto precedente, con P e Q punti del piano σ.*

Svolgimento. (a) Sappiamo che un vettore ortogonale a π ha coordinate $v = (1, 1, -2)^t$, mentre un vettore ortogonale a σ ha coordinate $w = (1, -1, 2)^t$; dunque il coseno dell'angolo tra i due piani si calcola subito

$$\cos\theta(\pi, \sigma) = \frac{|v \cdot w|}{\|v\|\|w\|} = \frac{2}{3}$$

da cui $\theta(\pi,\sigma) = \arccos(2/3)$. Un vettore direttore per la retta r si può trovare facendo il prodotto vettore di $(1,-1,2)^t$ con $(2,0,-1)^t$, e si trova $u = (1,5,2)^t$; dell'angolo formato da r con π possiamo quindi calcolare subito il seno

$$\sin\theta(\pi,r) = \frac{|v\cdot u|}{\|v\|\|u\|} = \frac{\sqrt{5}}{15}$$

da cui $\theta(\pi,r) = \arcsin(\sqrt{5}/15)$.

(b) L'applicazione richiesta è quella che invia il generico vettore $(X,Y,Z)^t$ nell'intersezione della retta di equazione parametrica $(X,Y,Z)^t + \alpha(1,1,-2)^t$ con il piano π. Sostituendo nell'equazione del piano si trova il valore $\alpha = (-X-Y+2Z)/6$, da cui si ricava

$$\phi\begin{pmatrix} X\\ Y\\ Z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X\\ Y\\ Z\end{pmatrix} - \frac{X+Y-2Z}{6}\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ -2\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5X-Y+2Z\\ -X+5Y+2Z\\ 2X+2Y+2Z\end{pmatrix}$$

da cui si ricava che la matrice richiesta è $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2\\ -1 & 5 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$.

(c) Siccome ϕ è la proiezione ortogonale sul piano π, possiamo pensare che il segmento PQ sia l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cui un cateto è (lungo come) il segmento proiettato. Dunque il rapporto richiesto è il coseno dell'angolo compreso tra ipotenusa e cateto, e dipende solo dall'angolo tra la retta ed il piano:

$$\frac{d(\phi(P),\phi(Q))}{d(P,Q)} = \cos\theta(\pi,r) = \sqrt{1-\sin^2\theta(\pi,r)} = \frac{2}{15}\sqrt{55}$$

(d) In questo caso è chiaro che il rapporto in questione non è costante: per esempio per i punti di $\pi\cap\sigma$ il rapporto vale 1 (questi punti sono mandati in se stessi da ϕ), mentre per i punti di r (che è contenuta in σ) era diverso. In generale, per P e Q in σ, il rapporto è il coseno dell'angolo che la retta per quei due punti forma con π, dunque può variare da 2/3 a 1. □

ESERCIZIO 4. *Nello spazio affine tridimensionale, studiare le relazioni reciproche della retta r_λ di equazioni*

$$x + (1+\lambda)y + 4\lambda z + \lambda - 1 = 0\ , \qquad (1-\lambda)y + z + 2\lambda = 0$$

e del piano π_λ di equazione

$$x + (1+\lambda)y + 2\lambda z - 1 = 0$$

al variare del parametro λ. In particolare dire se esistono valori del parametro per cui r_λ e π_λ sono paralleli, e/o r_λ è contenuto in π_λ.

(a) [nuovo ordinamento] Si descriva l'insieme di tutte le intersezioni tra retta e piano, al variare del parametro λ.

(b) [vecchio ordinamento] Si classifichi, a meno di affinità, l'insieme di tutte le intersezioni tra retta e piano, al variare del parametro λ.

Svolgimento. Consideriamo la matrice completa del sistema dato dalle equazioni di r_λ e π_λ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+\lambda & 4\lambda & \lambda-1\\ 0 & 1-\lambda & 1 & 2\lambda\\ 1 & 1+\lambda & 2\lambda & -1\end{pmatrix}$$

(osserviamo che giustamente le prime due righe, che rappresentano r_λ sono indipendenti per qualsiasi valore di λ) che possiamo ridurre tramite il procedimento di Gauss a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+\lambda & 4\lambda & \lambda-1\\ 0 & 1-\lambda & 1 & 2\lambda\\ 0 & 0 & -2\lambda & -\lambda\end{pmatrix}.$$

Da questo vediamo subito che la matrice incompleta del sistema ha rango massimo (3) per valori del parametro λ diversi da 0 e 1, e quindi tranne in questi due casi il sistema ammette una unica soluzione (dunque r_λ e π_λ si intersecano in un solo punto), che si trova risolvendo il sistema

$$(S) \qquad \begin{cases} x + (1+\lambda)y + 4\lambda z + \lambda - 1 = 0 \\ (1-\lambda)y + z + 2\lambda = 0 \\ -2z - 1 = 0 \end{cases}$$

Nel caso $\lambda = 0$ abbiamo che la matrice incompleta ha rango 2, come pure la matrice completa; dunque in questo caso il sistema ha uno spazio di soluzioni di dimensione 1, necessariamente coincidente con r_0 (dunque r_0 è contenuto in π_0).

Nel caso $\lambda = 1$ abbiamo che la matrice incompleta ha rango 2, mentre la matrice completa ha rango 3; dunque in questo caso il sistema non ha soluzioni (dunque r_1 è parallela a π_1).

Infine l'insieme di tutte le soluzioni si ottiene come unione della retta r_0 di equazioni $x + y - 1 = 0$ e $y + z = 0$, e dell'insieme delle soluzioni del sistema (S); eliminando il parametro λ si vede che questa seconda componente è l'iperbole (irriducibile) sul piano $2z + 1 = 0$ di equazione $4y^2 + 2xy - 4x - 9y + 5 = 0$. □

ESERCIZIO 5. *Si consideri la curva piana di equazione $x^2 + 9y^2 + 6xy - 6x + 2y - 4 = 0$. Si dica se si tratta di una conica non-degenere e se ne determinino il tipo, una equazione canonica, la trasformazione ortogonale di coordinate opportuna, gli eventuali assi, asintoti, centro, vertice.*

Svolgimento. Si tratta della conica di matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

da cui si vede che non è degenere, poiché $\det A = -100 \neq 0$, e che si tratta d'una parabola poiché $\det A_\infty = 0$ (A_∞ è la sottomatrice di A che si ottiene cancellando la prima riga e la prima colonna).

Per trovare l'equazione canonica e la relativa trasformazione di coordinate, cominciamo osservando che la componente omogenea di grado 2 si decompone nel quadrato

$$x^2 + 9y^2 + 6xy = (x + 3y)^2.$$

Possiamo quindi trovare delle costanti α e β affinché si abbia

$$\alpha(x + 3y) + \beta(3x - y) = -6x + 2y \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -2 \end{cases};$$

perciò l'equazione di partenza si riscrive nella forma $(x + 3y)^2 - 2(3x - y) - 4 = 0$, ovvero

$$(x + 3y)^2 - 2(3x - y + 2) = 0$$

da cui si può concludere che la curva di partenza è una parabola non degenere di cui la retta di equazione $x + 3y = 0$ è l'asse. Il vertice si trova intersecando l'asse con la retta di equazione $3x - y + 2 = 0$, che dà il punto $(-3/5, 1/5)^t$.

Usando la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{10}}(x + 3y) \\ Y = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x - y + 2) \end{cases}$$

troviamo l'equazione canonica $Y = \frac{\sqrt{10}}{2} X^2$. □

Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova scritta del 23 settembre 2002

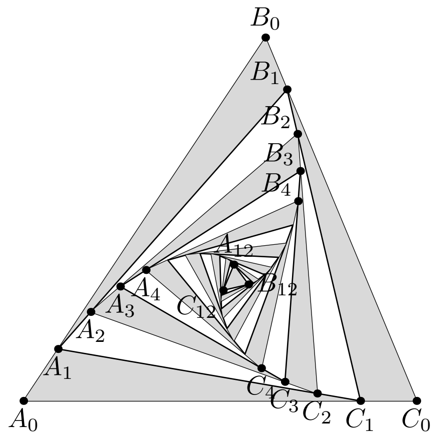
ESERCIZIO 1. *Si consideri nel piano il triangolo (non degenere) $A_0B_0C_0$.*

Si considerino poi il punto A_1 ad $1/10$ del lato A_0B_0, il punto B_1 ad $1/10$ del lato B_0C_0 ed il punto C_1 ad $1/10$ del lato C_0A_0.

(a) *Si mostri che i due triangoli hanno lo stesso baricentro.*

(b) *Si mostri che il rapporto tra l'area del triangolo $A_1B_1C_1$ e l'area del triangolo $A_0B_0C_0$ non dipende dalla scelta del triangolo di partenza e si calcoli tale rapporto.*

(c)* *Si consideri la figura a fianco ove ciascuno dei triangoli $A_iB_iC_i$, per $i = 1, \ldots, 12$, è stato costruito dal precedente nel modo descritto sopra. Determinare l'area della parte colorata in grigio, sapendo che il triangolo $A_0B_0C_0$ ha area 3.*



Svolgimento. (a) Usando coordinate baricentriche basate sui punti A_0, B_0, C_0, si trova che $A_1 = A_0 + \frac{1}{10}\overrightarrow{A_0B_0} = \frac{9}{10}A_0 + \frac{1}{10}B_0$ ed, analogamente, $B_1 = \frac{9}{10}B_0 + \frac{1}{10}C_0$ e $C_1 = \frac{9}{10}C_0 + \frac{1}{10}A_0$. Quindi il baricentro del triangolo $A_1B_1C_1$ è uguale a

$$G = \frac{1}{3}(A_1 + B_1 + C_1) = \frac{1}{3}(A_0 + B_0 + C_0)$$

e dunque i due baricentri coincidono.

(b) L'area del triangolo $A_0B_0C_0$ è uguale ad $\mathcal{A}_0 = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{A_0B_0} \times \overrightarrow{A_0C_0}\|$ mentre l'area del triangolo $A_1B_1C_1$ è uguale ad $\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{A_1B_1} \times \overrightarrow{A_1C_1}\|$. Osserviamo che

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \frac{9}{10}\overrightarrow{A_0B_0} + \frac{1}{10}\overrightarrow{B_0C_0} \quad \overrightarrow{A_1C_1} = \frac{9}{10}\overrightarrow{A_0C_0} - \frac{1}{10}\overrightarrow{A_0B_0} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{B_0C_0} = \overrightarrow{A_0C_0} - \overrightarrow{A_0B_0}$$

e quindi

$$\overrightarrow{A_1B_1} \times \overrightarrow{A_1C_1} = \left(\frac{8}{10}\overrightarrow{A_0B_0} + \frac{1}{10}\overrightarrow{A_0C_0}\right) \times \left(\frac{9}{10}\overrightarrow{A_0C_0} - \frac{1}{10}\overrightarrow{A_0B_0}\right) = \frac{73}{100}\overrightarrow{A_0B_0} \times \overrightarrow{A_0C_0}.$$

Si conclude che il rapporto tra le aree è uguale ad $R = \frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_0} = \frac{73}{100} = 1 - 3\frac{1}{10}\frac{9}{10}$.

(c) L'area della figura ombreggiata si ottiene togliendo dall'area del triangolo $A_0B_0C_0$ l'area del triangolo $A_1B_1C_1$, aggiungendo poi l'area del triangolo $A_2B_2C_2$, togliendo l'area del triangolo $A_3B_3C_3$, e così via, fino al triangolo $A_{12}B_{12}C_{12}$. Quindi, nelle notazioni del punto precedente, l'area cercata è uguale ad

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 - \cdots + \mathcal{A}_{12} = \mathcal{A}_0(1 - R + R^2 - \cdots + R^{12}) = \mathcal{A}_0\frac{1 + R^{13}}{1 + R}.$$

Conclusione: $\mathcal{A} = \dfrac{300\left[1 + \left(\frac{73}{100}\right)^{13}\right]}{173}$. □

ESERCIZIO 2. *Si consideri l'applicazione lineare $\phi : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

(a) *Si determini il polinomio caratteristico di ϕ e si dica se ϕ è invertibile.*
(b) *Si determinino gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori per ϕ.*
(c) *Si dica se ϕ è, o meno, diagonalizzabile. Se sì, si determinino una matrice invertibile P ed una matrice diagonale Δ tali che $P^{-1}AP = \Delta$.*

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $\det(A - x\mathbf{1}) = (x^2 + 1)^2$. Il termine noto di questo polinomio è $\det A = 1 \neq 0$ e quindi ϕ è invertibile.

(b) Gli autovalori di ϕ sono i e $-i$, entrambi di molteplicità 2. Lo spazio di autovettori corrispondenti all'autovalore i è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare $(A - i\mathbf{1})x = 0$, ovvero il sottospazio

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 2+i \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3+i \end{pmatrix} \right\rangle$$

che ha chiaramente dimensione 2. L'autovalore $-i$ è il coniugato di i e quindi, essendo A una matrice reale, gli autovettori corrispondenti saranno i coniugati dei vettori di W, ovvero il sottospazio

$$\overline{W} = \left\langle \begin{pmatrix} 2-i \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3-i \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(c) Poiché gli autovalori hanno entrambi molteplicità uguale alla nullità, l'applicazione ϕ è diagonalizzabile. La matrice Δ ha sulla diagonale gli autovalori di ϕ, ed è quindi della forma

$$\Delta = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

e la matrice P ha come colonne le coordinate dei vettori di una base di autovettori. Dunque

$$P = \begin{pmatrix} 2+i & 0 & 2-i & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3+i & 0 & 3-i \end{pmatrix}.$$

□

ESERCIZIO 3. *Nello spazio $\mathbb{R}^3$ si considerino i piani*

$$\pi_1 : x + y - 2z = 0, \qquad e \qquad \pi_2 : x - y + 2z = 0.$$

(a) *Si scriva la matrice A, rispetto alla base canonica, della simmetria $\phi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di asse π_1.*
(b) *Si scriva la matrice B, rispetto alla base canonica, della simmetria $\phi_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di asse π_2.*
(c) *Si scriva la matrice dell'applicazione composta $\phi = \phi_1 \circ \phi_2$ e si mostri che esiste una retta r di punti uniti per ϕ.*
(d) [*vecchio ordinamento*] *Si concluda che ϕ è la matrice di una rotazione di asse r e si determini (il coseno del)l'angolo di rotazione.*

Svolgimento. (*a*) Dato un vettore $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$, la simmetria di asse π_1, lascia invariata la componente di v parallela al piano π_1, mentre cambia di segno la componente ortogonale a tale sottospazio. Il vettore $n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ genera il sottospazio ortogonale a π_1 e quindi possiamo scrivere

$$\phi_1(v) = v - 2\frac{v \cdot n_1}{n_1 \cdot n_1} n_1;$$

da cui si deduce che

$$\phi_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{x_1 + x_2 - 2x_3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix};$$

e perciò la matrice cercata è

$$A_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(*b*) In modo analogo, possiamo considerare il vettore $n_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, che genera il sottospazio ortogonale a π_2 e scrivere

$$\phi_2(v) = v - 2\frac{v \cdot n_2}{n_2 \cdot n_2} n_2; \qquad \text{ovvero} \qquad \phi_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{x_1 - x_2 + 2x_3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice cercata è quindi

$$A_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(*c*) La matrice di ϕ si ottiene facendo il prodotto

$$A = A_1 A_2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

e la retta di punti uniti per ϕ è, per costruzione, la retta $\pi_1 \cap \pi_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, perchè i due piani sono i luoghi dei punti uniti delle due simmetrie che compongono ϕ.

(*d*) Le due applicazioni ϕ_1 e ϕ_2 sono isometrie e quindi tale è l'applicazione composta, che ha determinante 1 e questo è sufficiente per concludere che ϕ è una rotazione. Per calcolare l'angolo di rotazione, ϑ, consideriamo il vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ortogonale all'asse, e la sua immagine $\phi(w) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ ed osserviamo che

$$\cos\vartheta = \frac{w \cdot \phi(w)}{\|w\| \, \|\phi(w)\|} = -\frac{1}{9}.$$

Tramite la funzione arccos si può così determinare l'angolo $\vartheta \in (-\pi, \pi]$, a meno del segno, che può essere fissato ad arbitrio, a seconda del modo in cui si orienti il piano ortogonale all'asse. □

ESERCIZIO 4. *Al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, si consideri la famiglia di applicazioni lineari $\phi_\lambda : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ di matrici*

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & -\lambda \\ 1-\lambda & -1 & -1 & 2\lambda - 1 \\ \lambda & 1 & 1-\lambda & -\lambda \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi canoniche.

(a) *Si determinino le dimensioni di nucleo ed immagine di ϕ_λ, al variare di λ in $\mathbb{R}$. Si determini, per ogni valore di λ, una base del nucleo di ϕ_λ.*
(b) *Si mostri che i nuclei di tutte le applicazioni ϕ_λ, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, sono contenuti in uno stesso sottospazio di dimensione 3. Sono anche contenuti in un sottospazio di dimensione più piccola?*
(c) *Si mostri che l'unione di tutti i nuclei delle applicazioni ϕ_λ è contenuto nell'insieme delle soluzioni di un sistema (non lineare) di equazioni omogenee e si determinino tali equazioni.*
(d) [*vecchio ordinamento*] *Si studi l'insieme delle soluzioni del sistema come sottoinsieme di $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$.*

Svolgimento. (a) Con operazioni elementari sulle righe della matrice A_λ si trova la matrice riga-equivalente (ovvero una matrice di ϕ_λ rispetto alla base canonica in partenza ma rispetto ad un'opportuna nuova base nello spazio di arrivo)

$$B_\lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda-\lambda^2 & \lambda^2-\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda & 1-2\lambda \end{pmatrix}.$$

È evidente che questa matrice ha rango 3 sia quando $\lambda \neq 0$ che per $\lambda = 0$; dunque, per ogni valore di λ, si ha

$$\dim \operatorname{im} \phi_\lambda = 3 \qquad \text{e} \qquad \dim \ker \phi_\lambda = 4 - 3 = 1.$$

Inoltre, per ogni valore di λ si ha

$$\ker \phi_\lambda = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda \\ 3\lambda^2-3\lambda+1 \\ 2\lambda-1 \\ 2\lambda \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(*b*) Guardando alla prima riga della matrice B_λ, si vede che indipendentemente dal valore di λ, i vettori $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right)$ del nucleo di ϕ_λ soddisfano all'equazione $2x_1 - x_4 = 0$ e quindi sono contenuti nel sottospazio 3-dimensionale dei vettori di $\mathbb{R}^4$ che soddisfano a questa equazione. Prendendo i generatori di $\ker \phi_\lambda$ per $\lambda = -1, 0, 1$, ovvero

$$v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_{-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix};$$

si verifica facilmente (ad esempio calcolando il minore estratto dalle prime tre righe della matrice delle coordinate dei tre vettori) che si tratta di 3 vettori linearmente indipendenti e quindi che non possono essere contenuti in un sottospazio di dimensione minore di 3.

(*c*) L'unione dei nuclei di tutte le applicazioni ϕ_λ, è un "cono" formato da rette uscenti dall'origine. In particolare, è determinata dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = \mu\lambda \\ x_2 = \mu(3\lambda^2 - 3\lambda + 1) \\ x_3 = \mu(2\lambda - 1) \\ x_4 = 2\mu\lambda \end{cases} \qquad \text{ove } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Da queste si ricava che $\mu = x_4 - x_3$ e che (quando $x_4 - x_3 \neq 0$) $\lambda = \dfrac{x_1}{x_4 - x_3}$. Mettendo insieme queste condizioni e l'equazione $2x_1 - x_4 = 0$, si ricava che l'unione dei nuclei è costituita da soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_4 = 0 \\ x_2(x_4 - x_3) - 3x_1^2 + 3x_1(x_4 - x_3) - (x_4 - x_3)^2 = 0 \end{cases}$$

(*d*) Si tratta di un sistema di secondo grado, ovvero dell'intersezione di un'ipersuperficie quadrica con un piano e quindi di una conica. In particolare si tratta di una conica non-degenere (perché?). □

ESERCIZIO 5. *Si consideri la curva piana di equazione $3x^2 + 8xy - 3y^2 - 8x + 6y = 0$. Si dica se si tratta di una conica non-degenere e se ne determinino il tipo, una equazione canonica, la trasformazione ortogonale* *di coordinate opportuna, gli eventuali assi, asintoti, centro, vertice. Si tracci un disegno indicativo della conica.*

Svolgimento. Si tratta della conica di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 \\ -4 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

che non è degenere, essendo $\det A = -75 \neq 0$, ed è un'iperbole poiché $\det A_\infty = -25 < 0$ (A_∞ è la sottomatrice di A che si ottiene cancellando la prima riga e la prima colonna).

Per trovare l'equazione canonica e la relativa trasformazione di coordinate, cominciamo osservando che la componente omogenea di grado 2 si decompone nel prodotto $3x^2+8xy-3y^2 = (x+3y)(3x-y)$. Possiamo trovare delle costanti α e β affinché si abbia

$$\alpha(3x-y)+\beta(x+3y) = -8x+6y \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = 1 \end{cases};$$

perciò l'equazione di partenza si riscrive nella forma

$$(x+3y-3)(3x-y+1)+3 = 0,$$

da cui si trova conferma del fatto che la curva di partenza è un'iperbole (equilatera), ed inoltre i suoi asintoti sono le rette, tra loro ortogonali, $\ell_1 : x+3y-3 = 0$ ed $\ell_2 : 3x-y+1 = 0$.

Il centro è il punto di intersezione degli asintoti, ovvero $C = \binom{0}{1}$. Gli assi sono le bisettrici degli asintoti e le loro equazioni si possono calcolare come semisomma e semidifferenza di ℓ_1 ed ℓ_2, ovvero

$$h_1 : x-2y+2 = 0 \qquad \text{ed} \qquad h_2 : 2x+y-1 = 0\ ,$$

che sono, ovviamente, ortogonali tra loro.

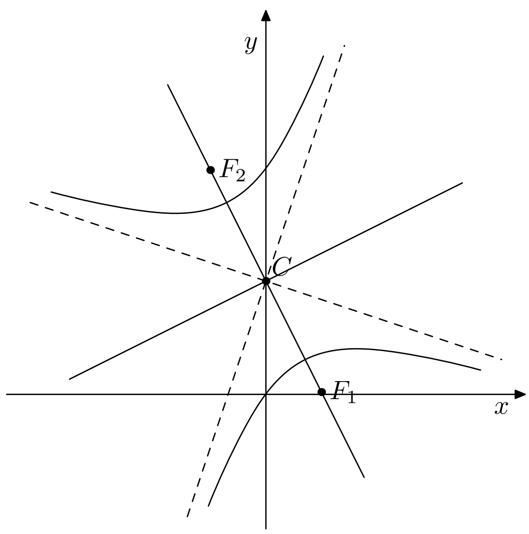
L'equazione dell'iperbole si riscrive come

$$(x-2y+2)^2 - (2x+y-1)^2 = 3;$$

quindi, usando la trasformazione (ortogonale) di coordinate

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{5}}(x-2y+2) \\ Y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x+y-1) \end{cases}$$

si trova l'equazione canonica dell'iperbole, ovvero $\frac{5}{3}X^2 - \frac{5}{3}Y^2 = 1$.



L'asse focale è la retta h_2 ($Y = 0$) ed i fuochi sono i due punti di questa retta a distanza $\sqrt{\frac{6}{5}}$ dal centro C, ovvero $F_{1,2} = \binom{0}{1} \pm \sqrt{\frac{6}{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}\binom{1}{-2}$, dunque $F_1 = \binom{\sqrt{6}/5}{1-2\sqrt{6}/5}$ ed $F_2 = \binom{-\sqrt{6}/5}{1+2\sqrt{6}/5}$. □