## Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova di accertamento del 11 febbraio 2003 – Compito **A**

**ESERCIZIO 1**. *Nello Spazio Euclideo tridimensionale si considerino le rette $r$ ed $s$ di equazioni*

$$r : \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + z = 0 \end{cases} \qquad ed \qquad s : \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x - z = 0 \end{cases}.$$

(a) *Si verifichi che le due rette sono sghembe e se ne calcoli la reciproca distanza. Si determinino inoltre i punti $R \in r$ ed $S \in s$ di minima distanza.*

(b) *Dato il punto $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si scrivano le equazioni cartesiane della retta $h$, passante per $A$, ed incidente sia $r$ che $s$.*

(c) *Si scriva l'equazione del cilindro retto $\mathscr{C}$, avente la retta $s$ come asse e tangente alla retta $r$. Si determinino, inoltre, i punti $P$ e $Q$, di intersezione tra la retta $h$ ed il cilindro $\mathscr{C}$.*

(d) *Si calcoli il volume del tetraedro di vertici $P, Q, R, S$.*

*Svolgimento.* (a) Il generico punto della retta $r$ ha coordinate $R_t = \begin{pmatrix} t \\ -2 \\ -t \end{pmatrix}$, al variare di $t$ in $\mathbb{R}$, mentre il generico punto della retta $s$ ha coordinate $S_u = \begin{pmatrix} u \\ 1 \\ u \end{pmatrix}$, al variare di $u$ in $\mathbb{R}$. Da ciò si vede che le due rette non hanno punti in comune e non sono parallele; quindi si tratta di due rette sghembe. Inoltre i due punti di distanza minima, $R$ ed $S$, sono determinati dal fatto che il vettore $\overrightarrow{RS}$ deve essere ortogonale ad entrambo le rette. Si hanno quindi le condizioni

$$\overrightarrow{R_tS_u} \cdot v_r = \begin{pmatrix} u-t \\ 3 \\ u+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{e} \qquad \overrightarrow{R_tS_u} \cdot v_s = \begin{pmatrix} u-t \\ 3 \\ u+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

da cui si conclude che i punti di minima distanza sono $R = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e dunque la distanza di $r$ da $s$ è $\|\overrightarrow{RS}\| = 3$.

($b$) La retta $h$ è intersezione dei due piani, passanti per $A$, e contenenti, rispettivamente, la retta $r$ e la retta $s$; ovvero $h = (A \vee r) \cap (A \vee s)$. Il piano $A \vee r$ ha un'equazione del tipo $\alpha(x-y+z-2)+\beta(x+z) = 0$, perchè contiene la retta $r$, ed imponendo la condizione di passaggio per il punto $A$, si trova che $-\alpha + \beta = 0$, ovvero $A \vee r : 2x - y + 2z = 2$. Analogamente si determina $A \vee s : x + y - z = 1$, e quindi $h : \begin{cases} 2x - y + 2z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$.

($c$) Il cilindro in questione è il luogo dei punti dello spazio che hanno distanza 3 dalla retta $s$, ovvero l'insieme dei punti $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, tali che $\frac{\|\overrightarrow{SX} \times v_s\|}{\|v_s\|} = 3$. L'equazione di $\mathscr{C}$ è dunque

$$\mathscr{C} : (x - z)^2 + 2(y - 1)^2 = 18 \qquad \text{ovvero} \qquad \mathscr{C} : x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz - 4y - 16 = 0.$$

I punti della retta $h$ hanno coordinate, $P_t = \begin{pmatrix} 1-t \\ 4t \\ 3t \end{pmatrix}$, al variare del parametro $t$, e quindi le intersezioni con $\mathscr{C}$ sono i punti per cui $(1-4t)^2 = 6$, ovvero $t = \frac{1 \pm \sqrt{6}}{4}$, e le loro coordinate sono $P = \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{6}}{4} \\ 1+\sqrt{6} \\ \frac{3+3\sqrt{6}}{4} \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{6}}{4} \\ 1-\sqrt{6} \\ \frac{3-3\sqrt{6}}{4} \end{pmatrix}$.

($d$) Il volume del tetraedro è $V = \frac{1}{6}|\overrightarrow{SR} \cdot (\overrightarrow{SP} \times \overrightarrow{SQ})| = \frac{3\sqrt{6}}{8}$. □

**ESERCIZIO 2**. *Si consideri l'applicazione lineare $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*rispetto alla base canonica di* $\mathbb{R}^4$.
(a) *Si verifichi che* $\pi(\pi(v)) = \pi(v)$ *per ogni vettore* $v \in \mathbb{R}^4$.
(b) *Si determinino i sottospazi* $U = \ker\pi$ *e* $W = \mathrm{im}\pi$ *e si mostri che* $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.
(c) *Si scriva la matrice della proiezione su* $U$ *parallelamente a* $W$.
(d) *Si scriva la matrice della simmetria di asse* $U$ *e direzione* $W$.

*Svolgimento.* (a) Facendo il prodotto, si verifica che $A^2 = A$; quindi $\pi$ è la matrice di una proiezione e, precisamente, della proiezione su $W = \mathrm{im}\,\pi$, parallelamente al sottospazio $U = \ker\pi$.

(b) Con un facile calcolo si ottiene

$$W = \mathrm{im}\,\pi = \left\langle \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\1\\-1\\-1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{ed} \qquad U = \ker\pi = \left\langle \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

ed $U \cap W = \langle 0 \rangle$, perché se $v \in \mathrm{im}\,\pi$, per quanto visto nel punto (a) deve aversi $\pi(v) = v$. Grazie alle Relazioni di Grassmann, si conclude che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(c) Indichiamo con $\pi_U : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proiezione su $U$, parallelamente a $W$ ed osserviamo che, dato un vettore $v \in \mathbb{R}^4$, la sua proiezione $\pi_U(v)$ si ottiene sottraendo a $v$ la sua proiezione su $W$, parallelamente ad $U$, ovvero $\pi_U = v - \pi(v)$. Dunque, la matrice di $\pi_U$ è $\mathbf{1}_4 - A$.

(d) Dato un vettore $v \in \mathbb{R}^4$, la simmetria di asse $U$ e direzione $W$ lascia fissa la componente di $v$ parallela ad $U$, mentre cambia di segno quella parallela a $W$. Dunque, indicata con $\sigma : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la simmetria in questione, si ha $\sigma(v) = \pi_U(v) - \pi(v)$, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$. La matrice cercata è quindi $\mathbf{1}_4 - 2A$. □

**ESERCIZIO 3**. *Si considerino gli spazi vettoriali* $V$ *e* $W$ *su* $\mathbb{R}$ *con le rispettive basi* $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ *e* $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$.
(a) *Si dica se esiste un'applicazione lineare* $\phi : V \to W$ *che soddisfa alle seguenti condizioni*

$$\phi(v_1 + v_2) = 2w_2 + 2w_3, \qquad \phi(v_1 - v_2) = 2w_1 + 2w_2 - 2w_3,$$
$$\phi(v_1 + v_2 + v_3) = 4w_2 + 4w_3, \qquad \phi(v_1 + v_2 + v_4) = w_1 + 6w_2 + 4w_3;$$

*e se ne scriva la matrice rispetto alle basi date.*
(b) *Si determinino dimensioni e basi per* $\mathrm{im}\phi$ *e* $\ker\phi$.
(c) *Si mostri che il sottoinsieme* $Z = \{ \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) \mid \phi \circ \psi = 0 \}$ *è un sottospazio dello spazio vettoriale* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ *e se ne calcoli la dimensione. Sia* $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) \to M_4(\mathbb{R})$ *l'applicazione che ad ogni endomorfismo di* $V$ *associa la sua matrice, rispetto alla base* $\mathcal{V}$. *Si determini una base del sottospazio* $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(Z)$ *di* $M_4(\mathbb{R})$.
(d) *Si mostri che il sottoinsieme* $T = \{ \eta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, W) \mid \eta \circ \phi = 0 \}$ *è un sottospazio dello spazio vettoriale* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, W)$ *e se ne calcoli la dimensione. Sia* $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, W) \to M_3(\mathbb{R})$ *l'applicazione che ad ogni endomorfismo di* $W$ *associa la sua matrice, rispetto alla base* $\mathcal{W}$. *Si determini una base del sottospazio* $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(T)$ *di* $M_3(\mathbb{R})$.

*Svolgimento.* (a) Imponendo la condizione che $\phi$ sia un'applicazione lineare, si deduce facilmente dalle condizioni date che deve aversi

$$\phi(v_1) = w_1 + 2w_2, \qquad \phi(v_2) = -w_1 + 2w_3, \qquad \phi(v_3) = 2w_2 + 2w_3, \qquad \phi(v_4) = w_1 + 4w_2 + 2w_3;$$

e quindi

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) L'immagine di $\phi$ è il sottospazio vettoriale di $W$ generato dalle colonne della matrice $A$; si vede facilmente che le prime due colonne sono linearmente indipendenti, mentre le altre sono combinazioni lineari delle prime due; dunque $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{im}\,\phi = 2$, e una base è data dai vettori $w_1 + 2w_2$ e $w_1 - 2w_3$ di $W$. Per la formula delle dimensioni abbiamo che $\dim_{\mathbb{R}} \ker\phi = 4-2 = 2$, e per trovare una base risolviamo il sistema $AX = 0$ (oppure osserviamo direttamente le colonne della matrice $A$). Troviamo per esempio che esso è generato dai vettori $v_1 + v_2 - v_3$ e $v_1 + v_3 - v_4$.

($c$) L'insieme $Z$ è formato da tutte le applicazioni lineari $\psi$, per cui $\mathrm{im}\,\psi \subseteq \ker\phi$, ovvero sono tutte e sole le applicazioni lineari dello spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \ker\phi) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$. Si tratta dunque di un sottospazio di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ di dimensione $\dim_{\mathbb{R}}(\ker\phi)\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2 \cdot 4 = 8$. Una base di $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(Z)$ si ottiene scrivendo le matrici associate a dei generatori per $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \ker\phi)$. Possiamo quindi prendere le seguenti matrici in $M_4(\mathbb{R})$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

($d$) L'insieme $T$ è formato da tutte le applicazioni lineari $\eta$ per cui $\mathrm{im}\,\phi \subseteq \ker\eta$, e sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi dello spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W', W)$ ove $W'$ è un complementare in $W$ di $\mathrm{im}\,\phi$ (dunque $\dim_{\mathbb{R}} W' = 1$), e si estendono ad applicazioni lineari su tutto $W$ annullandosi su $\mathrm{im}\,\phi$. Si tratta dunque di un sottospazio di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, W)$ di dimensione $\dim_{\mathbb{R}}(W')\dim_{\mathbb{R}}(W) = 1 \cdot 3 = 3$. Una base si ottiene imponendo al morfismo $\eta$ di annullarsi sui vettori che generano $\mathrm{im}\,\phi$. Si ottiene che $\eta(w_1 + 2w_2) = 0$ e $\eta(w_1 - 2w_3) = 0$, ovvero $\eta(w_2) = -\frac{1}{2}\eta(w_1)$ e $\eta(w_3) = \frac{1}{2}\eta(w_1)$ Quindi le matrici di tali applicazioni nella base $\mathcal{W}$ di $W$ saranno della forma $\begin{pmatrix} a & -a/2 & a/2 \\ b & -b/2 & b/2 \\ c & -c/2 & c/2 \end{pmatrix}$ al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$. Possiamo quindi scegliere come base di $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(T)$ le seguenti matrici in $M_3(\mathbb{R})$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Ciò conclude la discussione. $\square$

## Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova di accertamento del 11 febbraio 2003 – Compito **B**

**ESERCIZIO 1**. *Nello Spazio Euclideo tridimensionale si considerino le rette $r$ ed $s$ di equazioni*

$$r:\begin{cases} 2x+2y-z=4 \\ x+y=0 \end{cases} \qquad ed \qquad s:\begin{cases} 3x-3y+2z=-2 \\ x-y=0 \end{cases}.$$

(a) *Si verifichi che le due rette sono sghembe e se ne calcoli la reciproca distanza. Si determinino inoltre i punti $R \in r$ ed $S \in s$ di minima distanza.*

(b) *Dato il punto $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ si scrivano le equazioni cartesiane della retta $h$, passante per $A$, ed incidente sia $r$ che $s$.*

(c) *Si scriva l'equazione del cilindro retto $\mathscr{C}$, avente la retta $s$ come asse e tangente alla retta $r$. Si determinino, inoltre, i punti $P$ e $Q$, di intersezione tra la retta $h$ ed il cilindro $\mathscr{C}$.*

(d) *Si calcoli il volume del tetraedro di vertici $P, Q, R, S$.*

*Svolgimento.* (a) Il generico punto della retta $r$ ha coordinate $R_t = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ -4 \end{pmatrix}$, al variare di $t$ in $\mathbb{R}$, mentre il generico punto della retta $s$ ha coordinate $S_u = \begin{pmatrix} u \\ u \\ -1 \end{pmatrix}$, al variare di $u$ in $\mathbb{R}$. Da ciò si vede che le due rette non hanno punti in comune e non sono parallele; quindi si tratta di due rette sghembe. Inoltre i due punti di distanza minima, $R$ ed $S$, sono determinati dal fatto che il vettore $\overrightarrow{RS}$ deve essere ortogonale ad entrambo le rette. Si han quindi le condizioni

$$\overrightarrow{R_tS_u} \cdot v_r = \begin{pmatrix} u-t \\ u+t \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{e} \qquad \overrightarrow{R_tS_u} \cdot v_s = \begin{pmatrix} u-t \\ u+t \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

da cui si conclude che i punti di minima distanza sono $R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ ed $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e dunque la distanza di $r$ da $s$ è $\|\overrightarrow{RS}\| = 3$.

($b$) La retta $h$ è intersezione dei due piani, passanti per $A$, e contenenti, rispettivamente, la retta $r$ e la retta $s$; ovvero $h = (A \vee r) \cap (A \vee s)$. Il piano $A \vee r$ ha un'equazione del tipo $\alpha(2x+2y-z-4)+\beta(x+y)=0$, perchè contiene la retta $r$, ed imponendo la condizione di passaggio per il punto $A$, si trova che $\beta = 0$, ovvero $A \vee r : 2x+2y-z=4$. Analogamente si determina $A \vee s : x-y+z=-1$, e quindi $h : \begin{cases} 2x+2y-z=4 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$.

($c$) Il cilindro in questione è il luogo dei punti dello spazio che hanno distanza 3 dalla retta $s$, ovvero l'insieme dei punti $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, tali che $\frac{\|\overrightarrow{SX} \times v_s\|}{\|v_s\|} = 3$. L'equazione di $\mathscr{C}$ è dunque

$$\mathscr{C} : (x-y)^2 + 2(z+1)^2 = 18 \qquad \text{ovvero} \qquad \mathscr{C} : x^2+y^2+2z^2-2xy+4y-16=0.$$

I punti della retta $h$ hanno coordinate, $P_t = \begin{pmatrix} 1-t \\ 3t \\ 4t-2 \end{pmatrix}$, al variare del parametro $t$, e quindi le intersezioni con $\mathscr{C}$ sono i punti per cui $(1-4t)^2 = 6$, ovvero $t = \frac{1 \pm \sqrt{6}}{4}$, e le loro coordinate sono $P = \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{6}}{4} \\ \frac{3+3\sqrt{6}}{4} \\ \sqrt{6}-1 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{6}}{4} \\ \frac{3-3\sqrt{6}}{4} \\ -1-\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

($d$) Il volume del tetraedro è $V = \frac{1}{6}|\overrightarrow{SR} \cdot (\overrightarrow{SP} \times \overrightarrow{SQ})| = \frac{3\sqrt{6}}{8}$. □

**ESERCIZIO 2**. *Si consideri l'applicazione lineare $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

*rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.*
*(a) Si verifichi che $\pi(\pi(v)) = \pi(v)$ per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$.*
*(b) Si determinino i sottospazi $U = \ker\pi$ e $W = \mathrm{im}\pi$ e si mostri che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.*
*(c) Si scriva la matrice della proiezione su $U$ parallelamente a $W$.*
*(d) Si scriva la matrice della simmetria di asse $U$ e direzione $W$.*

*Svolgimento.* (a) Facendo il prodotto, si verifica che $A^2 = A$; quindi $\pi$ è la matrice di una proiezione e, precisamente, della proiezione su $W = \mathrm{im}\,\pi$, parallelamente al sottospazio $U = \ker\pi$.

($b$) Con un facile calcolo si ottiene

$$W = \mathrm{im}\,\pi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{ed} \qquad U = \ker\pi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Inoltre, $U \cap W = \langle 0 \rangle$, perché se $v \in \mathrm{im}\,\pi$, per quanto visto nel punto (a) deve aversi $\pi(v) = v$. Grazie alle Relazioni di Grassmann, si conclude che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

($c$) Indichiamo con $\pi_U : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proiezione su $U$, parallelamente a $W$ ed osserviamo che, dato un vettore $v \in \mathbb{R}^4$, la sua proiezione $\pi_U(v)$ si ottiene sottraendo a $v$ la sua proiezione su $W$, parallelamente ad $U$, ovvero $\pi_U = v - \pi(v)$. Dunque, la matrice di $\pi_U$ è $\mathbf{1}_4 - A$.

($d$) Dato un vettore $v \in \mathbb{R}^4$, la simmetria di asse $U$ e direzione $W$ lascia fissa la componente di $v$ parallela ad $U$, mentre cambia di segno quella parallela a $W$. Dunque, indicata con $\sigma : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la simmetria in questione, si ha $\sigma(v) = \pi_U(v) - \pi(v)$, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$. La matrice cercata è quindi $\mathbf{1}_4 - 2A$. □

**ESERCIZIO 3**. *Si considerino gli spazi vettoriali $V$ e $W$ su $\mathbb{R}$ con le rispettive basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$.*
*(a) Si dica se esiste un'applicazione lineare $\phi : V \to W$ che soddisfa alle seguenti condizioni*

$$\phi(v_1 + v_3 + v_4) = 2w_1 + 8w_2 + 4w_3, \qquad \phi(v_2 + v_3 + v_4) = 6w_2 + 6w_3,$$
$$\phi(v_3 + v_4) = w_1 + 6w_2 + 4w_3, \qquad \phi(v_3 - v_4) = -w_1 - 2w_2;$$

*e se ne scriva la matrice rispetto alle basi date.*
*(b) Si determinino dimensioni e basi per $\mathrm{im}\phi$ e $\ker\phi$.*
*(c) Si mostri che il sottoinsieme $Z = \{\, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) \mid \phi \circ \psi = 0 \,\}$ è un sottospazio dello spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ e se ne calcoli la dimensione. Sia $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) \to M_4(\mathbb{R})$ l'applicazione che ad ogni endomorfismo di $V$ associa la sua matrice, rispetto alla base $\mathcal{V}$. Si determini una base del sottospazio $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(Z)$ di $M_4(\mathbb{R})$.*
*(d) Si mostri che il sottoinsieme $T = \{\, \eta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, W) \mid \eta \circ \phi = 0 \,\}$ è un sottospazio dello spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, W)$ e se ne calcoli la dimensione. Sia $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, W) \to M_3(\mathbb{R})$ l'applicazione che ad ogni endomorfismo di $W$ associa la sua matrice, rispetto alla base $\mathcal{W}$. Si determini una base del sottospazio $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(T)$ di $M_3(\mathbb{R})$.*

*Svolgimento.* L'applicazione $\phi$ è la stessa del terzo esercizio del Compito A. Si veda quindi la risoluzione di quell'esercizio. □

## Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova di accertamento del 21 marzo 2003

**ESERCIZIO 1**. *Si considerino in $\mathbb{R}^4$ le due famiglie di piani*

$$\pi_\lambda : \begin{cases} x_1 + \lambda x_3 + (1-\lambda^2)x_4 = \lambda + 1 \\ x_1 + 2\lambda x_3 + (\lambda - 1)x_4 = \lambda \end{cases} \qquad \sigma_\lambda : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 = -2\lambda - 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2\lambda x_3 + (\lambda-1)x_4 = -2 - \lambda \end{cases}.$$

(a) *Si determinino (se esistono) i valori di $\lambda$ per cui l'intersezione $\pi_\lambda \cap \sigma_\lambda$ si riduce ad un solo punto, $P_\lambda$, e si scrivano le coordinate di tale punto in funzione del parametro $\lambda$.*

(b) *Si determinino (se esistono) i valori di $\lambda$ per cui $\pi_\lambda \cap \sigma_\lambda = \emptyset$ e si dica se, in qualcuno di questi casi, i due piani sono paralleli o sghembi.*

(c) *Si determinino (se esistono) i valori di $\lambda$ per cui l'intersezione $\pi_\lambda \cap \sigma_\lambda$ è una retta, $r$, e se ne scrivano le equazioni parametriche.*

(d) *Nel caso in cui l'intersezione $\pi_\lambda \cap \sigma_\lambda$ è una retta, si determinino le equazioni cartesiane della sottovarietà lineare generata dai due piani.*

*Svolgimento.* (a) Osserviamo che si tratta effettivamente di due famiglie di piani perchè, per ogni valore di $\lambda$, entrambo i sistemi hanno rango 2. Al variare del parametro $\lambda$, l'intersezione tra i due piani è data dalle soluzioni del sistema lineare che si ottiene considerando tutte e quattro le equazioni lineari date; ovvero il sistema avente matrice completa

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 1-\lambda^2 & \lambda+1 \\ 1 & 0 & 2\lambda & \lambda-1 & \lambda \\ 1 & 2 & \lambda & 0 & -2\lambda-2 \\ 1 & 2 & 2\lambda & \lambda-1 & -2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Applicando la tecnica di eliminazione di Gauss, ovvero moltiplicando $M$ a sinistra per il prodotto di matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice del sistema diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2\lambda-2 \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda-1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-1 & -1-\lambda \end{pmatrix}.$$

L'intersezione si riduce ad un punto se, e solo se, la matrice incompleta del sistema ha rango 4 e ciò accade per $\lambda \notin \{-1, 0, 1\}$. In tal caso, le coordinate del punto di intersezione, sono

$$P_\lambda = \begin{pmatrix} -\lambda-1 \\ -\lambda-1 \\ \frac{\lambda+1}{\lambda} \\ \frac{1}{1-\lambda} \end{pmatrix}.$$

(*b*) Per $\lambda = 0$ e per $\lambda = 1$, la matrice incompleta ha rango 3, mentre la matrice completa ha rango 4. Dunque l'intersezione tra i due piani è vuota, ma i due piani non sono né paralleli né sghembi, perché, per essere paralleli, dovrebbero avere lo stesso sottospazio direttore e quindi il rango della matrice incompleta dovrebbe essere uguale a 2; mentre, per essere sghembi, gli spazi direttori dovrebbero avere in comune solo il vettore nullo e quindi la matrice incompleta dovrebbe avere rango 4[(*)].

[(*)] E quindi non ci possono essere due piani sghembi in uno spazio affine di dimensione minore o uguale a 4.

$(c)$ Per $\lambda = -1$, la matrice completa e quella incompleta hanno entrambo rango 3, e quindi l'intersezione è una sottovarietà lineare di dimensione 1, ovvero la retta $r$ di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}.$$

La retta passa per il punto $R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, quindi ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2t \\ x_4 = \frac{1}{2} - t \end{cases} \qquad \text{al variare di } t \text{ in } \mathbb{R}.$$

$(d)$ I due piani si intersecano nella retta $r$ e quindi la sottovarietà lineare generata dai due piani, $\sigma_{-1} \vee \pi_{-1}$, contiene la retta $r$ ed ha come sottospazio direttore il sottospazio generato dai sottospazi direttori dei due piani, $\pi_{-1}$ e $\sigma_{-1}$. Per la formula di Grassmann, si tratta quindi di una sottovarietà lineare di dimensione 3.

Per quanto detto, sappiamo che $\sigma_{-1} \vee \pi_{-1}$ passa per il punto $R$ e che il vettore $v$ appartiene al suo sottospazio direttore; quindi, per determinarla completamente ci basta conoscere un vettore parallelo a $\sigma_1$ ed indipendente da $v$, ed un vettore parallelo a $\pi_1$ ed indipendente da $v$. Ricordando che

$$\pi_{-1} : \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 - 2x_4 = -1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \sigma_{-1} : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -1 \end{cases}.$$

si conclude che

$$\sigma_{-1} \vee \pi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{e quindi} \quad \sigma_{-1} \vee \pi_{-1} : x_3 + 2x_4 = 1.$$

Ciò risponde completamente alle domande poste. $\square$

**ESERCIZIO 2**. *Si consideri l'applicazione lineare $\phi : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

*rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, di $\mathbb{C}^4$.*

(a) *Si determini il polinomio caratteristico di $\phi$ e si dica se $\phi$ è invertibile.*
(b) *Si determinino gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori per $\phi$ e si dica se $\phi$ è, o meno, diagonalizzabile.*
(c) *Si determinino il polinomio minimo di $\phi$ ed un autovettore generalizzato di periodo massimo per ogni autovalore di $\phi$.*
(d) *Si determinino una matrice di Jordan, $J$, di $\phi$, ed una matrice invertibile, $P$, tali che $P^{-1}AP = J$.*

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}) = (x-2)^4$, che ha termine noto diverso da zero e quindi $\phi$ è invertibile.

L'endomorfismo $\phi$ ha un unico autovalore, 2, di molteplicità 4 e quindi, non essendo una matrice scalare, non può essere diagonalizzabile. Osservando che

$$A - 2\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \qquad (A - 2\mathbf{1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (A - 2\mathbf{1})^3 = \mathbf{0},$$

si conclude che vi è un sottospazio di dimensione 2 di autovettori ($\mathrm{rk}(A - 2\mathbf{1}) = 2$) e che gli autovettori generalizzati hanno periodo minore o uguale a 3. Il polinomio minimo è quindi $\lambda_\phi(x) = (x-2)^3$ e quindi la matrice di Jordan di $\phi$ ha un blocco di ordine 3 ed un blocco di ordine 1. Un autovettore generalizzato di periodo 3 è, ad esempio, $v_4 = e_1$ che, assieme a $v_3 = (\phi - 2)v_4 = e_1 + 2e_2 + e_3 - e_4$ ed a $v_2 = (\phi - 2)^2 v_4 = 4e_2 - 4e_4$, determina la base del blocco di ordine massimo della matrice di Jordan di $\phi$. Per completare la base, rispetto a cui $\phi$ abbia matrice di Jordan, è necessario trovare un autovettore $v_1$, linearmente indipendente da $v_2$, e quindi possiamo prendere $v_1 = e_1 + e_3$ e porre $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$. Si conclude che

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

sono le matrici cercate. □

**ESERCIZIO 3**. *Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato dell'applicazione bilineare, $g$, di matrice*

$$G = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 8 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

*rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$.*

*(a) Si dica se $g$ è non-degenere e si dica se vi sono vettori isotropi.*

*(b) Si determini (se esiste) una base ortogonale, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, di $\mathbb{R}^4$ tale che*

$$\langle v_1, \dots, v_i \rangle = \langle e_1, \dots, e_i \rangle, \qquad \text{per } i = 1, \dots, 4,$$

*e si determini la segnatura (indice di inerzia) di $g$.*

*(c) Si scrivano una matrice invertibile, $Q$, ed una matrice diagonale, $\Delta$, tali che ${}^tQGQ = \Delta$.*

*(d) Si dica qual'è la dimensione di un sottospazio isotropo massimale di $\mathbb{R}^4$ e si determini un tale sottospazio.*

*Svolgimento.* (a) Con un calcolo diretto si verifica che $\det G = 4$ e quindi $g$ è non-degenere. Inoltre, guardando la matrice $G$ si può osservare che $g(e_2, e_2) = 0$ e quindi vi sono vettori isotropi.

(*b*) e (*c*) Possiamo prendere $v_1 = e_1$, essendo $g(e_1, e_1) = -2$. Il vettore $v_2$ deve appartenere al sottospazio $\langle e_1 \rangle^\perp \cap \langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_1 - 2e_2 \rangle$ e $g(e_1 - 2e_2, e_1 - 2e_2) = 2$; quindi possiamo porre $v_2 = e_1 - 2e_2$. Analogamente, $v_3$ deve appartenere al sottospazio $\langle e_1, e_2 \rangle^\perp \cap \langle e_1, e_2, e_3 \rangle = \langle 3e_1 - 3e_2 + e_3 \rangle$ e $g(3e_1 - 3e_2 + e_3, 3e_1 - 3e_2 + e_3) = 8$; quindi possiamo porre $v_3 = 3e_1 - 3e_2 + e_3$. Infine, $v_4$ deve appartenere al sottospazio $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle^\perp = \langle 3e_1 - 7e_2 + e_3 - 4e_4 \rangle$ e $g(3e_1 - 7e_2 + e_3 - 4e_4, 3e_1 - 7e_2 + e_3 - 4e_4) = -8$; quindi posto $v_4 = 3e_1 - 7e_2 + e_3 - 4e_4$, si ottiene la base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, soddisfacente alle condizioni richieste. Dunque la segnatura di $g$ è $(2, 2)$, ovvero $i(g) = 0$ e due matrici del tipo cercato sono

$$\Delta = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

(*d*) La segnatura di $g$ è $(2, 2)$ e quindi vi sono sottospazi isotropi di dimensione 2, che è il massimo possibile. Guardando alla matrice $\Delta$, si conclude facilmente che un tale spazio è $H = \langle v_1 + v_2, v_3 + v_4 \rangle$. D'altra parte, guardando più attentamente alla matrice $G$, si può vedere che i vettori $e_2$ ed $e_4$ sono isotropi ed ortogonali tra loro e quindi $\langle e_2, e_4 \rangle$ è un sottospazio isotropo massimale. Si ha $H = \langle v_1 + v_2, v_3 + v_4 \rangle = \langle e_2, e_4 \rangle$. □

## Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova scritta del 25 marzo 2003

**ESERCIZIO 1**. *Si consideri lo spazio vettoriale euclideo* $\mathbb{R}^4$ *ed il sottospazio* $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$.

*(a) Si determini una base ortonormale* $w_1, w_2$ *di* $U$.
*(b) Si scriva la matrice* $A = w_1\, {}^t w_1 + w_2\, {}^t w_2$ *e si verifichi che si tratta della matrice di una proiezione* $\pi$.
*(c) Si determinino nucleo ed immagine di* $\pi$ *e si verifichi che* $\ker\pi = (\mathrm{im}\,\pi)^\perp$.
*(d) Si scriva la matrice della simmetria ortogonale,* $\sigma$*, di asse* $U$ *e si dica se* $\sigma$ *conserva l'orientamento.*

*Svolgimento.* (a) Posto $w_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; un vettore ad esso ortogonale si trova determinando il numero reale $\alpha$ per cui

$$\left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

e quindi, per $\alpha = -1$. Sia quindi $w_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$(b)$ In base alla scelta fatta dei vettori $w_1$ e $w_2$, si trova

$$A = w_1\, {}^t w_1 + w_2\, {}^t w_2 = \frac{1}{5} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0, 2, 0, 1) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} (1, 0, -2, 0) \right] = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e con un calcolo diretto si verifica che $A^2 = A$ e quindi che $A$ è la matrice di una proiezione.

$(c)$ Dato un vettore $x \in \mathbb{R}^4$, si ha $\pi(x) = w_1\, {}^t w_1 \cdot x + w_2\, {}^t w_2 \cdot x$ e quindi l'immagine di $\pi$ è fatta da tutte le combinazioni lineari di $w_1$ e $w_2$, ovvero $\mathrm{im}\,\pi = U$. D'altra parte, $w_1$ e $w_2$ sono linearmente indipendenti e quindi $\pi(x) = 0$ se, e solo se, ${}^t w_1 \cdot x = 0 = {}^t w_2 \cdot x$; dunque $\ker\pi = U^\perp$.

$(d)$ Dato $x \in \mathbb{R}^4$, si ha che $x = \pi(x) + (x - \pi(x))$, ove $\pi(x) \in U$ ed $(x - \pi(x)) \in U^\perp$. La simmetria ortogonale $\sigma : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lascia fissa la componente lungo l'asse $U$, mentre cambia di segno alla componente ortogonale ad $U$, quindi si ha $\sigma(x) = \pi(x) - (x - \pi(x)) = 2\pi(x) - x$. Si conclude così che la matrice di $\sigma$ è $B = 2A - \mathbf{1}_4$, ovvero

$$B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo infine che $\sigma$ lascia invariati tutti i vettori di un sottospazio di dimensione 2, mentre cambia di segno i vettori del sottospazio ortogonale, che ha ancora dimensione 2. Dunque $\sigma$ conserva l'orientamento dello spazio ed il lettore dubbioso può verificarlo, calcolando $\det B = 1$. $\square$

**ESERCIZIO 2**. *Si considerino gli spazi vettoriali* $V$ *e* $W$ *su* $\mathbb{R}$ *con le rispettive basi* $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ *e* $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$.
*(a) Si dica se esiste un'applicazione lineare* $\phi : V \to W$ *che soddisfi alle seguenti condizioni*

$$\phi(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = w_2 + w_3, \qquad \phi(v_1 + v_2 - v_3 - v_4) = 2w_1 - 3w_2 - w_3,$$
$$\phi(v_1 - v_2 - v_3 + v_4) = -2w_1 + 5w_2 + 3w_3, \qquad \phi(v_1 - v_2 + v_3 + v_4) = 3w_2 + 3w_3;$$

*e se ne scriva la matrice rispetto alle basi date.*

(b) *Si determinino dimensioni e basi per* $\operatorname{im}\phi$ *e* $\ker\phi$.
(c) *Si mostri che il sottoinsieme* $Z = \{ \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V) \mid \phi \circ \psi = 0 \}$ *è un sottospazio dello spazio vettoriale* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V)$ *e se ne calcoli la dimensione. Sia* $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V) \to M_4(\mathbb{R})$ *l'applicazione che ad ogni endomorfismo di* $V$ *associa la sua matrice, rispetto alla base* $\mathcal{V}$. *Si determini una base del sottospazio* $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(Z)$ *di* $M_4(\mathbb{R})$.
(d) *Si mostri che il sottoinsieme* $T = \{ \eta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W,W) \mid \eta \circ \phi = 0 \}$ *è un sottospazio dello spazio vettoriale* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W,W)$ *e se ne calcoli la dimensione. Sia* $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W,W) \to M_3(\mathbb{R})$ *l'applicazione che ad ogni endomorfismo di* $W$ *associa la sua matrice, rispetto alla base* $\mathcal{W}$. *Si determini una base del sottospazio* $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(T)$ *di* $M_3(\mathbb{R})$.

*Svolgimento.* (a) Osserviamo che i vettori $v_1+v_2+v_3+v_4, v_1+v_2-v_3-v_4, v_1-v_2-v_3+v_4, v_1-v_2+v_3+v_4$ sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di $V$, per cui esiste un'unica applicazione $\phi$ soddisfacente alle condizioni poste e, con facili calcoli, si trova

$$\phi(v_1) = w_1 + w_3, \quad \phi(v_2) = -w_2 - w_3, \quad \phi(v_3) = w_1 - w_2, \quad \phi(v_4) = -2w_1 + 3w_2 + w_3.$$

Dunque, la matrice di $\phi$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

($b$) Sottraendo le prime due righe della matrice $A$ alla terza riga, si ottiene una riga nulla e quindi, la matrice $A$ ha rango 2, da cui si deduce che $\dim \operatorname{im}\phi = 2 = \dim\ker\phi$. La matrice ridotta può essere utilizzata per determinare $\ker\phi = \langle v_1 + v_2 - v_3, v_2 + 2v_3 + v_4 \rangle$. Infine, osservando che le due colonne centrali di $A$ sono linearmente indipendenti, si conclude che $\operatorname{im}\phi = \langle \phi(v_2), \phi(v_3) \rangle = \langle w_2 + w_3, w_1 - w_2 \rangle$.
($c$) L'insieme $Z$ non è vuoto ($0 \in Z$) e dalla linearità di $\phi$ discende che combinazioni lineari di elementi di $Z$ sono ancora in $Z$, e quindi $Z$ è un sottospazio di $\mathrm{Hom}(V,V)$. Inoltre, le applicazioni lineari $\psi : V \to V$ appartenenti a $Z$, soddisfano alla condizione $\operatorname{im}\psi \subseteq \ker\phi$ e quindi $Z$ si può identificare con lo spazio vettoriale $\mathrm{Hom}(V, \ker\phi)$, la cui dimensione è uguale a $(\dim V)(\dim\ker\phi) = 8$. Le matrici corrispondenti formano il sottospazio $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(Z)$ di $M_4(\mathbb{R})$, generato da

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 2&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&2&0&0 \\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&2&0 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&2 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ -1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&-1&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&-1 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

($d$) L'insieme $T$ non è vuoto ($0 \in T$) e dalle proprietà della composizione di funzioni discende che combinazioni lineari di elementi di $T$ sono ancora in $T$, e quindi $T$ è un sottospazio di $\mathrm{Hom}(W,W)$. Inoltre, le applicazioni lineari $\eta : W \to W$ appartenenti a $T$, mandano a zero tutti i vettori del sottospazio $\operatorname{im}\phi$ e quindi, fissato un complementare $W'$ di $\operatorname{im}\phi$ in $W$, $T$ si può identificare con lo spazio vettoriale $\mathrm{Hom}(W,W')$, la cui dimensione è uguale a $(\dim W)(\dim W - \dim\operatorname{im}\phi) = 3$. Le matrici corrispondenti formano il sottospazio $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(T)$ di $M_3(\mathbb{R})$, generato da

$$\begin{pmatrix} 1&1&-1 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 1&1&-1 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 1&1&-1 \end{pmatrix}.$$

Fine della discussione. $\square$

**ESERCIZIO 3**. *Nello spazio tridimensionale si consideri il tetraedro* $\Delta$, *di vertici*

$$P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si scriva l'equazione del piano* $\sigma$, *parallelo alla faccia* $P_1P_2P_3$ *e passante a* $\frac{2}{3}$ *del segmento* $P_0P_1$.

*(b) Detto $Q_i$, $i = 1, 2, 3$, l'intersezione tra il piano $\sigma$ e lo spigolo $P_0P_i$ del tetraedro, si determini il rapporto tra l'area del triangolo $Q_1Q_2Q_3$ e l'area del triangolo $P_1P_2P_3$.*

*(c) Siano $P'_1, P'_2, P'_3$ rispettivamente, i punti medi dei segmenti $Q_2Q_3$, $Q_3Q_1$ e $Q_1Q_2$. Dato un vettore $v$, si diano delle condizioni sulle componenti di $v$ affinché la retta $P_0 + \langle v\rangle$ intersechi il triangolo $P'_1P'_2P'_3$.*

*(d) Si calcoli il volume del tetraedro $P_0P'_1P'_2P'_3$.*

*Svolgimento.* (a) Il piano $\sigma$ passa per il punto $Q_1 = P_0 + \frac{2}{3}(P_1 - P_0) = \frac{1}{3}P_0 + \frac{2}{3}P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \\ -1 \end{pmatrix}$, ed è ortogonale al vettore $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dunque $\sigma : 3x + 6y + 2z + 1 = 0$.

($b$) Poichè il piano $\sigma$ è parallelo alla faccia $P_1P_2P_3$, i tre punti $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ si trovano tutti a $\frac{2}{3}$ dei rispettivi spigoli del tetraedro ed i triangoli $Q_1Q_2Q_3$ e $P_1P_2P_3$ sono simili tra loro con i lati corrispondenti nel rapporto di $\frac{2}{3}$. Dunque $Area(Q_1Q_2Q_3) = \frac{4}{9}Area(P_1P_2P_3)$. Il lettore dubbioso può verificare le affermazioni fatte osservando che

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Area(P_1P_2P_3) = \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\| = \frac{7}{2}$$

e completando i calcoli necessari.

($c$) Si ha

$$P'_1 = \tfrac{1}{2}Q_2 + \tfrac{1}{2}Q_3 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P'_2 = \tfrac{1}{2}Q_1 + \tfrac{1}{2}Q_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P'_3 = \tfrac{1}{2}Q_2 + \tfrac{1}{2}Q_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dato un vettore $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, la retta $P_0 + \langle v\rangle$ interseca il triangolo $P'_1P'_2P'_3$ se, e solo se, il vettore $v$ è proporzionale ad uno dei vettori $P_0P$ ove $P = \alpha_1P'_1 + \alpha_2P'_2 + \alpha_3P'_3$, con $\alpha_i \in [0, 1]$, per $i = 1, 2, 3$, ed $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. Dunque deve esistere una costante $t \neq 0$ tale che

$$\begin{pmatrix} ta_1 \\ ta_2 \\ ta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 + \frac{1}{3}\alpha_3 + 1 \\ -\frac{1}{3}\alpha_2 + 1 \\ -\alpha_3 + 3 \end{pmatrix},$$

da cui, imponendo la condizione $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, si ricava

$$t = \frac{12}{3a_1 + 6a_2 + 2a_3}, \qquad \text{con } 3a_1 + 6a_2 + 2a_3 \neq 0.$$

Inoltre, ricordando che $\alpha_i \in [0, 1]$, per $i = 1, 2, 3$, si ricavano le disuguaglianze

$$0 \le 3 - 12\frac{a_3}{3a_1 + 6a_2 + 2a_3} \le 1, \quad 0 \le 3 - 12\frac{3a_2}{3a_1 + 6a_2 + 2a_3} \le 1, \quad 0 \le 7 - 12\frac{3a_1 + 3a_2 + a_3}{3a_1 + 6a_2 + 2a_3} \le 1;$$

ovvero

$$\frac{1}{6} \le \frac{a_3}{3a_1 + 6a_2 + 2a_3} \le \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{18} \le \frac{a_2}{3a_1 + 6a_2 + 2a_3} \le \frac{1}{12}, \quad \frac{1}{2} \le \frac{3a_1 + 3a_2 + a_3}{3a_1 + 6a_2 + 2a_3} \le \frac{7}{12}.$$

($d$) Infine il volume del tetraedro è uguale a $\frac{1}{6}\frac{14}{9} = \frac{7}{27}$. □

**ESERCIZIO 4**. *Si consideri l'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

*rispetto alla base canonica,* $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, *di* $\mathbb{R}^4$.

(a) *Si determini il polinomio caratteristico di* $\phi$ *e si dica se* $\phi$ *è invertibile.*

(b) *Si determinino gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori per* $\phi$ *e si dica se* $\phi$ *è, o meno, diagonalizzabile.*

(c) *Si determini una matrice di Jordan,* $J$, *di* $\phi$, *ed una matrice invertibile,* $P$, *tali che* $P^{-1}AP = J$.

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}) = (x-3)^4$, che ha termine noto diverso da zero e quindi $\phi$ è invertibile.

L'endomorfismo $\phi$ ha un unico autovalore, 3, di molteplicità 4 e quindi, non essendo $A$ una matrice scalare, non può essere diagonalizzabile. Osservando che

$$A - 3\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (A - 3\mathbf{1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (A - 2\mathbf{1})^3 = \mathbf{0},$$

si conclude che vi è un sottospazio di dimensione 2 di autovettori ($\mathrm{rk}(A - 3\mathbf{1}) = 2$) e che gli autovettori generalizzati hanno periodo minore o uguale a 3. Il polinomio minimo è quindi $\lambda_\phi(x) = (x-3)^3$ e quindi la matrice di Jordan di $\phi$ ha un blocco di ordine 3 ed un blocco di ordine 1. Un autovettore generalizzato di periodo 3 è, ad esempio, $v_4 = e_1$ che, assieme a $v_3 = (\phi - 3)v_4 = e_1 + 3e_2 + e_3 + 3e_4$ ed a $v_2 = (\phi - 3)^2 v_4 = 2e_2 + 2e_4$, determina la base del sottospazio su cui $\phi$ induce il blocco di ordine massimo della matrice di Jordan di $\phi$. Resta da determinare una base del sottospazio su cui $\phi$ induce il blocco di ordine 1, ovvero trovare un autovettore $v_1$, linearmente indipendente da $v_2$. Possiamo prendere $v_1 = e_1 + e_2 + e_3$ e porre $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$. Si conclude che

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

sono le matrici cercate. □

**ESERCIZIO 5**. *Si consideri lo spazio vettoriale* $\mathbb{R}^4$, *dotato dell'applicazione bilineare,* $g$, *associata alla forma quadratica*

$$2x_1x_2 + 4x_1x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2 + 2x_3x_4 - x_4^2,$$

*e sia* $A$ *la matrice di* $g$ *rispetto alla base canonica.*

(a) *Si dica se* $g$ *è non-degenere e si dica se vi sono vettori isotropi.*

(b) *Si determinino una base ortogonale,* $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, *di* $\mathbb{R}^4$ *e la segnatura (indice di inerzia) di* $g$.

(c) *Si determinino una matrice invertibile* $P$ *ed una matrice diagonale* $\Delta$, *tali che* $\Delta = {}^tPAP$.

(d) *Si dica qual'è la dimensione di un sottospazio isotropo massimale di* $\mathbb{R}^4$ *e si determini un tale sottospazio.*

*Svolgimento.* (a) La forma bilineare $g$ ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Con un calcolo diretto si verifica che $\det A = 4$ e quindi $g$ è non-degenere. Inoltre, guardando la matrice $A$ si può osservare che $g(e_1, e_1) = 0$ e quindi vi sono vettori isotropi.

(*b*) e (*c*) Possiamo prendere $v_1 = e_2$, essendo $g(e_2, e_2) = 1$. Il vettore $v_2$ deve appartenere al sottospazio $\langle e_2 \rangle^\perp$, determinato dall'equazione $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ e quindi possiamo prendere $v_2 = e_1 - e_2$, essendo $g(e_1 - e_2, e_1 - e_2) = -1$. Il vettore $v_3$ deve appartenere al sottospazio $\langle v_1, v_2 \rangle^\perp = \langle e_1, e_2 \rangle^\perp$, determinato dalle due equazioni $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$ e quindi possiamo porre $v_3 = e_1 - e_3$, osservando che $g(e_1 - e_3, e_1 - e_3) =$

$-1$. Infine, $v_4$ deve appartenere al sottospazio $\langle v_1, v_2, v_3\rangle^\perp = \langle e_1, e_2, e_3\rangle^\perp$, determinato dalle tre equazioni $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ e quindi possiamo porre $v_4 = 3e_1 - 2e_2 - e_3 + e_4$, con $g(3e_1 - 2e_2 - e_3 + e_4, 3e_1 - 2e_2 - e_3 + e_4) = 4$, ed ottenere una base ortogonale $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$. Dunque la segnatura di $g$ è $(2, 2)$, ovvero $i(g) = 0$, e due matrici del tipo cercato sono

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$(d)$ La segnatura di $g$ è $(2, 2)$ e quindi vi sono sottospazi isotropi di dimensione 2, che è il massimo possibile. Guardando alla matrice $\Delta$, si conclude facilmente che un tale spazio è $H = \langle v_1 + v_2, 2v_3 + v_4\rangle$. □

**ESERCIZIO 6**. [Vecchio Ordinamento] *Si consideri la curva piana $\mathscr{C}$, di equazione*

$$\mathscr{C} : 19x^2 - 6xy + 11y^2 + 6x - 22y + 9 = 0.$$

*Si dica se si tratta di una conica non-degenere e se ne determinino il tipo, una equazione canonica, la matrice dell'isometria che porta la conica in forma canonica, gli eventuali assi, asintoti, centro, vertice. Si tracci un disegno indicativo della conica.*

*Svolgimento.* Consideriamo il piano affine, immerso nel modo consueto nel piano proiettivo (retta impropria $x_0 = 0$) ed usiamo liberamente coordinate omogenee per i punti del piano.

La curva è definita da un'equazione di secondo grado e quindi si tratta della conica di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -11 \\ 3 & 19 & -3 \\ -11 & -3 & 11 \end{pmatrix},$$

che non è degenere, essendo $\det A = -400 \neq 0$, ed è un'ellisse perché $\det A' = 200 > 0$ ($A'$ è, come di consueto, la sottomatrice di $A$ che si ottiene cancellando la prima riga e la prima colonna).

L'ellisse in questione ha punti reali, come si può verificare considerando le sue intersezioni con l'asse $x = 0$. Il centro è il polo della retta impropria, ovvero il punto (proprio) $C = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$, tale che ${}^tCA = \varrho(1, 0, 0)$, per un opportuno $\varrho \neq 0$. Si determina così il centro $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

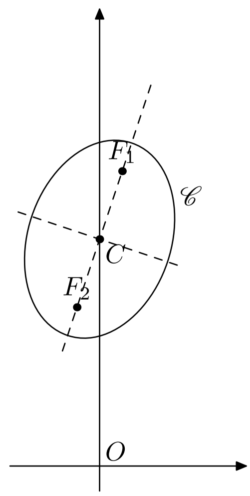
A meno del fattore di proporzionalità $-\frac{\det A'}{\det A} = \frac{1}{2}$, i coefficienti dell'equazione canonica sono gli autovalori della matrice $A'$, mentre le direzioni degli assi sono i rispettivi autovettori e l'asse focale ha la direzione dell'autovettore corrispondente all'autovalore più piccolo in valore assoluto. Si ha $\det(A' - x\mathbf{1}) = x^2 - 30x + 200 = (x - 10)(x - 20)$, e $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ è la direzione dell'asse focale, mentre $\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ è la direzione dell'altro asse. Quindi gli assi sono

$$h_1 : 3x - y + 1 = 0 \quad \text{(asse focale)} \qquad \text{ed} \qquad h_2 : x + 3y - 3 = 0.$$

L'equazione canonica dell'ellisse è $5X^2 + 10Y^2 = 1$; e, considerata l'isometria di matrice

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \\ 1 & 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix},$$

si ha che $\frac{1}{2}{}^tXAX$ è la matrice della conica in forma canonica.




I fuochi sono i due punti dell'asse focale a distanza $\sqrt{\frac{1}{10}}$ dal centro $C$, ovvero $F_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \pm \sqrt{\frac{1}{10}} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, dunque $F_1 = \begin{pmatrix} 1/10 \\ 13/10 \end{pmatrix}$ ed $F_2 = \begin{pmatrix} -1/10 \\ 7/10 \end{pmatrix}$. □

## Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova scritta del 07 aprile 2003

**ESERCIZIO 1**. *Si consideri lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$ ed il sottospazio*

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(a) *Si determini la dimensione, $d$, ed una base ortonormale $w_1, \dots, w_d$ di $W$.*
(b) *Si scriva la matrice $A = w_1\, {}^t w_1 + \cdots + w_d\, {}^t w_d$, si verifichi che si tratta della matrice di una proiezione $\pi$ e si determinino nucleo ed immagine di $\pi$.*
(c) *Si scrivano la matrice della simmetria ortogonale, $\sigma_1$, di asse $W$ e la matrice della simmetria ortogonale, $\sigma_2$, di asse $W^\perp$ e si verifichi che $\sigma_1 \circ \sigma_2 = -1 = \sigma_2 \circ \sigma_1$.*

*Svolgimento.* (a) i vettori $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ed $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono tra loro ortogonali e quindi si tratta di determinare gli scalari $\alpha$ e $\beta$ per cui

$$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Si trova così $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$ e quindi, posto $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, si ottiene una base ortogonale del sottospazio $W$, che ha perciò dimensione 3. Una base ortonormale si può ottenere normalizzando i vettori, ovvero ponendo

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$(b)$ In base alla scelta fatta della base $w_1, w_2, w_3$, si trova

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} (0,0,1,-1) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1,-1,0,0) + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} (1,1,-1,-1) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

e con un calcolo diretto si verifica che $A^2 = A$ e quindi che $A$ è la matrice di una proiezione.

Dato un vettore $x \in \mathbb{R}^4$, si ha $\pi(x) = w_1\, {}^t w_1 \cdot x + w_2\, {}^t w_2 \cdot x + w_3\, {}^t w_3 \cdot x$ e quindi l'immagine di $\pi$ è fatta da tutte le combinazioni lineari di $w_1, w_2, w_3$, ovvero $\operatorname{im} \pi = W$. D'altra parte, $w_1, w_2, w_3$ sono linearmente indipendenti e quindi $\pi(x) = 0$ se, e solo se, ${}^t w_1 \cdot x = {}^t w_2 \cdot x = {}^t w_3 \cdot x = 0$; dunque $\ker \pi = W^\perp$ e $\pi$ è la proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^4$ su $W$.

$(c)$ Dato $x \in \mathbb{R}^4$, si ha che $x = \pi(x) + (x - \pi(x))$, ove $\pi(x) \in W$ ed $(x - \pi(x)) \in W^\perp$. La simmetria ortogonale $\sigma_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lascia fissa la componente lungo l'asse $W$, mentre cambia il segno alla componente ortogonale a $W$, quindi si ha $\sigma_1(x) = \pi(x) - (x - \pi(x)) = 2\pi(x) - x$. D'altra parte, la simmetria ortogonale $\sigma_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lascia fissa la componente lungo $W^\perp$, mentre cambia di segno la componente in $W$, quindi si ha $\sigma_2(x) = -\pi(x) + (x - \pi(x)) = x - 2\pi(x)$. Si conclude così che le matrici di $\sigma_1$ e $\sigma_2$ sono, rispettivamente, $B_1 = 2A - \mathbf{1}_4$ e $B_2 = \mathbf{1}_4 - 2A$; ovvero

$$B_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per quanto visto, dato $x \in \mathbb{R}^4$, si ha

$$\sigma_1(\sigma_2(x)) = \sigma_1(x - 2\pi(x)) = 2\pi(x - 2\pi(x)) - (x - 2\pi(x)) = -x$$

e quindi $\sigma_1 \circ \sigma_2(x) = -1$. Analogamente si verifica l'altra uguaglianza. Ovviamente, il risultato si poteva anche dedurre dall'osservazione che $\sigma_2 = -\sigma_1$ e che, essendo una simmetria, $\sigma_1^2 = 1$. □

**ESERCIZIO 2**. *Si considerino gli spazi vettoriali $V$ e $W$ su $\mathbb{R}$ con le rispettive basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$.*

(a) *Si dica se esiste un'applicazione lineare, $\phi : V \to W$, soddisfacente alle seguenti condizioni*

$$\phi(v_1 + v_2) = -w_1 + w_2 + w_3, \qquad \phi(v_2 + v_3) = -2w_1 + 2w_3,$$
$$\phi(v_3 + v_4) = 2w_1 + w_2 - w_3, \qquad \phi(v_4 - v_1) = w_1 + 2w_2;$$

*e se ne scriva la matrice rispetto alle basi date.*

(b) *Si determinino dimensioni e basi per $\mathrm{im}\phi$ e $\ker\phi$.*

(c) *Si mostri che il sottoinsieme $R = \{\, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, V) \mid \phi \circ \psi = 0 \,\}$ è un sottospazio dello spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, V)$ e se ne calcoli la dimensione. Sia $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, V) \to M_{4\times 3}(\mathbb{R})$ l'applicazione che ad ogni omomorfismo di $W$ in $V$ associa la sua matrice, rispetto alle basi date. Si determini una base del sottospazio $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(R)$ di $M_{4\times 3}(\mathbb{R})$.*

(d) *Si verifichi se il sottoinsieme $S = \{\, \eta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, V) \mid \phi \circ \eta = 1_W \,\}$ è un sottospazio dello spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, V)$. Sia $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, V) \to M_{4\times 3}(\mathbb{R})$ come nel punto precedente. Si verifichi se $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(S)$ è una sottovarietà lineare dello spazio affine su $M_{4\times 3}(\mathbb{R})$.*

*Svolgimento.* (a) Osserviamo che i vettori $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4 - v_1$ sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di $V$, per cui esiste un'unica applicazione $\phi$ soddisfacente alle condizioni poste. Con facili calcoli, si trova

$$\phi(v_1) = w_1 - w_3, \quad \phi(v_2) = -2w_1 + w_2 + 2w_3, \quad \phi(v_3) = -w_2, \quad \phi(v_4) = 2w_1 + 2w_2 - w_3.$$

Dunque, la matrice di $\phi$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Sommando la prima riga alla terza, si ottiene una matrice a scalini che ha chiaramente rango 3, da cui si deduce che $\dim \mathrm{im}\phi = 3$ e $\dim\ker\phi = 1$. In particolare, $\ker\phi = \langle 2v_1 + v_2 + v_3\rangle$ ed $\mathrm{im}\phi = W = \langle w_1, w_2, w_3\rangle$.

(c) L'insieme $R$ non è vuoto ($0 \in R$) e dalla linearità di $\phi$ discende che combinazioni lineari di elementi di $R$ sono ancora in $R$, e quindi $R$ è un sottospazio di $\mathrm{Hom}(W, V)$. Inoltre, le applicazioni lineari $\psi : W \to V$ appartenenti ad $R$, soddisfano alla condizione $\mathrm{im}\psi \subseteq \ker\phi$ e quindi $R$ si può identificare con lo spazio vettoriale $\mathrm{Hom}(W, \ker\phi)$, la cui dimensione è uguale a $(\dim W)(\dim\ker\phi) = 3$. Le matrici corrispondenti formano il sottospazio $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(R)$ di $M_{4\times 3}(\mathbb{R})$, generato da

$$\begin{pmatrix} 2&0&0 \\ 1&0&0 \\ 1&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&2&0 \\ 0&1&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&2 \\ 0&0&1 \\ 0&0&1 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}.$$

(d) L'insieme $S$ non è un sottospazio, perché non contiene l'omomorfismo nullo e non è l'insieme vuoto perché $\phi$ è suriettiva. Dato un elemento, $\eta$, di $S$, ed un qualsiasi elemento $\psi$ di $R$, si ha che $\eta + \psi \in S$, perché $\phi \circ (\eta + \psi) = \phi \circ \eta + \phi \circ \psi = 1_W$. D'altra parte, se $\eta_1$ ed $\eta_2$ appartengono ad $S$, la loro differenza, $\eta_1 - \eta_2$, appartiene ad $R$; quindi $S$ è una sottovarietà affine ed il suo sottospazio direttore è $R$.

Passando alle matrici corrispondenti, dobbiamo trovare il sottoinsieme di $M_{4\times 3}(\mathbb{R})$ costituito dalle matrici $B$ tali che $AB = \mathbf{1}_3$, ovvero dobbiamo risolvere i 3 sistemi lineari associati alla matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 2 & 1&0&0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0&1&0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0&0&1 \end{array}\right), \quad \text{che è riga-equivalente alla matrice} \quad \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & -5&2&-6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2&1&-2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1&0&1 \end{array}\right).$$

Si conclude che
$$\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(S) = \left\{ \begin{pmatrix} -5 & 2 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ a & b & c \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c \in \mathbb{R} \right\}.$$
E quindi si tratta di una sottovarietà lineare di dimensione 3. □

**ESERCIZIO 3**. *Si considerino le due rette*
$$r_1 : \begin{cases} X - Z - 2 = 0 \\ Y - Z - 1 = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} X + Y + 2 = 0 \\ Y + Z + 2 = 0 \end{cases}$$
*nello spazio euclideo reale di dimensione* 3.

($a$) *Mostrare che le due rette sono sghembe e calcolarne la distanza reciproca.*

($b$) *Trovare l'unica retta $n$ incidente sia $r_1$ che $r_2$ ed ortogonale ad entrambe. Trovare i punti $P_1 = r_1 \cap n$ e $P_2 = r_2 \cap n$.*

($c$) *Trovare l'unica retta $t$ passante per il punto $Q$ di coordinate $(2,2,-2)$ ed incidente sia $r_1$ che $r_2$. Trovare i punti $Q_1 = r_1 \cap t$ e $Q_2 = r_2 \cap t$.*

($d$) *Calcolare il volume del tetraedro di vertici $P_1, P_2, Q_1, Q_2$ (può essere zero?) e l'area del triangolo di vertici $P_1, Q_1, Q_2$ (può essere zero?).*

*Svolgimento.* (a) Dalla matrice del sistema delle due rette $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (matrice incompleta di rango 3, completa di rango 4) si deduce che le due rette sono sghembe. Dalle equazioni cartesiane ricaviamo le equazioni parametriche per $r_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ ed $r_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e calcoliamo la distanza tra le rette:
$$d(r_1, r_2) = \frac{\left| \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{|4|}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{4}{\sqrt{8}} = \sqrt{2}.$$
($b$) Per trovare la retta $n$ procediamo imponendo al vettore congiungente un punto generico di $r_1$ ad un punto generico di $r_2$ d'essere ortogonale ai vettori direttori di entrambe le rette. Dalle equazioni parametriche ricaviamo i punti generici $R_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -1+\alpha \\ -2+\alpha \end{pmatrix} \in r_1$ e $R_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ -2-\beta \\ \beta \end{pmatrix} \in r_2$. Imponendo al vettore $R_2 - R_1$ d'essere ortogonale sia a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ che a $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ otteniamo due equazioni dalle quali si ricava $\alpha = 0$ e $\beta = -1$. Dunque abbiamo $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. La retta $n$ ha allora equazioni date da $\operatorname{rk} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X & 0 & -1 \\ Y & -1 & -1 \\ Z & -2 & -1 \end{pmatrix} \leq 2$ e dunque $\begin{cases} Y + 1 = 0 \\ X + Z + 2 = 0 \end{cases}$ (abbiamo annullato i minori contenenti le prime due righe).

Possiamo anche (ri)calcolare la distanza $d(r_1, r_2) = d(P_1, P_2) = \|P_2 - P_1\| = \sqrt{2}$, essendo $P_1$ e $P_2$ i punti di minima distanza (poiché $P_2 - P_1$ è vettore ortogonale sia a $r_1$ sia a $r_2$).

($c$) La retta cercata è l'intersezione del piano $\pi_1$ contenente $r_1$ e $Q$ con il piano $\pi_2$ contenente $r_2$ e $Q$ (infatti $Q$ non appartiene ad alcuna delle due rette date). Poi sarà $Q_1 = r_1 \cap \pi_2$ e $Q_2 = r_2 \cap \pi_1$.

Per trovare $\pi_1$ scriviamo il fascio di piani di asse $r_1$: $\lambda(X - Z - 2) + \mu(Y - Z - 1) = 0$ ed imponiamo il passaggio per $Q$. Otteniamo la relazione $2\lambda + 3\mu = 0$ da cui possiamo scegliere $\lambda = 3$ e $\mu = -2$, e infine ricavare il piano $\pi_1 : 3X - 2Y - Z - 4 = 0$. Intersecando con $r_2$ troviamo $Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Per trovare $\pi_2$ scriviamo il fascio di piani di asse $r_2$: $\lambda(X + Y + 2) + \mu(Y + Z + 2) = 0$ ed imponiamo il passaggio per $Q$. Otteniamo la relazione $6\lambda + 2\mu = 0$ da cui possiamo scegliere $\lambda = 1$ e $\mu = -3$, e infine ricavare il piano $\pi_2 : X - 2Y - 3Z - 4 = 0$. Intersecando con $r_1$ troviamo $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(*d*) Calcoliamo i vettori differenza: $P_2-P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q_1-P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q_2-P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, e di conseguenza il volume richiesto è $\frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right| = \frac{2}{3}$ (non poteva essere 0 perché le rette sono sghembe, quindi i quattro punti, essendo distinti, non sono complanari) mentre l'area richiesta è $\frac{1}{2}\|(Q_1-P_1)\times(Q_2-P_1)\| = \left\|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\| = \frac{\sqrt{14}}{2}$ (non poteva essere zero perché i tre punti non sono allineati). □

**ESERCIZIO 4**. *Si consideri l'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

*rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, di $\mathbb{R}^4$.*

(a) *Si determini il polinomio caratteristico di $\phi$ e si dica se $\phi$ è invertibile.*
(b) *Si determinino gli autovalori, i relativi spazi di autovettori ed il polinomio minimo per $\phi$ e si dica se $\phi$ è, o meno, diagonalizzabile.*
(c) *Si determinino una matrice di Jordan, $J$, di $\phi$, ed una matrice invertibile, $P$, tali che $P^{-1}AP = J$.*

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}) = (x-1)^4$, che ha termine noto diverso da zero e quindi $\phi$ è invertibile.

L'endomorfismo $\phi$ ha un unico autovalore, 1, di molteplicità 4 e quindi, non essendo $A$ una matrice scalare, non può essere diagonalizzabile. Osservando che

$$A - 1\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad \text{ed} \qquad (A - 1\mathbf{1})^2 = \mathbf{0},$$

si conclude che vi è un sottospazio di dimensione 2 di autovettori ($\text{rk}(A - 1\mathbf{1}) = 2$) e che gli autovettori generalizzati hanno periodo minore o uguale a 2. Il polinomio minimo è $\lambda_\phi(x) = (x-1)^2$ e quindi la matrice di Jordan di $\phi$ ha due blocchi di ordine 2. Un autovettore generalizzato di periodo 2 è, ad esempio, $v_4 = e_1$ che, assieme a $v_3 = (\phi - 1)v_4 = 2e_1 + 2e_3$, determina la base di un sottospazio su cui $\phi$ induce un blocco di ordine 2 della matrice di Jordan. Il vettore $v_2 = e_2$ è un autovettore generalizzato di periodo 2 e non appartiene al sottospazio $\langle v_3, v_4\rangle$, quindi, assieme a $v_1 = (\phi - 1)v_2 = -3e_1 + 4e_2 - 3e_3 + 4e_4$, determina la base di un sottospazio su cui $\phi$ induce un altro blocco di ordine 2 della matrice di Jordan. Si conclude che

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono le matrici cercate. □

**ESERCIZIO 5**. *Si consideri la forma bilineare $g$ associata alla forma quadratica*

$$Q(X) = X_1^2 + X_2^2 + 4X_3^2 - 9X_4^2 + 2X_1X_2 - 4X_1X_3 - 6X_1X_4.$$

(*a*) *Si scriva la matrice $G$ di tale forma bilineare nel riferimento dato. Si determini se $g$ è degenere ed eventualmente se ne calcoli il nucleo.*
(*b*) *Determinare una matrice invertibile $P$ tale che ${}^tPGP$ sia diagonale. Dire rango e segnatura di $g$.*
(*c*) *Determinare la massima dimensione di sottospazi isotropi per $g$, ed evidenziare un esempio di sottospazio isotropo massimale.*

(*d*) *Dire se esistono piani iperbolici in* $\mathbb{R}^4$ *dotato della forma* $g$*, ed eventualmente darne un esempio. Ne esistono due ortogonali tra loro?*

*Svolgimento.* (a) La matrice $G$ richiesta è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

in cui si vede subito che la prima riga (o colonna) è combinazione lineare delle successive; dunque $\det G = 0$, la forma $g$ è degenere, e possiamo calcolarne il nucleo che è di dimensione 1 e generato dal vettore $v = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(*b*) Si tratta di trovare una base di $\mathbb{R}^4$ tale che il primo vettore sia del nucleo e gli altri tre siano una base ortogonale di un complementare qualsiasi. Si vede immediatamente dalla matrice che i vettori $e_2, e_3, e_4$ della base canonica sono non isotropi tra loro ortogonali; quindi scegliendo

$$P = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

abbiamo che ${}^tPGP$ è matrice diagonale con i termini $0, 1, 4, -9$ ordinatamente sulla diagonale principale. Di conseguenza $g$ ha rango 3 e segnatura $(2, 1)$.

(*c*) I sottospazi isotropi massimali per $g$ certamente contengono il nucleo, e sono generati dal nucleo e da un sottospazio isotropo massimale per la forma ristretta ad un complementare del nucleo. Dunque un tale spazio ha dimensione al più 2, ed un esempio è lo spazio generato da $v$ e $3e_2 + e_4$.

(*d*) Poiché $g$ ristretta ad un complementare del nucleo non è definita (né positiva, né negativa), esistono piani iperbolici, ed un esempio è il sottospazio generato da $e_3$ ed $e_4$. D'altra parte non possono esistere due piani iperbolici ortogonali per $g$, poiché in tale caso la forma sarebbe non degenere di segnatura $(2, 2)$. □

**ESERCIZIO 6**. [Vecchio Ordinamento] *Si consideri la curva piana* $\mathscr{C}$*, di equazione affine*

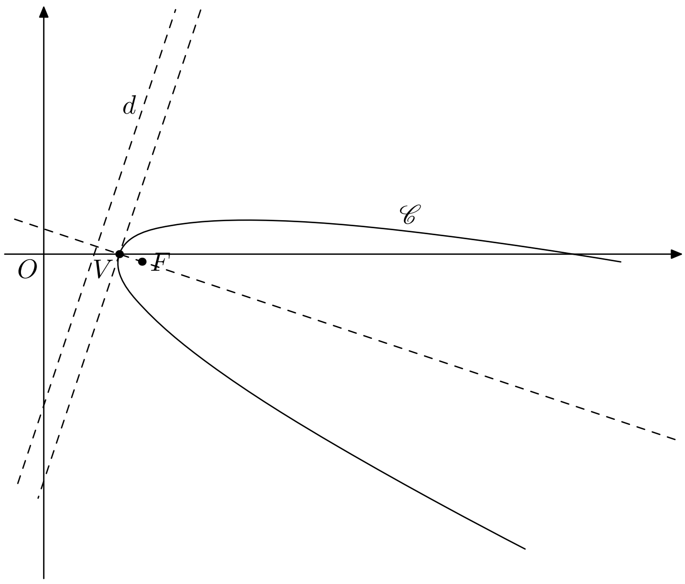
$$\mathscr{C} : x^2 + 6xy + 9y^2 - 14x - 2y + 13 = 0.$$

*Si dica se si tratta di una conica non-degenere e se ne determinino il tipo, una equazione canonica, la matrice dell'isometria che porta la conica in forma canonica, gli eventuali assi, asintoti, centro, vertice. Si tracci un disegno indicativo della conica.*

*Svolgimento.* Consideriamo il piano affine, immerso nel modo consueto nel piano proiettivo (retta impropria $x_0 = 0$) ed usiamo liberamente coordinate omogenee per i punti del piano.

La curva è definita da un'equazione di secondo grado e quindi si tratta di una conica e, precisamente, della conica di matrice
$$A = \begin{pmatrix} 13 & -7 & -1 \\ -7 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 9 \end{pmatrix},$$
che non è degenere, essendo $\det A = -400 \neq 0$, ed è una parabola perché $\det A' = 0$ ($A'$ è, come di consueto, la sottomatrice di $A$ che si ottiene cancellando la prima riga e la prima colonna).

Il punto di tangenza alla retta impropria, ovvero la direzione dell'asse, è il nucleo della matrice $A'$, ovvero il punto improprio $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$; la direzione ad esso perpendicolare è il punto $Q_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, e la polare di questo punto è l'asse della parabola, ovvero la retta $h : x + 3y = 1$.




L'intersezione tra l'asse $h$ e la parabola $\mathscr{C}$ contiene un unico punto proprio che è il vertice $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Conoscendo il punto $V$ e la direzione dell'asse, possiamo scrivere l'isometria che porta la matrice della conica in forma canonica, ovvero

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ 0 & -3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \end{pmatrix}, \qquad \text{e si ha} \quad {}^tXAX = 2\sqrt{10} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{10}/2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il fuoco si trova sull'asse, a distanza $\sqrt{\frac{1}{10}}$ dal vertice $V$, e la sua polare, la direttrice, deve essere una retta esterna alla parabola, ovvero una retta che non ha intersezioni reali con $\mathscr{C}$. Dunque $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{1}{10}} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/10 \\ -1/10 \end{pmatrix}$ e la direttrice è la retta $d : 3x - y - 2 = 0$. $\square$

## Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova scritta del 11 luglio 2003

**ESERCIZIO 1**. *Si considerino le due rette*

$$r_1 : \begin{cases} X - Y = 0 \\ Z = 2 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} X = 1 \\ Y + Z = 0 \end{cases}$$

*nello spazio euclideo reale di dimensione* 3.

($a$) *Mostrare che le due rette sono sghembe e calcolarne la distanza reciproca.*

($b$) *Trovare l'unica retta $n$ incidente sia $r_1$ che $r_2$ ed ortogonale ad entrambe. Trovare i punti $P_1 = r_1 \cap n$ e $P_2 = r_2 \cap n$.*

($c$) *Trovare l'unica retta $t$ di direzione $u = {}^t(0, 1, 2)$ ed incidente sia $r_1$ che $r_2$. Trovare i punti $Q_1 = r_1 \cap t$ e $Q_2 = r_2 \cap t$.*

($d$) *Calcolare il volume del tetraedro di vertici $P_1, P_2, Q_1, Q_2$ (può essere zero?) e l'area del triangolo di vertici $P_1, Q_1, Q_2$ (può essere zero?).*

*Svolgimento.* (a) Dalla matrice del sistema delle due rette $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (matrice incompleta di rango 3, completa di rango 4) si deduce che le due rette sono sghembe. Dalle equazioni cartesiane ricaviamo le equazioni parametriche per $r_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $r_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e calcoliamo la distanza tra le rette:

$$d(r_1, r_2) = \frac{\left| \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{|3|}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

($b$) Poiché le due rette sono sghembe, esiste un unico piano $\beta$ passante per l'origine e parallelo ad entrambe le rette; si può facilmente calcolare un vettore ortogonale a tale piano tramite il prodotto vettore di vettori direttori di $r_1$ ed $r_2$. Abbiamo già fatto il conto prima, e risulta per esempio $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La retta $n$ cercata si può calcolare come intersezione $\alpha_1 \cap \alpha_2$ di due piani, ove $\alpha_1$ è il piano contenente $r_1$ ed ortogonale al piano $\beta$ ed $\alpha_2$ è il piano contenente $r_2$ ed ortogonale al piano $\beta$. Per trovare $\alpha_1$ imponiamo al generico piano $\lambda(X - Y) + \mu(Z - 2) = 0$ (ovvero $\lambda X - \lambda Y + \mu Z - 2\mu = 0$) del fascio di asse $r_1$ d'essere ortogonale al vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, da cui la condizione $\begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, ed infine $\lambda = 1$, $\mu = 2$; quindi $\alpha_1$ ha equazione $X - Y + 2Z = 4$.

Analogamente per trovare $\alpha_2$ imponiamo al generico piano $\lambda(X - 1) + \mu(Y + Z) = 0$ (ovvero $\lambda X + \mu Y + \mu Z - \lambda = 0$) del fascio di asse $r_2$ d'essere ortogonale al vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, da cui la condizione $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, ed infine $\lambda = 2$, $\mu = 1$; quindi $\alpha_2$ ha equazione $2X + Y + Z = 2$. La retta $n$ è allora la retta di equazioni cartesiane $X + Y = 0$ e $X + Z = 2$. Intersecando con $r_1$ troviamo il punto $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, ed intersecando con $r_2$ troviamo il punto $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Essendo questi i due punti di minima distanza, possiamo anche controllare la distanza tra le due rette.

($c$) La retta cercata è l'intersezione del piano $\pi_1$ contenente $r_1$ e la cui giacitura contiene $u$ con il piano $\pi_2$ contenente $r_2$ e la cui giacitura contiene $u$ (infatti $u$ non è parallelo ad alcuna delle due rette date). Poi sarà $Q_1 = r_1 \cap \pi_2$ e $Q_2 = r_2 \cap \pi_1$.

Per trovare $\pi_1$ scriviamo il fascio di piani di asse $r_1$: $\lambda(X - Y) + \mu(Z - 2) = 0$ ed imponiamo che $u$ soddisfi all'equazione omogenea. Otteniamo la relazione $-\lambda + 2\mu = 0$ da cui possiamo scegliere il piano $\pi_1 : 2X - 2Y + Z - 2 = 0$. Intersecando con $r_2$ troviamo $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Per trovare $\pi_2$ scriviamo il fascio di piani di asse $r_2$: $\lambda(X-1)+\mu(Y+Z)=0$ ed imponiamo che $u$ soddisfi all'equazione omogenea. Otteniamo la relazione $\mu=0$ da cui possiamo scegliere il piano $\pi_2 : X-1=0$. Intersecando con $r_1$ troviamo $Q_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\2\end{smallmatrix}\right)$.

($d$) Di conseguenza il volume richiesto è $\frac{1}{6}|(P_2-P_1)\cdot((Q_1-P_1)\times(Q_2-P_1))| = \frac{3}{6}$ (non poteva essere 0 perché le rette sono sghembe, quindi i quattro punti, essendo distinti, non sono complanari) mentre l'area richiesta è $\frac{1}{2}\|(Q_1-P_1)\times(Q_2-P_1)\| = \frac{3}{2}$ (non poteva essere zero perché i tre punti non sono allineati). □

**ESERCIZIO 2**. *Si consideri l'endomorfismo $\pi$ di $\mathbb{R}^4$ definito da*

$$\pi\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\\X_4\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}X_1+X_3-X_4\\3X_2\\X_1+X_3-X_4\\-X_1-X_3+X_4\end{pmatrix}$$

($a$) *Si scriva la matrice $A$ di tale endomorfismo nel riferimento dato. Si determinino nucleo e immagine di $\pi$.*
($b$) *Mostrare che $\pi$ è una proiezione ortogonale su un piano.*
($c$) *Scrivere la matrice $S$ della simmetria ortogonale $\sigma$ avente stesso asse di $\pi$, e la matrice $S'$ della simmetria ortogonale $\sigma'$ avente come asse il nucleo di $\pi$,*
($d$) *Determinare i morfismi $\sigma\circ\pi$, $\sigma'\circ\pi$, $\pi\circ\sigma$, $\pi\circ\sigma'$. Sono tutti proiezioni ortogonali?*

*Svolgimento.* (a) La matrice richiesta è

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&3&0&0\\1&0&1&-1\\-1&0&-1&1\end{pmatrix}$$

che si vede subito essere di rango 2; l'immagine è generata dalle colonne di $A$, quindi $\operatorname{im}\pi = \langle e_2, e_1+e_3-e_4\rangle$; il nucleo ha dunque dimensione 2 e si vede facilmente essere $\ker\pi = \langle e_1-e_3, e_1+e_4\rangle$

($b$) Un facile calcolo mostra che $A^2=A$, da cui si deduce che $\pi$ è una proiezione; siccome poi la matrice $A$ è simmetrica, si deduce che $\pi$ è una proiezione ortogonale (si può anche facilmente verificare che l'asse $\operatorname{im}\pi$ e la direzione $\ker\pi$ sono ortogonali tra loro, verificando l'ortogonalità di ogni generatore dell'uno con tutti i generatori dell'altro sottospazio).

($c$) Siccome abbiamo che $\sigma'(v) = v-2\pi(v) = (1-2\pi)(v)$ risulta che $S' = \mathbb{I}_4-2A$. Inoltre abbiamo $\sigma=-\sigma'$, da cui $S=-S'$. Quindi:

$$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&0&2&-2\\0&-3&0&0\\2&0&-1&-2\\-2&0&-2&-1\end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad S' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&0&-2&2\\0&3&0&0\\-2&0&1&2\\2&0&2&1\end{pmatrix}.$$

($d$) Sfruttando che $\sigma=-\sigma'=2\pi-1$, possiamo calcolare $\sigma\circ\pi=(2\pi-1)\circ\pi = 2\pi^2-\pi = 2\pi-\pi=\pi$, e per lo stesso motivo $\pi\circ\sigma=\pi$ (in particolare $\sigma$ e $\pi$ commutano tra loro e la composizione dà $\pi$ che è una proiezione ortogonale). D'altro lato abbiamo $\sigma'\circ\pi = -\pi = \pi\circ\sigma'$, che quindi non è una proiezione (infatti $(-\pi)^2\neq-\pi$).

Alle stesse conclusioni si arrivava calcolando i prodotti di matrici $SA=A=AS$ e $S'A=-A=AS'$. □

**ESERCIZIO 3**. *Si consideri l'applicazione lineare $\phi:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix}5&0&-2&0\\2&7&-6&-8\\2&0&1&0\\1&2&-3&-1\end{pmatrix}$$

*rispetto alla base canonica.*

(a) *Si determini il polinomio caratteristico di $\phi$ e si dica se $\phi$ è invertibile.*

(b) *Si determinino gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori per $\phi$. Si determini inoltre il polinomio minimo di $\phi$ e si dica se $\phi$ è diagonalizzabile.*

(c) *Si determini la forma canonica di Jordan $J$ di $\phi$, ed una matrice invertibile $P$ tale che $P^{-1}AP = J$.*

*Svolgimento.* (a) Il polinomio caratteristico è $\det(A - x\mathbf{1}) = (x-3)^4$. Il termine noto di questo polinomio è $\det A = 3^4 \neq 0$ e quindi $\phi$ è invertibile.

(b) $\phi$ ha il solo autovalore 3 con molteplicità 4. Lo spazio di autovettori corrispondente è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $(A - 3\mathbf{1})x = 0$, ovvero $\ker(\phi - 3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\2\\0\\1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Si ha

$$A - 3\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & -8 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \qquad (A - 3\mathbf{1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (A - 3\mathbf{1})^3 = \mathbf{0};$$

e quindi il polinomio minimo di $\phi$ è $(x-3)^3$ e quindi l'endomorfismo non è diagonalizzabile.

(c) La matrice di Jordan, $J$, ha due blocchi perché lo spazio degli autovettori ha dimensione 2 ed (almeno) uno dei blocchi deve avere ordine 3 perché questo è il grado del polinomio minimo. Poiché $A$ ha ordine 4, deve essere

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice $P$ ha come colonne le coordinate dei vettori di un'opportuna base di autovettori generalizzati che andiamo a costruire. Poiché

$$e_1 \in \ker(\phi - 3)^3 \setminus \ker(\phi - 3)^2$$

possiamo scegliere i vettori $v_2, v_3, v_4$ dati da

$$v_4 = \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = (\phi - 3)v_4 = \begin{pmatrix} 2\\2\\2\\1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = (\phi - 3)^2 v_4 = \begin{pmatrix} 0\\-8\\0\\-4 \end{pmatrix};$$

ed infine possiamo predere come ultimo elemento della base un autovettore linearmente indipendente da $v_2$, ad esempio $v_1 = \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\0 \end{pmatrix}$. Concludendo possiamo scrivere

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -8 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

**ESERCIZIO 4**. *Nello spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$, si considerino le famiglie di sottovarietà lineari*

$$\pi_\lambda : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + (2+\lambda)x_3 = 0 \\ x_2 + \lambda x_4 = 2 \end{cases} \qquad r_\lambda : \begin{cases} x_1 - x_2 + (2\lambda+1)x_3 + (\lambda+1)x_4 = -\lambda - 1 \\ 2x_1 + 2\lambda x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - \lambda x_4 = \lambda \end{cases}$$

*al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(a) *Si determinino, al variare di $\lambda$ in $\mathbb{R}$, le dimensioni di $\pi_\lambda$ ed $r_\lambda$.*
(b) *Si dica per quali valori di $\lambda$ le sottovarietà $\pi_\lambda$ ed $r_\lambda$ sono incidenti, parallele oppure sghembe.*
(c) *Nel caso in cui $\lambda = 2$ si scrivano le equazioni della sottovarietà generata $\pi_\lambda \vee r_\lambda$.*

*Svolgimento.* (a) La matrice incompleta del sistema che definisce $\pi_\lambda$ ha rango 2, qualunque sia il valore di $\lambda$, come si deduce facilmente calcolando il minore estratto dalle prime due colonne. Quindi, per ogni valore di $\lambda$, $\pi_\lambda$ è una sottovarietà lineare di dimensione 2, ovvero un piano. La matrice incompleta del sistema che definisce $r_\lambda$ ha rango 3 se $2\lambda + 1 \neq 0$ e quindi, per tali valori $r_\lambda$ ha dimensione 1, ovvero è una retta. Per $\lambda = -\frac{1}{2}$, sia la matrice completa che quella incompleta vengono ad avere rango 2 e quindi $r_{-1/2}$ è un piano.

($b$) Studiamo l'intersezione $\pi_\lambda \cap r_\lambda$ ovvero le soluzioni del sistema

$$\pi_\lambda \cap r_\lambda : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + (2+\lambda)x_3 = 0 \\ x_2 + \lambda x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + (2\lambda+1)x_3 + (\lambda+1)x_4 = -\lambda - 1 \\ 2x_1 + 2\lambda x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - \lambda x_4 = \lambda \end{cases} .$$

Con operazioni elementari sulle righe del sistema, e supponendo $2\lambda + 1 \neq 0$, la matrice completa del sistema diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda+2 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\lambda^2 - \lambda - 6 \end{pmatrix};$$

e quindi la matrice incompleta ha sempre rango 4, mentre la matrice completa ha rango 5 a meno che non si annulli $2\lambda^2 - \lambda - 6 = (2\lambda + 3)(\lambda - 2)$. Dunque l'intersezione tra le due sottovarietà è vuota e le due sottovarietà sono sghembe se $\lambda \notin \{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 2\}$. Le due sottovarietà sono invece incidenti in un punto nei rimanenti casi e lasciamo al lettore la verifica di questa affermazione quando $\lambda = -\frac{1}{2}$.

($c$) Per $\lambda = 2$, si hanno le due sottovarietà

$$\pi_2 : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_4 = 2 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -3 \\ 2x_1 + 4x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_4 = 2 \end{cases}$$

che si intersecano nel punto $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed hanno come sottospazi direttori $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$, rispettivamente. Dunque, la sottovarietà generata, $\pi_2 \vee r_2$, passa per $P$ ed ha come sottospazio direttore la somma dei due sottospazi direttori. Quindi ha equazione cartesiana $\pi_2 \vee r_2 : 3x_1 - x_2 + 6x_3 + x_4 = 1$. □

**ESERCIZIO 5**. *Si consideri la forma bilineare $g$ associata alla forma quadratica*

$$Q(X) = X_1^2 - X_2^2 + X_3^2 - 3X_4^2 - 2X_1X_3 + 2X_1X_4 - 2X_3X_4 + 4X_2X_4.$$

($a$) *Si scriva la matrice $G$ di tale forma bilineare nel riferimento dato. Si determini se $g$ è degenere ed eventualmente se ne calcoli il nucleo.*
($b$) *Determinare una matrice invertibile $P$ tale che ${}^tPGP$ sia diagonale. Dire rango e segnatura di $g$.*
($c$) *Determinare tutti i sottospazi isotropi massimali per $g$.*
($d$) *È vero o falso che una forma bilineare su $\mathbb{R}^4$ avente sottospazi isotropi massimali di dimensione 3 ha stesso rango e stessa segnatura di $g$? È vero o falso che in tali spazi esistono infiniti piani iperbolici (cioè sottospazi di dimensione due in cui la forma ivi ristretta è non degenere e non definita)?*

*Svolgimento.* (a) La matrice $G$ richiesta è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

in cui si vede subito che vi sono due colonne proporzionali; dunque $\det G = 0$, la forma $g$ è degenere, e possiamo calcolarne il nucleo che è di dimensione 2 e generato dai vettori $v_1 = e_1 + e_3$ e $v_2 = e_1 - 2e_2 - e_4$.

($b$) Si tratta di trovare una base di $\mathbb{R}^4$ tale che i primi due vettori siano nel nucleo della forma $g$ e gli altri due siano una base ortogonale di un complementare qualsiasi. Si vede immediatamente dalla matrice che i vettori $e_1, e_2$ della base canonica sono non isotropi tra loro ortogonali; quindi scegliendo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

abbiamo che ${}^tPGP$ è matrice diagonale con i termini $0, 0, 1, -1$ ordinatamente sulla diagonale principale. Di conseguenza $g$ ha rango 2 e segnatura $(1, 1)$.

($c$) I sottospazi isotropi massimali per $g$ certamente contengono il nucleo, e sono generati dal nucleo e da un sottospazio isotropo massimale per la forma ristretta ad un complementare del nucleo. Dunque un tale spazio ha dimensione al più 3. Siccome la restrizione di $g$ al piano generato da $e_1$ ed $e_2$ dà luogo ad un piano iperbolico, in esso vi sono esattamente due sottospazi isotropi, e sono le due rette generate da $e_1 + e_2$ e da $e_1 - e_2$; quindi la forma $g$ ha solo due sottospazi isotropi massimali, ciascuno dei due di dimensione 3, che sono rispettivamente $\langle e_1 + e_3, e_1 - 2e_2 - e_4, e_1 + e_2\rangle$ e $\langle e_1 + e_3, e_1 - 2e_2 - e_4, e_1 - e_2\rangle$.

Alternativamente, si poteva osservare che nelle coordinate $Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix}$ definite da $PZ = X$, la forma $g$ si scrive $Z_3^2 - Z_4^2$, e quindi i sottospazi isotropi massimali sono quelli definiti dalle due equazioni $Z_3 \pm Z_4 = 0$; esplicitando le trasformazioni di coordinate si possono trovare le equazioni $X_1 - X_2 - X_3 + 3X_4 = 0$ e $X_1 + X_2 - X_3 - X_4 = 0$

($d$) No, anche una forma di rango 1 in $\mathbb{R}^4$ ammette sottospazi isotropi di dimensione 3 (esattamente il nucleo), e in questo caso non vi possono essere piani iperbolici (la forma dovrebbe avere rango almeno 2). Nel caso di $g$ invece, come abbiamo visto, esistono piani iperbolici, e ne esistono infiniti, come si vede facilmente: ogni complementare del nucleo è un piano iperbolico. □

**ESERCIZIO 6**. [Vecchio Ordinamento] *Si consideri la curva piana $\mathscr{C}$ di equazione affine*

$$\mathscr{C} : 6x^2 + 4xy + 9y^2 - 16x - 22y + 15 = 0.$$

*Si dica se si tratta di una conica non-degenere, se ne determinino il tipo, una equazione canonica, la trasformazione ortogonale di coordinate opportuna, gli eventuali assi, asintoti, centro e fuochi ed infine, si tracci uno schizzo della curva studiata.*

*Svolgimento.* Essendo un'equazione di secondo grado, si tratta della conica di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -8 & -11 \\ -8 & 6 & 2 \\ -11 & 2 & 9 \end{pmatrix},$$

che non è degenere, poiché $\det A = -200 \neq 0$, ed è un'ellisse poiché $\det A' = 50 > 0$ ($A'$ è la sottomatrice di $A$ che si ottiene cancellando la prima riga e la prima colonna). Si tratta di un'ellisse a punti reali perché la forma quadratica non è definita, come si può dedurre osservando che i minori diagonali sono 15, 26, $-200$.

Il centro $C$ ha coordinate affini $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Gli autovalori della sottomatrice $A'$ sono 5 e 10, ed i corrispondenti spazi di autovettori determinano le direzioni degli assi della conica, ovvero i punti impropri $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dunque gli assi dell'ellisse sono

$$h_1 : x + 2y - 3 = 0 \quad \text{(asse focale)}, \qquad h_2 : 2x - y - 1 = 0,$$

e la conica ha equazione canonica $\frac{5}{4}X^2 + \frac{5}{2}Y^2 = 1$.

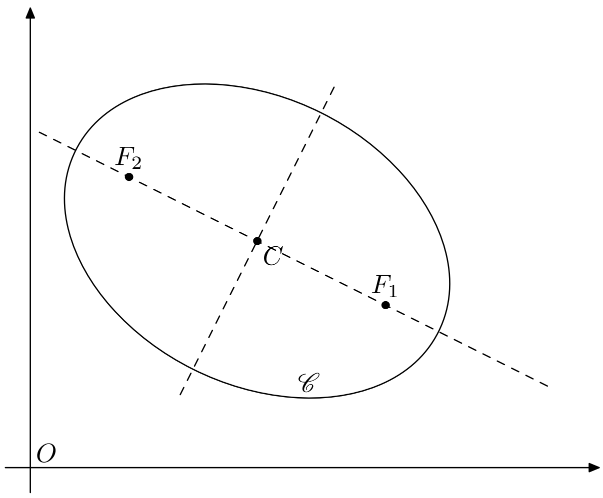
La trasformazione di coordinate che porta l'equazione in forma canonica è l'isometria di matrice

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix};$$

infatti $\frac{1}{4}{}^tXAX$ è la matrice associata all'equazione canonica.

I due fuochi reali si trovano sull'asse focale, a distanza $\delta = \sqrt{\frac{4}{5} - \frac{2}{5}}$ dal centro, e quindi sono i due punti

$$F_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \pm \frac{\sqrt{2}}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$




Qui sopra abbiamo tracciato uno schizzo della conica studiata. □

## Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova scritta del 5 settembre 2003

**ESERCIZIO 1**. *Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino il piano $\pi : x + y + 2z = 2$ ed i punti*

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

($a$) *Trovare i tre punti $A'$, $B'$ e $C'$, che si ottengono proiettando dal punto $P$ i punti $A$, $B$, e $C$, rispettivamente, sul piano $\pi$.*
($b$) *Si dica se le rette $B \vee C$ e $B' \vee C'$ possono essere sghembe e si determini, se esiste, il punto $Q$ di intersezione tra le rette.*
($c$) *Dati i tre punti $B$, $C$ e $Q$, si dica quale dei tre appartiene al segmento avente gli altri due come estremi. Si risponda alla stessa domanda per i punti $B'$, $C'$ e $Q$*
($d$) *Calcolare il maggiore tra i due volumi dei tetraedri di vertici $A, B, B', Q$ ed $A, C, C', Q$ rispettivamente.*

*Svolgimento.* (a) Il punto $A$ appartiene al piano $\pi$ e quindi coincide con la propria proiezione; ovvero $A' = A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il punto $B'$ si ottiene intersecando la retta $P \vee B$ col piano $\pi$, ovvero

$$(P \vee B) \cap \pi : \begin{cases} x = 0 \\ 2y + z = 6 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases} \qquad \text{e quindi} \qquad B' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{10}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Il punto $C'$ si ottiene intersecando la retta $P \vee C$ col piano $\pi$, ovvero

$$(P \vee C) \cap \pi : \begin{cases} y = 0 \\ 3x + z = 6 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases} \qquad \text{e quindi} \qquad C' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

($b$) Le rette $B \vee C$ e $B' \vee C'$ non possono essere sghembe, perché, per costruzione, sono contenute entrambe nel piano $P \vee B \vee C$. Le due rette hanno rispettivamente equazioni

$$B \vee C : \begin{cases} y + 2z = 6 \\ x - z = -2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad B' \vee C' : \begin{cases} y + 5z = 0 \\ x - 3z = 2 \end{cases};$$

la loro intersezione è il punto $Q = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}$.

($c$) Consideriamo il punto $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ed il vettore $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Si ha $Q = C + 5\overrightarrow{CB}$ e quindi il punto $B$ è contenuto nell'intervallo $CQ$. Poiché i punti $C'$, $B'$ e $Q$ sono le proiezioni da $P$ su $\pi$ dei punti $C$, $B$ e $Q$, rispettivamente, possiamo concludere che il punto $B'$ è contenuto nell'intervallo $C'Q$.

($d$) Data la posizione dei punti considerati nella risposta precedente, si ha che il tetraedro di vertici $A, B, B', Q$ è contenuto nel tetraedro di vertici $A, C, C', Q$. Dobbiamo calcolare il volume di quest'ultimo, ovvero

$$\tfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{AQ}\right| = \tfrac{1}{6}\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \tfrac{25}{3}$$

e ciò conclude la discussione. □

**ESERCIZIO 2**. *In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi*

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad e \qquad W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(*a*) *Si determinino* $\dim U$ *e* $\dim W$ *e si verifichi se* $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.
(*b*) *Si dica se è possibile proiettare ogni vettore di* $\mathbb{R}^4$ *su* $U$ *parallelamente al sottospazio* $W$ *e, in caso affermativo, si scriva la matrice della proiezione rispetto alla base canonica.*
(*c*) *Si indichino con* $\sigma$ *e* $\tau$*, rispettivamente, la simmetria di asse* $U$ *e parallela al sottospazio* $W$ *e la simmetria di asse* $W$*, parallela al sottospazio* $U$*. È vero o falso che* $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$*? Si scrivano le matrici di* $\sigma$*,* $\tau$ *e delle loro composizioni.*

*Svolgimento.* (a) Il sottospazio $U$ è generato da due vettori indipendenti e quindi $\dim U = 2$. Il sottospazio $W$ è generato da tre vettori che non sono linearmente indipendenti, perché il terzo è la differenza dei primi due. I primi due vettori sono indipendenti e quindi anche $\dim W = 2$. Dalle relazioni di Grassmann, possiamo concludere che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ se, e solo se, $U \cap W = \langle 0 \rangle$. Un vettore che stesse in tale intersezione, dovrebbe avere la seconda e la quarta coordinate entrambe nulle ed inoltre, dovrebbe essere del tipo $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 3\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ per stare in $U$ e del tipo $\begin{pmatrix} -2\beta \\ 0 \\ -3\beta \\ 0 \end{pmatrix}$ per stare in $W$. Affinché le due espressioni coincidano, deve aversi $\alpha = \beta = 0$ e quindi $U \cap W = \langle 0 \rangle$, ovvero $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.
(*b*) Poiché $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$, esiste la proiezione di $\mathbb{R}^4$ su $U$ parallelamente al sottospazio $W$. Indichiamo con $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ questa proiezione. Deve aversi

$$\pi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ove $\alpha$ e $\beta$ sono determinati dalla condizione che l'immagine appartenga ad $U$, ovvero soddisfi alle equazioni $\begin{cases} X_2 = 0 \\ 3X_1 - X_3 + X_4 = 0 \end{cases}$. Si determina così la matrice di $\pi$, ovvero

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -12 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(*c*) Si ha $\sigma = 2\pi - 1$ e $\tau = 1 - 2\pi$. Ricordando che $\pi^2 = \pi$, dalle uguaglianze precedenti si deduce $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma = -1$. Possiamo quindi concludere scrivendo la matrice di $\sigma$

$$S = 2A - 1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -9 & -8 & 4 & -4 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -18 & -24 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e osservando che la matrice di $\tau$ è $-S$. □

**ESERCIZIO 3**. *Si consideri l'applicazione lineare* $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$*, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & -2 & -2 & -4 \\ -5 & 0 & -5 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

*rispetto alla base canonica.*
(a) *Si determini il polinomio caratteristico di* $\phi$ *e si dica se* $\phi$ *è invertibile.*
(b) *Si determinino gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori per* $\phi$*. Si determini inoltre il polinomio minimo di* $\phi$ *e si dica se* $\phi$ *è diagonalizzabile.*
(c) *Si determini la forma canonica di Jordan* $J$ *di* $\phi$*, ed una matrice invertibile* $P$ *tale che* $P^{-1}AP = J$.

*Svolgimento.* (a) Il polinomio caratteristico è $\det(A - x\mathbf{1}) = x^4$. Il termine noto di questo polinomio è $\det A = 0$ e quindi $\phi$ non è invertibile.

(*b*) $\phi$ ha il solo autovalore 0 con molteplicità 4. Lo spazio di autovettori corrispondente è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $Ax = 0$, ovvero $\ker\phi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Si ha

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -15 & 0 & -15 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ed} \qquad A^3 = \mathbf{0};$$

quindi il polinomio minimo di $\phi$ è $x^3$ e l'endomorfismo non è diagonalizzabile.

(*c*) La matrice di Jordan, $J$, ha due blocchi perché lo spazio degli autovettori ha dimensione 2 ed (almeno) uno dei blocchi deve avere ordine 3 perché questo è il grado del polinomio minimo. Poiché $A$ ha ordine 4, deve essere

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $P$ ha come colonne le coordinate dei vettori di un'opportuna base di autovettori generalizzati che andiamo a costruire. Poiché

$$e_1 \in \ker\phi^3 \setminus \ker\phi^2$$

possiamo scegliere i vettori $v_2, v_3, v_4$ dati da

$$v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \phi(v_4) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \phi^2(v_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix};$$

ed infine possiamo predere come ultimo elemento della base un autovettore linearmente indipendente da $v_2$, ad esempio $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Concludendo possiamo scrivere

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 30 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -5 & 0 \\ 1 & -15 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

**ESERCIZIO 4.** *Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si considerino i piani*

$$\pi_1 : x + 2z = 0, \qquad e \qquad \pi_2 : y - 2z = 0.$$

(a) *Si scriva la matrice $A$, rispetto alla base canonica, della simmetria ortogonale $\phi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di asse $\pi_1$.*
(b) *Si scriva la matrice $B$, rispetto alla base canonica, della simmetria ortogonale $\phi_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di asse $\pi_2$.*
(c) *Si scriva la matrice dell'applicazione composta $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$ e si determini una retta $r$ di punti uniti per $\phi$.*
(d) *Si concluda che $\phi$ è una rotazione di asse $r$ e si determini (il coseno del)l'angolo di rotazione.*

*Svolgimento.* (a) Dato un vettore $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$, la simmetria di asse $\pi_1$, lascia invariata la componente di $v$ parallela al piano $\pi_1$, mentre cambia di segno la componente ortogonale a tale sottospazio. Il vettore $n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ genera il sottospazio ortogonale a $\pi_1$ e quindi possiamo scrivere

$$\phi_1(v) = v - 2\frac{v \cdot n_1}{n_1 \cdot n_1} n_1;$$

da cui si deduce che
$$\phi_1\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}-\frac{2x_1+4x_3}{5}\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 2\end{pmatrix};$$
e perciò la matrice cercata è
$$A_1=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4\\ 0 & 5 & 0\\ -4 & 0 & -3\end{pmatrix}.$$
$(b)$ In modo analogo, possiamo considerare il vettore $n_2=\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$, che genera il sottospazio ortogonale a $\pi_2$ e scrivere
$$\phi_2(v)=v-2\frac{v\cdot n_2}{n_2\cdot n_2}n_2;\qquad\text{ovvero}\qquad \phi_2\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}-\frac{2x_2-4x_3}{5}\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ -2\end{pmatrix}.$$
La matrice cercata è quindi
$$A_2=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 4 & -3\end{pmatrix}.$$
$(c)$ La matrice di $\phi$ si ottiene facendo il prodotto
$$A=A_2A_1=\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 15 & 0 & -20\\ -16 & 15 & -12\\ 12 & 20 & 9\end{pmatrix}$$
e una retta di punti uniti per $\phi$ è, per costruzione, la retta $\pi_1\cap\pi_2=\left\langle\begin{pmatrix} -2\\ 2\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle$, perchè i suoi punti sono uniti per entrambo le simmetrie che compongono $\phi$.

$(d)$ Le due applicazioni $\phi_1$ e $\phi_2$ sono isometrie e quindi tale è l'applicazione composta, che ha determinante 1. Questo sarebbe sufficiente per concludere che $\phi$ è una rotazione. Chi non conoscesse questo fatto, può verificare che la restrizione di $\phi$ al piano per l'origine, ortogonale all'asse $r$, è una rotazione di tale piano, fissando una base ortonormale del piano e scrivendo la matrice della restrizione di $\phi$ rispetto a tale base.

Per calcolare l'angolo di rotazione, $\vartheta$, consideriamo il vettore $w=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$, ortogonale all'asse, e la sua immagine $\phi(w)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5\\ -8\\ 6\end{pmatrix}$ ed osserviamo che
$$\cos\vartheta=\frac{w\cdot\phi(w)}{\|w\|\,\|\phi(w)\|}=\frac{7}{25}.$$
Tramite la funzione arccos si può così determinare l'angolo $\vartheta\in(-\pi,\pi]$, a meno del segno, che può essere fissato ad arbitrio, a seconda del modo in cui si orienti il piano ortogonale all'asse. □

**ESERCIZIO 5**. *Sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, si consideri la forma bilineare $g$, associata alla forma quadratica*
$$Q(X)=X_1^2+4X_1X_3-2X_1X_4+3X_2^2+6X_2X_4+4X_3^2-4X_3X_4+X_4^2.$$
- $(a)$ *Si scriva la matrice $G$ di tale forma bilineare rispetto alla base canonica. Si verifichi se $g$ è degenere e si determini l'eventuale nucleo, $N$.*
- $(b)$ *Determinare una matrice invertibile $P$ ed una matrice diagonale $\Delta$ tali che ${}^tPGP=\Delta$. Dire rango e segnatura di $g$.*
- $(c)$ *Determinare tutti i sottospazi isotropi massimali per $g$.*
- $(d)$ *Sia $W$ un sottospazio complementare al nucleo di $g$ e si indichi con $\pi:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ la proiezione su $W$, parallelamente al nucleo $N$. È vero o falso che, per ogni coppia di vettori $x,y\in\mathbb{R}^4$ si ha $g(x,y)=g(\pi(x),\pi(y))$?*

*Svolgimento.* (a) La matrice richiesta è

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

e si vede che vi sono due colonne proporzionali; dunque $\det G = 0$, la forma $g$ è degenere. Possiamo calcolarne il nucleo, $N$, che ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $n = 2e_1 - e_3$.

$(b)$ Si tratta di trovare una base di $\mathbb{R}^4$ in cui il primo vettore generi il nucleo della forma $g$ e gli altri tre siano una base ortogonale di un complementare qualsiasi di $N$. Il sottospazio $W = \langle e_2, e_3, e_4 \rangle$ è un complementare di $N$ e la matrice della restrizione di $g$ a $W$ è la sottomatrice che si ottiene da $G$ cancellando la prima riga e la prima colonna. Da ciò si vede che $e_2$ ed $e_3$ sono ortogonali tra loro e non isotropi. Il vettore $2e_2 - e_3 - 2e_4$ è un generatore del sottospazio $\langle e_2, e_3 \rangle^\perp \cap W$, e $g(2e_2 - e_3 - 2e_4, 2e_2 - e_3 - 2e_4) = -12$. Possiamo quindi scrivere

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix},$$

e si ha ${}^tPGP = \Delta$. Di conseguenza $g$ ha rango 3 e segnatura $(2, 1)$.

$(c)$ I sottospazi isotropi massimali per $g$ certamente contengono il nucleo, e sono generati dal nucleo e da un sottospazio isotropo massimale per la forma ristretta a $W$. La restrizione di $g$ a $W$ ha sottospazi isotropi massimali di dimensione 1, generati dai vettori isotropi, ovvero dai vettori (non nulli) appartenenti all'insieme

$$C = \left\{ x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 \;\middle|\; 3x_2^2 + 6x_2x_4 + 4x_3^2 - 4x_3x_4 + x_4^2 = 0 \right\}.$$

Si conclude che vi sono infiniti sottospazi isotropi massimali, tutti del tipo $\langle n, u \rangle$, al variare del vettore $u$ in $C \setminus \{0\}$.

$(d)$ Per definizione, dato un vettore $x$ in $\mathbb{R}^4$, si ha $\pi(x) = x - \alpha n$, ove la costante $\alpha$ è determinata in modo che $\pi(x)$ appartenga a $W$. Dunque, dati $x, y$ in $\mathbb{R}^4$, si ha

$$g(\pi(x), \pi(y)) = g(x - \alpha n, y - \beta n) = g(x, y) + \alpha g(n, y) + \beta g(x, n) + \alpha\beta g(n, n) = g(x, y)$$

perché per ogni vettore $n$ del nucleo, si ha $g(v, n) = 0$ qualunque sia il vettore $v \in \mathbb{R}^4$. □

**ESERCIZIO 6**. [Vecchio Ordinamento] *Si consideri la curva piana $\mathscr{C}$ di equazione affine*

$$\mathscr{C} : x^2 - 3xy + y^2 + 6x - 9y - 1 = 0.$$

*Si dica se si tratta di una conica non-degenere, se ne determinino il tipo, una equazione canonica, la trasformazione ortogonale di coordinate opportuna, gli eventuali assi, asintoti, centro e fuochi ed infine, si tracci uno schizzo della curva studiata.*

*Svolgimento.* Essendo un'equazione di secondo grado, si tratta della conica di matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -9 \\ 6 & 2 & -3 \\ -9 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

che non è degenere, poiché $\det A = 100 \neq 0$, ed è un'iperbole poiché $\det A' = -5 < 0$ ($A'$ è la sottomatrice di $A$ che si ottiene cancellando la prima riga e la prima colonna).

Il centro $C$ ha coordinate affini $C = \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Gli autovalori della sottomatrice $A'$ sono 5 e $-1$, ed i corrispondenti spazi di autovettori determinano le direzioni degli assi della conica, ovvero i punti impropri $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dunque gli assi dell'iperbole sono

$$h_1 : x + y + 3 = 0 \quad \text{(asse focale)}, \qquad h_2 : x - y + 3 = 0,$$

e la conica ha equazione canonica $\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{20} = 1$.

La trasformazione di coordinate che porta l'equazione in forma canonica è l'isometria di matrice

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix};$$

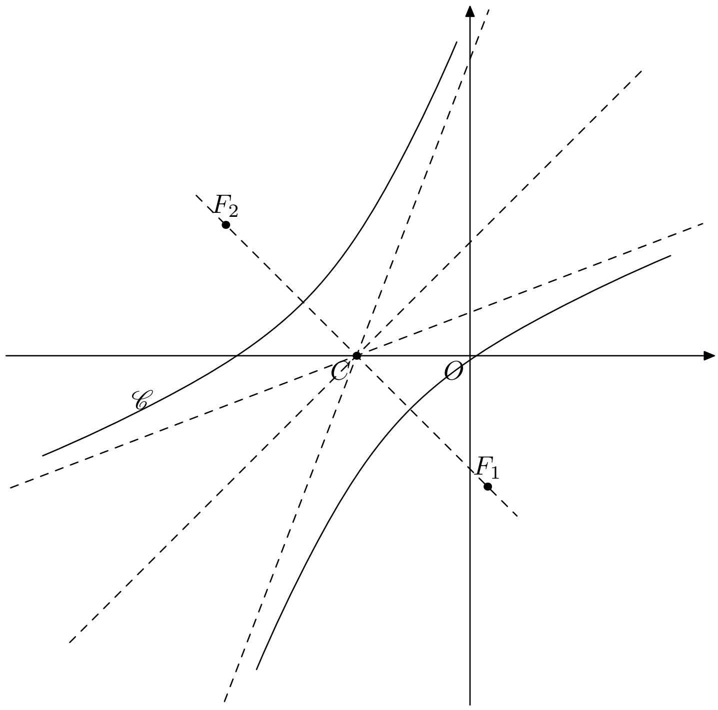
infatti $\frac{1}{20}{}^tXAX$ è la matrice associata all'equazione canonica.

Gli asintoti sono le due rette che congiungono il centro con i punti di intersezione tra la conica e la retta impropria. Sono dunque le due rette

$$a_1 : 2x + (3+\sqrt{5})y + 6 = 0,$$
$$a_2 : 2x + (3-\sqrt{5})y + 6 = 0.$$

I due fuochi reali si trovano sull'asse focale, a distanza $\delta = \sqrt{4+20} = 2\sqrt{6}$ dal centro, e quindi sono i due punti

$$F_{1,2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \pm 2\sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$




Qui sopra abbiamo tracciato uno schizzo della conica studiata. □

## Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova scritta del 22 settembre 2003

**ESERCIZIO 1**. *Nello spazio euclideo di dimensione* 4*, si consideri il sottospazio* $V$ *generato dai due vettori*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$(a)$ *Si determinino delle equazioni cartesiane per* $V$ *e una sua base ortogonale.*
$(b)$ *Si determinino delle equazioni cartesiane e una base ortogonale per lo spazio* $V^\perp$ *ortogonale di* $V$*.*
$(c)$ *Si determini la matrice nella base canonica della proiezione di asse* $V$ *e di direzione* $V^\perp$*.*
$(d)$ *Si determini la matrice nella base canonica della simmetria di asse* $V$ *e di direzione* $V^\perp$*.*

*Svolgimento.* (a) Delle equazioni ortogonali per $V$ si possono ottenere dalla condizione

$$\text{rango} \begin{pmatrix} X_1 & 2 & 1 \\ X_2 & 0 & 3 \\ X_3 & 3 & 0 \\ X_4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \leq 2, \quad \text{e dunque} \begin{cases} 2X_1 - X_3 - X_4 = 0 \\ 2X_2 + X_3 - 3X_4 = 0 \end{cases}$$

(abbiamo annullato i minori contenenti le ultime due righe; sapevamo già di dover ottenere due equazioni, poiché $v_1$ e $v_2$ sono indipendenti). Per ottenere una base ortogonale basta sostituire $v_2$ con la differenza tra lui stesso e la sua proiezione ortogonale lungo $v_1$, dunque

$$v_2' = v_2 - \frac{v_1 \cdot v_2}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{4}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 21 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

e quindi $u_1 = v_1$ e $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sono ora base ortogonale di $V$.

$(b)$ Le equazioni per $V^\perp$ si ottengono dalle condizioni $X \cdot v_1 = 0$ e $X \cdot v_2 = 0$, e dunque abbiamo

$$\begin{cases} 2X_1 + 3X_3 + X_4 = 0 \\ X_1 + 3X_2 + 2X_4 = 0. \end{cases}$$

Per trovare una base ortogonale scegliamo due generatori, per esempio $w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e poi togliamo a $w_2$ la sua proiezione ortogonale lungo $w_1$:

$$w_2' = w_2 - \frac{w_1 \cdot w_2}{w_1 \cdot w_1} w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{4}{14} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ -3 \\ 21 \end{pmatrix}$$

e quindi $z_1 = w_1$ e $z_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ sono una base ortogonale richiesta

$(c)$ La proiezione $\pi$ richiesta si ottiene associando ad un generico vettore $X$ la somma delle sue componenti ortogonali lungo $V$, e quindi

$$\pi \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \frac{X \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{X \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 = \frac{2X_1+3X_3+X_4}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{X_1+7X_2-2X_3+4X_4}{70} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3X_1+X_2+4X_3+2X_4 \\ X_1+7X_2-2X_3+4X_4 \\ 4X_1-2X_2+7X_3+X_4 \\ 2X_1+4X_2+X_3+3X_4 \end{pmatrix}$$

da cui leggiamo la matrice $P = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

($d$) La proiezione $\sigma$ richiesta si ottiene associando ad un generico vettore $X$ la differenza tra la sua proiezione ortogonale lungo $V$ e la sua proiezione ortogonale lungo $V^{\perp}$; ma ricordando la relazione con la proiezione sopra calcolata abbiamo $\sigma = 2\pi - 1$ possiamo calcolare subito la matrice $S = 2P - 1$ (notiamo che sono matrici simmetriche, trattandosi di simmetrie e proiezioni ortogonali). □

**ESERCIZIO 2**. *Si considerino le tre rette*

$$r_1 : \begin{cases} 2X - Y = -3 \\ 2X - Z = -1 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} X - 2Y = -13 \\ X - 2Y + Z = -17 \end{cases} \qquad t : \begin{cases} 7X - Y = -13 \\ X + Z = -5 \end{cases}$$

*nello spazio euclideo reale di dimensione* 3.

($a$) *Mostrare che le due rette $r_1$ ed $r_2$ sono sghembe e calcolarne la distanza reciproca.*
($b$) *Trovare i punti $P_1 \in r_1$ e $P_2 \in r_2$ di minima distanza.*
($c$) *Mostrare che la retta $t$ interseca sia $r_1$ che $r_2$ e trovare i punti $Q_1 = r_1 \cap t$ e $Q_2 = r_2 \cap t$.*
($d$) *Calcolare il volume del tetraedro di vertici $P_1, P_2, Q_1, Q_2$ e l'area del triangolo di vertici $P_1, Q_1, Q_2$.*

*Svolgimento.* (a) Dalla matrice del sistema delle due rette $r_1$ ed $r_2$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 13 \\ 1 & 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ (matrice incompleta di rango 3, completa di rango 4) si deduce che le due rette sono sghembe. Dalle equazioni cartesiane ricaviamo le equazioni parametriche per $r_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$ e $r_2 : \begin{pmatrix} -13 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ e calcoliamo la distanza tra le rette:

$$d(r_1, r_2) = \frac{|\det \begin{pmatrix} 13 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}|}{\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \|} = \frac{|-29|}{\| \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \|} = \frac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29}.$$

($b$) Poiché le due rette sono sghembe, i punti di minima distanza sono unici e si possono trovare imponendo al vettore differenza $\begin{pmatrix} \lambda \\ 3+2\lambda \\ 1+2\lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -13+2\mu \\ \mu \\ -4 \end{pmatrix}$ tra un generico punto di $r_1$ e un generico punto di $r_2$ d'essere ortogonale ai vettori direttori delle due rette; troviamo due equazioni dalle quali si ricavano i valori $\lambda = -1$ e $\mu = 5$. I punti richiesti sono allora $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $P_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

($c$) Risolvendo i sistemi troviamo che $Q_1 = r_1 \cap t = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ e $Q_2 = r_2 \cap t = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

($d$) Di conseguenza il volume richiesto è $\frac{1}{6}|(P_2 - P_1) \cdot ((Q_1 - P_1) \times (Q_2 - P_1))| = \frac{29}{6}$ mentre l'area richiesta è $\frac{1}{2}\|(Q_1 - P_1) \times (Q_2 - P_1)\| = \sqrt{\frac{145}{2}}$. □

**ESERCIZIO 3**. *Si consideri l'endomorfismo $\phi$ di $\mathbb{R}^4$ di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

*nella base canonica.*

(a) *Si determini il polinomio caratteristico di $\phi$ e si dica se $\phi$ è invertibile.*
(b) *Si determinino gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori per $\phi$.*
(c) *Si determini il polinomio minimo di $\phi$ e si dica se $\phi$ è diagonalizzabile.*
(d) *Si determinino la forma canonica di Jordan $J$ di $\phi$ ed una matrice invertibile $P$ tale che $P^{-1}AP = J$.*

*Svolgimento.* (a) Il polinomio caratteristico è $(x-3)^2(x+3)^2$, e il determinante di $A$ è $(-3)^2 3^2 = 81 \neq 0$, per cui l'endomorfismo $\phi$ è invertibile.

$(b)$ Gli autovalori di $\phi$ sono 3 e $-3$ di molteplicità due (entrambi). La matrice $A-3\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ ha rango 3 (si osservi il minore ottenuto cancellando prima riga e prima colonna), quindi l'autospazio ha dimensione 1, ed è generato da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La matrice $A+3\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ha rango 3 (si osservi il minore ottenuto cancellando ultima riga e ultima colonna), quindi l'autospazio ha dimensione 1, ed è generato da $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$.

$(c)$ Poiché entrambi gli autovalori hanno autospazi di dimensione 1, mentre le molteplicità sono 2 per entrambi, il polinomio minimo dev'essere uguale al polinomio caratteristico. La matrice non è diagonalizzabile (molteplicità e nullità non coincidono).

$(d)$ Da quanto detto sopra è chiaro che $J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ e per trovare la matrice $P$ di cambiamento di base scegliamo $v_2 \in \ker(\phi-3\mathbb{I})^2 \setminus \ker(\phi-3\mathbb{I})$ e $v_1 = (\phi-3\mathbb{I})v_2$; poiché $(A-3\mathbb{I})^2$ ha la prima colonna nulla, possiamo scegliere $v_2 = e_1$, e dunque $v_1 = e_1 - e_2$. Analogamente scegliamo $v_4 \in \ker(\phi+3\mathbb{I})^2 \setminus \ker(\phi+3\mathbb{I})$ e $v_3 = (\phi+3\mathbb{I})v_4$; poiché $(A+3\mathbb{I})^2 = \begin{pmatrix} 48 & 2 & 12 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -2 & 24 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ possiamo scegliere $v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 18 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e dunque $v_3 = (\phi+3\mathbb{I})v_4 = \begin{pmatrix} 12 \\ -36 \\ 24 \\ -72 \end{pmatrix}$. Dunque una matrice richiesta è $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 12 & -1 \\ 0 & 0 & -36 & 18 \\ -12 & 0 & 24 & 1 \\ 0 & 0 & -72 & 0 \end{pmatrix}$. □

**ESERCIZIO 4.** *Si consideri la forma bilineare $g$ associata alla forma quadratica*

$$Q(X) = X_1^2 + 2X_2^2 - 3X_3^2 + 2X_1X_2 - 2X_1X_4 - 2X_2X_3 - 2X_2X_4 + 4X_3X_4.$$

(*a*) *Si scriva la matrice $G$ di tale forma bilineare nel riferimento dato. Si determini se $g$ è degenere ed eventualmente se ne calcoli il nucleo.*
(*b*) *Determinare una matrice invertibile $P$ tale che ${}^tPGP$ sia diagonale. Dire rango e segnatura di $g$.*
(*c*) *Determinare la dimensione dei sottospazi isotropi massimali per $g$, e dare un esempio di un tale sottospazio.*
(*d*) *È vero o falso che in $\mathbb{R}^4$ dotato della forma $g$ esistono infiniti piani iperbolici (cioè sottospazi di dimensione due in cui la forma ivi ristretta è non degenere e non definita)?*

*Svolgimento.* (a) La matrice $G$ richiesta è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

e si può calcolare facilmente $\det G = 0$, la forma $g$ è dunque degenere, e possiamo calcolarne il nucleo che è di dimensione 1 (poiché la matrice ha rango 3) e generato dal vettore $v = e_1 + e_2 + e_3 + 2e_4$.

$(b)$ Si tratta di trovare una base di $\mathbb{R}^4$ tale che il primo vettore sia nel nucleo della forma $g$ e gli altri tre siano una base ortogonale di un complementare qualsiasi. Si vede immediatamente dalla matrice che i vettori $e_1, e_3$ della base canonica sono non isotropi tra loro ortogonali; quindi basta scegliere un vettore ortogonale ad entrambi e non appartenente al nucleo, per esempio $w = 3e_1 - 3e_2 + e_3$; ponendo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

abbiamo che ${}^tPGP$ è matrice diagonale con i termini $0, 1, -3, 12 = g(w, w)$ ordinatamente sulla diagonale principale. Di conseguenza $g$ ha rango 3 e segnatura $(2, 1)$.

($c$) I sottospazi isotropi massimali per $g$ certamente contengono il nucleo, e sono generati dal nucleo e da un sottospazio isotropo massimale per la forma ristretta ad un complementare del nucleo. Dunque un tale spazio ha dimensione al più 2. Siccome la restrizione di $g$ allo spazio generato da $e_1$, $e_3$ e $w$ è forma non degenere di segnatura $(2, 1)$, essa dà luogo a sottospazi isotropi di dimensione 1, per esempio quello generato da $\sqrt{3}e_1 + e_3$; di conseguenza $\langle v, \sqrt{3}e_1 + e_3\rangle$ è un sottospazio isotropo massimale per $g$.

($d$) Sì, poiché la restrizione di $g$ allo spazio generato da $e_1$, $e_3$ e $w$ è forma non definita, essa contiene piani iperbolici; ve ne sono certamente infiniti, perché ad esempio ogni piano generato da $e_3$ e da una qualsiasi combinazione lineare non nulla di $e_1$ con $w$ è iperbolico (la forma ivi ristretta non è degenere, e non può essere definita, né positiva né negativa, poiché $g$ ha valore negativo su $e_3$ e positivo sull'altro generatore). □

**ESERCIZIO 5**. *Si considerino le due famiglie di sottovarietà lineari*

$$\pi_\lambda : \begin{cases} X_1 + \lambda X_2 + (1-\lambda)X_4 - 1 = 0 \\ \lambda X_2 + (1-\lambda)X_3 + \lambda X_4 - 1 - \lambda = 0 \end{cases} \qquad \sigma_\lambda : \begin{cases} X_1 + (2\lambda-1)X_2 - \lambda = 0 \\ \lambda X_1 + (1-\lambda)X_3 - \lambda X_4 + 2\lambda - 1 = 0 \end{cases}$$

*dello spazio affine reale di dimensione* 4.

($a$) *Si verifichi che $\pi_\lambda$ e $\sigma_\lambda$ sono piani per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.*

($b$) *Si studi la funzione che ad ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ associa la dimensione di $\pi_\lambda \cap \sigma_\lambda$.*

($c$) *Per i valori di $\lambda$ per cui $\pi_\lambda \cap \sigma_\lambda$ è una retta, determinare questa retta e la più piccola sottovarietà lineare contenente sia $\pi_\lambda$ che $\sigma_\lambda$.*

($d$) *Esistono valori di $\lambda$ per cui $\pi_\lambda$ e $\sigma_\lambda$ sono paralleli?*

*Svolgimento.* ($a$) Dalle matrici incomplete dei due sistemi

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda & 1-\lambda & \lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda-1 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 1-\lambda & -\lambda \end{pmatrix}$$

vediamo che il rango è sempre due, e quindi le equazioni definiscono sempre dei piani, per qualsiasi valore di $\lambda$ (basta vedere che i minori di ordine due non si annullano tutti per uno stesso valore del parametro).

($b$) Con un passo di riduzione della matrice completa del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & \lambda & 1-\lambda & \lambda & -1-\lambda \\ 1 & 2\lambda-1 & 0 & 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 & 1-\lambda & -\lambda & 2\lambda-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV-\lambda I]{III-I} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & \lambda & 1-\lambda & \lambda & -1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & -\lambda^2 & 1-\lambda & \lambda^2-2\lambda & 3\lambda-1 \end{pmatrix}$$

possiamo vedere che la matrice incompleta ha determinante $2\lambda(\lambda-1)^3$; quindi il suo rango è 4 e l'intersezione dei piani è un unico punto se $\lambda \neq 0, 1$. Per $\lambda = 0$ otteniamo il sistema $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ che ha matrice completa ed incompleta di rango entrambe tre; quindi l'intersezione $\pi_0 \cap \sigma_0$ è una retta. Per $\lambda = 1$ otteniamo il sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ che ha matrice completa ed incompleta di rango entrambe due; quindi i due piani $\pi_1$ e $\sigma_1$ coincidono e l'intersezione è un piano.

Pertanto la funzione richiesta è nulla per $\lambda \neq 0, 1$, e vale 1 per $\lambda = 0$ e 2 per $\lambda = 1$.

($c$) Abbiamo visto che per $\lambda = 0$ l'intersezione $\pi_0 \cap \sigma_0$ è una retta, e dal sistema ridotto prima scritto troviamo subito le (tre) equazioni $X_1 + X_4 - 1 = X_3 - 1 = X_2 + X_4 - 1 = 0$; osservando il sistema originale (non quello ridotto!) per $\lambda = 0$ possiamo vedere subito che la varietà di dimensione tre di equazione $X_3 - 1 = 0$ contiene entrambi i piani, e dunque è la sottovarietà richiesta.

($d$) No, tali valori non esistono: avremmo dovuto incontrare dei casi in cui il sistema fosse incompatibile, con matrice completa di rango tre e incompleta di rango due.

□

**ESERCIZIO 6**. [Vecchio ordinamento] *Studiare la conica $\mathscr{C}$ di equazione*

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y + 4 = 0 \ .$$

*In particolare determinare se è degenere, qual è il suo tipo, una equazione canonica e la opportuna trasformazione di coordinate, gli eventuali assi, asintoti, centro, fuochi. Se ne tracci infine un disegno approssimativo.*

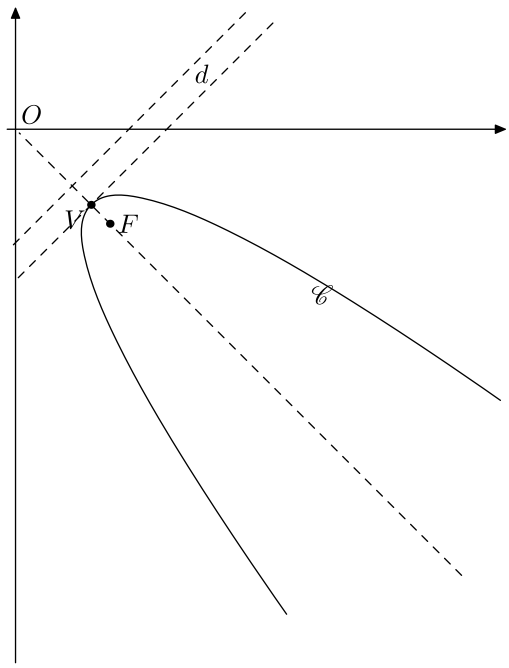
*Svolgimento.* La matrice simmetrica relativa alla conica $\mathscr{C}$ è $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Poiché il determinante $\det A = -4 \neq 0$ si tratta di una conica non degenere, e poiché $\det A_\infty = 0$ ($\det A_\infty$ è la sottomatrice quadrata di $A$ che si ottiene cancellando prima riga e prima colonna) si tratta di una parabola.

Si calcola subito il punto improprio della parabola $P_\infty = \mathscr{C} \cap r_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ($r_\infty$ è la usuale retta impropria), e la direzione ortogonale $P_\infty^\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. L'asse $a$ della parabola è la retta polare di $P_\infty^\perp$ e dunque ha equazione $x + y = 0$, e il vertice della parabola è l'intersezione $V = \mathscr{C} \cap a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Per trovare l'equazione canonica della parabola osserviamo che $\mathrm{tr} A_\infty = 2$; quindi il parametro della parabola è $\sqrt{2}$, l'equazione canonica è $2Y - \sqrt{2}X = 0$, e la trasformazione di coordinate che porta in forma canonica è data dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ (si usano le coordinate del vertice e gli autovettori normalizzati di $A_\infty$).

Per trovare il fuoco e la direttrice, ricordiamo che il fuoco si trova sull'asse a distanza $\frac{1}{2a} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ dal vertice e che la sua retta polare (la direttrice appunto) non interseca la parabola in punti reali. Troviamo allora $F = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -5/4 \end{pmatrix}$ e l'equazione della direttrice è quindi $2x - 2y - 3 = 0$.

Un disegno approssimativo della conica in questione è qui tracciato:




□