Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova di accertamento del 11 febbraio 2004 – Compito **A**

ESERCIZIO 1. *Si indichino con $n_1, n_2, \dots, n_6$ le cifre del numero di matricola e si considerino i tre punti, P, Q, R, dello Spazio Euclideo tridimensionale di coordinate*

$$P = \begin{pmatrix} n_2 \\ 0 \\ n_1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ n_1-1 \\ n_4 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} n_1-2 \\ n_6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si verifichi che i tre punti non sono allineati e si determini l'area del triangolo PQR.*

(b) *Si considerino i punti $R' = 2R - P$ e $Q' = 3Q - 2P$ (coordinate baricentriche). Detto X il punto $X = \lambda R' + (1-\lambda)Q'$, si dica per quali valori di λ in $\mathbb{R}$ il poligono convesso*

$$S = \{\, \alpha P + \beta Q + \gamma R + \delta X \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in [0,1],\ \alpha + \beta + \gamma + \delta = 1 \,\}$$

è un triangolo oppure un quadrilatero.

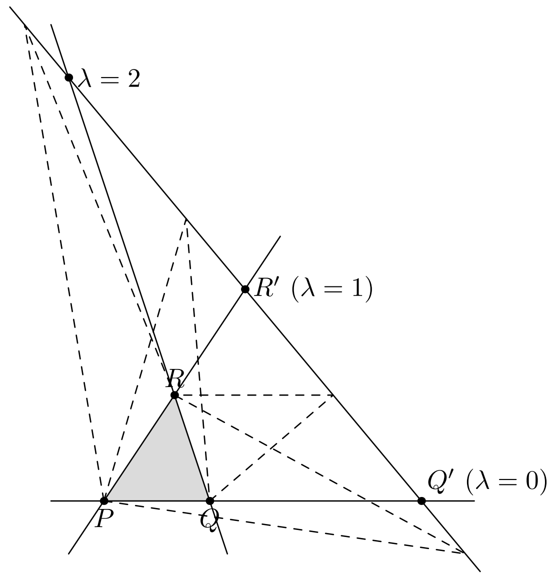
(c) *Si determini l'area del poligono S in funzione del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ e si tracci un grafico indicativo di tale funzione.*

(d) *Si dica se esiste un valore di λ per cui l'area di S è minima e si determini l'eventuale valore dell'area. Per l'eventuale punto X per cui l'area di S è minima, si calcoli il volume del solido che si ottiene congiungendo tutti i punti di S con l'origine O.*

Svolgimento. (a) I tre punti non sono allineati perché i tre vettori $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ e $\overrightarrow{OR}$ non sono complanari. Infatti si ha

$$\det \begin{pmatrix} n_2 & 0 & n_1 - 2 \\ 0 & n_1 - 1 & n_6 \\ n_1 & n_4 & 0 \end{pmatrix} = -n_2 n_4 n_6 - n_1(n_1-1)(n_1-2)$$

che, essendo le cifre del numero di matricola non negative, non può essere uguale a 0 se $n_1 \notin \{0,1,2\}$. L'area del triangolo PQR è uguale ad $A = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\|$.



(b) I punti R' e Q' stanno rispettivamente nei prolungamenti dei lati PR e PQ ed X varia nella retta per Q' ed R'; quindi i punti in questione sono tutti contenuti nel piano per P, Q ed R e ci conviene perciò lavorare con le coordinate baricentriche relative ai punti P, Q ed R. Si ha quindi

$$\begin{aligned} X = \lambda(2R - P) + (1-\lambda)(3Q - 2P) = \\ = (\lambda - 2)P + 3(1-\lambda)Q + 2\lambda R, \end{aligned}$$

al variare di λ in $\mathbb{R}$. In base ai segni dei coefficienti dei punti P, Q, R, possiamo decidere la posizione di X e quindi affermare che S è uguale al

- triangolo PXR, se $\lambda \le 0$;
- quadrilatero $PQXR$, se $0 < \lambda < 1$;
- triangolo PQX, se $1 \le \lambda \le 2$;
- quadrilatero $PQRX$, se $\lambda > 2$.

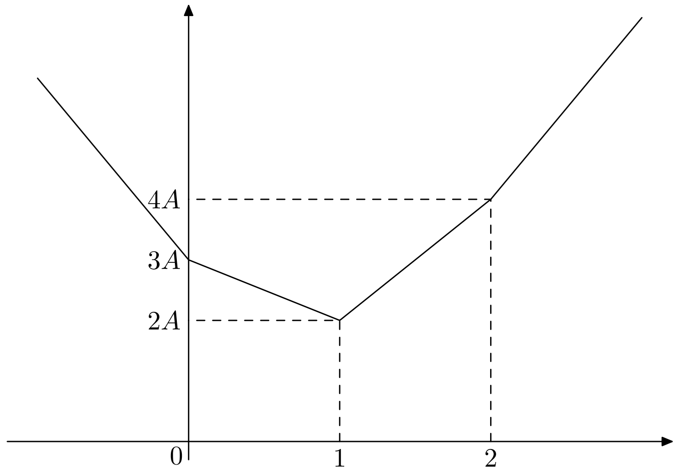
(c) Per calcolare le aree dei poligoni, oltre ai vettori $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ ci servono i vettori

$$\overrightarrow{PX} = 3(1-\lambda)\overrightarrow{PQ} + 2\lambda\overrightarrow{PR} \qquad \text{e} \qquad \overrightarrow{QX} = (\lambda - 2)\overrightarrow{QP} + 2\lambda\overrightarrow{QR}.$$

Si ha quindi

- $A(\lambda) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PX}\| = 3(1-\lambda)A$, se $\lambda \leq 0$;
- $A(\lambda) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\| + \frac{1}{2}\|\overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{QX}\| = A + (2-\lambda)A$, se $0 < \lambda < 1$;
- $A(\lambda) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PX}\| = 2\lambda A$, se $1 \leq \lambda \leq 2$;
- $A(\lambda) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\| + \frac{1}{2}\|\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PX}\| = A + 3(\lambda - 1)A$, se $\lambda > 2$.

Uno schizzo del grafico di $A(\lambda)$ è riprodotto qui a fianco.



(d) Il punto di minimo si ha quando $\lambda = 1$ ed X coincide con il punto R'.

Dunque il solido cercato è il tetraedro di vertici $OPQR'$ il cui volume è uguale a $\frac{1}{6}\|(\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}) \cdot \overrightarrow{OR'}\|$. □

ESERCIZIO 2. *Si consideri l'applicazione lineare $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.
(a) Si verifichi che $\pi(\pi(v)) = \pi(v)$ per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$.
(b) Si determinino i sottospazi $U = \ker\pi$ e $W = \mathrm{im}\pi$ e si mostri che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.
(c) Si scriva la matrice della proiezione su U parallelamente a W.
(d) Si scriva la matrice della simmetria di asse U e direzione W.

Svolgimento. (a) Facendo il prodotto, si verifica che $A^2 = A$; quindi π è la matrice di una proiezione e, precisamente, della proiezione su $W = \mathrm{im}\,\pi$, parallelamente al sottospazio $U = \ker\pi$.

(b) Con un facile calcolo si ottiene

$$W = \mathrm{im}\,\pi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{ed} \qquad U = \ker\pi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

ed $U \cap W = \langle 0 \rangle$, perché se $v \in \mathrm{im}\,\pi$, per quanto visto nel punto (a) deve aversi $\pi(v) = v$. Grazie alle Relazioni di Grassmann, si conclude che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(c) Indichiamo con $\pi_U : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proiezione su U, parallelamente a W ed osserviamo che, dato un vettore $v \in \mathbb{R}^4$, la sua proiezione $\pi_U(v)$ si ottiene sottraendo a v la sua proiezione su W, parallelamente ad U, ovvero $\pi_U(v) = v - \pi(v)$. Dunque, la matrice di π_U è $\mathbf{1}_4 - A$.

(d) Dato un vettore $v \in \mathbb{R}^4$, la simmetria di asse U e direzione W lascia fissa la componente di v parallela ad U, mentre cambia di segno quella parallela a W. Dunque, indicata con $\sigma : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la simmetria in questione, si ha $\sigma(v) = \pi_U(v) - \pi(v)$, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$. La matrice cercata è quindi $\mathbf{1}_4 - 2A$. □

ESERCIZIO 3. *Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^7$, si considerino i vettori*

$$u_1 = e_1 + e_2 + e_3 - 3e_5 - 2e_6 + 2e_7, \qquad u_2 = e_2 + e_3 + e_4 - 4e_5 - 5e_6 + e_7,$$
$$u_3 = e_1 - e_3 + 8e_5 + 3e_6 - 7e_7, \qquad u_4 = e_1 - e_2 + e_5 - 4e_6 - 4e_7,$$

ove $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_7\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^7$. Si considerino i sottospazi $C = \langle e_5, e_6, e_7 \rangle$, $D = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$ ed $U = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$.

(a) Si verifichi che $U \cap C = \langle 0 \rangle$ e che $\dim U = 4$ e si concluda che perciò U è il grafico di un'applicazione lineare $\phi : D \to C$.

(b) Si scriva la matrice di ϕ rispetto alle basi $\mathcal{C} = \{e_5, e_6, e_7\}$ di C e $\mathcal{D} = \{e_1, \dots, e_4\}$ di D.

(c) Si determinino dimensioni e basi per $\mathrm{im}\phi$ e $\ker\phi$.

(d) Si mostri che il sottoinsieme $Z = \{\ \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(D, D) \mid \phi \circ \psi = 0\ \}$ è un sottospazio dello spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(D, D)$ e se ne calcoli la dimensione. Sia $\alpha_{\mathcal{D},\mathcal{D}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(D, D) \to M_4(\mathbb{R})$ l'applicazione che ad ogni endomorfismo di V associa la sua matrice, rispetto alla base $\mathcal{D}$. Si determini una base del sottospazio $\alpha_{\mathcal{D},\mathcal{D}}(Z)$ di $M_4(\mathbb{R})$.

Svolgimento. (a) Un vettore $a_1u_1a_2u_2 + a_3u_3 + a_4u_4$ appartiene ad $U \cap C$ se, e solo se, scritto rispetto alla base canonica, i coefficienti di $e_1, \dots, e_4$ sono uguali a zero. Si han quindi le condizioni

$$\begin{cases} a_1 + a_3 + a_4 = 0 \\ a_1 + a_2 - a_4 = 0 \\ a_1 + a_2 - a_3 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases} \quad \text{da cui si deduce} \quad \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_4 = 0 \end{cases}.$$

Da questo calcolo si deduce che $U \cap C = \langle 0 \rangle$ e che i vettori $u_1, \dots, u_4$ sono linearmente indipendenti e quindi $\dim U = 4$. Ciò significa che la proiezione su D parallelamente a C induce un isomorfismo tra D ed U e quindi l'applicazione $\phi : D \to C$, avente U come grafico, è quella che al vettore $x \in D$ associa l'unico vettore $\phi(x) \in C$ tale che $x + \phi(x) \in U$. Il fatto che U sia un sottospazio ci dice che, presi comunque $x + \phi(x)$, $y + \phi(y)$ in U e due scalari α e β, $\alpha(x + \phi(x)) + \beta(y + \phi(y)) = (\alpha x + \beta y) + (\alpha\phi(x) + \beta\phi(y))$ appartiene ad U e quindi che $\phi(\alpha x + \beta y) = \alpha\phi(x) + \beta\phi(y)$.

(b) Guardando alla base data di U, si deduce che

$$\begin{aligned} \phi(e_1 + e_2 + e_3) &= -3e_5 - 2e_6 + 2e_7 \\ \phi(e_2 + e_3 + e_4) &= -4e_5 - 5e_6 + e_7 \\ \phi(e_1 - e_3) &= 8e_5 + 3e_6 - 7e_7 \\ \phi(e_1 - e_2) &= e_5 - 4e_6 - 4e_7 \end{aligned} \qquad \text{e quindi} \qquad \begin{aligned} \phi(e_1) &= 2e_5 - e_6 - 3e_7 \\ \phi(e_2) &= e_5 + 3e_6 + e_7 \\ \phi(e_3) &= -6e_5 - 4e_6 + 4e_7 \\ \phi(e_4) &= e_5 - 4e_6 - 4e_7 \end{aligned}.$$

Si conclude così che la matrice di ϕ rispetto alle basi date è

$$A = \alpha_{\mathcal{D},\mathcal{C}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 & 1 \\ -1 & 3 & -4 & -4 \\ -3 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

(c) La matrice A ha rango 2, come si può vedere con la tecnica di eliminazione. Quindi l'immagine di ϕ è il sottospazio vettoriale di C generato da due colonne linearmente indipendenti della matrice A. Dunque $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{im}\phi = 2$, ed $\mathrm{im}\phi = \langle 2e_5 - e_6 - 3e_7, e_5 + 3e_6 + e_7 \rangle$. Per la formula delle dimensioni abbiamo che $\dim_{\mathbb{R}} \ker\phi = 4 - 2 = 2$, e risolvendo il sistema $AX = 0$ troviamo che $\ker\phi = \langle e_1 - e_2 - e_4, 2e_1 + 2e_2 + e_3 \rangle$.

(d) L'insieme Z è formato da tutte le applicazioni lineari ψ, per cui $\mathrm{im}\psi \subseteq \ker\phi$, ovvero sono tutte e sole le applicazioni lineari dello spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(D, \ker\phi) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(D, D)$. Si tratta dunque di un sottospazio di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(D, D)$ di dimensione $\dim_{\mathbb{R}}(\ker\phi)\dim_{\mathbb{R}}(D) = 2 \cdot 4 = 8$. Una base di $\alpha_{\mathcal{D},\mathcal{D}}(Z)$ si ottiene scrivendo le matrici associate a dei generatori per $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(D, \ker\phi)$. Possiamo quindi prendere le seguenti matrici in $M_4(\mathbb{R})$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ciò conclude la discussione. □

Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova di accertamento del 11 febbraio 2004 – Compito **B**

ESERCIZIO 1. *Si indichino con $n_1, n_2, \dots, n_6$ le cifre del numero di matricola e si considerino i tre punti, P, Q, R, dello Spazio Euclideo tridimensionale di coordinate*

$$P = \begin{pmatrix} n_2 \\ 0 \\ n_1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ n_1-1 \\ n_4 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} n_1-2 \\ n_6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si verifichi che i tre punti non sono allineati e si determini l'area del triangolo PQR.*
(b) *Si considerino i punti $R' = 2R - P$ e $Q' = 3Q - 2P$ (coordinate baricentriche). Detto X il punto $X = \lambda R' + (1-\lambda)Q'$ si dica per quali valori di λ in $\mathbb{R}$ il poligono convesso*

$$S = \{\, \alpha P + \beta Q + \gamma R + \delta X \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in [0,1],\ \alpha + \beta + \gamma + \delta = 1 \,\}$$

è un triangolo oppure un quadrilatero.
(c) *Si determini l'area del poligono S in funzione del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ e si tracci un grafico indicativo di tale funzione.*
(d) *Si dica se esiste un valore di λ per cui l'area di S è minima e si determini l'eventuale valore dell'area. Per l'eventuale punto X per cui l'area di S è minima, si calcoli il volume del solido che si ottiene congiungendo tutti i punti di S con l'origine O.*

Svolgimento. Si veda lo svolgimento del primo esercizio del Compito A. □

ESERCIZIO 2. *Si consideri l'applicazione lineare $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.
(a) *Si verifichi che $\pi(\pi(v)) = \pi(v)$ per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$.*
(b) *Si determinino i sottospazi $U = \ker\pi$ e $W = \mathrm{im}\pi$ e si mostri che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.*
(c) *Si scriva la matrice della proiezione su U parallelamente a W.*
(d) *Si scriva la matrice della simmetria di asse U e direzione W.*

Svolgimento. (a) Facendo il prodotto, si verifica che $A^2 = A$; quindi π è la matrice di una proiezione e, precisamente, della proiezione su $W = \mathrm{im}\,\pi$, parallelamente al sottospazio $U = \ker\pi$.

(b) Con un facile calcolo si ottiene

$$W = \mathrm{im}\,\pi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{ed} \qquad U = \ker\pi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Inoltre, $U \cap W = \langle 0 \rangle$, perché se $v \in \mathrm{im}\,\pi$, per quanto visto nel punto (a) deve aversi $\pi(v) = v$. Grazie alle Relazioni di Grassmann, si conclude che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(c) Indichiamo con $\pi_U : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proiezione su U, parallelamente a W ed osserviamo che, dato un vettore $v \in \mathbb{R}^4$, la sua proiezione $\pi_U(v)$ si ottiene sottraendo a v la sua proiezione su W, parallelamente ad U, ovvero $\pi_U(v) = v - \pi(v)$. Dunque, la matrice di π_U è $\mathbf{1}_4 - A$.

(d) Dato un vettore $v \in \mathbb{R}^4$, la simmetria di asse U e direzione W lascia fissa la componente di v parallela ad U, mentre cambia di segno quella parallela a W. Dunque, indicata con $\sigma : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la simmetria in questione, si ha $\sigma(v) = \pi_U(v) - \pi(v)$, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$. La matrice cercata è quindi $\mathbf{1}_4 - 2A$. □

ESERCIZIO 3. *Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^7$, si considerino i vettori*

$$u_1 = e_1 - e_2 - e_4 + 4e_6 + 2e_7, \qquad u_2 = e_2 + e_4 + 3e_5 - 3e_6,$$
$$u_3 = e_1 - e_3 - e_4 - 3e_5 - e_6 - 2e_7, \qquad u_4 = e_1 + e_3 + 7e_5 + e_6 + 4e_7,$$

ove $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_7\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^7$. Si considerino i sottospazi $C = \langle e_5, e_6, e_7\rangle$, $D = \langle e_1, e_2, e_3, e_4\rangle$ ed $U = \langle u_1, u_2, u_3, u_4\rangle$.

(a) Si verifichi che $U \cap C = \langle 0\rangle$ e che $\dim U = 4$ e si concluda che perciò U è il grafico di un'applicazione lineare $\phi : D \to C$.

(b) Si scriva la matrice di ϕ rispetto alle basi $\mathcal{C} = \{e_5, e_6, e_7\}$ di C e $\mathcal{D} = \{e_1, \dots, e_4\}$ di D.

(c) Si determinino dimensioni e basi per $\mathrm{im}\phi$ e $\ker\phi$.

(d) Si mostri che il sottoinsieme $Z = \{\, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(D, D) \mid \phi \circ \psi = 0 \,\}$ è un sottospazio dello spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(D, D)$ e se ne calcoli la dimensione. Sia $\alpha_{\mathcal{D},\mathcal{D}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(D, D) \to M_4(\mathbb{R})$ l'applicazione che ad ogni endomorfismo di V associa la sua matrice, rispetto alla base $\mathcal{D}$. Si determini una base del sottospazio $\alpha_{\mathcal{D},\mathcal{D}}(Z)$ di $M_4(\mathbb{R})$.

Svolgimento. (a) Un vettore $a_1u_1a_2u_2 + a_3u_3 + a_4u_4$ appartiene ad $U \cap C$ se, e solo se, scritto rispetto alla base canonica, i coefficienti di $e_1, \dots, e_4$ sono uguali a zero. Si han quindi le condizioni

$$\begin{cases} a_1 + a_3 + a_4 = 0 \\ -a_1 + a_2 = 0 \\ -a_3 + a_4 = 0 \\ -a_1 + a_2 - a_3 = 0 \end{cases} \quad \text{da cui si deduce} \quad \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_4 = 0 \end{cases}.$$

Da questo calcolo si deduce che $U \cap C = \langle 0\rangle$ e che i vettori $u_1, \dots, u_4$ sono linearmente indipendenti e quindi $\dim U = 4$. Ciò significa che la proiezione su D parallelamente a C induce un isomorfismo tra D ed U e quindi l'applicazione $\phi : D \to C$, avente U come grafico, è quella che al vettore $x \in D$ associa l'unico vettore $\phi(x) \in C$ tale che $x + \phi(x) \in U$. Il fatto che U sia un sottospazio ci dice che, presi comunque $x + \phi(x)$, $y + \phi(y)$ in U e due scalari α e β, $\alpha(x + \phi(x)) + \beta(y + \phi(y)) = (\alpha x + \beta y) + (\alpha\phi(x) + \beta\phi(y))$ appartiene ad U e quindi che $\phi(\alpha x + \beta y) = \alpha\phi(x) + \beta\phi(y)$.

(b) Guardando alla base data di U, si deduce che

$$\begin{aligned} \phi(e_1 - e_2 - e_4) &= 4e_6 + 2e_7 \\ \phi(e_2 + e_4) &= 3e_5 - 3e_6 \\ \phi(e_1 - e_3 - e_4) &= -3e_5 - e_6 - 2e_7 \\ \phi(e_1 + e_3) &= 7e_5 + e_6 + 4e_7 \end{aligned} \quad \text{e quindi} \quad \begin{aligned} \phi(e_1) &= 3e_5 + e_6 + 2e_7 \\ \phi(e_2) &= e_5 - 5e_6 - 2e_7 \\ \phi(e_3) &= 4e_5 + 2e_7 \\ \phi(e_4) &= 2e_5 + 2e_6 + 2e_7 \end{aligned}.$$

Si conclude così che la matrice di ϕ rispetto alle basi date è

$$A = \alpha_{\mathcal{D},\mathcal{C}}(\phi) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) La matrice A ha rango 2, come si può vedere con la tecnica di eliminazione. Quindi l'immagine di ϕ è il sottospazio vettoriale di C generato da due colonne linearmente indipendenti della matrice A. Dunque $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{im}\,\phi = 2$, ed $\mathrm{im}\,\phi = \langle 3e_5 + e_6 + 2e_7, e_5 - 5e_6 - 2e_7\rangle$. Per la formula delle dimensioni abbiamo che $\dim_{\mathbb{R}} \ker\phi = 4 - 2 = 2$, e risolvendo il sistema $AX = 0$ troviamo che $\ker\phi = \langle 2e_1 - e_3 - e_4, 3e_1 - e_2 - 4e_4\rangle$.

(d) L'insieme Z è formato da tutte le applicazioni lineari ψ, per cui $\mathrm{im}\psi \subseteq \ker\phi$, ovvero sono tutte e sole le applicazioni lineari dello spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(D, \ker\phi) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(D, D)$. Si tratta dunque di un sottospazio di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(D, D)$ di dimensione $\dim_{\mathbb{R}}(\ker\phi)\dim_{\mathbb{R}}(D) = 2 \cdot 4 = 8$. Una base di $\alpha_{\mathcal{D},\mathcal{D}}(Z)$ si ottiene scrivendo le matrici associate a dei generatori per $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(D, \ker\phi)$. Possiamo quindi prendere le seguenti matrici in $M_4(\mathbb{R})$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Fine della discussione $\square$

Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova di accertamento del 18 marzo 2004 – Compito **A**

ESERCIZIO 1. *Siano date le due famiglie di sottovarietà lineari*

$$\alpha_k : \begin{cases} kX_1 + X_2 + 2X_4 = 1 \\ kX_1 + (k+1)X_2 + (k^2-4)X_3 + (k+4)X_4 = 1 \end{cases}$$
$$\beta_k : \begin{cases} kX_1 + (k+1)X_2 + (k^2+k-2)X_3 + (2k+3)X_4 = 1 \\ kX_1 + X_2 + (k+5)X_4 = k^2-8 \end{cases}$$

nello spazio affine di dimensione 4 su $\mathbb{R}$. Si risponda ai quesiti seguenti.

(a) Dimostrare che per ogni k in $\mathbb{R}$ i sistemi α_k e β_k definiscono dei piani.

(b) Trovare i valori di k per cui $\alpha_k \cap \beta_k$ è formato da un solo punto. In tali casi scrivere esplicitamente il punto P_k di intersezione (in funzione di k).

(c) Trovare i valori di k per cui $\alpha_k \cap \beta_k$ è vuoto e quelli per cui $\alpha_k \cap \beta_k$ è una retta. In questo ultimo caso dare l'equazione parametrica della retta intersezione.

(d) Si verifichi che le rette intersezione sono a due a due sghembe e si determinino le reciproche distanze.

Svolgimento. (a) Si deve controllare che la matrice completa di α_k (risp. β_k) abbia rango 2, ovvero che esistano minori di ordine 2 non nulli. Per α_k considero $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k+1 & k^2-4 \end{pmatrix} = k^2-4$, non nullo per $k \neq \pm 2$ e $\det\begin{pmatrix} k & 1 \\ k & k+1 \end{pmatrix} = k^2$, non nullo per $k \neq 0$. Per β_k considero $\det\begin{pmatrix} k & k+1 \\ k & 1 \end{pmatrix} = -k^2$, non nullo per $k \neq 0$ e $\det\begin{pmatrix} k+1 & k^2+k-2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = k^2+k-2$, non nullo per $k=0$.

(b) L'intersezione $\alpha_k \cap \beta_k$ è definita dal sistema di matrice completa

$$\left(\begin{array}{cccc|c} k & 1 & 0 & 2 & 1 \\ k & k+1 & k^2-4 & k+4 & 1 \\ k & k+1 & k^2+k-2 & 2k+3 & 1 \\ k & 1 & 0 & k+5 & k^2-8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} k & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & k & k^2-4 & k+2 & 0 \\ 0 & 0 & k+2 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+3 & k^2-9 \end{array}\right),$$

come si verifica togliendo alla II riga la I riga, togliendo dalla III riga la II e togliendo alla IV riga la I riga. Per il teorema di Rouché-Capelli l'intesezione consiste di un punto se, e solo se, $k \neq 0, -2, -3$. In tal caso il punto cercato è

$$P_k := \begin{pmatrix} \frac{-k^2+5k-5}{k} \\ (k-3)(k-4) \\ -\frac{(k-3)(k-1)}{k+2} \\ k-3 \end{pmatrix}.$$

(c) Per $k=0$ il sistema ha matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Le soluzioni formano la retta di equazione parametrica $q = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -\frac{3}{2} \\ -3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Per $k=-3$ il sistema ha matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Le soluzioni formano la retta di equazione parametrica $r = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Per $k = -2$ il sistema ha matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right).$$

Non vi sono soluzioni e l'intersezione è quindi vuota.

(d) Le rette q ed r non sono parallele, e quindi i rispettivi spazi direttori hanno intersezione banale. Inoltre le rette non sono incidenti, non essendoci soluzione al sistema

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -\frac{3}{2} \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque, si tratta di due rette sghembe e possiamo calcolarne la distanza in modo analogo a quanto visto nello spazio tridimensionale. Posto

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -\frac{3}{2} \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

La distanza tra le due rette è data dal rapporto tra il volume del parallelepipedo determinato dai vettori $\overrightarrow{QP}, v, w$ e l'area del parallelogramma di lati v e w.

Detta

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & -\frac{5}{3} \\ 7 & 0 & -7 \\ -\frac{3}{2} & 0 & -4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori $\overrightarrow{QP}, v, w$, il volume del parallelepipedo è $\sqrt{\det({}^tBB)}$, ove

$${}^tBB = \begin{pmatrix} \frac{2173}{36} & \frac{1}{3} & -\frac{419}{9} \\ \frac{1}{3} & 1 & -\frac{5}{3} \\ -\frac{419}{9} & -\frac{5}{3} & \frac{619}{9} \end{pmatrix}.$$

L'area del parallelogramma è la radice quadrata del minore che si ottiene da ${}^tBB$ cancellando la prima riga e la prima colonna. Quindi la distanza cercata è $\sqrt{\frac{3721}{132}}$. □

ESERCIZIO 2. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & -5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, di $\mathbb{R}^4$.

(a) Si determini il polinomio caratteristico di ϕ e si dica se ϕ è invertibile.
(b) Si determinino gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori per ϕ e si dica se ϕ è, o meno, diagonalizzabile.
(c) Si determinino il polinomio minimo di ϕ ed un autovettore generalizzato di periodo massimo per ogni autovalore di ϕ.
(d) Si determinino una matrice di Jordan, J, di ϕ, ed una matrice invertibile, P, tali che $P^{-1}AP = J$.

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}) = (x-2)^4$, che ha termine noto diverso da zero e quindi ϕ è invertibile.

(b) L'endomorfismo ϕ ha un unico autovalore, 2, di molteplicità 4 e quindi, non essendo A una matrice scalare, non può essere diagonalizzabile. Osservando che

$$A - 2\mathbf{1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -5 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \qquad (A-2\mathbf{1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (A-2\mathbf{1})^3 = \mathbf{0},$$

si conclude che vi è un sottospazio di dimensione 2 di autovettori ($\mathrm{rk}(A - 2\mathbf{1}) = 2$) e che gli autovettori generalizzati hanno periodo minore o uguale a 3. Una base di autovettori verrà determinata nel punto successivo.

(c) Il polinomio minimo è quindi $\lambda_\phi(x) = (x-2)^3$ e quindi la matrice di Jordan di ϕ ha un blocco di ordine 3 ed un blocco di ordine 1. Un autovettore generalizzato di periodo 3 è, ad esempio, $v_4 = e_1$ che, assieme a $v_3 = (\phi - 2)v_4 = -e_1 + 3e_2 + e_3 - 3e_4$ ed a $v_2 = (\phi-2)^2 v_4 = -5e_2 + 5e_4$, determina la base del blocco di ordine massimo della matrice di Jordan di ϕ. Per completare la base, rispetto a cui ϕ abbia matrice di Jordan, è necessario trovare un autovettore v_1, linearmente indipendente da v_2, e quindi possiamo prendere $v_1 = e_1 - e_2 - e_3$ e porre $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$. In particolare, $\ker(\phi - 2) = \langle v_1, v_2 \rangle$. Si conclude che

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -5 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

sono le matrici cercate. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri lo spazio vettoriale* $\mathbb{R}^4$, *dotato dell'applicazione bilineare,* g, *di matrice*

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$.

(a) *Si dica se* g *è non-degenere e si determini (se esiste) una base ortogonale,* $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, *di* $\mathbb{R}^4$ *tale che* $\langle v_1, \dots, v_i \rangle = \langle e_1, \dots, e_i \rangle$, *per* $i = 1, \dots, 4$.

(b) *Si determini la segnatura (indice di inerzia) di* g *e si scrivano una matrice invertibile,* Q, *ed una matrice diagonale,* Δ, *tali che* ${}^tQGQ = \Delta$.

(c) *Si dica qual è la dimensione di un sottospazio isotropo massimale di* $\mathbb{R}^4$ *e si determini un tale sottospazio.*

(d) *Sia* v *un vettore isotropo, non nullo, e si mostri che, per ogni vettore* $x \in \langle v \rangle^\perp$ *si ha* $g(x,x) \ge 0$ *e che* $g(x,x) = 0$ *se, e solo se,* $x \in \langle v \rangle$.

Svolgimento. (a) Con un calcolo diretto si verifica che $\det G = -2$ e quindi g è non-degenere. Possiamo prendere $v_1 = e_1$, essendo $g(e_1, e_1) = 3$. Il vettore v_2 deve appartenere al sottospazio $\langle e_1 \rangle^\perp \cap \langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_2 \rangle$ e $g(e_2, e_2) = -1$; quindi possiamo porre $v_2 = e_2$. Analogamente, v_3 deve appartenere al sottospazio $\langle e_1, e_2 \rangle^\perp \cap \langle e_1, e_2, e_3 \rangle = \langle 2e_1 + 6e_2 - 3e_3 \rangle$ e $g(2e_1 + 6e_2 - 3e_3, 2e_1 + 6e_2 - 3e_3) = 6$; quindi possiamo porre $v_3 = 2e_1 + 6e_2 - 3e_3$. Infine, v_4 deve appartenere al sottospazio $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle^\perp = \langle 2e_1 + 5e_2 - 3e_3 + e_4 \rangle$ e $g(2e_1 + 5e_2 - 3e_3 + e_4, 2e_1 + 5e_2 - 3e_3 + e_4) = 1$; quindi posto $v_4 = 2e_1 + 5e_2 - 3e_3 + e_4$, si ottiene la base ortogonale $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, soddisfacente alle condizioni richieste.

(b) Dunque la segnatura di g è $(3,1)$, ovvero $i(g) = 2$ e due matrici del tipo cercato sono

$$\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) La segnatura di g è $(3, 1)$ e quindi i sottospazi isotropi hanno dimensione al più 1. Guardando alla matrice Δ, si conclude facilmente che un tale spazio è $H = \langle v_2 + v_4 \rangle = \langle 2e_1 + 6e_2 - 3e_3 + e_4 \rangle$.

(d) Sia $\mathbb{R}^4 = W_+ \oplus W_-$ una decomposizione di $\mathbb{R}^4$ del tipo descritto nel Teorema di Sylvester (ad esempio, si prenda $W_+ = \langle v_1, v_3, v_4 \rangle$ e $W_- = \langle v_2 \rangle$). Se v è un vettore isotropo non nullo, allora $v \in \langle v \rangle^\perp$ e $v \notin W_+$, quindi $W_+ + \langle v \rangle^\perp = \mathbb{R}^4$ e, dalla Relazione di Grassmann, si ricava $\dim(W_+ \cap \langle v \rangle^\perp) = 2$. Posto $T = W_+ \cap \langle v \rangle^\perp$, si ha quindi $\langle v \rangle^\perp = T \oplus \langle v \rangle$. Dunque, ogni elemento $x \in \langle v \rangle^\perp$ si scrive come $x = t + \alpha v$, per opportuni $t \in T$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$. Si ha perciò $g(x, x) = g(t + \alpha v, t + \alpha v) = g(t, t) \geq 0$, perché $t \in T = W_+ \cap \langle v \rangle^\perp$ e v è isotropo. In particolare, $g(x, x) = 0$ se, e solo se, $t = 0$ e quindi $x \in \langle v \rangle$. $\square$

Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)
prova di accertamento del 18 marzo 2004 – Compito **B**

ESERCIZIO 1. *Siano date le due famiglie di sottovarietà lineari*

$$\alpha_k : \begin{cases} kX_1 + X_2 + 2X_4 = 1 \\ kX_2 + (k^2-4)X_3 + (k+2)X_4 = 0 \end{cases}$$
$$\beta_k : \begin{cases} kX_1 + X_2 + (k+2)X_3 + (k+1)X_4 = 1 \\ kX_1 + (k+1)X_2 + (k^2-4)X_3 + (2k+7)X_4 = k^2-8 \end{cases}$$

nello spazio affine di dimensione 4 *su* $\mathbb{R}$. *Si risponda ai quesiti seguenti.*
(a) *Dimostrare che per ogni k in $\mathbb{R}$ i sistemi α_k e β_k definiscono dei piani.*
(b) *Trovare i valori di k per cui $\alpha_k \cap \beta_k$ è formato da un solo punto. In tali casi scrivere esplicitamente il punto P_k di intersezione (in funzione di k).*
(c) *Trovare i valori di k per cui $\alpha_k \cap \beta_k$ è vuoto e quelli per cui $\alpha_k \cap \beta_k$ è una retta. In questo ultimo caso dare l'equazione parametrica della retta intersezione.*
(d) *Si verifichi che le rette intersezione sono a due a due sghembe e si determinino le reciproche distanze.*

Svolgimento. (a) Si deve controllare che la matrice completa di α_k (risp. β_k) abbia rango 2, ovvero che esistano minori di ordine 2 non nulli. Per α_k considero $\det\begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix} = k^2$, non nullo per $k \neq 0$ e $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & k^2-4 \end{pmatrix} = k^2-4$, non nullo per $k=0$. Per β_k considero $\det\begin{pmatrix} k & 1 \\ k & k+1 \end{pmatrix} = k^2$, non nullo per $k \neq 0$ e $\det\begin{pmatrix} 1 & k+2 \\ k+1 & k^2-4 \end{pmatrix} = -3k-6$, non nullo per $k=0$.
(*b*) L'intersezione $\alpha_k \cap \beta_k$ è definita dal sistema di matrice completa

$$\left(\begin{array}{cccc|c} k & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & k & k^2-4 & k+2 & 0 \\ k & 1 & k+2 & k+1 & 1 \\ k & k+1 & k^2-4 & 2k+7 & k^2-8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} k & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & k & k^2-4 & k+2 & 0 \\ 0 & 0 & k+2 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+3 & k^2-9 \end{array}\right),$$

come si verifica togliendo alla III riga la I riga e togliendo alla IV riga la I e la II riga. Per il teorema di Rouché-Capelli l'intesezione consiste di un punto se, e solo se, $k \neq 0, -2, -3$. In tal caso il punto cercato è

$$P_k := \begin{pmatrix} \frac{-k^2+5k-5}{k} \\ (k-3)(k-4) \\ -\frac{(k-3)(k-1)}{k+2} \\ k-3 \end{pmatrix}.$$

(*c*) Per $k = 0$ il sistema ha matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Le soluzioni formano la retta di equazione parametrica $q = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -\frac{3}{2} \\ -3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Per $k = -3$ il sistema ha matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Le soluzioni formano la retta di equazione parametrica $r = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Per $k = -2$ il sistema ha matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right).$$

Non vi sono soluzioni e l'intersezione è quindi vuota.

(d) Le rette q ed r non sono parallele, ed i rispettivi spazi direttori hanno intersezione banale. Inoltre le rette non sono incidenti, non essendoci soluzione al sistema

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -\frac{3}{2} \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque, si tratta di due rette sghembe e possiamo calcolarne la distanza in modo analogo a quanto visto nello spazio tridimensionale. Posto

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -\frac{3}{2} \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

La distanza tra le due rette è data dal rapporto tra il volume del parallelepipedo determinato dai vettori $\overrightarrow{QP}, v, w$ e l'area del parallelogramma di lati v e w.

Detta

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & -\frac{5}{3} \\ 7 & 0 & -7 \\ -\frac{3}{2} & 0 & -4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori $\overrightarrow{QP}, v, w$, il volume del parallelepipedo è $\sqrt{\det({}^tBB)}$, ove

$${}^tBB = \begin{pmatrix} \frac{2173}{36} & \frac{1}{3} & -\frac{419}{9} \\ \frac{1}{3} & 1 & -\frac{5}{3} \\ -\frac{419}{9} & -\frac{5}{3} & \frac{619}{9} \end{pmatrix}.$$

L'area del parallelogramma è la radice quadrata del minore che si ottiene da ${}^tBB$ cancellando la prima riga e la prima colonna. Quindi la distanza cercata è $\sqrt{\frac{3721}{132}}$. □

ESERCIZIO 2. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 9 & 0 & -6 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, di $\mathbb{R}^4$.

(a) Si determini il polinomio caratteristico di ϕ e si dica se ϕ è invertibile.

(b) Si determinino gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori per ϕ e si dica se ϕ è, o meno, diagonalizzabile.

(c) Si determinino il polinomio minimo di ϕ ed un autovettore generalizzato di periodo massimo per ogni autovalore di ϕ.

(d) Si determinino una matrice di Jordan, J, di ϕ, ed una matrice invertibile, P, tali che $P^{-1}AP = J$.

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}) = (x-3)^4$, che ha termine noto diverso da zero e quindi ϕ è invertibile.

(b) L'endomorfismo ϕ ha un unico autovalore, 3, di molteplicità 4 e quindi, non essendo A una matrice scalare, non può essere diagonalizzabile. Osservando che

$$A - 3\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & -6 \\ -1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 6 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \qquad (A-3\mathbf{1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (A-3\mathbf{1})^3 = \mathbf{0},$$

si conclude che vi è un sottospazio di dimensione 2 di autovettori ($\mathrm{rk}(A - 3\mathbf{1}) = 2$) e che gli autovettori generalizzati hanno periodo minore o uguale a 3. Una base di autovettori verrà determinata nel punto successivo.

(c) Il polinomio minimo è quindi $\lambda_\phi(x) = (x-3)^3$ e quindi la matrice di Jordan di ϕ ha un blocco di ordine 3 ed un blocco di ordine 1. Un autovettore generalizzato di periodo 3 è, ad esempio, $v_4 = e_2$ che, assieme a $v_3 = (\phi - 3)v_4 = 2e_1 + 6e_2 + 2e_3 + 6e_4$ ed a $v_2 = (\phi-3)^2 v_4 = 10e_1 - 10e_3$, determina la base del blocco di ordine massimo della matrice di Jordan di ϕ. Per completare la base, rispetto a cui ϕ abbia matrice di Jordan, è necessario trovare un autovettore v_1, linearmente indipendente da v_2, e quindi possiamo prendere $v_1 = e_2 - e_3 + e_4$ e porre $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$. In particolare, $\ker(\phi - 3) = \langle v_1, v_2 \rangle$. Si conclude che

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 1 \\ -1 & -10 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

sono le matrici cercate. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato dell'applicazione bilineare, g, di matrice*

$$G = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$.

(a) Si dica se g è non-degenere e si determini (se esiste) una base ortogonale, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, di $\mathbb{R}^4$ tale che $\langle v_1, \dots, v_i \rangle = \langle e_1, \dots, e_i \rangle$, per $i = 1, \dots, 4$.

(b) Si determini la segnatura (indice di inerzia) di g e si scrivano una matrice invertibile, Q, ed una matrice diagonale, Δ, tali che ${}^tQGQ = \Delta$.

(c) Si dica qual è la dimensione di un sottospazio isotropo massimale di $\mathbb{R}^4$ e si determini un tale sottospazio.

(d) Sia v un vettore isotropo, non nullo, e si mostri che, per ogni vettore $x \in \langle v \rangle^\perp$ si ha $g(x,x) \geq 0$ e che $g(x,x) = 0$ se, e solo se, $x \in \langle v \rangle$.

Svolgimento. (a) Con un calcolo diretto si verifica che $\det G = -1$ e quindi g è non-degenere. Possiamo prendere $v_1 = e_1$, essendo $g(e_1, e_1) = -2$. Il vettore v_2 deve appartenere al sottospazio $\langle e_1 \rangle^\perp \cap \langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_2 \rangle$ e $g(e_2, e_2) = 1$; quindi possiamo porre $v_2 = e_2$. Analogamente, v_3 deve appartenere al sottospazio $\langle e_1, e_2 \rangle^\perp \cap \langle e_1, e_2, e_3 \rangle = \langle 3e_1 + 4e_2 - 2e_3 \rangle$ e $g(3e_1 + 4e_2 - 2e_3, 3e_1 + 4e_2 - 2e_3) = 18$; quindi possiamo porre $v_3 = 3e_1 + 4e_2 - 2e_3$. Infine, v_4 deve appartenere al sottospazio $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle^\perp = \langle 6e_1 + 17e_2 - 4e_3 - 9e_4 \rangle$ e $g(6e_1 + 17e_2 - 4e_3 - 9e_4, 6e_1 + 17e_2 - 4e_3 - 9e_4) = 9$; quindi posto $v_4 = 6e_1 + 17e_2 - 4e_3 - 9e_4$, si ottiene la base ortogonale $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, soddisfacente alle condizioni richieste.

(b) Dunque la segnatura di g è $(3,1)$, ovvero $i(g) = 2$, e due matrici del tipo cercato sono

$$\Delta = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 17 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

(c) La segnatura di g è $(3,1)$ e quindi i sottospazi isotropi hanno dimensione al più 1. Guardando alla matrice Δ, si conclude facilmente che un tale spazio è $H = \langle 3v_1 + v_3 \rangle = \langle 6e_1 + 4e_2 - 2e_3 \rangle$.

(d) Sia $\mathbb{R}^4 = W_+ \oplus W_-$ una decomposizione di $\mathbb{R}^4$ del tipo descritto nel Teorema di Sylvester (ad esempio, si prenda $W_+ = \langle v_2, v_3, v_4 \rangle$ e $W_- = \langle v_1 \rangle$). Se v è un vettore isotropo non nullo, allora $v \in \langle v \rangle^\perp$ e $v \notin W_+$, quindi $W_+ + \langle v \rangle^\perp = \mathbb{R}^4$ e, dalla Relazione di Grassmann, si ricava $\dim(W_+ \cap \langle v \rangle^\perp) = 2$. Posto $T = W_+ \cap \langle v \rangle^\perp$, si ha quindi $\langle v \rangle^\perp = T \oplus \langle v \rangle$. Dunque, ogni elemento $x \in \langle v \rangle^\perp$ si scrive come $x = t + \alpha v$, per opportuni $t \in T$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$. Si ha perciò $g(x,x) = g(t + \alpha v, t + \alpha v) = g(t,t) \geq 0$, perché $t \in T = W_+ \cap \langle v \rangle^\perp$ e v è isotropo. In particolare, $g(x,x) = 0$ se, e solo se, $t = 0$ e quindi $x \in \langle v \rangle$. $\square$

Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova scritta del 22 marzo 2004

ESERCIZIO 1. *Nello spazio euclideo di dimensione 4, si considerino le sottovarietà lineari di equazioni*

$$\pi_1 : \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \pi_2 : \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}.$$

(a) *Si determinino le dimensioni di π_1 e π_2 e si dica se sono incidenti, parallele o sghembe (o nessuna delle tre).*

(b) *Si determinino, se esistono, due iperpiani paralleli σ_1 e σ_2 tali che $\sigma_1 \supset \pi_1$ e $\sigma_2 \supset \pi_2$. In caso affermativo, si scrivano le equazioni cartesiane dei due iperpiani.*

(c) *Si determini la distanza tra σ_1 e σ_2. È vero che coincide con la distanza tra π_1 e π_2?*

Svolgimento. (a) Le matrici incomplete dei due sistemi hanno entrambe rango 2 e quindi si tratta di due piani. Per valutare le reciproche posizioni, consideriamo il sistema che si ottiene giustapponendo le 4 equazioni date. La matrice incompleta ha rango 3, mentre la matrice completa ha rango 4, come si può vedere riducendo la matrice con la tecnica di Gauss. Quindi l'intersezione tra i due piani è vuota, ma i due piani non sono né paralleli né sghembi, perché nel primo caso il rango della matrice incompleta dovrebbe essere uguale a 2, mentre nel secondo dovrebbe essere uguale a 4 (con rango della matrice completa uguale a 5, che è impossibile). In particolare, si ha

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{e} \qquad \pi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(b) Per quanto visto al punto precedente, i sottospazi direttori, W_1 e W_2, dei due piani si intersecano in un sottospazio di dimensione 1 e quindi il sottospazio generato dai due ha dimensione 3. Applicando $W_1 + W_2$ ad un punto P_1 di π_1 e ad un punto P_2 di π_2, rispettivamente, si ottengono due iperpiani paralleli e $\pi_1 \subset P_1 + (W_1 + W_2)$ e $\pi_2 \subset P_2 + (W_1 + W_2)$. I due iperpiani hanno equazioni cartesiane

$$\sigma_1 : x_1 - 4x_3 + x_4 = 2 \qquad \text{e} \qquad \sigma_2 = x_1 - 4x_3 + x_4 = -3.$$

(c) La distanza, δ, tra i due iperpiani coincide con la lunghezza della proiezione del vettore $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ lungo il vettore $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, ortogonale ai due iperpiani σ_1 e σ_2. Si ha quindi $\delta = \dfrac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot n|}{\|n\|} = \frac{5}{3\sqrt{2}}$.

Osserviamo infine che δ coincide con la distanza tra π_1 e π_2. Infatti, se prendiamo $P_1 \in \pi_1$ e $P_2 \in \pi_2$ aventi minima distanza, il vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$ è ortogonale ai due piani ed è quindi parallelo ad n. Ne consegue che la lunghezza della proiezione di $\overrightarrow{P_1P_2}$ lungo il vettore n coincide con $\|\overrightarrow{P_1P_2}\|$ cioè con la distanza tra π_1 e π_2.

Lo studente poteva verificare direttamente l'uguaglianza tra le distanze, calcolando esplicitamente la distanza tra π_1 e π_2, ovvero

$$\frac{vol^4\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\right)}{vol^3\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right)}$$

ove si considerino i volumi non orientati. $\square$

ESERCIZIO 2. *Si determini, se esiste, un'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ soddisfacente alle seguenti condizioni*

$$\begin{aligned} &\phi(e_1+e_3) = 2e_1 - e_2 - e_4; \qquad &&\phi(e_2+e_3) = -e_1 + 2e_3 - 2e_4; \\ &\phi(e_2+e_3+e_4) = -2e_1 + 2e_3; \qquad &&\phi(e_1+e_2+e_3) = e_1 - 2e_4. \end{aligned}$$

e se ne scriva la matrice, A, rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$.

(a) Si mostri che l'insieme $T = \{ Y \in M_4(\mathbb{R}) \mid AY = A \}$ è una sottovarietà lineare di $\mathbb{A}(M_4(\mathbb{R}))$ e se ne determinino la dimensione ed una rappresentazione parametrica.

(b) Sia I il sottoinsieme di T formato dalle matrici $Y \in T$ tali che $Y - \mathbf{1}$ sia nilpotente. Si mostri che $I \neq \{\mathbf{1}\}$ e che se $X \in I$, allora $X^{-1} \in I$.

Svolgimento. Ricordando che ϕ deve essere un'applicazione lineare, dalle relazioni date, si ricava

$$\begin{aligned} \phi(e_1) &= \phi(e_1+e_2+e_3) - \phi(e_2+e_3) = e_1 - 2e_4 + e_1 - 2e_3 + 2e_4 = 2e_1 - 2e_3; \\ \phi(e_2) &= \phi(e_1+e_2+e_3) - \phi(e_1+e_3) = e_1 - 2e_4 - 2e_1 + e_2 + e_4 = -e_1 + e_2 - e_4; \\ \phi(e_3) &= \phi(e_2+e_3) - \phi(e_2) = -e_1 + 2e_3 - 2e_4 + e_1 - e_2 + e_4 = -e_2 + 2e_3 - e_4; \\ \phi(e_4) &= \phi(e_2+e_3+e_4) - \phi(e_2+e_3) = -2e_1 + 2e_3 + e_1 - 2e_3 + 2e_4 = -e_1 + 2e_4. \end{aligned}$$

Dunque esiste un'unica applicazione lineare, ϕ, soddisfacente alle condizioni richieste ed ha matrice

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Considerando come incognite le 16 entrate della matrice Y, la condizione $AY = A$ diventa un sistema di equazioni lineari, ed il rango della matrice incompleta è uguale a $4\mathrm{rk}A$. Inoltre, T non è vuoto, perché certamente $\mathbf{1}_4 \in T$, quindi T è una sottovarietà lineare di $\mathbb{A}(M_4(\mathbb{R}))$, di dimensione $16 - 4\mathrm{rk}A$ ed i suoi punti si ottengono tutti sommando alla matrice $\mathbf{1}$ (soluzione particolare) le matrici, X, soddisfacenti alla condizione $AX = \mathbf{0}$ (soluzioni del sistema omogeneo associato). È quindi chiaro che le colonne di una tale matrice X sono le coordinate di vettori appartenenti a $\ker\phi = \langle e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \rangle$. Si conclude che $\mathrm{rk}A = 1$ e che

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a&b&c&d \\ a&b&c&d \\ a&b&c&d \\ a&b&c&d \end{pmatrix} \mid {}^t(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

(b) Da quanto visto, discende che, se $Y \in T$, allora $Y - \mathbf{1} = X$ è una matrice di rango 1 ed il suo polinomio caratteristico è $p_X(x) = x^3(x - a - b - c - d)$. Dunque, X è nilpotente se, e solo se, $a + b + c + d = 0$ e l'insieme I è quindi una sottovarietà lineare di dimensione 3 in $\mathbb{A}(M_4(\mathbb{R}))$. Se $Y \in I$ ed $X = Y - \mathbf{1}$, allora $X^2 = 0$ (perché $\mathrm{rk}X = 1$) e quindi $Y^{-1} = (\mathbf{1} + X)^{-1} = 1 - X \in I$. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri l'endomorfismo ϕ di $\mathbb{R}^4$ di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -4 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Si determini il polinomio caratteristico di ϕ e si dica se ϕ è invertibile.

(b) Si determinino gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori per ϕe si dica se ϕ è diagonalizzabile.

(c) Si determini il polinomio minimo di ϕ ed un autovettore generalizzato di periodo massimo per ciascuno degli autovalori di ϕ.

(d) Si determinino la forma canonica di Jordan J di ϕ ed una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP = J$.

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = (x-1)^4$, e il determinante di A è $p_\phi(0) = 1 \neq 0$, per cui l'endomorfismo ϕ è invertibile.

(b) – (c) ϕ ha uno solo autovalore, 1, con molteplicità 4. Si ha

$$A - \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad (A-\mathbf{1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 24 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (A-\mathbf{1})^3 = \begin{pmatrix} 0 & 64 & 0 & -64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -64 & 0 & 64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ed $(A-\mathbf{1})^4 = \mathbf{0}$. Poiché $\operatorname{rk}(A-\mathbf{1}) = 3$, gli autovettori formano un sottospazio di dimensione 1. Inoltre, il massimo periodo di un autovettore generalizzato è uguale a 4 e quindi il polinomio minimo è uguale al polinomio caratteristico: $\lambda_\phi(x) = (x-1)^4$. Un autovettore generalizzato di periodo 4 è e_2 ed una base dell'unico blocco di Jordan è $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, ove

$$v_4 = e_2, \qquad v_3 = (\phi - 1)(v_4) = e_1 + 4e_2 + 3e_3 + 4e_4,$$
$$v_2 = (\phi-1)^2(v_4) = 24e_1 + 8e_3, \qquad v_1 = (\phi-1)^3(v_4) = 64e_1 - 64e_3.$$

(d) Si han quindi le matrici richieste

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 64 & 24 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ -64 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 4. *Si consideri la forma bilineare g associata alla forma quadratica*

$$Q(X) = 2X_1^2 - 4X_3^2 - X_4^2 - 6X_1X_2 + 2X_1X_3 + 4X_1X_4 + 6X_2X_3 - 4X_3X_4.$$

(a) *Si scriva la matrice G di tale forma bilineare nel riferimento dato. Si determini se g è degenere e se ne calcoli l'eventuale nucleo.*

(b) *Si determinino rango e segnatura di g e si scrivano ed una matrice invertibile P ed una matrice diagonale Δ tali che ${}^tPGP = \Delta$.*

(c) *Determinare la dimensione dei sottospazi isotropi massimali per g, e dare un esempio di un tale sottospazio.*

(d) *Sia N l'eventuale nucleo di g e sia $\mathbb{R}^4 = W \oplus N$ ed indichiamo con $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proiezione su W parallelamente ad N. Se Z è un complementare di N, si mostri che π induce un isomorfismo tra Z e W e che, per ogni $z, z' \in Z$, si ha $g(z, z') = g(\pi(z), \pi(z'))$.*

Svolgimento. (a) La matrice G richiesta è

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

e si ha $\det G = 0$. L'applicazione bilineare g è dunque degenere, e possiamo calcolarne il nucleo, N, che ha dimensione 1 (perché la matrice G ha rango 3) ed è generato dal vettore $v_1 = e_1 + e_2 + e_3$.

(b) Si tratta di trovare una base di $\mathbb{R}^4$ tale che il primo vettore sia v_1 e gli altri tre siano una base ortogonale di un qualsiasi complementare, W, di N. Prendiamo quindi $W = \langle e_2, e_3, e_4 \rangle$ e $v_2 = e_4$, con $g(v_2, v_2) = -1$; $v_3 \in \langle v_2 \rangle^\perp \cap W$, ad esempio $v_3 = e_2 + e_3 - 2e_4$ con $g(v_3, v_3) = 6$; ed infine $v_4 \in \langle v_2, v_3 \rangle^\perp \cap W$, e quindi $v_4 = e_2 - e_3 + 2e_4$ con $g(v_4, v_4) = -6$. Dunque g ha rango 3 e segnatura $(1, 2)$ e, posto

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

si ha ${}^tPGP = \Delta$, come richiesto.

(c) I sottospazi isotropi massimali per g certamente contengono il nucleo, e sono generati dal nucleo e da un sottospazio isotropo massimale per la forma ristretta a W. Dunque un tale sottospazio ha dimensione al più 2. Siccome il vettore e_2 è isotropo, si concludeo che $\langle e_2, e_1 + e_2 + e_3\rangle$ è un sottospazio isotropo massimale per g.

(d) Sia $z \in Z$. Poiché $\mathbb{R}^4 = W \oplus N$ esistono (e sono unici) $w \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tali che $z = w + \alpha v_1$ e $\pi(z) = w = z - \alpha v_1$. Dunque, la restrizione di π a W è un'applicazione lineare ed è iniettiva, perché $\ker\phi = N$ ed $N \cap Z = \langle 0\rangle$. Poiché W e Z hanno la stessa dimensione, la restrizione di π è una biiezione. Infine, per $z, z' \in Z$, si ha

$$g(\pi(z), \pi(z')) = g(z - \alpha v_1, z' - \alpha' v_1) = g(z, z')$$

perché v_1 è nel nucleo di g. □

ESERCIZIO 5. *Sia* $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ *lo spazio vettoriale formato dai polinomi a coefficienti reali, di grado minore o uguale a* 3. *Si consideri l'applicazione* f *definita ponendo*

$$P(X) \mapsto (X^2 - 1)P'(X) - (3X - 1)P(X)$$

(a) *Si mostri che* $f(V) \subseteq V$ *e che* f *è un endomorfismo di* V. *Si scriva la matrice di* $f : V \to V$ *rispetto alla base* $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$.
(b) *Si determinino nucleo ed immagine di* f *esibendo una base di ciascuno dei due sottospazi.*
(c) *Si dica se il sottoinsieme* $B = \{\, \psi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}V \mid \psi \circ f = 0 \,\}$ *è un sottospazio di* $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}V$ *e, in caso affermativo, si determinino la dimensione di* B *ed una base del sottospazio* $\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(B) \subseteq M_4(\mathbb{R})$.

Svolgimento. (a) Poiché la derivazione è un'applicazione lineare in $\mathbb{R}[X]$, come pure la moltiplicazione per un polinomio fissato, si conclude che l'applicazione data è un'applicazione lineare in $\mathbb{R}[X]$. Si ha

$$f(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3) = (a_0 - a_1) - (3a_0 - a_1 + 2a_2)X + (-2a_1 + a_2 - 3a_3)X^2 - (a_2 - a_3)X^3$$

e quindi $f(V) \subseteq V$ e dunque f appartiene ad $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ ed ha matrice

$$A = \alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) La matrice A, e quindi l'applicazione f, ha rango 3 e si ha $\operatorname{im} f = \left\langle 1 - 3X, 1 - X + 2X^2, 2X - X^2 + X^3\right\rangle$ e $\ker f = \left\langle 1 + X - X^2 - X^3\right\rangle$.

(c) L'insieme B contiene lo zero ed è chiuso per combinazioni lineari, quindi è un sottospazio di $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}V$. Un endomorfismo ψ appartiene a B se, e solo se, $\psi(v) = 0$, per ogni $v \in \operatorname{im} f$. Quindi B è isomorfo allo spazio $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U, V)$, ove U è un complementare di $\operatorname{im} f$ in V (l'isomorfismo $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}V \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U, V)$ manda ψ in $\psi \circ j$, ove $j : U \to V$ è l'inclusione).

Si conclude che $\dim B = (\dim U)(\dim V) = 4$ e

$$\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} 3a & a & -a & -3a \\ 3b & b & -b & -3b \\ 3c & c & -c & -3c \\ 3d & d & -d & -3d \end{pmatrix} \;\middle|\; {}^t(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 6. [*Vecchio ordinamento*] *Studiare la conica* $\mathscr{C}$ *di equazione*

$$6x^2 - 4xy + 9y^2 - 24x + 8y + 22 = 0 \ .$$

In particolare determinare se è degenere, qual è il suo tipo, una equazione canonica e la opportuna trasformazione di coordinate, gli eventuali assi, asintoti, centro, fuochi. Se ne tracci infine un disegno approssimativo.

Svolgimento. Consideriamo, come di consueto il piano affine immerso nel piano proiettivo prendendo $x_0 = 0$ come retta impropria. Una matrice della conica $\mathscr{C}$ è $A = \begin{pmatrix} 22 & -12 & 4 \\ -12 & 6 & -2 \\ 4 & -2 & 9 \end{pmatrix}$. Poiché il determinante $\det A = -100 \neq 0$ si tratta di una conica non degenere, e poiché $\det A_\infty = 50$ (A_∞ è la sottomatrice quadrata di A che si ottiene cancellando prima riga e prima colonna) si tratta di un'ellisse.

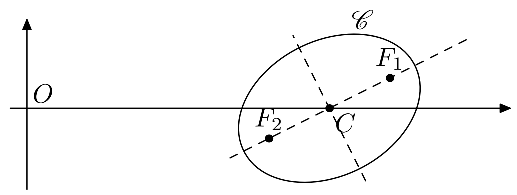
Il centro dell'ellisse ha coordinate omogenee $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e gli assi sono le rette per il centro C, parallele agli autovettori della matrice A_∞. La matrice A_∞ ha autovalori 5 e 10 a cui corrispondono gli autovettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Gli assi sono quindi le rette

$$h_1 : (x-2) - 2y = 0 \text{ (asse focale)}, \qquad h_2 : 2(x-2) + y = 0.$$

Dunque, l'equazione canonica di $\mathscr{C}$, in un opportuno sistema di riferimento ortonormale, è $\frac{5}{2}X^2 + 5Y^2 = 1$. Infine, ricordiamo che i fuochi si trovano sull'asse focale, a distanza $\frac{1}{\sqrt{5}}$ dal centro e quindi sono i punti reali

$$F_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \pm \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Un disegno approssimativo della conica in questione è riportato qui sotto



e la discussione è conclusa. □

Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova scritta del 31 marzo 2004

ESERCIZIO 1. *Nello spazio euclideo di dimensione 4, si considerino le sottovarietà lineari di equazioni*

$$\pi_1 : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \pi_2 : \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}.$$

(a) *Si determinino le dimensioni di π_1 e π_2 e si dica se sono incidenti, parallele o sghembe (o nessuna delle tre).*

(b) *Si determini, se esiste, un iperpiano σ contenente sia π_1 che π_2. In caso affermativo, si scrivano le equazioni cartesiane dell'iperpiano.*

(c) *Si determinino la distanza tra π_1 e π_2 e la distanza di σ (se esiste) dall'origine.*

Svolgimento. (a) Le matrici incomplete dei due sistemi hanno entrambe rango 2 e quindi si tratta di due piani. Per valutare le reciproche posizioni, consideriamo il sistema che si ottiene giustapponendo le 4 equazioni date. La matrice incompleta ha rango 2, mentre la matrice completa ha rango 3, come si può vedere riducendo la matrice con la tecnica di Gauss. Quindi l'intersezione tra i due piani è vuota, ed i due piani sono paralleli. In particolare, si ha

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{e} \qquad \pi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(b) Per quanto visto al punto precedente, σ è il sottospazio generato dai due piani; ovvero l'iperpiano

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Per trovarne l'equazione cartesiana, possiamo considerare il fascio di iperpiani contenente π_2, ovvero

$$\sigma_{(\alpha,\beta)} : \alpha(x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4) + \beta(3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3) = 0$$

ed imporre che passi per il punto $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si ottiene così l'equazione $\sigma : 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 3$.

(c) La distanza d dell'iperpiano σ dall'origine coincide con la lunghezza della proiezione del vettore $\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ lungo il vettore $n = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, ortogonale a σ. Si ha quindi $d = \dfrac{|\overrightarrow{OP_1} \cdot n|}{\|n\|} = \frac{3}{\sqrt{19}}$.

Calcoliamo ora la distanza tra π_1 e π_2; ovvero

$$d' = \frac{vol^3\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}{vol^2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)} = \frac{\sqrt{\det\begin{pmatrix} 17/4 & -1/2 & 2 \\ -1/2 & 11 & 11 \\ 2 & 11 & 14 \end{pmatrix}}}{\sqrt{\det\begin{pmatrix} 11 & 11 \\ 11 & 14 \end{pmatrix}}} = \frac{\sqrt{283}}{2\sqrt{33}}.$$

Quindi $d' > d$. □

ESERCIZIO 2. *Si determini, se esiste, un'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ soddisfacente alle seguenti condizioni*

$$\phi(e_1 + e_4) = 2e_1 + e_2 + 2e_3 + 5e_4; \qquad \phi(e_2 + e_4) = -e_1 + 3e_2 + e_3 + 3e_4;$$
$$\phi(e_2 + e_3 + e_4) = 2e_1 + 2e_2 - 2e_3 + 2e_4; \qquad \phi(e_1 + e_2 + e_4) = e_1 + 3e_2 + 2e_3 + 6e_4.$$

e se ne scriva la matrice, A, rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$.

(a) *Si mostri che l'insieme $T = \{ X \in M_4(\mathbb{R}) \mid XA = A \}$ è una sottovarietà lineare di $\mathbb{A}(M_4(\mathbb{R}))$ e se ne determinino la dimensione ed una rappresentazione parametrica.*

(b) *Sia I il sottoinsieme di T formato dalle matrici $X \in T$ tali che $X - \mathbf{1}$ sia nilpotente. Si mostri che $I \neq \{\mathbf{1}\}$ e che se $X \in I$, allora $X^{-1} \in I$.*

Svolgimento. Ricordando che ϕ deve essere un'applicazione lineare, dalle relazioni date, si ricava

$$\begin{aligned}
\phi(e_1) &= \phi(e_1 + e_2 + e_4) - \phi(e_2 + e_4) = e_1 + 3e_2 + 2e_3 + 6e_4 + e_1 - 3e_2 - e_3 - 3e_4 = 2e_1 + e_3 + 3e_4;\\
\phi(e_2) &= \phi(e_1 + e_2 + e_4) - \phi(e_1 + e_4) = e_1 + 3e_2 + 2e_3 + 6e_4 - 2e_1 - e_2 - 2e_3 - 5e_4 = -e_1 + 2e_2 + e_4;\\
\phi(e_3) &= \phi(e_2 + e_3 + e_4) - \phi(e_2 + e_4) = 2e_1 + 2e_2 - 2e_3 + 2e_4 + e_1 - 3e_2 - e_3 - 3e_4 = 3e_1 - e_2 - 3e_3 - e_4;\\
\phi(e_4) &= \phi(e_2 + e_4) - \phi(e_2) = -e_1 + 3e_2 + e_3 + 3e_4 + e_1 - 2e_2 - e_4 = e_2 + e_3 + 2e_4.
\end{aligned}$$

Dunque esiste un'unica applicazione lineare, ϕ, soddisfacente alle condizioni richieste ed ha matrice

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Considerando come incognite le 16 entrate della matrice X, la condizione $XA = A$ diventa un sistema di equazioni lineari, ed il rango della matrice incompleta è uguale a $4\mathrm{rk}\,{}^tA$. Inoltre, T non è vuoto, perché certamente $\mathbf{1}_4 \in T$, quindi T è una sottovarietà lineare di $\mathbb{A}(M_4(\mathbb{R}))$, di dimensione $16 - 4\mathrm{rk}\,A$ ed i suoi punti si ottengono tutti sommando alla matrice $\mathbf{1}$ (soluzione particolare) le matrici, Y, soddisfacenti alla condizione $YA = \mathbf{0}$ (soluzioni del sistema omogeneo associato). Poiché $YA = \mathbf{0}$ se, e solo se, $\mathbf{0} = {}^t(YA) = {}^tA{}^tY$, è quindi chiaro che le righe di una tale matrice Y sono le coordinate di vettori appartenenti al nucleo di ${}^tA$, ovvero al sottospazio $\langle e_1 + e_2 + e_3 - e_4 \rangle$. Si conclude che $\mathrm{rk}\,Y = 1$ e che

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a&a&a&-a \\ b&b&b&-b \\ c&c&c&-c \\ d&d&d&-d \end{pmatrix} \;\middle|\; {}^t(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

(b) Da quanto visto, discende che, se $X \in T$, allora $X - \mathbf{1} = Y$ è una matrice di rango 1 ed il suo polinomio caratteristico è $p_Y(x) = x^3(x - a - b - c + d)$. Dunque, Y è nilpotente se, e solo se, $a + b + c - d = 0$ e l'insieme I è quindi una sottovarietà lineare di dimensione 3 in $\mathbb{A}(M_4(\mathbb{R}))$, ovvero

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a&a&a&-a \\ b&b&b&-b \\ c&c&c&-c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c & -a-b-c \end{pmatrix} \;\middle|\; {}^t(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Se $X \in I$ ed $Y = X - \mathbf{1}$, allora $Y^2 = 0$ (perché $\mathrm{rk}\,Y = 1$) e quindi $X^{-1} = (\mathbf{1} + Y)^{-1} = 1 - Y \in I$. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri l'endomorfismo ϕ di $\mathbb{R}^4$ di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & -7 & -2 & -1 \\ 0 & -9 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) *Si determini il polinomio caratteristico di ϕ e si dica se ϕ è invertibile.*

(b) *Si determinino gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori per ϕe si dica se ϕ è diagonalizzabile.*

(c) *Si determini il polinomio minimo di ϕ ed un autovettore generalizzato di periodo massimo per ciascuno degli autovalori di ϕ.*

(d) *Si determinino la forma canonica di Jordan J di ϕ ed una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP = J$.*

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = x^4$, e il determinante di A è $p_\phi(0) = 0$, per cui l'endomorfismo ϕ non è invertibile.

(b) – (c) ϕ ha il solo autovalore, 0, con molteplicità 4. Si ha

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ed} \qquad A^3 = \mathbf{0}.$$

Poiché $\operatorname{rk} A = 2$, gli autovettori formano un sottospazio di dimensione 2 e quindi la matrice di Jordan contiene due blocchi. Inoltre, il massimo periodo di un autovettore generalizzato è uguale a 3; quindi il polinomio minimo è $\lambda_\phi(x) = x^3$ e quindi la matrice di Jordan di ϕ è fatta di un blocco di ordine 3 e, necessariamente, di un blocco di ordina 1. Un autovettore generalizzato di periodo 3 è e_4 ed una base del blocco di Jordan di ordine 3 è

$$v_4 = e_4, \qquad v_3 = \phi(v_4) = 2e_1 + e_2 - e_3 - 3e_4, \qquad v_2 = \phi^2(v_4) = 3e_1 + 6e_3.$$

Infine v_1 è un autovettore, linearmente indipendente da v_2, ovvero $v_1 = e_1 + e_2 - 3e_4$.

(d) Si han quindi le matrici richieste

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 4. *Si consideri la forma bilineare $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ associata alla forma quadratica*

$$Q(X) = X_2^2 - 2X_4^2 - 4X_1X_2 - 2X_1X_4 + 4X_2X_3 + 4X_3X_4.$$

(a) *Si scriva la matrice G di tale forma bilineare nel riferimento dato. Si determini se g è degenere e se ne calcoli l'eventuale nucleo.*

(b) *Si determinino rango e segnatura di g e si scrivano una matrice invertibile P ed una matrice diagonale Δ tali che ${}^tPGP = \Delta$.*

(c) *Si chiama piano iperbolico un sottospazio di dimensione 2 su cui g induce un'applicazione bilineare di matrice $H = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ rispetto ad un'opportuna base. Si dica se $\mathbb{R}^4$ contiene due piani iperbolici tra loro ortogonali ed, in caso affermativo, si indichi una base rispetto a cui g ha matrice H per ciascuno dei due piani iperbolici.*

(d) *Sia $v \neq 0$ un vettore isotropo e si mostri che il sottospazio $\langle v \rangle^\perp$ contiene un vettore isotropo $v' \notin \langle v \rangle$.*

Svolgimento. (a) La matrice G richiesta è

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

e si ha $\det G = 4$. L'applicazione bilineare g è dunque non-degenere ed il suo nucleo è uguale a $\langle 0 \rangle$.

(b) Si tratta di trovare una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$. Prendiamo quindi $v_1 = e_2$, ove $g(v_1, v_1) = 1$. Inoltre

$$x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right) \in \langle v_1 \rangle^\perp \iff 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0;$$

per cui possiamo prendere $v_2 = e_4$ e si ha $g(v_2, v_2) = -2$. Analogamente

$$x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right) \in \langle v_1, v_2 \rangle^\perp = \langle e_2, e_4 \rangle^\perp \iff \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases};$$

per cui possiamo prendere $v_3 = 2e_2 - e_3 - e_4$ e si ha $g(v_3, v_3) = -2$. Infine

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle^\perp = \langle e_2, e_3, e_4 \rangle^\perp \iff \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \; ; \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

per cui possiamo prendere $v_4 = 2e_1 - 2e_2 + 3e_3 + 2e_4$ e si ha $g(v_4, v_4) = 4$. Dunque g ha rango 4 e segnatura $(2, 2)$ e, posto

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

si ha ${}^tPGP = \Delta$, come richiesto.

(c) Un piano iperbolico è un sottospazio di dimensione 2 su cui g ha segnatura $(1, 1)$. Quindi i sottospazi $\langle v_1, v_2 \rangle$ ed $\langle v_3, v_4 \rangle$ sono due piani iperbolici, tra loro ortogonali. Due basi del tipo cercato sono

$$\frac{1}{\sqrt{2}} v_1 + \frac{1}{2} v_2, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} v_1 - \frac{1}{2} v_2 \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2} v_3 + \frac{1}{2\sqrt{2}} v_4, \quad -\frac{1}{2} v_3 + \frac{1}{2\sqrt{2}} v_4.$$

(d) Sia $v \neq 0$ un vettore isotropo e sia $\mathbb{R}^4 = W_+ \oplus W_-$ una decomposizione del tipo descritto nel Teorema di Sylvester, e quindi si ha $\dim W_+ = \dim W_- = 2$. Poiché g è non degenere, $\langle v \rangle^\perp$ ha dimensione 3 e quindi esistono due vettori w_+ e w_- in $\langle v \rangle^\perp$ tali che $g(w_+, w_+) = a^2 > 0$, $g(w_-, w_-) = -b^2 < 0$ e $g(w_+, w_-) = 0$. Ciò significa che g ristretta a $\langle w_+, w_- \rangle$ è non-degenere e non-definita e quindi v non può appartenere a questo sottospazio essendo contenuto in $\langle w_+, w_- \rangle^\perp$. Infine, $v' = \frac{1}{a} w_+ + \frac{1}{b} w_-$ è un vettore isotropo appartenente a $\langle w_+, w_- \rangle \subset \langle v \rangle^\perp$ e non proporzionale a v. □

ESERCIZIO 5. *Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato dell'applicazione bilineare $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, di matrice $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica; e sia $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}^4$,*

$$\pi(x) = \frac{g(w_1, x)}{g(w_1, w_1)} w_1 + \frac{g(w_2, x)}{g(w_2, w_2)} w_2 \qquad \text{ove} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Si scriva la matrice di π rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$.
(b) Si determinino nucleo ed immagine di π, esibendo una base di ciascuno dei due sottospazi. È vero o falso che π è una proiezione ortogonale?
(c) È vero o falso che π è autoaggiunta, ovvero che $g(\pi(v), w) = g(v, \pi(w))$ per ogni $v, w \in \mathbb{R}^4$? È vero o falso che, per una proiezione $\pi' : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, si ha $\ker\pi' = (\mathrm{im}\,\pi')^\perp$ se, e solo se, π' è autoaggiunta?

Svolgimento. (a) Osserviamo che $g(w_1, w_1) = g(w_2, w_2) = 1$; quindi, dato un generico vettore $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, si ha

$$\pi(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

e si conclude così che

$$P = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 & -8 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & -2 & -8 \end{pmatrix}.$$

(*b*) Si verifica con un calcolo diretto che $P^2 = P$ e quindi che π è una proiezione. Per definizione, $\mathrm{im}\,\pi = \langle w_1, w_2\rangle$, e si ha $\ker\pi = \langle e_1 - 2e_2 + 2e_3, 2e_2 - 2e_3 + e_4\rangle = (\mathrm{im}\,\pi)^\perp$. Dunque π è una proiezione ortogonale.

(*c*) Con un calcolo diretto si verifica che ${}^tPG = GP$ e quindi π è autoaggiunta. Infine, se π' è autoaggiunta e $v \in \ker\pi'$, $w = \pi'(u) \in \mathrm{im}\,\pi'$, si ha

$$g(v, w) = g(v, \pi(u)) = g(\pi(v), u) = g(0, u) = 0;$$

quindi $\ker\pi' \subseteq (\mathrm{im}\,\pi')^\perp$ ed i due sottospazi coincidono perché hanno la stessa dimensione.

Viceversa, ricordiamo che, per una proiezione, si ha $v - \pi'(v) \in \ker\pi'$, per ogni vettore v; quindi, se $\ker\pi' = (\mathrm{im}\,\pi')^\perp$, per ogni coppia di vettori v, w, si ha

$$\begin{aligned} g(v - \pi'(v), w - \pi'(w)) &= g(v, w - \pi'(w)) = g(v, w) - g(v, \pi'(w)) \\ g(v - \pi'(v), w - \pi'(w)) &= g(v - \pi'(v), w) = g(v, w) - g(\pi'(v), w) \end{aligned}$$

e si conclude che $g(v, \pi'(w)) = g(\pi'(v), w)$. □

ESERCIZIO 6. [*Vecchio ordinamento*] *Studiare la conica* $\mathscr{C}$ *di equazione*

$$3xy - 4y^2 - 3x + 5y = 0\ .$$

In particolare determinare se è degenere, qual è il suo tipo, un'equazione canonica e l'opportuna trasformazione di coordinate, gli eventuali assi, asintoti, centro, fuochi. Se ne tracci infine un disegno approssimativo.

Svolgimento. Consideriamo, come di consueto il piano affine immerso nel piano proiettivo prendendo $x_0 = 0$ come retta impropria. Una matrice della conica $\mathscr{C}$ è $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ -3 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & -8 \end{pmatrix}$. Poiché il determinante $\det A = -18 \neq 0$ si tratta di una conica non degenere, e poiché $\det A_\infty = -9$ (A_∞ è la sottomatrice quadrata di A che si ottiene cancellando prima riga e prima colonna) si tratta di un'iperbole.

Gli asintoti sono le polari dei due punti di intersezione tra l'iperbole e la retta impropria, ovvero le polari dei punti $A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed $A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Abbiamo quindi le equazioni degli asintoti

$$a_1 : y - 1 = 0, \qquad \text{e} \qquad a_2 : 3x - 4y + 1 = 0$$

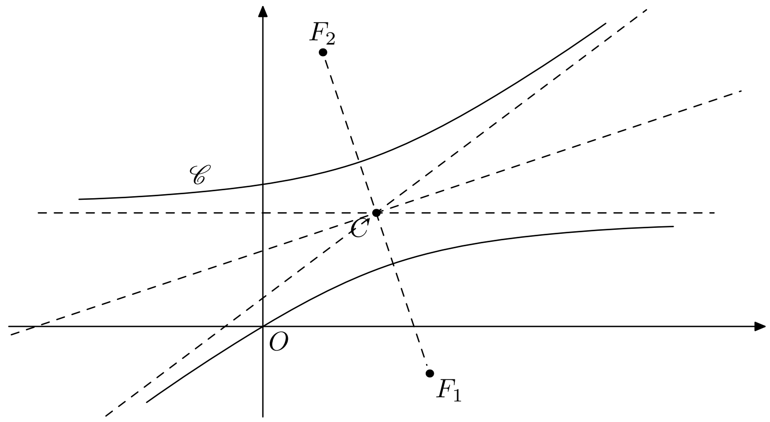
e le due rette si intersecano nel centro dell'iperbole, ovvero il punto di coordinate omogenee $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Gli assi sono le rette per il centro C, parallele agli autovettori della matrice A_∞. La matrice A_∞ ha autovalori -9 e 1 a cui corrispondono gli autovettori $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Gli assi sono quindi le rette

$$h_1 : 3x + y - 4 = 0 \text{ (asse focale)}, \qquad h_2 : x - 3y + 2 = 0.$$

Dunque, l'equazione canonica di $\mathscr{C}$, in un opportuno sistema di riferimento ortonormale, è $\frac{9}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2 = 1$ e la matrice dell'isometria che porta l'equazione in forma canonica è $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ 1 & -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$, come si può verificare calcolando la matrice $-\frac{1}{2}{}^tPAP$. Infine, ricordiamo che i fuochi si trovano sull'asse focale, a distanza $\frac{\sqrt{20}}{3}$ dal centro e quindi sono i punti reali

$$F_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \pm \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Un disegno approssimativo della conica in questione è riportato qui sotto



e la discussione è conclusa. □

Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova scritta del 13 luglio 2004

ESERCIZIO 1. *Nello spazio euclideo di dimensione 4, si considerino le sottovarietà lineari di equazioni*

$$\pi_1 : \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases} \qquad e \qquad \pi_2 : \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}.$$

(*a*) *Si determinino le dimensioni di π_1 e π_2 e si dica se sono incidenti, parallele o sghembe (o nessuna delle tre).*

(*b*) *Si determinino, se esistono, due iperpiani paralleli σ_1 e σ_2 tali che $\sigma_1 \supset \pi_1$ e $\sigma_2 \supset \pi_2$. In caso affermativo, si scrivano le equazioni cartesiane dei due iperpiani.*

(*c*) *Si determini la distanza tra σ_1 e σ_2. È vero che coincide con la distanza tra π_1 e π_2?*

Svolgimento. (a) Le matrici incomplete dei due sistemi hanno entrambe rango 2 e quindi si tratta di due piani. Per valutare le reciproche posizioni, consideriamo il sistema che si ottiene giustapponendo le 4 equazioni date. La matrice incompleta ha rango 3, mentre la matrice completa ha rango 4, come si può vedere riducendo la matrice con la tecnica di Gauss. Quindi l'intersezione tra i due piani è vuota, ma i due piani non sono né paralleli né sghembi, perché nel primo caso il rango della matrice incompleta dovrebbe essere uguale a 2, mentre nel secondo dovrebbe essere uguale a 4 (con rango della matrice completa uguale a 5, che è impossibile). In particolare, si ha

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad e \qquad \pi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(*b*) Per quanto visto al punto precedente, i sottospazi direttori, W_1 e W_2, dei due piani si intersecano in un sottospazio di dimensione 1 e quindi il sottospazio generato dai due ha dimensione 3. Applicando $W_1 + W_2$ ad un punto P_1 di π_1 e ad un punto P_2 di π_2, rispettivamente, si ottengono due iperpiani paralleli e $\pi_1 \subset P_1 + (W_1 + W_2)$ e $\pi_2 \subset P_2 + (W_1 + W_2)$. I due iperpiani hanno equazioni cartesiane

$$\sigma_1 : x_1 - 4x_3 + x_4 = 2 \qquad e \qquad \sigma_2 = x_1 - 4x_3 + x_4 = -3.$$

(*c*) La distanza, δ, tra i due iperpiani coincide con la lunghezza della proiezione del vettore $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ lungo il vettore $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, ortogonale ai due iperpiani σ_1 e σ_2. Si ha quindi $\delta = \dfrac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot n|}{\|n\|} = \frac{5}{3\sqrt{2}}$.

Osserviamo infine che δ coincide con la distanza tra π_1 e π_2. Infatti, se prendiamo $P_1 \in \pi_1$ e $P_2 \in \pi_2$ aventi minima distanza, il vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$ è ortogonale ai due piani ed è quindi parallelo ad n. Ne consegue che la lunghezza della proiezione di $\overrightarrow{P_1P_2}$ lungo il vettore n coincide con $\|\overrightarrow{P_1P_2}\|$ cioè con la distanza tra π_1 e π_2.

Lo studente poteva verificare direttamente l'uguaglianza tra le distanze, calcolando esplicitamente la distanza tra π_1 e π_2, ovvero

$$\frac{vol^4\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\right)}{vol^3\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right)}$$

ove si considerino i volumi non orientati. □

ESERCIZIO 2. *Si determini, se esiste, un'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ soddisfacente alle seguenti condizioni*

$$\begin{aligned} &\phi(e_1+e_3) = 2e_1 - e_2 - e_4; \qquad \phi(e_2+e_3) = -e_1 + 2e_3 - 2e_4;\\ &\phi(e_2+e_3+e_4) = -2e_1 + 2e_3; \qquad \phi(e_1+e_2+e_3) = e_1 - 2e_4. \end{aligned}$$

e se ne scriva la matrice, A, rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$.

(a) Si mostri che l'insieme $T = \{ Y \in M_4(\mathbb{R}) \mid AY = A \}$ è una sottovarietà lineare di $\mathbb{A}(M_4(\mathbb{R}))$ e se ne determinino la dimensione ed una rappresentazione parametrica.

(b) Sia I il sottoinsieme di T formato dalle matrici $Y \in T$ tali che $Y - \mathbf{1}$ sia nilpotente. Si mostri che $I \neq \{\mathbf{1}\}$ e che se $X \in I$, allora $X^{-1} \in I$.

Svolgimento. Ricordando che ϕ deve essere un'applicazione lineare, dalle relazioni date, si ricava

$$\begin{aligned} \phi(e_1) &= \phi(e_1+e_2+e_3) - \phi(e_2+e_3) = e_1 - 2e_4 + e_1 - 2e_3 + 2e_4 = 2e_1 - 2e_3;\\ \phi(e_2) &= \phi(e_1+e_2+e_3) - \phi(e_1+e_3) = e_1 - 2e_4 - 2e_1 + e_2 + e_4 = -e_1 + e_2 - e_4;\\ \phi(e_3) &= \phi(e_2+e_3) - \phi(e_2) = -e_1 + 2e_3 - 2e_4 + e_1 - e_2 + e_4 = -e_2 + 2e_3 - e_4;\\ \phi(e_4) &= \phi(e_2+e_3+e_4) - \phi(e_2+e_3) = -2e_1 + 2e_3 + e_1 - 2e_3 + 2e_4 = -e_1 + 2e_4. \end{aligned}$$

Dunque esiste un'unica applicazione lineare, ϕ, soddisfacente alle condizioni richieste ed ha matrice

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ -2 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(*a*) Considerando come incognite le 16 entrate della matrice Y, la condizione $AY = A$ diventa un sistema di equazioni lineari, ed il rango della matrice incompleta è uguale a $4\mathrm{rk}A$. Inoltre, T non è vuoto, perché certamente $\mathbf{1}_4 \in T$, quindi T è una sottovarietà lineare di $\mathbb{A}(M_4(\mathbb{R}))$, di dimensione $16 - 4\mathrm{rk}A$ ed i suoi punti si ottengono tutti sommando alla matrice $\mathbf{1}$ (soluzione particolare) le matrici, X, soddisfacenti alla condizione $AX = \mathbf{0}$ (soluzioni del sistema omogeneo associato). È quindi chiaro che le colonne di una tale matrice X sono le coordinate di vettori appartenenti a $\ker\phi = \langle e_1+e_2+e_3+e_4 \rangle$. Si conclude che $\mathrm{rk}A = 1$ e che

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a&b&c&d\\ a&b&c&d\\ a&b&c&d\\ a&b&c&d \end{pmatrix} \mid {}^t(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

(*b*) Da quanto visto, discende che, se $Y \in T$, allora $Y - \mathbf{1} = X$ è una matrice di rango 1 ed il suo polinomio caratteristico è $p_X(x) = x^3(x - a - b - c - d)$. Dunque, X è nilpotente se, e solo se, $a + b + c + d = 0$ e l'insieme I è quindi una sottovarietà lineare di dimensione 3 in $\mathbb{A}(M_4(\mathbb{R}))$. Se $Y \in I$ ed $X = Y - \mathbf{1}$, allora $X^2 = 0$ (perché $\mathrm{rk}X = 1$) e quindi $Y^{-1} = (\mathbf{1} + X)^{-1} = 1 - X \in I$. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri l'endomorfismo ϕ di $\mathbb{R}^4$ di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 5 & 0 & -4\\ -2 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Si determini il polinomio caratteristico di ϕ e si dica se ϕ è invertibile.

(b) Si determinino gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori per ϕe si dica se ϕ è diagonalizzabile.

(c) Si determini il polinomio minimo di ϕ ed un autovettore generalizzato di periodo massimo per ciascuno degli autovalori di ϕ.

(d) Si determinino la forma canonica di Jordan J di ϕ ed una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP = J$.

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = (x-1)^4$, e il determinante di A è $p_\phi(0) = 1 \neq 0$, per cui l'endomorfismo ϕ è invertibile.

(b) – (c) ϕ ha uno solo autovalore, 1, con molteplicità 4. Si ha

$$A - \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad (A-\mathbf{1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 24 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (A-\mathbf{1})^3 = \begin{pmatrix} 0 & 64 & 0 & -64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -64 & 0 & 64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ed $(A-\mathbf{1})^4 = \mathbf{0}$. Poiché $\mathrm{rk}(A-\mathbf{1}) = 3$, gli autovettori formano un sottospazio di dimensione 1. Inoltre, il massimo periodo di un autovettore generalizzato è uguale a 4 e quindi il polinomio minimo è uguale al polinomio caratteristico: $\lambda_\phi(x) = (x-1)^4$. Un autovettore generalizzato di periodo 4 è e_2 ed una base dell'unico blocco di Jordan è $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, ove

$$v_4 = e_2, \qquad v_3 = (\phi - 1)(v_4) = e_1 + 4e_2 + 3e_3 + 4e_4,$$
$$v_2 = (\phi-1)^2(v_4) = 24e_1 + 8e_3, \qquad v_1 = (\phi-1)^3(v_4) = 64e_1 - 64e_3.$$

(d) Si han quindi le matrici richieste

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 64 & 24 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ -64 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 4. *Si consideri la forma bilineare g associata alla forma quadratica*

$$Q(X) = 2X_1^2 - 4X_3^2 - X_4^2 - 6X_1X_2 + 2X_1X_3 + 4X_1X_4 + 6X_2X_3 - 4X_3X_4.$$

(a) *Si scriva la matrice G di tale forma bilineare nel riferimento dato. Si determini se g è degenere e se ne calcoli l'eventuale nucleo.*

(b) *Si determinino rango e segnatura di g e si scrivano ed una matrice invertibile P ed una matrice diagonale Δ tali che ${}^tPGP = \Delta$.*

(c) *Determinare la dimensione dei sottospazi isotropi massimali per g, e dare un esempio di un tale sottospazio.*

(d) *Sia N l'eventuale nucleo di g e sia $\mathbb{R}^4 = W \oplus N$ ed indichiamo con $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proiezione su W parallelamente ad N. Se Z è un complementare di N, si mostri che π induce un isomorfismo tra Z e W e che, per ogni $z, z' \in Z$, si ha $g(z, z') = g(\pi(z), \pi(z'))$.*

Svolgimento. (a) La matrice G richiesta è

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

e si ha $\det G = 0$. L'applicazione bilineare g è dunque degenere, e possiamo calcolarne il nucleo, N, che ha dimensione 1 (perché la matrice G ha rango 3) ed è generato dal vettore $v_1 = e_1 + e_2 + e_3$.

(b) Si tratta di trovare una base di $\mathbb{R}^4$ tale che il primo vettore sia v_1 e gli altri tre siano una base ortogonale di un qualsiasi complementare, W, di N. Prendiamo quindi $W = \langle e_2, e_3, e_4 \rangle$ e $v_2 = e_4$, con $g(v_2, v_2) = -1$; $v_3 \in \langle v_2 \rangle^\perp \cap W$, ad esempio $v_3 = e_2 + e_3 - 2e_4$ con $g(v_3, v_3) = 6$; ed infine $v_4 \in \langle v_2, v_3 \rangle^\perp \cap W$, e quindi $v_4 = e_2 - e_3 + 2e_4$ con $g(v_4, v_4) = -6$. Dunque g ha rango 3 e segnatura $(1, 2)$ e, posto

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

si ha ${}^tPGP = \Delta$, come richiesto.

(c) I sottospazi isotropi massimali per g certamente contengono il nucleo, e sono generati dal nucleo e da un sottospazio isotropo massimale per la forma ristretta a W. Dunque un tale sottospazio ha dimensione al più 2. Siccome il vettore e_2 è isotropo, si concludeo che $\langle e_2, e_1+e_2+e_3\rangle$ è un sottospazio isotropo massimale per g.

(d) Sia $z \in Z$. Poiché $\mathbb{R}^4 = W \oplus N$ esistono (e sono unici) $w \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tali che $z = w + \alpha v_1$ e $\pi(z) = w = z - \alpha v_1$. Dunque, la restrizione di π a W è un'applicazione lineare ed è iniettiva, perché $\ker\phi = N$ ed $N \cap Z = \langle 0\rangle$. Poiché W e Z hanno la stessa dimensione, la restrizione di π è una biiezione. Infine, per $z, z' \in Z$, si ha

$$g(\pi(z), \pi(z')) = g(z - \alpha v_1, z' - \alpha' v_1) = g(z, z')$$

perché v_1 è nel nucleo di g. □

ESERCIZIO 5. *Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\le 3}$ lo spazio vettoriale formato dai polinomi a coefficienti reali, di grado minore o uguale a 3. Si consideri l'applicazione f definita ponendo*

$$P(X) \mapsto (X^2-1)P'(X) - (3X-1)P(X)$$

(a) Si mostri che $f(V) \subseteq V$ e che f è un endomorfismo di V. Si scriva la matrice di $f : V \to V$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$.
(b) Si determinino nucleo ed immagine di f esibendo una base di ciascuno dei due sottospazi.
(c) Si dica se il sottoinsieme $B = \{\, \psi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V \mid \psi \circ f = 0 \,\}$ è un sottospazio di $\mathrm{End}_{\mathbb{R}} V$ e, in caso affermativo, si determinino la dimensione di B ed una base del sottospazio $\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(B) \subseteq M_4(\mathbb{R})$.

Svolgimento. (a) Poiché la derivazione è un'applicazione lineare in $\mathbb{R}[X]$, come pure la moltiplicazione per un polinomio fissato, si conclude che l'applicazione data è un'applicazione lineare in $\mathbb{R}[X]$. Si ha

$$f(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3) = (a_0 - a_1) - (3a_0 - a_1 + 2a_2)X + (-2a_1 + a_2 - 3a_3)X^2 - (a_2 - a_3)X^3$$

e quindi $f(V) \subseteq V$ e dunque f appartiene ad $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ ed ha matrice

$$A = \alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) La matrice A, e quindi l'applicazione f, ha rango 3 e si ha $\mathrm{im} f = \left\langle 1 - 3X, 1 - X + 2X^2, 2X - X^2 + X^3 \right\rangle$ e $\ker f = \left\langle 1 + X - X^2 - X^3 \right\rangle$.

(c) L'insieme B contiene lo zero ed è chiuso per combinazioni lineari, quindi è un sottospazio di $\mathrm{End}_{\mathbb{R}} V$. Un endomorfismo ψ appartiene a B se, e solo se, $\psi(v) = 0$, per ogni $v \in \mathrm{im} f$. Quindi B è isomorfo allo spazio $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U, V)$, ove U è un complementare di $\mathrm{im} f$ in V (l'isomorfismo $\mathrm{End}_{\mathbb{R}} V \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U, V)$ manda ψ in $\psi \circ j$, ove $j : U \to V$ è l'inclusione).

Si conclude che $\dim B = (\dim U)(\dim V) = 4$ e

$$\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} 3a & a & -a & -3a \\ 3b & b & -b & -3b \\ 3c & c & -c & -3c \\ 3d & d & -d & -3d \end{pmatrix} \mid {}^t(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 6. [*Vecchio ordinamento*] *Studiare la conica $\mathscr{C}$ di equazione*

$$6x^2 - 4xy + 9y^2 - 24x + 8y + 22 = 0\ .$$

In particolare determinare se è degenere, qual è il suo tipo, una equazione canonica e la opportuna trasformazione di coordinate, gli eventuali assi, asintoti, centro, fuochi. Se ne tracci infine un disegno approssimativo.

Svolgimento. Consideriamo, come di consueto il piano affine immerso nel piano proiettivo prendendo $x_0 = 0$ come retta impropria. Una matrice della conica $\mathscr{C}$ è $A = \begin{pmatrix} 22 & -12 & 4 \\ -12 & 6 & -2 \\ 4 & -2 & 9 \end{pmatrix}$. Poiché il determinante $\det A = -100 \neq 0$ si tratta di una conica non degenere, e poiché $\det A_\infty = 50$ (A_∞ è la sottomatrice quadrata di A che si ottiene cancellando prima riga e prima colonna) si tratta di un'ellisse.

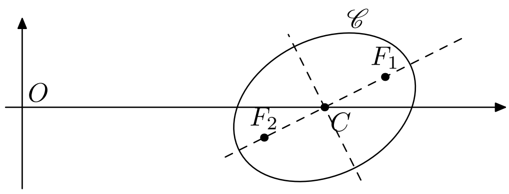
Il centro dell'ellisse ha coordinate omogenee $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e gli assi sono le rette per il centro C, parallele agli autovettori della matrice A_∞. La matrice A_∞ ha autovalori 5 e 10 a cui corrispondono gli autovettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Gli assi sono quindi le rette

$$h_1 : (x-2) - 2y = 0 \text{ (asse focale)}, \qquad h_2 : 2(x-2) + y = 0.$$

Dunque, l'equazione canonica di $\mathscr{C}$, in un opportuno sistema di riferimento ortonormale, è $\frac{5}{2}X^2 + 5Y^2 = 1$. Infine, ricordiamo che i fuochi si trovano sull'asse focale, a distanza $\frac{1}{\sqrt{5}}$ dal centro e quindi sono i punti reali

$$F_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \pm \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Un disegno approssimativo della conica in questione è riportato qui sotto



e la discussione è conclusa. □

Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova scritta del 9 settembre 2004

ESERCIZIO 1. *Nello spazio euclideo* $\mathbb{R}^4$ *si considerino*

$$\text{i piani} \quad \pi_1 : \begin{cases} x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_3 = 4 \end{cases}, \quad \pi_2 : \begin{cases} x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}, \quad \text{e la retta} \quad r : \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

(a) Si determinino le coordinate dell'unico punto, P, contenuto in $\pi_1 \cap \pi_2$.
(b) Si determinino le coordinate dei punti, $Q_1 = r \cap \pi_1$ e $Q_2 = r \cap \pi_2$.
(c) Si determinino il baricentro, G, e l'area del triangolo PQ_1Q_2.
(d) Si determinino le equazioni cartesiane del piano σ passante per G e perpendicolare al piano contenente il triangolo PQ_1Q_2.

Svolgimento. (a) Il sistema

$$\pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_3 = 4 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases},$$

ha rango 4 e quindi ha come unica soluzione il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) I due sistemi lineari

$$r \cap \pi_1 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_3 = 4 \end{cases} \quad \text{ed} \quad r \cap \pi_2 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

hanno entrambi rango 4 (sia completo che incompleto) e quindi le soluzioni sono costituite, rispettivamente, dai due punti $Q_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) Il baricentro del triangolo è il punto $G = \frac{1}{3}(P + Q_1 + Q_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Per calcolare l'area del triangolo PQ_1Q_2, consideriamo la matrice $Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, avente come colonne le coordinate dei vettori $\overrightarrow{PQ_1}$ e $\overrightarrow{PQ_2}$. L'area del triangolo è uguale a $\frac{1}{2}\sqrt{\det({}^tYY)} = \frac{\sqrt{59}}{2}$.

(d) Poiché il piano σ è parallelo al sottospazio $\left\langle \overrightarrow{PQ_1}, \overrightarrow{PQ_2} \right\rangle^\perp$, possiamo prendere le coordinate di questi due vettori come parte omogenea del sistema che determina σ. Imponendo il passaggio per il punto G, si ottengono le equazioni cartesiane, ovvero

$$\sigma : \begin{cases} 3x_1 + 6x_3 - 6x_4 = 1 \\ 3x_1 - 3x_2 - 9x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}.$$

Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 2. *Si determini, se esiste, un'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ soddisfacente alle seguenti condizioni*

$$\phi(e_1 + e_3) = 3e_1 + e_2 + e_3 + e_4; \qquad \phi(e_2 + e_3) = e_1 + e_3 + 2e_4;$$
$$\phi(e_2 + e_3 + e_4) = 4e_1 + 3e_3 + 4e_4; \qquad \phi(e_1 + e_2 + e_3) = 3e_1 + 2e_3 + 2e_4.$$

e se ne scriva la matrice, A, rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$.

(*a*) *Si mostri che l'insieme $T = \{\, Y \in M_4(\mathbb{R}) \mid AY = A \,\}$ è una sottovarietà lineare di $\mathbb{A}(M_4(\mathbb{R}))$ e se ne determinino la dimensione ed una rappresentazione parametrica.*

(*b*) *Sia I il sottoinsieme di T formato dalle matrici $Y \in T$ tali che $Y - \mathbf{1}$ sia nilpotente. Si mostri che $I \neq \{\mathbf{1}\}$ e che se $X \in I$, allora $X^{-1} \in I$.*

Svolgimento. Ricordando che ϕ deve essere un'applicazione lineare, dalle relazioni date, si ricava

$$\begin{aligned}
\phi(e_1) &= \phi(e_1 + e_2 + e_3) - \phi(e_2 + e_3) = 2e_1 + e_3;\\
\phi(e_2) &= \phi(e_1 + e_2 + e_3) - \phi(e_1 + e_3) = -e_2 + e_3 + e_4;\\
\phi(e_3) &= \phi(e_2 + e_3) - \phi(e_2) = e_1 + e_2 + e_4;\\
\phi(e_4) &= \phi(e_2 + e_3 + e_4) - \phi(e_2 + e_3) = 3e_1 + 2e_3 + 2e_4.
\end{aligned}$$

Dunque esiste un'unica applicazione lineare, ϕ, soddisfacente alle condizioni richieste ed ha matrice

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(*a*) Considerando come incognite le 16 entrate della matrice Y, la condizione $AY = A$ diventa un sistema di equazioni lineari, ed il rango della matrice incompleta di tale sistema è uguale a $4\mathrm{rk}\,A$. Inoltre, T non è vuoto, perché certamente $\mathbf{1}_4 \in T$, quindi T è una sottovarietà lineare di $\mathbb{A}(M_4(\mathbb{R}))$, di dimensione $16 - 4\mathrm{rk}\,A$ ed i suoi punti si ottengono tutti sommando alla matrice $\mathbf{1}$ (soluzione particolare) le matrici, X, soddisfacenti alla condizione $AX = \mathbf{0}$ (soluzioni del sistema omogeneo associato). È quindi chiaro che le colonne di una tale matrice X sono le coordinate di vettori appartenenti a $\ker\phi = \langle e_1 + e_2 + e_3 - e_4 \rangle$. Si conclude che $\mathrm{rk}\,A = 3$ e che

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \\ a & b & c & d \\ -a & -b & -c & -d \end{pmatrix} \;\middle|\; {}^t(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

(*b*) Da quanto visto, discende che, se $Y \in T$, allora $Y - \mathbf{1} = X$ è una matrice di rango 1 ed il suo polinomio caratteristico è $p_X(x) = x^3(x - a - b - c + d)$. Dunque, X è nilpotente se, e solo se, $a + b + c - d = 0$ e l'insieme I è quindi una sottovarietà lineare di dimensione 3 in $\mathbb{A}(M_4(\mathbb{R}))$. Se $Y \in I$ ed $X = Y - \mathbf{1}$, allora $X^2 = 0$ (perché $\mathrm{rk}\,X = 1$) e quindi $Y^{-1} = (\mathbf{1} + X)^{-1} = 1 - X \in I$. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri l'endomorfismo ϕ di $\mathbb{R}^4$ di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) *Si determini il polinomio caratteristico di ϕ e si dica se ϕ è invertibile.*

(b) *Si determinino gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori per ϕe si dica se ϕ è diagonalizzabile.*

(c) *Si determini il polinomio minimo di ϕ ed un autovettore generalizzato di periodo massimo per ciascuno degli autovalori di ϕ.*

(d) *Si determinino la forma canonica di Jordan J di ϕ ed una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP = J$.*

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = (x-2)^4$, e il determinante di A è $p_\phi(0) = 16 \neq 0$, per cui l'endomorfismo ϕ è invertibile.

(b) – (c) ϕ ha uno solo autovalore, 2, con molteplicità 4. Si ha

$$A - 2\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ed $(A - 2\mathbf{1})^2 = \mathbf{0}$. Poiché $\mathrm{rk}(A - \mathbf{1}) = 2$, gli autovettori formano un sottospazio di dimensione 2, generato dalle colonne di $A - 2\mathbf{1}$. Inoltre, il massimo periodo di un autovettore generalizzato è uguale a 2 e quindi il polinomio minimo è uguale a: $\lambda_\phi(x) = (x-2)^2$. La matrice di Jordan è costituita da due blocchi di ordine 2. Due autovettori generalizzati di periodo 2, tra loro indipendenti sono e_1 ed e_2 ed una base rispetto a cui la matrice assume la forma di Jordan è $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, ove

$$v_4 = e_2, \qquad v_3 = (\phi - 2)(v_4) = e_1 + e_2 - e_3 + e_4,$$
$$v_2 = e_1, \qquad v_1 = (\phi - 2)(v_2) = 4e_1 - 2e_3.$$

(d) Si han quindi le matrici richieste

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 4. *Si consideri su $\mathbb{R}^4$ la forma bilineare g, associata alla forma quadratica*

$$Q(X) = -X_1^2 - 2X_1X_4 + 3X_2^2 + 6X_2X_4 + 2X_3^2 + 4X_3X_4 + 4X_4^2.$$

(a) *Si scriva la matrice G di tale forma bilineare nel riferimento dato, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$. Si dica se g è degenere e se ne calcoli l'eventuale nucleo.*
(b) *Si determinino rango e segnatura di g e si scrivano ed una matrice invertibile P ed una matrice diagonale Δ tali che ${}^tPGP = \Delta$.*
(c) *Sia N l'eventuale nucleo di g e siano $W_1 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, e $W_2 = \langle e_2, e_3, e_4 \rangle$, dotati della restrizione dell'applicazione bilineare g. È vero che la restrizione di g ai due sottospazi è non-degenere e che $W_1 \oplus N = \mathbb{R}^4 = W_2 \oplus N$?*
(d) *Sia $\phi : W_1 \to W_2$ l'applicazione che manda $x \in W_1$ nel vettore $x' \in W_2$ tale che $x' - x \in N$. Si verifichi che l'applicazione ϕ è ben definita ed è un'isometria tra i due spazi. Si scriva la matrice di ϕ rispetto alle basi date.*

Svolgimento. (a) La matrice G richiesta è

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

e si ha $\det G = 0$. L'applicazione bilineare g è dunque degenere, il nucleo, N, ha dimensione 1 ($\mathrm{rk}\, G = 3$) ed è generato dal vettore $v_4 = e_1 + e_2 + e_3 - e_4$.

(b) I vettori e_1, e_2, e_3 sono ortogonali tra loro e quindi, rispetto alla base e_1, e_2, e_3, v_4 l'applicazione g ha matrice diagonale. Dunque g ha rango 3, segnatura $(2,1)$ e, posto

$$\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

si ha ${}^tPGP = \Delta$, come richiesto.

(c) È chiaro dal punto precedente che la restrizione di g a W_1 è non degenere e che $W_1 \oplus N = \mathbb{R}^4$. D'altra parte, si ha $W_2 \cap N = \langle 0 \rangle$ e $W_2^{\perp} = N$; quindi la restrizione di g a W_2 è non-degenere ed $\mathbb{R}^4 = W_2 \oplus N$.

(d) L'applicazione $\phi : W_1 \to W_2$ coincide con la restrizione a W_1 della proiezione su W_2, parallela ad N ($\mathbb{R}^4 = W_2 \oplus N$), e quindi è ben definita ed è un'applicazione lineare. È un'isometria perché N è il nucleo di g, infatti, si ha $\phi(x) = x' = x + n$, per un opportuno $n = (x' - x) \in N$; e quindi, dati $x, y \in W_1$, si ha

$$g(\phi(x), \phi(y)) = g(x + n_1, y + n_2) = g(x, y), \qquad \text{perché } n_1, n_2 \in N.$$

Con un calcolo diretto si ottiene la matrice di ϕ nelle basi date, essendo $\phi(e_1) = -e_2 - e_3 + e_4$, $\phi(e_2) = e_2$, $\phi(e_3) = e_3$. Dunque

$$B = \alpha_{\{e_1,e_2,e_3\},\{e_2,e_3,e_4\}}(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fine della discussione. □

ESERCIZIO 5. *Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\le 3}$ lo spazio vettoriale formato dai polinomi a coefficienti reali, di grado minore o uguale a 3. Si consideri l'applicazione f definita ponendo*

$$P(X) \mapsto (X^2 + X)P'(X) - (3X + 2)P(X)$$

(a) *Si mostri che $f(V) \subseteq V$ e che f è un endomorfismo di V. Si scriva la matrice di $f : V \to V$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$.*
(b) *Si determinino nucleo ed immagine di f esibendo una base di ciascuno dei due sottospazi.*
(c) *Si dica se f è diagonalizzabile e si determinino i suoi autovalori ed una base di ciascun spazio di autovettori corrispondente.*

Svolgimento. (a) Poiché la derivazione è un'applicazione lineare in $\mathbb{R}[X]$, come pure la moltiplicazione per un polinomio fissato, si conclude che l'applicazione data è un'applicazione lineare in $\mathbb{R}[X]$. Si ha

$$f(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3) = (-2a_0) - (3a_0 + a_1)X - (-2a_1)X^2 - (a_2 - a_3)X^3$$

e quindi $f(V) \subseteq V$ e dunque f appartiene ad $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ ed ha matrice

$$A = \alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) La matrice A, e quindi l'applicazione f, ha rango 3 e si ha $\operatorname{im} f = \left\langle -2 - 3X, -X - 2X^2, X^3 \right\rangle$ e $\ker f = \left\langle X^2 + X^3 \right\rangle$.

(c) La matrice A è triangolare superiore con gli elementi sulla diagonale a due a due distinti; quindi f è diagonalizzabile e si ha

Autovalori	-2	-1	0	1
Autovettori	$\left\langle 1 + 3X + 3X^2 + X^3 \right\rangle$	$\left\langle X + 2X^2 + X^3 \right\rangle$	$\left\langle X^2 + X^3 \right\rangle$	$\left\langle X^3 \right\rangle$

Fine della discussione. □

ESERCIZIO 6. [*Vecchio ordinamento*] *Studiare la conica $\mathscr{C}$ di equazione*

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 - 14x - 8y + 10 = 0 .$$

In particolare determinare se è degenere, qual è il suo tipo, un'equazione canonica e la matrice dell'opportuna trasformazione di coordinate, gli eventuali assi, asintoti, centro, fuochi. Si tracci infine un disegno approssimativo.

Svolgimento. Consideriamo, come di consueto il piano affine immerso nel piano proiettivo prendendo $r_\infty : x_0 = 0$ come retta impropria. Una matrice della conica $\mathscr{C}$ è $A = \begin{pmatrix} 10 & -7 & -4 \\ -7 & 4 & 6 \\ -4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. Poiché il determinante $\det A = -13^2 \neq 0$ si tratta di una conica non degenere, e poiché $\det A_\infty = 0$ (A_∞ è la sottomatrice quadrata di A che si ottiene cancellando prima riga e prima colonna) si tratta di una parabola.

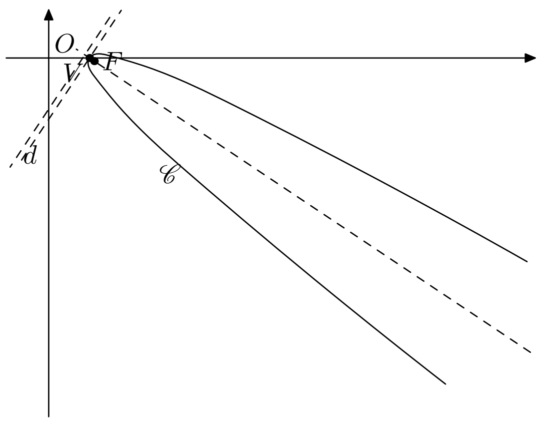
La direzione dell'asse della parabola ($\mathscr{C} \cap r_\infty$) è il punto improprio $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; la direzione ortogonale è $P_\infty^\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, e quindi l'asse della parabola è la retta

$$h = \pi_{\mathscr{C}}(P_\infty^\perp) : 2x + 3y = 2,$$

ed il vertice è il punto $h \cap \mathscr{C} = V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. L'autovalore non nullo della matrice A_∞ è 13 e dunque, l'equazione canonica di $\mathscr{C}$, in un opportuno sistema di riferimento ortonormale, è $2Y - \sqrt{13}X^2 = 0$. Infine, ricordiamo che il fuoco si trova sull'asse focale, a distanza $\frac{1}{2\sqrt{13}}$ dal centro e la sua polare, la direttrice, non interseca la parabola in punti reali. Dunque è il punto

$$F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29/26 \\ -1/13 \end{pmatrix}.$$

Un disegno approssimativo della conica in questione è riportato qui sotto



e la discussione è conclusa. □

Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova scritta del 20 settembre 2004

ESERCIZIO 1. *Nello spazio euclideo di dimensione 4, si considerino i punti*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si verifichi che i tre punti non sono allineati e si determinino le equazioni cartesiane del piano, π, passante per P_1, P_2, P_3, e del piano, σ, passante per P_1 ed ortogonale a π.*
(b) *Sia $f : \mathbb{A}(\mathbb{R}^4) \to \mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$ la proiezione su σ parallela a π; si scriva la matrice di f.*
(c) *Si calcoli l'area, A, del triangolo $P_1P_2P_3$ e si scrivano le equazioni del luogo C dei punti $P \in \sigma$ tali che il volume del tetraedro di vertici $P_1P_2P_3P$ sia uguale ad A.*

Svolgimento. (a) I vettori

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{e} \qquad \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

non sono proporzionali e quindi i tre punti non sono allineati. I tre punti appartengono al piano

$$\pi : \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}.$$

Il piano σ passa per P_1 ed il suo sottospazio direttore è $\left\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3} \right\rangle^\perp$; quindi

$$\sigma : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}.$$

(b) Una base ortogonale del sottospazio direttore di π è data dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix};$$

poiché $P_1 = \pi \cap \sigma$, si ha $f(P_1) = P_1$ e quindi, per un generico punto X,

$$f(X) = P_1 + (X - P_1) - \frac{\overrightarrow{P_1X} \cdot v_1}{\|v_1\|^2}\, v_1 - \frac{\overrightarrow{P_1X} \cdot v_2}{\|v_2\|^2}\, v_2;$$

ovvero

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} - \tfrac{5(2-x_1-x_3+x_4}{15} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \tfrac{-8+x_1+3x_2-2x_3-x_4}{15} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi, la matrice cercata è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6/5 & 3/5 & -1/5 & -1/5 & 2/5 \\ 8/5 & -1/5 & 2/5 & 2/5 & 1/5 \\ -2/5 & -1/5 & 2/5 & 2/5 & 1/5 \\ -6/5 & 2/5 & 1/5 & 1/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

(c) Indicata con Y la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$, si ha che l'area del triangolo $P_1P_2P_3$ è uguale ad

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{\det({}^tYY)} = \sqrt{5}.$$

Preso un qualunque punto, P, nel piano σ, il segmento P_1P è perpendicolare al piano π e quindi P_1P è l'altezza del tetraedro relativa alla base $P_1P_2P_3$ e quindi il volume del tetraedro $P_1P_2P_3P$ è uguale al prodotto $\frac{1}{3}A\|\overrightarrow{P_1P}\|$. Si conclude che il luogo cercato è la circonferenza sul piano σ, di centro P_1 e raggio 3 che ha equazioni

$$C: \begin{cases} (x_1-1)^2+(x_2-2)^2+x_3^2+(x_4+1)^2=9 \\ x_1-2x_2+3x_3-x_4=-2 \\ x_1+x_3-x_4=2 \end{cases}.$$

□

ESERCIZIO 2. *Si considerino le applicazioni lineari $\alpha:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ e $\beta:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ definite dalle posizioni*

$$\alpha(e_1+e_2+e_3+e_4)=e_1+e_3,\quad \alpha(e_1+e_2)=3e_2,\quad \alpha(e_2+e_3+e_4)=2e_1+e_3,\quad \alpha(2e_3+e_4)=0;$$
$$\beta(e_1+e_2+e_3)=e_1+2e_2+2e_4,\qquad \beta(e_2+e_3)=-e_2-e_4,\qquad \beta(e_1+e_3)=e_1+2e_2+3e_4.$$

e se ne scrivano le matrici, $A=\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\alpha)$ e $B=\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\beta)$, rispetto alla basi canoniche.
(a) Si determinino delle basi per nucleo ed immagine di α e β.
(b) Si mostri che l'insieme $S=\{\,X\in M_4(\mathbb{R})\mid AXB=0\,\}$ è un sottospazio vettoriale di $M_4(\mathbb{R})$ e se ne determinino la dimensione ed una base. Si dica se esistono matrici invertibili in S.

Svolgimento. Si ha

$$\begin{aligned}
&\alpha(e_1)=\alpha(e_1+e_2+e_3+e_4)-\alpha(e_2+e_3+e_4)=(e_1+e_3)-(2e_1+e_3)=-e_1;\\
&\alpha(e_2)=\alpha(e_1+e_2)-\alpha(e_1)=(3e_2)-(-e_1)=e_1+3e_2;\\
&\alpha(e_3)=\alpha(e_2)+\alpha(2e_3+e_4)-\alpha(e_2+e_3+e_4)=(e_1+3e_2)-(2e_1+e_3)=-e_1+3e_2-e_3;\\
&\alpha(e_4)=\alpha(2e_3+e_4)-2\alpha(e_3)=-2(-e_1+3e_2-e_3)=2e_1-6e_2+2e_3.
\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned}
&\beta(e_1)=\beta(e_1+e_2+e_3)-\beta(e_2+e_3)=(e_1+2e_2+2e_4)-(-e_2-e_4)=e_1+3e_2+3e_4;\\
&\beta(e_3)=\beta(e_1+e_3)-\beta(e_1)=(e_1+2e_2+3e_4)-(e_1+3e_2+3e_4)=-e_2;\\
&\beta(e_2)=\beta(e_2+e_3)-\beta(e_3)=(-e_2-e_4)-(-e_2)=-e_4.
\end{aligned}$$

Dunque, le matrici cercate sono

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Entrambo le matrici A e B hanno rango 3, e quindi $\ker\beta=\langle 0\rangle$ ed $\operatorname{im}\alpha=\mathbb{R}^3$. Inoltre $\ker\alpha=\langle 2e_3+e_4\rangle$ e $\operatorname{im}\beta=\langle e_1,e_2,e_4\rangle$.

(b) Le matrici $X\in S$ corrispondono ad endomorfismi $\chi:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ per cui $\operatorname{im}(\chi\circ\beta)\subseteq\ker\alpha$; ovvero $\chi(\operatorname{im}\beta)\subseteq\ker\alpha$. Poiché $\mathbb{R}^4=\operatorname{im}\beta\oplus\langle e_3\rangle$, la terza colonna della matrice X può essere fissata ad arbitrio, mentre le altre tre colonne devono essere vettori di $\ker\alpha$, e quindi S ha dimensione 7 ed una sua base è data dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\2&0&0&0\\1&0&0&0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&2&0&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&2\\0&0&0&1 \end{pmatrix}.$$

Ogni matrice di S ha quindi rango minore o uguale a 2 e perciò non ci sono matrici invertibili in S. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -2 & -6 \\ -6 & 2 & -8 & -12 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.
(a) Si determini il polinomio caratteristico di ϕ e si dica se ϕ è diagonalizzabile.
(b) Si determinino gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori generalizzati.
(c) Si determini il polinomio minimo di ϕ ed un autovettore generalizzato di periodo massimo per ciascuno degli autovalori di ϕ.
(d) Si determinino la forma canonica di Jordan J di ϕ ed una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP = J$.

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = (x+4)^4$; infatti, riducendo opportunamente per riga la matrice $A - x\mathbf{1}$, non si modifica il suo determinante e si trova la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2-x \\ 0 & 1 & -2 & x^2+5x+4 \\ 0 & 0 & x+4 & 2(x+4)^2 \\ 0 & 0 & 0 & (x+4)^3 \end{pmatrix}.$$

Vi è un unico autovalore e quindi l'endomorfismo ϕ sarebbe diagonalizzabile se, e solo se, la matrice A fosse scalare.

$(b) - (c)$ ϕ ha il solo autovalore -4, con molteplicità 4. Si ha

$$A+4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & -2 & -6 \\ -6 & 2 & -4 & -12 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (A+4)^2 = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{ed} \qquad (A+4)^3 = \mathbf{0}.$$

I sottospazi di autovettori generalizzati sono quindi

$$\ker(\phi+4) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \ker(\phi+4)^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \ker(\phi+4)^3 = \mathbb{R}^4.$$

Il massimo periodo di un autovettore generalizzato è uguale a 3 e quindi il polinomio minimo è $\lambda_\phi(x) = (x+2)^3$. Un autovettore generalizzato di periodo 3 è, ad esempio, e_1.

(d) Poiché $\mathrm{rk}\,(A+4) = 2$, la matrice di Jordan contiene due blocchi. Una base del blocco di Jordan di ordine 3 è

$$v_4 = e_1, \qquad v_3 = (\phi+4)(v_4) = e_1 - 3e_2 - 6e_3 + e_4, \qquad v_2 = (\phi+4)^2(v_4) = -6e_1 + 3e_4.$$

L'altro blocco di Jordan è generato da un autovettore, v_1, linearmente indipendente da v_2, ad esempio, $v_1 = 2e_2 + e_3$. Determinata la base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, si han quindi le matrici richieste

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 4. *Si consideri la forma bilineare $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ associata alla forma quadratica*

$$Q(X) = -X_1^2 + 4X_1X_4 - 3X_2^2 - 2X_2X_3 + 2X_2X_4 + 6X_3X_4 + X_4^2.$$

(*a*) *Si scriva la matrice* G *di tale forma bilineare nel riferimento dato. Si determini se* g *è degenere e se ne calcoli l'eventuale nucleo.*
(*b*) *Si determinino rango e segnatura di* g *e si scrivano ed una matrice invertibile* P *ed una matrice diagonale* Δ *tali che* ${}^tPGP = \Delta$.
(*c*) *Si determini un sottospazio* H, *di dimensione massima, tale che la restrizione di* g *ad* H *sia degenere ed il nucleo dell'applicazione ristretta abbia la massima dimensione possibile.*
(*d*) *Si consideri lo Spazio di Minkowski, ovvero lo spazio* $\mathbb{R}^4$ *dotato dell'applicazione bilineare,* $h : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, *di matrice* $H = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&-c^2 \end{pmatrix}$ *rispetto alla base canonica. Si dica se esiste un'isometria* $\phi : (\mathbb{R}^4, h) \to (\mathbb{R}^4, g)$ *e, in caso affermativo, se ne scriva la matrice nelle basi date.*

Svolgimento. (a) La matrice G richiesta è

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

e si ha $\det G = -16$. L'applicazione bilineare g è dunque non-degenere ed il suo nucleo è uguale a $\langle 0 \rangle$.
(*b*) Possiamo trovare una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$. Prendiamo quindi $v_1 = e_1$, ove $g(v_1, v_1) = -1$. Inoltre, essendo $g(e_1, e_2) = 0$, possiamo prendere $v_2 = e_2$ e si ha $g(v_2, v_2) = -3$. Ora

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \langle v_1, v_2 \rangle^\perp = \langle e_1, e_2 \rangle^\perp \iff \begin{cases} -x_1 + 2x_4 = 0 \\ -3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases};$$

per cui possiamo prendere $v_3 = e_2 - 3e_3$ e si ha $g(v_3, v_3) = 3$. Infine

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle^\perp = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle^\perp \iff \begin{cases} -x_1 + 2x_4 = 0 \\ -3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases};$$

per cui possiamo prendere $v_4 = 2e_1 + 3e_2 - 8e_3 + e_4$ e si ha $g(v_4, v_4) = -16$. Dunque g ha rango 4 e segnatura $(1, 3)$. Posto

$$\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si ha ${}^tPGP = \Delta$, come richiesto.
(*c*) Perché la restrizione di g ad H sia degenere, deve aversi $H \cap H^\perp \neq \langle 0 \rangle$, e quindi H deve essere l'ortogonale di un sottospazio isotropo. La segnatura di g è uguale ad $(1, 3)$ ed i sottospazi isotropi massimali han perciò dimensione 1, e quindi il sottospazio cercato è l'ortogonale di un vettore isotropo, ad esempio $H = \langle e_3 \rangle^\perp = \langle e_1, e_3, 3e_2 + e_4 \rangle$.
(*d*) Lo spazio di Minkowski ha segnatura $(3, 1)$ e quindi non può esistere un'isometria con lo spazio dato, che ha segnatura $(1, 3)$. □

ESERCIZIO 5. *Sia* $f : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$ *un'affinità e sia* $\phi : V \to V$ *l'applicazione lineare associata* $(f(Q) = f(P) + \phi(\overrightarrow{PQ}))$.
(a) Se $P_1, \dots, P_k$ *sono punti uniti per* f, *è vero o falso che tutti i punti della sottovarietà lineare generata,* $P_1 \vee \cdots \vee P_k$, *sono punti uniti per* f*?.*
(b) Nel piano euclideo $\mathbb{A}(\mathbb{R}^2)$, *si determini, se esiste, un'affinità,* f, *tale che*

$$f(P_1) = P_1, \qquad f(P_2) = P_2, \qquad e_1 \cdot \phi(e_2) = e_2 \cdot \phi(e_1), \qquad e_1 \cdot \phi(e_1) + e_2 \cdot \phi(e_2) = 0;$$

ove $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. *È vero o falso che* f *è un'isometria?*

Svolgimento. (a) È vero e ci sono molti modi per verificarlo. Ad esempio, ricordando che $P_1 \vee \cdots \vee P_k = \{ \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k \mid \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1 \}$ e che le affinità rispettano le combinazioni baricentriche, si vede che, se P appartiene a una sottovarietà lineare generata da punti uniti per f, si ha

$$f(P) = f(\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k) = \lambda_1 f(P_1) + \cdots + \lambda_k f(P_k) = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k = P.$$

Senza usare le combinazioni baricentriche, si può osservare che i vettori $v_i = \overrightarrow{P_k P_i}$, per $i = 1, \dots, k-1$, sono autovettori di ϕ, relativi all'autovalore 1. Infatti, si ha

$$\phi(v_i) = f(P_i) - f(P_k) = P_i - P_k = v_i, \qquad \text{per } i = 1, \dots, k-1;$$

Quindi il sottospazio $\langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle$ è tutto costituito da autovettori relativi all'autovalore 1. Osservando che $P_1 \vee \cdots \vee P_k = P_k + \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle$, si conclude che tutti i punti di questa sottovarietà lineare sono uniti per f.

(*b*) I due punti P_1, P_2, generano la retta $P_1 \vee P_2 : x + y = 3$, che è quindi unita per f. Le condizioni ulteriori dicono che la matrice di ϕ rispetto alla base canonica è del tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, e quindi è un multiplo della matrice di una riflessione. Dovendo avere un autovalore uguale ad 1, si conclude che l'affinità cercata deve essere la riflessione rispetto alla retta $P_1 \vee P_2 : x + y = 3$.

Con un calcolo diretto, si potevano imporre le condizioni

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & a & b \\ q & b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & a & b \\ q & b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

che davano un sistema lineare di 4 equazioni nelle incognite a, b, p, q, la cui (unica) soluzione è l'affinità di matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, che è un'isometria. □

ESERCIZIO 6. [*Vecchio ordinamento*] *Studiare la conica,* $\mathscr{C}$*, di equazione*

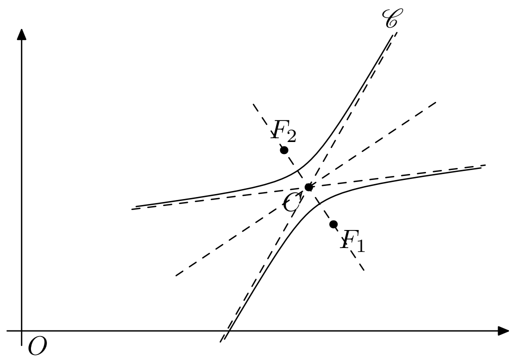
$$\mathscr{C} : 7x^2 - 60xy + 32y^2 + 32x + 56y - 61 = 0 .$$

In particolare determinare se è degenere, qual è il suo tipo, un'equazione canonica e l'opportuna trasformazione di coordinate, gli eventuali assi, asintoti, centro, fuochi. Se ne tracci infine un disegno approssimativo.

Svolgimento. Consideriamo, come di consueto il piano affine immerso nel piano proiettivo prendendo $x_0 = 0$ come retta impropria. Una matrice della conica $\mathscr{C}$ è $A = \begin{pmatrix} -61 & 16 & 28 \\ 16 & 7 & -30 \\ 28 & -30 & 32 \end{pmatrix}$. Poiché il determinante $\det A = 676 = 2^2 13^2 \neq 0$ si tratta di una conica non degenere, e poiché $\det A_\infty = -676$ (A_∞ è la sottomatrice quadrata di A che si ottiene cancellando prima riga e prima colonna) si tratta di un'iperbole.

I punti impropri di $\mathscr{C}$ sono $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, e le loro polari sono gli asintoti dell'iperbole, ovvero le rette $a_1 : x - 8y + 6 = 0$ ed $a_2 : 7x - 4y - 10 = 0$. Il centro è l'intersezione degli asintoti ovvero il punto $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Gli autovalori della matrice A_∞ sono 52 e -13 ed i corrispondenti autovettori sono le direzioni degli assi della conica. Si han quindi i punti $Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ e $Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, e le loro polari sono gli assi dell'iperbole, ovvero le rette $h_1 : 2x - 3y - 1 = 0$ ed $h_2 : 3x + 2y - 8 = 0$ (asse focale).

L'equazione canonica di $\mathscr{C}$, in un opportuno sistema di riferimento ortonormale, è $52X^2 - 13Y^2 = 1$ e la matrice dell'isometria che porta l'equazione in forma canonica è $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \\ 1 & -3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \end{pmatrix}$, come si può verificare calcolando la matrice ${}^tPAP$. Infine, ricordiamo che i fuochi si trovano sull'asse focale, a distanza $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{13}}$ dal centro. Dunque i fuochi sono i punti $F_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \pm \frac{\sqrt{5}}{26} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ed un disegno approssimativo della conica in questione è riportato qui a fianco.



Fine della discussione. □