# Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova di accertamento del 15 febbraio 2005

**ESERCIZIO 1**. *Si determinino $n, m \in \{1, 2, 3, 4\}$ in modo che $n_6 - n$ ed $n_5 - m$ siano multipli interi di 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}(\mathbb{R}^3)$ si considerino i punti*

$$P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1-m \end{pmatrix}, \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2-m \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} -1-m \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si determini l'equazione cartesiana del piano, $\pi$, passante per $P_0$, $P_1$ e $P_2$ e si dica se $P_3 \in \pi$.*

(b) *Si scriva l'espressione esplicita della proiezione, $\sigma_1$, sul piano $\pi$, parallela al vettore $v_1 = \begin{pmatrix} 5-2m \\ 12-5m-n \\ 6m-17 \end{pmatrix}$, e si determini il punto $Q_1 = \sigma_1(P_3)$.*

(c) *Si scriva l'espressione esplicita della proiezione, $\sigma_2$, sul piano $\pi$, parallela al vettore $v_2 = \begin{pmatrix} 3m-1 \\ m-n-5 \\ -5m+6 \end{pmatrix}$, e si determini il punto $Q_2 = \sigma_2(P_3)$.*

(d) *Posto $\lambda = \frac{n-1}{n}$, si consideri il punto $P = \lambda Q_1 + (1 - \lambda)Q_2$ e si dica se l'insieme*

$$A = \{\, \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P \mid \alpha_i \in [0, 1],\ i = 0, \dots, 3,\ \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \,\}$$

*è un triangolo oppure un quadrilatero.*

*Svolgimento.* (a) Il piano $\pi$ ha equazione $x + y + z = -m$, come si trova facilmente imponendo la condizione di passaggio per i tre punti dati. Il punto $P_3$ non appartiene a $\pi$ perché le sue coordinate non soddisfano l'equazione.

(*b*) Il vettore $v_1$ non è parallelo al piano $\pi$, perché non soddisfa all'equazione omogenea associata, e quindi è ben definita l'applicazione $\sigma_1$ che, ad ogni punto $X$ dello spazio, associa quell'unico punto $\sigma_1(X)$ di $\pi$, tale che il vettore $\sigma_1(X) - X$ sia parallelo a $v_1$. Posto $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, il punto $X + \alpha v_1$ appartiene a $\pi$ se, e solo se, $\alpha = \frac{x+y+z+m}{m+n}$. Si conclude che

$$\sigma_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{m+n} \begin{pmatrix} (5 - m + n)x + (5 - 2m)y + (5 - 2m)z + m(5 - 2m) \\ (12 - 5m - n)x + (12 - 4m)y + (12 - 5m - n)z + (12 - 5m - n)m \\ (6m - 17)x + (6m - 17)y + (7m + n - 17)z + (6m - 17)m \end{pmatrix}$$

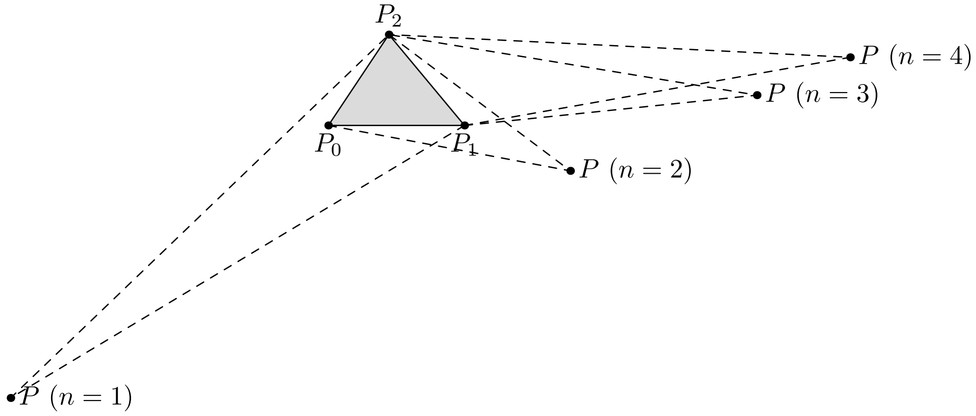
e quindi, con un calcolo diretto, $Q_1 = \sigma_1(P_3) = \begin{pmatrix} 4-2m \\ 12-5m \\ 6m-16 \end{pmatrix}$.

(*c*) Analogamente a quanto detto nel punto precedente, posto $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, il punto $X + \alpha v_2$ appartiene a $\pi$ se, e solo se, $\alpha = \frac{x+y+z+m}{m+n}$, e si conclude che

$$\sigma_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{m+n} \begin{pmatrix} (4m + n - 1)x + (3m - 1)y + (3m - 1)z + (3m - 1)m \\ (m - n - 5)x + (2m - 5)y + (m - n - 5)z + (m - n - 5)m \\ (6 - 5m)x + (6m - 17)y + (7m + n - 17)z + (6m - 17)m \end{pmatrix}$$

e quindi, con un calcolo diretto, $Q_2 = \sigma_2(P_3) = \begin{pmatrix} 3m-2 \\ m-5 \\ 7-5m \end{pmatrix}$.

(*d*) Nel piano $\pi$ possiamo usare coordinate baricentriche ed osserviamo che $Q_1 = -6P_0 + 5P_1 + 2P_2$ e $Q_2 = 5P_0 - P_1 - 3P_2$. Si ha quindi $P = \frac{11-6n}{n} P_0 + \frac{5n-6}{n} P_1 + \frac{2n-5}{n} P_2$ e possiamo distinguere i diversi casi come rappresentato nel disegno qui sotto:




n=1. Si ha $P = Q_2$ e l'insieme $A$ è il triangolo di vertici $PP_1P_2$.
n=2. Si ha $P = -\frac{1}{2}P_0 + 2P_1 - \frac{1}{2}P_2$ e l'insieme $A$ è il triangolo di vertici $PP_0P_2$.
n=3. Si ha $P = -\frac{7}{3}P_0 + 3P_1 + \frac{1}{3}P_2$ e l'insieme $A$ è il quadrilatero di vertici $P_0P_1PP_2$.
n=4. Si ha $P = -\frac{13}{4}P_0 + \frac{14}{4}P_1 + \frac{3}{4}P_2$ e l'insieme $A$ è il quadrilatero di vertici $P_0P_1PP_2$. □

**ESERCIZIO 2**. *Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino le rette*

$$r_1 : \begin{cases} x + z + m + n = 0 \\ y + nz - 2 = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x + 2z - 2m - 4n = 0 \\ mx + 2y - 6 = 0 \end{cases}.$$

(a) *Si determinino dei generatori, $v_1$ e $v_2$, dei sottospazi direttori e si calcoli la reciproca distanza delle due rette. Si determinino i punti $P_1 \in r_1$ e $P_2 \in r_2$ di minima distanza.*
(b) *Si determini, se esiste, una retta, $s$, passante per l'origine, che intersechi entrambo le rette $r_1$ ed $r_2$. Si scrivano le equazioni cartesiane per $s$.*
(c) *Si consideri il piano $\sigma : x - y = 0$ e, per ogni punto $X$, sia $\sigma_X$ il piano parallelo a $\sigma$, passante per $X$. Si dica se l'applicazione $f : r_1 \to r_2$, definita da $X \mapsto \sigma_X \cap r_2$, è un'affinità e la si descriva esplicitamente tramite i riferimenti $P_1, v_1$ su $r_1$ e $P_2, v_2$ su $r_2$.*

*Svolgimento.* (a) Il sottospazio direttore di $r_1$ è generato da una soluzione non banale del sistema omogeneo associato e quindi possiamo prendere $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ -1 \end{pmatrix}$. Analogamente, possiamo prendere $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$. Due punti appartenenti alle rette date sono $Q_1 = \begin{pmatrix} -n-m \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in r_1$ e $Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ m+2n \end{pmatrix} \in r_2$, e quindi i punti appartenenti alle due rette hanno le seguenti rappresentazioni parametriche $X_1 = Q_1 + tv_1$ ed $X_2 = Q_2 + sv_2$ Cerchiamo quindi i valori di $s$ e $t$ per cui $X_2 - X_1$ sia ortogonale ai due vettori $v_1$ e $v_2$. Deve aversi

$$\begin{cases} (X_2 - X_1) \cdot v_1 = 0 \\ (X_2 - X_1) \cdot v_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} t(n^2 + 2) + s(nm - 3) = 0 \\ t(nm - 3) + s(m^2 + 5) = 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione si ha per $s = t = 0$ e quindi $Q_1 = P_1$ e $Q_2 = P_2$.
($b$) La retta $s$ sarà l'intersezione tra il piano $O \vee r_1 : 2x + (m + n)y + (n^2 + nm + 2)z = 0$ ed il piano $O \vee r_2 : (m^2 + 2mn - 3)x + 2(m + 2n)y - 6z = 0$; ovvero

$$s : \begin{cases} 2x + (m + n)y + (n^2 + nm + 2)z = 0 \\ (m^2 + 2mn - 3)x + 2(m + 2n)y - 6z = 0 \end{cases}.$$

($c$) Consideriamo il generico punto $X_t = P_1 + tv_1$ della retta $r_1$ e sia $\sigma_{X_t} : x - y = -(m + n + 2) - t(n - 1)$ il piano parallelo a $\sigma$ passante per $X_t$. Il generico punto $P_2 + sv_2$ di $r_2$ è contenuto nel piano $\sigma_{X_t}$ se, e solo se, $s(m + 2) + 3 = (m + n + 2) + t(n - 1)$ ovvero se, e solo se, $s = \frac{m+n-1}{m+2} + t\frac{n-1}{m+2}$. Si conclude che

$$f(P_1 + tv_1) = P_2 + \tfrac{m+n-1}{m+2}v_2 + t\tfrac{n-1}{m+2}v_2$$

e quindi che $f$ è l'affinità (*applicazione affine* per $n = 1$) di $r_1$ in $r_2$, che manda $P_1$ su $P_2 + \frac{m+n-1}{m+2} v_2$ ed è associata all'applicazione lineare $\phi : \langle v_1 \rangle \to \langle v_2 \rangle$, definita da $\phi(v_1) = \frac{n-1}{m+2} v_2$. □

**ESERCIZIO 3**. *Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^7$, si considerino i vettori*

$$u_1 = e_1 + e_3 + e_5 - e_7, \qquad u_2 = e_2 + e_4 + (n+m)e_5 - (n+m)e_6,$$
$$u_3 = ne_1 - e_2 + e_3 - e_6 + e_7, \qquad u_4 = e_1 - e_3 + e_5 - 2e_6 + e_7,$$

*ove $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_7\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^7$. Si considerino i sottospazi $C = \langle e_5, e_6, e_7 \rangle$, $D = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$ ed $U = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$.*

*(a) Si verifichi che $U \cap C = \langle 0 \rangle$ e $\dim U = 4$ e si concluda che $U$ è il grafico di un'applicazione lineare $\phi : D \to C$.*

*(b) Si scriva la matrice di $\phi$ rispetto alle basi $\mathcal{C} = \{e_5, e_6, e_7\}$ di $C$ e $\mathcal{D} = \{e_1, \dots, e_4\}$ di $D$.*

*(c) Si determinino dimensioni e basi per $\operatorname{im}\phi$ e $\ker\phi$.*

*(d) Si mostri che il sottoinsieme $W = \{ \psi \in Hom_{\mathbb{R}}(C, C) \mid \psi \circ \phi = 0 \}$ è un sottospazio dello spazio vettoriale $Hom_{\mathbb{R}}(C, C)$ e se ne calcoli la dimensione. Sia $\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{C}} : Hom_{\mathbb{R}}(C, C) \to M_3(\mathbb{R})$ l'applicazione che ad ogni endomorfismo di $C$ associa la sua matrice, rispetto alla base $\mathcal{C}$. Si determini una base del sottospazio $\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(W)$ di $M_4(\mathbb{R})$.*

*Svolgimento.* (a) Un vettore $a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + a_4u_4$ appartiene ad $U \cap C$ se, e solo se, scritto rispetto alla base canonica, i coefficienti di $e_1, \dots, e_4$ sono uguali a zero. Si han quindi le condizioni

$$\begin{cases} a_1 + na_3 + a_4 = 0 \\ a_2 - a_3 = 0 \\ a_1 + a_3 - a_4 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases} \quad \text{da cui si deduce} \quad \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_4 = 0 \end{cases}.$$

Da questo calcolo si deduce che $U \cap C = \langle 0 \rangle$ e che i vettori $u_1, \dots, u_4$ sono linearmente indipendenti e quindi $\dim U = 4$. Ciò significa che la proiezione su $D$ parallelamente a $C$ induce un isomorfismo tra $D$ ed $U$ e quindi l'applicazione $\phi : D \to C$, avente $U$ come grafico, è quella che al vettore $x \in D$ associa l'unico vettore $\phi(x) \in C$ tale che $x + \phi(x) \in U$. Il fatto che $U$ sia un sottospazio ci dice che $\phi$ è un'applicazione lineare, ovvero, presi comunque $x + \phi(x)$, $y + \phi(y)$ in $U$ e due scalari $\alpha$ e $\beta$, $\alpha(x + \phi(x)) + \beta(y + \phi(y)) = (\alpha x + \beta y) + (\alpha x\phi(x) + \beta\phi(y))$ appartiene ad $U$ e quindi $\phi(\alpha x + \beta y) = \alpha x\phi(x) + \beta\phi(y)$.

$(b)$ Guardando alla base data di $U$, si deduce che

$$\begin{aligned} \phi(e_1 + e_2) &= e_5 - e_7 \\ \phi(e_2 + e_4) &= (n+m)e_5 - (n+m)e_6 \\ \phi(ne_1 - e_2 + e_3) &= -e_6 + e_7 \\ \phi(e_1 - e_3) &= e_5 - 2e_6 + e_7 \end{aligned} \quad \text{e quindi} \quad \begin{aligned} \phi(e_1) &= e_5 - e_6 \\ \phi(e_2) &= ne_5 + (2-n)e_6 - 2e_7 \\ \phi(e_3) &= e_6 - e_7 \\ \phi(e_4) &= me_5 - (m+2)e_6 + 2e_7 \end{aligned}.$$

Si conclude così che la matrice di $\phi$ rispetto alle basi date è

$$A = \alpha_{\mathcal{D},\mathcal{C}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 & m \\ -1 & 2-n & 1 & -2-m \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$(c)$ La matrice $A$ ha rango 2 e l'immagine di $\phi$ è il sottospazio vettoriale di $C$ generato dalla prima e dalla terza colonna di $A$. Dunque $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{im}\phi = 2$, ed $\operatorname{im}\phi = \langle e_5 - e_6, e_6 - e_7 \rangle$. Per la formula delle dimensioni abbiamo che $\dim_{\mathbb{R}} \ker\phi = 4 - 2 = 2$, e risolvendo il sistema $AX = 0$ troviamo che $\ker\phi = \langle ne_1 - e_2 + 2e_3, me_1 - 2e_3 - e_4 \rangle$.

$(d)$ L'insieme $W$ è formato da tutte le applicazioni lineari $\psi : C \to C$, per cui $\operatorname{im}\phi \subseteq \ker\psi$, ovvero sono tutte e sole le applicazioni lineari che mandano a zero il sottospazio $\operatorname{im}\phi$. Indicando con $Z$ un sottospazio complementare ad $\operatorname{im}\phi$, si può identificare $W$ con lo spazio vettoriale $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(Z, C)$. Dunque $W$ è un sottospazio di $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(C, C)$ di dimensione $(\dim_{\mathbb{R}} Z)(\dim_{\mathbb{R}} C) = 1 \cdot 3 = 3$. Una base di $\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(W)$ è costituita dalle seguenti matrici in $M_3(\mathbb{R})$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ciò conclude la discussione. □

## Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova di accertamento del 21 marzo 2005 – Compito **A**

**ESERCIZIO 1**. *Nello spazio affine di dimensione 4 su $\mathbb{R}$, si considerino le due famiglie di sottovarietà lineari*

$$\alpha_t : \begin{cases} (t-1)X_1 + 2X_2 + X_4 = -t \\ 2tX_2 - X_3 = 0 \end{cases}$$
$$\beta_t : \begin{cases} (t-1)X_1 + (2t+2)X_2 - X_3 - tX_4 = -2 \\ (t-1)X_1 + 2X_2 + (t-2)X_3 + 2X_4 = 2 - t^2 \end{cases}$$

*al variare di $t$ in $\mathbb{R}$.*

*(a) Dimostrare che per ogni $t$ $\alpha_t$ e $\beta_t$ sono due piani.*

*(b) Trovare i valori di $t$ per cui $\alpha_t \cap \beta_t$ è formato da un solo punto. In tali casi scrivere esplicitamente il punto $P_t$ di intersezione (in funzione di $t$).*

*(c) Trovare i valori di $t$ per cui $\alpha_t \cap \beta_t$ è vuoto e quelli per cui $\alpha_t \cap \beta_t$ è una retta e, in questo ultimo caso, scrivere l'equazione parametrica della retta intersezione. Ci sono valori per cui $\alpha_t \cap \beta_t$ è un piano?*

*(d) Si verifichi che le rette intersezione sono a due a due sghembe e si dica se esiste una retta incidente tutte le rette di intersezione.*

*Svolgimento.* (a) Si deve controllare che, per ogni valore di $t$, la matrice incompleta di $\alpha_t$ (risp. $\beta_t$) abbia rango 2, ovvero che esistano minori di ordine 2 non nulli. Per $\alpha_t$ considero il minore estratto da terza e quarta colonna: $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1$. Per $\beta_t$ considero il minore estratto da terza e quarta colonna, $\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ t-2 & 2 \end{pmatrix} = -t$, non nullo per $t \neq 0$; ed il minore estratto da prima e quarta colonna, $\det\begin{pmatrix} t-1 & 1 \\ t-1 & 2 \end{pmatrix} = t-1$, non nullo per $t = 0$.

($b$) L'intersezione $\alpha_k \cap \beta_k$ è definita dal sistema di matrice completa

$$\left(\begin{array}{cccc|c} t-1 & 2 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 2t & -1 & 0 & 0 \\ t-1 & 2t+2 & -1 & -t & -2 \\ t-1 & 2 & t-2 & 2 & 2-t^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} t-1 & 2 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 2t & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 & 1 & 2+t-t^2 \\ 0 & 0 & 0 & -t-1 & t-2 \end{array}\right),$$

come si verifica togliendo alla III riga la I e la II riga, togliendo alla IV riga la I riga e scambiando le ultime due righe. Per il teorema di Rouché-Capelli l'intersezione consiste di un punto se, e solo se, $t \notin \{-1, 0, 1, 2\}$. In tal caso il punto cercato è

$$P_t := \begin{pmatrix} -\frac{t}{t+1} \\ -\frac{t+2}{2(t+1)} \\ -\frac{t(t+2)}{t+1} \\ -\frac{t-2}{t+1} \end{pmatrix}.$$

($c$) Per $t = -1$ il sistema ha matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right),$$

che non ha soluzione e l'intersezione è quindi vuota.

Per $t = 0$ il sistema ha matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right).$$

Le soluzioni formano la retta $r = \begin{pmatrix} 2\\0\\0\\2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Per $t = 1$ il sistema ha matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right).$$

Le soluzioni formano la retta $s = \begin{pmatrix} 0\\-\frac{3}{4}\\-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Per $t = 2$ il sistema ha matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right).$$

Le soluzioni formano la retta $u = \begin{pmatrix} -2\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2\\-1\\-4\\0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

$(d)$ Le tre rette non sono, a due a due, parallele, come si vede guardando ai generatori degli spazi direttori. Inoltre le tre rette non sono, a due a due, incidenti, perché sono contenute in tre iperpiani paralleli e, precisamente, $r$ nell'iperpiano $X_4 = 2$, $s$ nell'iperpiano $X_4 = \frac{1}{2}$, $u$ nell'iperpiano $X_4 = 0$. Dunque, si tratta di tre rette, a due a due, sghembe.

Per determinare una retta che le intersechi tutte e tre possiamo ragionare nel modo seguente. Cerchiamo (se esiste) un punto, $P$, di intersezione tra l'iperpiano $r \vee u$ e la retta $s$. L'intersezione tra i due piani $P \vee r$ e $P \vee u$ è una retta (siamo nell'iperpiano $r \vee u$) che è complanare con entrambo le rette $r$ ed $u$ e quindi, se non è parallela ad una di queste, incide le 2 rette sghembe. Si ha

$$r \vee u = \begin{pmatrix} -2\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2\\-1\\-4\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{e} \quad (r \vee u) \cap s = P = \begin{pmatrix} -1\\-\frac{3}{4}\\-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Con calcoli diretti si ottiene

$$P \vee r : \begin{cases} X_3 - X_4 = -2 \\ X_1 - 2X_2 - X_3 = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad P \vee u : \begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_4 = -2 \\ 4X_2 - X_3 + 3X_4 = 0 \end{cases}$$

e quindi la retta $\ell = (P \vee r) \cap (P \vee u)$, incidente le tre rette $r$, $s$, e $u$, ha equazioni cartesiane

$$\ell : \begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_4 = -2 \\ 4X_2 - X_3 + 3X_4 = 0 \\ X_3 - X_4 = -2 \end{cases},$$

passa per $P$ ed è parallela al vettore $w = \begin{pmatrix} 0\\1\\-2\\-2 \end{pmatrix}$. □

**ESERCIZIO 2**. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

*rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, di $\mathbb{R}^4$.*

*(a) Si determini il polinomio caratteristico di $\phi$ e si dica se $\phi$ è invertibile.*

*(b) Si determinino gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori per $\phi$ e si dica se $\phi$ è, o meno, diagonalizzabile.*

*(c) Si determinino il polinomio minimo di $\phi$ ed un autovettore generalizzato di periodo massimo per ogni autovalore di $\phi$.*

*(d) Si determinino una matrice di Jordan, $J$, di $\phi$, ed una matrice invertibile, $P$, tali che $P^{-1}AP = J$.*

*Svolgimento.* (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}) = (x+2)^4$, che ha termine noto diverso da zero e quindi $\phi$ è invertibile.

(*b*) L'endomorfismo $\phi$ ha un unico autovalore, $-2$, di molteplicità 4 e quindi, non essendo $A$ una matrice scalare, non può essere diagonalizzabile. Osservando che

$$A + 2\mathbf{1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \text{e} \qquad (A + 2\mathbf{1})^2 = \mathbf{0},$$

si conclude che vi è un sottospazio di dimensione 2 di autovettori ($\mathrm{rk}(A + 2\mathbf{1}) = 2$) e che gli autovettori generalizzati hanno periodo minore o uguale a 2. Una base di autovettori verrà determinata nel punto successivo.

(*c*) Il polinomio minimo è quindi $\lambda_\phi(x) = (x+2)^2$ e la matrice di Jordan di $\phi$ ha due blocchi di ordine 2. Due autovettori generalizzato di periodo 2 che generino un sottospazio complementare a $\ker(\phi+2)$ sono, ad esempio, $v_4 = e_3$ e $v_2 = e_4$ che, assieme a $v_3 = (\phi+2)v_4 = e_1 + e_3$ ed a $v_1 = (\phi+2)v_2 = e_1 - 2e_2 + e_3 - 4e_4$, formano una base, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, di $\mathbb{R}^4$ rispetto a cui $\phi$ ha matrice di Jordan. In particolare, $\ker(\phi+2) = \langle v_1, v_3 \rangle$. Si conclude che

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono le matrici cercate. □

**ESERCIZIO 3**. *Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato dell'applicazione bilineare, $g$, di matrice*

$$G = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \\ -6 & 0 & -11 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

*rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$.*

*(a) Si dica se $g$ è non-degenere e si determini (se esiste) una base ortogonale, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, di $\mathbb{R}^4$ tale che $\langle v_1, \dots, v_i \rangle = \langle e_1, \dots, e_i \rangle$, per $i = 1, \dots, 4$.*

*(b) Si determini la segnatura (indice di inerzia) di $g$ e si scrivano una matrice invertibile, $Q$, ed una matrice diagonale, $\Delta$, tali che ${}^tQGQ = \Delta$.*

*(c) Si dica qual è la dimensione di un sottospazio isotropo massimale di $\mathbb{R}^4$ e si determini un tale sottospazio.*

*(d) Sia $H$ il sottospazio isotropo del punto precedente. Si determini (se esiste) un sottospazio $T$ tale che $H^\perp = H \oplus T$ e si mostri che $\mathbb{R}^4 = T \oplus T^\perp$.*

*Svolgimento.* (a) Con un calcolo diretto si verifica che $\det G = -24$ e quindi $g$ è non-degenere. Possiamo prendere $v_1 = e_1$, essendo $g(e_1, e_1) = -3$. Il vettore $v_2$ deve appartenere al sottospazio $\langle e_1 \rangle^\perp \cap \langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_2 \rangle$ e $g(e_2, e_2) = -4$; quindi possiamo porre $v_2 = e_2$. Analogamente, $v_3$ deve appartenere al sottospazio $\langle e_1, e_2 \rangle^\perp \cap \langle e_1, e_2, e_3 \rangle = \langle 2e_1 - e_3 \rangle$ e $g(2e_1 - e_3, 2e_1 - e_3) = 1$; quindi possiamo porre $v_3 = 2e_1 - e_3$. Infine, $v_4$

deve appartenere al sottospazio $\langle e_1, e_2, e_3\rangle^\perp = \langle 4e_1 - e_2 - 2e_3 + e_4\rangle$ e $g(4e_1-e_2-2e_3+e_4, 4e_1-e_2-2e_3+e_4) = -2$; quindi posto $v_4 = 4e_1 - e_2 - 2e_3 + e_4$, si ottiene la base ortogonale $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, soddisfacente alle condizioni richieste.

$(b)$ Dunque la segnatura di $g$ è $(1, 3)$, ovvero $i(g) = -2$ e due matrici del tipo cercato sono

$$\Delta = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$(c)$ La segnatura di $g$ è $(1, 3)$ e quindi i sottospazi isotropi hanno dimensione al più 1. Guardando alla matrice $\Delta$, si conclude facilmente che un tale spazio è $H = \langle v_2 + 2v_3\rangle = \langle 4e_1 + e_2 - 2e_3\rangle$.

$(d)$ Sia $v = 4e_1 + e_2 - 2e_3$. Il sottospazio $\langle v\rangle^\perp$ ha dimensione 3 e contiene $\langle v\rangle$, quindi esiste un sottospazio $T$, di dimensione 2, tale che $\langle v\rangle^\perp = T \oplus \langle v\rangle$ e possiamo prendere, ad esempio, $T = \langle v_1, v_4\rangle$. La restrizione di $g$ a $T$ è definita (negativa) e quindi non degenere, perché, se vi fosse un vettore isotropo $w \neq 0$ in $T$, il sottospazio $\langle v, w\rangle$ sarebbe isotropo (perché?) contro la massimalità di $H = \langle v\rangle$. Per il Teorema di Decomposizione ortogonale, si ha $\mathbb{R}^4 = T \oplus T^\perp$. □

## Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova di accertamento del 21 marzo 2005 – Compito **B**

**ESERCIZIO 1**. *Nello spazio affine di dimensione 4 su $\mathbb{R}$, si considerino le due famiglie di sottovarietà lineari*

$$\alpha_t : \begin{cases} (t-1)X_1 + 2X_2 + X_4 = -t \\ 2tX_2 - X_3 = 0 \end{cases}$$
$$\beta_t : \begin{cases} (t-1)X_1 + (2t+2)X_2 - X_3 - tX_4 = -2 \\ (t-1)X_1 + 2X_2 + (t-2)X_3 + 2X_4 = 2 - t^2 \end{cases}$$

*al variare di $t$ in $\mathbb{R}$.*

*(a) Dimostrare che per ogni $t$ $\alpha_t$ e $\beta_t$ sono due piani.*

*(b) Trovare i valori di $t$ per cui $\alpha_t \cap \beta_t$ è formato da un solo punto. In tali casi scrivere esplicitamente il punto $P_t$ di intersezione (in funzione di $t$).*

*(c) Trovare i valori di $t$ per cui $\alpha_t \cap \beta_t$ è vuoto e quelli per cui $\alpha_t \cap \beta_t$ è una retta e, in questo ultimo caso, scrivere l'equazione parametrica della retta intersezione. Ci sono valori per cui $\alpha_t \cap \beta_t$ è un piano?*

*(d) Si verifichi che le rette intersezione sono a due a due sghembe e si dica se esiste una retta incidente tutte le rette di intersezione.*

*Svolgimento.* (a) Si deve controllare che, per ogni valore di $t$, la matrice incompleta di $\alpha_t$ (risp. $\beta_t$) abbia rango 2, ovvero che esistano minori di ordine 2 non nulli. Per $\alpha_t$ considero il minore estratto da terza e quarta colonna: $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1$. Per $\beta_t$ considero il minore estratto da terza e quarta colonna, $\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ t-2 & 2 \end{pmatrix} = -t$, non nullo per $t \neq 0$; ed il minore estratto da prima e quarta colonna, $\det\begin{pmatrix} t-1 & 1 \\ t-1 & 2 \end{pmatrix} = t-1$, non nullo per $t = 0$.

$(b)$ L'intersezione $\alpha_k \cap \beta_k$ è definita dal sistema di matrice completa

$$\left(\begin{array}{cccc|c} t-1 & 2 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 2t & -1 & 0 & 0 \\ t-1 & 2t+2 & -1 & -t & -2 \\ t-1 & 2 & t-2 & 2 & 2-t^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} t-1 & 2 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 2t & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 & 1 & 2+t-t^2 \\ 0 & 0 & 0 & -t-1 & t-2 \end{array}\right),$$

come si verifica togliendo alla III riga la I e la II riga, togliendo alla IV riga la I riga e scambiando le ultime due righe. Per il teorema di Rouché-Capelli l'intersezione consiste di un punto se, e solo se, $t \notin \{-1, 0, 1, 2\}$. In tal caso il punto cercato è

$$P_t := \begin{pmatrix} -\frac{t}{t+1} \\ -\frac{t+2}{2(t+1)} \\ -\frac{t(t+2)}{t+1} \\ -\frac{t-2}{t+1} \end{pmatrix}.$$

$(c)$ Per $t = -1$ il sistema ha matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right),$$

che non ha soluzione e l'intersezione è quindi vuota.

Per $t = 0$ il sistema ha matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right).$$

Le soluzioni formano la retta $r = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) + \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$.

Per $t = 1$ il sistema ha matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right).$$

Le soluzioni formano la retta $s = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{smallmatrix}\right) + \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$.

Per $t = 2$ il sistema ha matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right).$$

Le soluzioni formano la retta $u = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$.

$(d)$ Le tre rette non sono, a due a due, parallele, come si vede guardando ai generatori degli spazi direttori. Inoltre le tre rette non sono, a due a due, incidenti, perché sono contenute in tre iperpiani paralleli e, precisamente, $r$ nell'iperpiano $X_4 = 2$, $s$ nell'iperpiano $X_4 = \frac{1}{2}$, $u$ nell'iperpiano $X_4 = 0$. Dunque, si tratta di tre rette, a due a due, sghembe.

Per determinare una retta che le intersechi tutte e tre possiamo ragionare nel modo seguente. Cerchiamo (se esiste) un punto, $P$, di intersezione tra l'iperpiano $r \vee u$ e la retta $s$. L'intersezione tra i due piani $P \vee r$ e $P \vee u$ è una retta (siamo nell'iperpiano $r \vee u$) che è complanare con entrambo le rette $r$ ed $u$ e quindi, se non è parallela ad una di queste, incide le 2 rette sghembe. Si ha

$$r \vee u = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle \qquad \text{e} \quad (r \vee u) \cap s = P = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{smallmatrix}\right).$$

Con calcoli diretti si ottiene

$$P \vee r : \begin{cases} X_3 - X_4 = -2 \\ X_1 - 2X_2 - X_3 = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad P \vee u : \begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_4 = -2 \\ 4X_2 - X_3 + 3X_4 = 0 \end{cases}$$

e quindi la retta $\ell = (P \vee r) \cap (P \vee u)$, incidente le tre rette $r$, $s$, e $u$, ha equazioni cartesiane

$$\ell : \begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_4 = -2 \\ 4X_2 - X_3 + 3X_4 = 0 \\ X_3 - X_4 = -2 \end{cases},$$

passa per $P$ ed è parallela al vettore $w = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$. □

**ESERCIZIO 2**. *Si consideri l'endomorfismo* $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, *di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

*rispetto alla base canonica,* $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, *di* $\mathbb{R}^4$.

*(a) Si determini il polinomio caratteristico di* $\phi$ *e si dica se* $\phi$ *è invertibile.*
*(b) Si determinino gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori per* $\phi$ *e si dica se* $\phi$ *è, o meno, diagonalizzabile.*
*(c) Si determinino il polinomio minimo di* $\phi$ *ed un autovettore generalizzato di periodo massimo per ogni autovalore di* $\phi$.
*(d) Si determinino una matrice di Jordan,* $J$, *di* $\phi$, *ed una matrice invertibile,* $P$, *tali che* $P^{-1}AP = J$.

*Svolgimento.* (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}) = x^4$, che non ha termine noto e quindi $\phi$ non è invertibile.

(*b*) L'endomorfismo $\phi$ ha un unico autovalore, 0, di molteplicità 4 e quindi, non essendo $A$ la matrice nulla, non può essere diagonalizzabile. Osservando che

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 16 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \mathbf{0},$$

si conclude che vi è un sottospazio di dimensione 2 di autovettori ($\operatorname{rk} A = 2$) e che gli autovettori generalizzati hanno periodo minore o uguale a 3. Una base di autovettori verrà determinata nel punto successivo.

(*c*) Il polinomio minimo è $\lambda_\phi(x) = x^3$ e quindi la matrice di Jordan di $\phi$ ha un blocco di ordine 3 ed un blocco di ordine 1. Un autovettore generalizzato di periodo 3 è, ad esempio, $v_4 = e_4$ che, assieme a $v_3 = \phi(v_4) = 3e_1 - 2e_2 + 3e_3 - 4e_4$ ed a $v_2 = \phi^2(v_4) = -8e_1 - 8e_3$, determina la base del blocco di ordine massimo della matrice di Jordan di $\phi$. Per completare la base, rispetto a cui $\phi$ abbia matrice di Jordan, è necessario trovare un autovettore $v_1$, linearmente indipendente da $v_2$, e quindi possiamo prendere $v_1 = e_2 - 4e_3 + 2e_4$ e porre $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$. In particolare, $\ker\phi = \langle v_1, v_2 \rangle$. Si conclude che

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -4 & -8 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

sono le matrici cercate. □

**ESERCIZIO 3**. *Si consideri lo spazio vettoriale* $\mathbb{R}^4$, *dotato dell'applicazione bilineare,* $g$, *di matrice*

$$G = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

*rispetto alla base canonica,* $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$.

*(a) Si dica se* $g$ *è non-degenere e si determini (se esiste) una base ortogonale,* $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, *di* $\mathbb{R}^4$.
*(b) Si determini la segnatura (indice di inerzia) di* $g$ *e si scrivano una matrice invertibile,* $Q$, *ed una matrice diagonale,* $\Delta$, *tali che* ${}^tQGQ = \Delta$.
*(c) Si dica qual è la dimensione di un sottospazio isotropo massimale di* $\mathbb{R}^4$ *e si determini un tale sottospazio.*
*(d) Sia* $H$ *il sottospazio del punto precedente. Si determini (se esiste) un sottospazio isotropo,* $H'$, *tale che* $\mathbb{R}^4 = H \oplus H'$ *e si scriva la matrice di* $g$ *rispetto ad una base di* $\mathbb{R}^4$ *ottenuta unendo una base di* $H'$ *ad una base di* $H$.

*Svolgimento.* (a) Con un calcolo diretto si verifica che $\det G = -1$ e quindi $g$ è non-degenere. Possiamo prendere $v_1 = e_4$, essendo $g(e_4, e_4) = 5$. Il vettore $v_2$ deve appartenere al sottospazio $\langle e_1 \rangle^\perp$ e possiamo prendere $v_2 = e_3$, con $g(e_3, e_3) = 1$. Il vettore $v_3$ deve appartenere al sottospazio $\langle e_3, e_4 \rangle^\perp$ e possiamo prendere $v_3 = 5e_2 + 4e_4$, con $g(v_3, v_3) = -5$. Infine, $v_4$ deve appartenere al sottospazio $\langle e_2, e_3, e_4 \rangle^\perp =$

$\langle e_1 - e_2 - 2e_3 - e_4 \rangle$ e $g(v_4, v_4) = -1$; quindi posto $v_4 = e_1 - e_2 - 2e_3 - e_4$, si ottiene la base ortogonale $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$.

$(b)$ Dunque la segnatura di $g$ è $(2,2)$, ovvero $i(g) = 0$, e due matrici del tipo cercato sono

$$\Delta = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$(c)$ La segnatura di $g$ è $(2,2)$ e quindi i sottospazi isotropi hanno dimensione al più 2. Guardando alla matrice $\Delta$, si conclude facilmente che un tale spazio è $H = \langle v_1 + v_3, v_2 + v_4 \rangle = \langle e_2 + e_4, e_1 - e_2 - e_3 - e_4 \rangle$.

$(d)$ È sufficiente prendere $H' = \langle v_1 - v_3, v_2 - v_4 \rangle$ per avere un sottospazio del tipo cercato. Rispetto alla base $\{v_1 + v_3, v_2 + v_4, v_1 - v_3, v_2 - v_4\}$, la matrice di $g$ è

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ciò conclude la discussione. $\square$

**ESERCIZIO 4**. [*Vecchio ordinamento*] *Studiare la conica $\mathscr{C}$ di equazione*

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 4x + 4y = 0\ .$$

*In particolare determinare se è degenere, qual è il suo tipo, un'equazione canonica e l'opportuna trasformazione di coordinate, gli eventuali assi, asintoti, centro, fuochi. Se ne tracci infine un disegno approssimativo.*

*Svolgimento.* Consideriamo, come di consueto il piano affine immerso nel piano proiettivo prendendo $x_0 = 0$ come retta impropria. Una matrice della conica $\mathscr{C}$ è $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Poiché $\det A = -64 \neq 0$ si tratta di una conica non degenere, e poiché $\det A_\infty = -16$ ($A_\infty$ è la sottomatrice quadrata di $A$ che si ottiene cancellando prima riga e prima colonna) si tratta di un'iperbole.

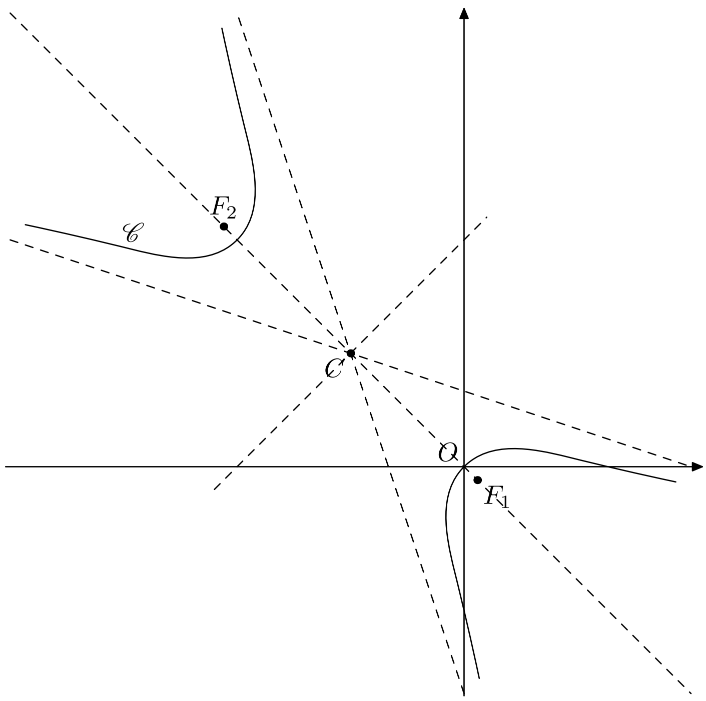
Gli asintoti sono le polari dei due punti di intersezione tra l'iperbole e la retta impropria, ovvero le polari dei punti $A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ed $A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Abbiamo quindi le equazioni degli asintoti

$$a_1 : 3x + y + 2 = 0, \qquad \text{e} \qquad a_2 : x + 3y - 2 = 0$$

e le due rette si intersecano nel centro dell'iperbole, ovvero il punto di coordinate omogenee $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Gli assi sono le rette per il centro $C$, parallele agli autovettori della matrice $A_\infty$. La matrice $A_\infty$ ha autovalori 8 e $-2$ a cui corrispondono gli autovettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Gli assi sono quindi le rette

$$h_1 : x + y = 0 \text{ (asse focale)}, \qquad h_2 : x - y + 2 = 0.$$

Dunque, l'equazione canonica di $\mathscr{C}$, in un opportuno sistema di riferimento ortonormale, è $\frac{1}{2}X^2 - 2Y^2 = 1$ e la matrice dell'isometria che porta l'equazione in forma canonica è $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, come si può verificare calcolando la matrice $-\frac{1}{4}{}^tPAP$. Infine, ricordiamo che i fuochi si trovano sull'asse focale, a distanza $\frac{\sqrt{10}}{2}$ dal centro e quindi sono i punti reali $F_{1,2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Un disegno approssimativo della conica in questione è riportato qui sotto




e la discussione è conclusa. □

# Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova scritta del 5 aprile 2005

**ESERCIZIO 1**. *Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino i punti*

$$P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *Determinare le equazioni cartesiane della sottovarietà lineare $\pi = P_1 \vee P_2 \vee P_3$ e verificare che $P_0$ non appartiene a $\pi$.*

(b) *Determinare l'area, $A$, del triangolo $P_1P_2P_3$, il volume, $V$, del tetraedro $P_0P_1P_2P_3$ e la distanza, $d$, di $P_0$ da $\pi$.*

(c) *Determinare i punti $P_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$ per cui la proiezione su $\pi$ di centro $P_t$ è ben definita e l'immagine del punto $P_0$ è interna al triangolo $P_1P_2P_3$.*

*Svolgimento.* (a) I tre punti, $P_1, P_2, P_3$, non sono allineati e generano il piano $\pi : x + y + z = 0$.

(b) Si ha

$$A = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\| = \sqrt{3} \qquad \text{e} \qquad V = \frac{1}{6}\left|\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{2}{3}.$$

La distanza $d$ altro non è che l'altezza del tetraedro, relativa alla base $P_1P_2P_3$, e quindi $d = 3V/A = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(c) La proiezione su $\pi$, di centro $P_t$, è ben definita (su tutti i punti del complementare del piano, parallelo a $\pi$, passante per $P_t$) se $P_t \notin \pi$ e quindi, per $t \neq 0$. Inoltre, il punto $P_0$ appartiene al dominio della proiezione, se, e solo se, il vettore $\overrightarrow{P_tP_0}$ non è parallelo a $\pi$ e quindi, per $t \neq 2$. Il punto $P_t + \lambda\overrightarrow{P_tP_0}$ appartiene al piano $\pi$ se, e solo se, $\lambda = \frac{t}{t-2}$ e quindi la proiezione di $P_0$ è il punto

$$Q_t = \begin{pmatrix} -\frac{t}{t-2} \\ \frac{t}{t-2} \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\tfrac{t}{t-2} + 2\right) P_1 + \left(-\tfrac{t}{t-2} - \tfrac{3}{2}\right) P_2 + \tfrac{1}{2}P_3;$$

e $Q_t$ è interno al triangolo $P_1P_2P_3$ se, e solo se, i tre coefficienti sono positivi e quindi se, e solo se,

$$\begin{cases} \frac{3t-4}{t-2} \geq 0 \\ \frac{6-5t}{2(t-2)} \geq 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \tfrac{6}{5} \leq t \leq \tfrac{4}{3};$$

e ciò conclude la discussione. □

**ESERCIZIO 2**. *Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi*

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(a) *Determinare una base di $U$ ed una di $W$ e verificare se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.*

(b) *Sia $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare che manda ogni vettore $x \in \mathbb{R}^4$ nella sua proiezione su $U$, parallela a $W$. Si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi)$ e determinare $\ker\pi$ ed $\mathrm{im}\,\pi$.*

(c) *Sia $\pi' : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare che manda ogni vettore $x \in \mathbb{R}^4$ nella sua proiezione su $W$, parallela a $U$. Si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi)$ e si dica se $\pi(x) + \pi'(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^4$.*

(d) *Detta $\sigma : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la simmetria di asse $U$, parallela al sottospazio $W$, si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma)$.*

*Svolgimento.* (a) Si ha

$$-2\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\0\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\6\\-4\end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\3\end{pmatrix}.$$

e quindi $U$ e $W$ sono sottospazi di dimensione 2. In particolare, $W$ è il sottospazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ e l'unico vettore di $U$ che soddisfi a questo sistema è il vettore nullo. Quindi $U \cap W = \langle 0 \rangle$ e, per motivi di dimensione, $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(*b*) Dato il generico vettore $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$, dobbiamo determinare il vettore $\pi(x) = \alpha\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\3\\0\end{pmatrix}$, in modo che la differenza, $x - \pi(x)$, appartenga a $W$. Utilizzando le equazioni cartesiane di $W$, si ricava,

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{3}{7}x_1 - \frac{1}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_4 \\ \beta = \frac{1}{7}x_1 - \frac{2}{7}x_2 + \frac{2}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4 \end{cases} \qquad \text{e quindi} \qquad A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -6 & 6 & -3 \\ -6 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

(*c*) Se $\pi(x)$ è la proiezione di $x$ su $U$, parallelamente a $W$, allora, $\pi'(x) = x - \pi(x)$ è la proiezione di $x$ su $W$, parallelamente a $U$, e quindi $x = \pi(x) + (x - \pi(x)) = \pi'(x) + \pi(x)$, qualunque sia $x \in \mathbb{R}^4$. Da ciò si deduce che

$$B = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi') = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(1 - \pi) = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(1) - \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \mathbf{1} - A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & 1 & 3 \\ -3 & 6 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(*d*) La simmetria $\sigma : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di asse $U$ e parallela al sottospazio $W$, manda $x = \pi(x) + \pi'(x)$, sul punto $\sigma(x) = \pi(x) - \pi'(x)$, qualunque sia $x \in \mathbb{R}^4$. Da ciò si deduce che

$$C = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma) = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) - \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi') = A - B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 & -4 & 4 & -2 \\ 6 & -5 & -2 & -6 \\ 6 & -12 & 5 & -6 \\ -12 & -4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

e ciò conclude la discussione. □

**ESERCIZIO 3**. *Nello spazio affine di dimensione* 4 *su* $\mathbb{R}$, *si considerino le due famiglie di sottovarietà lineari*

$$\alpha_t : \begin{cases} (t+1)X_1 - 3X_2 - 3X_3 = -t \\ (t+1)X_1 + tX_2 - 3X_3 + (t-6)X_4 = 3 \end{cases}$$
$$\beta_t : \begin{cases} (t+1)X_1 + tX_2 + (t-3)X_3 - (t+2)X_4 = -3 - t \\ (t+3)X_2 + tX_3 - 4X_4 = t \end{cases}$$

*al variare di* $t$ *in* $\mathbb{R}$.

(*a*) *Verificare se, per ogni* $t$, $\alpha_t$ *e* $\beta_t$ *sono due piani.*

(*b*) *Trovare i valori di* $t$ *per cui* $\alpha_t \cap \beta_t$ *è formato da un solo punto. In tali casi scrivere esplicitamente il punto* $P_t$ *di intersezione (in funzione di* $t$*).*

(*c*) *Trovare i valori di* $t$ *per cui* $\alpha_t \cap \beta_t$ *è vuoto e quelli per cui* $\alpha_t \cap \beta_t$ *è una retta e, in questo ultimo caso, scrivere l'equazione parametrica della retta intersezione. Ci sono valori per cui* $\alpha_t \cap \beta_t$ *è un piano?*

(d) *Si verifichi che le rette intersezione sono a due a due sghembe e si dica se esiste una retta, $\ell$, complanare con tutte le rette di intersezione. In caso affermativo, si determinino le equazioni cartesiane e parametriche di $\ell$.*

*Svolgimento.* (a) Si deve controllare che, per ogni valore di $t$, la matrice incompleta di $\alpha_t$ (risp. $\beta_t$) abbia rango 2, ovvero che esistano minori di ordine 2 non nulli. Per $\alpha_t$ considero il minore estratto da terza e quarta colonna, $\det\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -3 & t-6 \end{pmatrix} = -3(t-6)$, ed il minore estratto da seconda e terza colonna $\det\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ t & -3 \end{pmatrix} = 3(t+3)$. I due minori non si annullano simultaneamente per nessun valore di $t$, ed è quanto volevamo. Per $\beta_t$ considero il minore estratto da seconda e terza colonna, $\det\begin{pmatrix} t & t-3 \\ t+3 & t \end{pmatrix} = 9$, che non si annulla indipendentemente da $t$.

($b$) L'intersezione $\alpha_t \cap \beta_t$ è definita dal sistema di matrice completa

$$\left(\begin{array}{cccc|c} t+1 & -3 & -3 & 0 & -t \\ t+1 & t & -3 & t-6 & 3 \\ t+1 & t & t-3 & -t-2 & -3-t \\ 0 & t+3 & t & -4 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} t+1 & -3 & -3 & 0 & -t \\ 0 & t+3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & t & 2-t & -3 \\ 0 & 0 & 0 & t-2 & t+3 \end{array}\right),$$

come si verifica moltiplicando a sinistra per la matrice invertibile $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Per il teorema di Rouché-Capelli l'intersezione consiste di un punto se, e solo se, $t \notin \{-3, -1, 0, 2\}$. In tal caso il punto cercato è

$$P_t := \begin{pmatrix} \frac{6-t}{t-2} \\ \frac{4}{t-2} \\ 1 \\ \frac{t+3}{t-2} \end{pmatrix}.$$

($c$) Per $t = -3$ il sistema ha matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -3 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right).$$

Le soluzioni formano la retta $r = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Per $t = -1$ il sistema ha matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right).$$

Le soluzioni formano la retta $s = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Per $t = 0$ il sistema ha matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

Le soluzioni formano la retta $u = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Per $t = 2$ il sistema ha matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right),$$

che non ha soluzione e l'intersezione è quindi vuota.

$(d)$ Le tre rette non sono, a due a due, parallele, come si vede guardando ai generatori degli spazi direttori. Inoltre le tre rette non sono, a due a due, incidenti, perché sono contenute in tre iperpiani paralleli e, precisamente, $r$ nell'iperpiano $X_4 = 0$, $s$ nell'iperpiano $X_4 = -\frac{2}{3}$, $u$ nell'iperpiano $X_4 = -\frac{3}{2}$. Dunque, si tratta di tre rette, a due a due, sghembe.

Per determinare una retta complanare con tutte e tre possiamo ragionare nel modo seguente. Cerchiamo (se esiste) un punto, $P$, di intersezione tra l'iperpiano $r \vee s$ e la retta $u$. L'intersezione tra i due piani $P \vee r$ e $P \vee s$ è una retta (siamo nell'iperpiano $r \vee s$) che è complanare con $r$, $s$ ed $u$. Si ha

$$r \vee s = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{e quindi} \quad (r \vee s) \cap u = P = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Con calcoli diretti si ottiene

$$P \vee r : \begin{cases} X_3 = 1 \\ 2X_1 + 3X_2 - 4X_4 = -6 \end{cases} \qquad \text{e} \quad P \vee s : \begin{cases} X_3 = 1 \\ 5X_2 - 4X_4 = -4 \end{cases}$$

e quindi la retta, $\ell$, complanare con le tre rette $r$, $s$, e $u$, ha equazioni cartesiane

$$\ell : \begin{cases} 2X_1 + 3X_2 - 4X_4 = -6 \\ 5X_2 - 4X_4 = -4 \\ X_3 = -1 \end{cases},$$

passa per $P$ ed è parallela al vettore $w = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. □

**ESERCIZIO 4**. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -15 & 2 & -7 \\ 1 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

*rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, di $\mathbb{R}^4$.*

*(a) Si determinino il polinomio caratteristico di $\phi$, gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori e si dica se $\phi$ è diagonalizzabile.*

*(b) Si determinino il polinomio minimo di $\phi$ ed un autovettore generalizzato di periodo massimo per ogni autovalore di $\phi$.*

*(c) Si determinino una matrice di Jordan, $J$, di $\phi$, ed una matrice invertibile, $P$, tali che $P^{-1}AP = J$.*

*Svolgimento.* (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}) = (x+1)^4$, che ha termine noto diverso da zero e quindi $\phi$ è invertibile.

$(b)$ L'endomorfismo $\phi$ ha un unico autovalore, $-1$, di molteplicità 4 e quindi, non essendo $A$ una matrice scalare, non può essere diagonalizzabile. Osservando che

$$A + \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 5 & -15 & 2 & -7 \\ 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad (A + \mathbf{1})^2 = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 3 & -6 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{e} \qquad (A + \mathbf{1})^3 = \mathbf{0},$$

si conclude che vi è un sottospazio di dimensione 2 di autovettori ($\mathrm{rk}(A + \mathbf{1}) = 2$) e che gli autovettori generalizzati hanno periodo minore o uguale a 3. Lo spazio degli autovettori è $\langle 3e_1 + e_2, e_1 + e_3 + e_4 \rangle$.

($c$) Il polinomio minimo è quindi $\lambda_\phi(x) = (x + 1)^3$ e la matrice di Jordan di $\phi$ ha due blocchi, uno di ordine 3 ed uno di ordine 1. Un autovettore generalizzato di periodo 3 è, ad esempio, $v_4 = e_3$ che, assieme a $v_3 = (\phi + 1)(v_4) = 2e_1 + e_4$, $v_2 = (\phi + 1)^2(v_4) = 3e_1 + e_2$, formano una base del sottospazio su cui $\phi$ induce il blocco di ordine 3 della matrice di Jordan. Per completare la base ci serve un autovettore, linearmente indipendente da $v_2$, ad esempio, $v_1 = e_1 + e_3 + e_4$. Si conclude che

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sono le matrici cercate. □

**ESERCIZIO 5**. *Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato dell'applicazione bilineare, $g$, di matrice*

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

*rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$.*

*(a) Si dica se $g$ è non-degenere e si determini il sottospazio $W = \langle e_1, e_3 \rangle^\perp$.*

*(b) Si dica se $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$ e, in caso affermativo, si scriva la matrice della proiezione ortogonale su $W$.*

*(c) Si determinino le segnature delle restrizioni di $g$ a $W$ ed a $W^\perp$. È vero che la segnatura di $g$ è la somma delle segnature delle due restrizioni?*

*Svolgimento.* (a) Con un calcolo diretto si verifica che $\det G = -15$ e quindi $g$ è non-degenere. Il sottospazio $W = \langle e_1, e_3 \rangle^\perp$ è formato dalle soluzioni del sistema lineare (omogeneo)

$$\begin{cases} 2X_1 + X_3 = 0 \\ X_1 - 2X_2 + X_3 = 0 \end{cases};$$

e quindi $W = \langle e_4, -4e_1 + 2e_2 + 8e_3 + e_4 \rangle$ ed i generatori scelti sono una base ortogonale del sottospazio $W$.

($b$) La matrice della restrizione di $g$ a $W$, rispetto alla base data, è $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -32 \end{pmatrix}$, che è non degenere. Dunque, $W \cap W^\perp = \langle 0 \rangle$, e quindi $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$. Per determinare la proiezione ortogonale su $W$, $p_W : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, ragioniamo nel modo seguente: preso un generico vettore, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, la sua prioezione, sarà $p_W(x) = ae_4 + b(-4e_1 + 2e_2 + 8e_3 + e_4)$, ove $a, b$ sono determinati in modo che $x - p_W(x) \in W^\perp = \langle e_1, e_3 \rangle$, ovvero $a = \frac{2x_4 - x_2}{2}$ e $b = \frac{x_2}{2}$. La matrice della proiezione su $W$ è quindi

$$Q = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(p_W) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

($c$) La segnatura di $g$ ristretta a $W$ è $(1, 1)$ e la segnatura di $g$ ristretta a $W^\perp = \langle e_1, e_3 \rangle$ è $(2, 0)$. Una base ortogonale di $W^\perp$ è $\{e_1, e_1 - 2e_3\}$ e la matrice della restrizione di $g$ è $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Poiché i due sottospazi sono ortogonali, mettendo insieme una base ortogonale di $W$ ed una di $W^\perp$ si ottiene una base ortogonale di tutto $\mathbb{R}^4$ e quindi le segnature si sommano e si ha $\mathrm{sgn} g = (3, 1) = (1, 1) + (2, 0)$. □

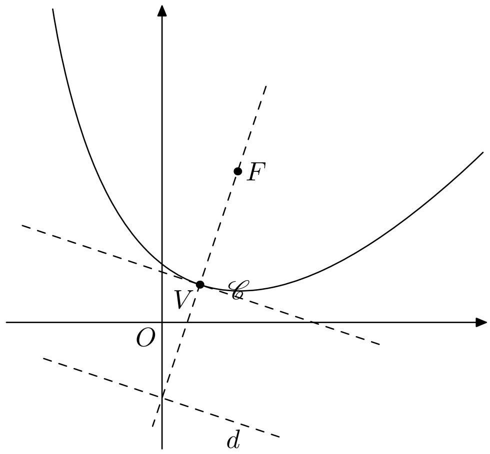
**ESERCIZIO 6**. [*Vecchio ordinamento*] *Studiare la conica* $\mathscr{C}$ *di equazione*

$$0.45x^2 - 0.3xy + 0.05y^2 - 2.6x - 5.8y + 8.2 = 0\ .$$

*In particolare determinare se è degenere, qual è il suo tipo, un'equazione canonica e l'opportuna trasformazione di coordinate, gli eventuali assi, asintoti, centro, fuochi. Se ne tracci infine un disegno approssimativo.*

*Svolgimento.* Consideriamo, come di consueto il piano affine immerso nel piano proiettivo prendendo $x_0 = 0$ come retta impropria. Una matrice della conica $\mathscr{C}$ è $A = \begin{pmatrix} 41/5 & -13/10 & -29/10 \\ -13/10 & 9/20 & -3/20 \\ -29/10 & -3/20 & 1/20 \end{pmatrix}$. Poiché $\det A = -5 \neq 0$ si tratta di una conica non degenere, e poiché $\det A_\infty = 0$ ($A_\infty$ è la sottomatrice quadrata di $A$ che si ottiene cancellando prima riga e prima colonna) si tratta di una parabola.

Il punto di intersezione con la retta impropria, ovvero la direzione dell'asse, è il punto $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e quindi l'asse della parabola è la polare della direzione ortogonale $P_\infty^\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ed è la retta $h : y - 3x + 2 = 0$. Il vertice è l'intersezione tra l'asse e la parabola, ovvero il punto $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La matrice $A_\infty$ ha autovalori 0 e $1/2$ e dunque, l'equazione canonica di $\mathscr{C}$, in un opportuno sistema di riferimento ortonormale, è $2Y = \frac{1}{2\sqrt{10}}X^2$ e la matrice dell'isometria che porta l'equazione in forma canonica è $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1 & -1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$, come si può verificare calcolando la matrice $\frac{1}{\sqrt{10}} {}^tPAP$. Infine, ricordiamo che il fuoco si trova sull'asse focale, a distanza $\sqrt{10}$ dal vertice; dunque è il punto $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, come si verifica facilmente, osservando che la polare di $F$ è una retta esterna alla conica. Un disegno approssimativo della conica in questione è riportato qui sotto




e la discussione è conclusa. □

## Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova scritta del 11 aprile 2005

**ESERCIZIO 1**. *Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino le rette*

$$\ell_1 : \begin{cases} 2x + y = 0 \\ y + 4z = 2 \end{cases}, \qquad \ell_2 : \begin{cases} 2x - y = 4 \\ y + z = -1 \end{cases}, \qquad \ell_1 : \begin{cases} x + y = -1 \\ y - z = -3 \end{cases},$$

*ed il piano $\pi : x + y + z = 1$.*

*(a) Verificare che le tre rette concorrono ad un punto, $P_0$, non appartenente a $\pi$.*

*(b) Determinare il piano, $\pi'$, corrispondente a $\pi$ nella simmetria centrale di centro $P_0$ e calcolare la distanza tra $\pi$ e $\pi'$.*

*(c) Posto $P_i = \ell_i \cap \pi$, per $i = 1, 2, 3$. Determinare i punti $Q_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$ per cui la proiezione su $\pi$ di centro $Q_t$ è ben definita e l'immagine del punto $P_0$ è interna al triangolo $P_1P_2P_3$.*

*Svolgimento.* (a) Le tre rette concorrono al punto, $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, che non appartiene al piano $\pi : x+y+z = 1$, come si verifica sostituendo le coordinate del punto nell'equazione del piano.

(b) La simmetria, $\sigma : E^3 \to E^3$, manda il punto $X$ nel punto $\sigma(X)$ che si ottiene applicando l'opposto del vettore $\overrightarrow{P_0X}$ in $P_0$; dunque, $\sigma(X) = P_0 - \overrightarrow{P_0X} = 2P_0 - X$. Il piano $\pi'$ sarà dunque un piano parallelo a $\pi$, passante per il simmetrico di un qualsiasi punto di $\pi$. Considerando il punto $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \pi$, si ha $\sigma(Q) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, e quindi $\pi' : x + y + x = -1$. Dunque, la distanza tra i due piani è uguale a $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{|\overrightarrow{Q\sigma(Q)} \cdot n|}{\|n\|}$, ove $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è il vettore ortogonale al piano $\pi$.

(c) I punti cercati sono

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La proiezione su $\pi$, di centro $Q_t$, è ben definita (su tutti i punti del complementare del piano, parallelo a $\pi$, passante per $Q_t$) se $Q_t \notin \pi$ e quindi, per $t \neq 1$. Inoltre, il punto $P_0$ appartiene al dominio della proiezione, se, e solo se, il vettore $\overrightarrow{Q_tP_0}$ non è parallelo a $\pi$ e quindi, per $t \neq 0$. Il punto $Q_t + \lambda\overrightarrow{Q_tP_0}$ appartiene al piano $\pi$ se, e solo se, $\lambda = \frac{t-1}{t}$ e quindi la proiezione di $P_0$ è il punto

$$R_t = \begin{pmatrix} \frac{t-1}{t} \\ \frac{2-2t}{t} \\ \frac{2t-1}{t} \end{pmatrix} = \frac{5-3t}{7t} P_1 + \frac{2t-1}{7t} P_2 + \frac{8t-4}{7t} P_3;$$

ed $R_t$ è interno al triangolo $P_1P_2P_3$ se, e solo se, i tre coefficienti sono positivi e quindi se, e solo se,

$$\begin{cases} \frac{5-3t}{7t} \geq 0 \\ \frac{2t-1}{7t} \geq 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \tfrac{1}{2} \leq t \leq \tfrac{5}{3};$$

e ciò conclude la discussione. □

**ESERCIZIO 2**. *Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^7$, si considerino i vettori*

$$u_1 = e_1 - 4e_2 + e_3 - e_4 + 2e_6, \qquad u_2 = 2e_1 - 4e_2 + e_4 + e_5 + e_6,$$
$$u_3 = 3e_1 - 4e_2 - e_3 + e_6 + e_7, \qquad u_4 = e_1 - e_3 - e_6 + e_7,$$

*ove* $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_7\}$ *è la base canonica di* $\mathbb{R}^7$. *Si considerino i sottospazi* $C = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$, $D = \langle e_4, e_5, e_6, e_7\rangle$ *ed* $U = \langle u_1, u_2, u_3, u_4\rangle$.

(a) *Si verifichi che* $U \cap C = \langle 0\rangle$ *e* $\dim U = 4$ *e si concluda che* $U$ *è il grafico di un'applicazione lineare* $\phi : D \to C$.

(b) *Si scriva la matrice di* $\phi$ *rispetto alle basi* $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ *di* $C$ *e* $\mathcal{D} = \{e_4, e_5, e_6, e_7\}$ *di* $D$.

(c) *Si determinino dimensioni e basi per* $\mathrm{im}\phi$ *e* $\ker\phi$.

(d) *Si mostri che il sottoinsieme* $W = \{\, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(C, C) \mid \psi \circ \phi = 0 \,\}$ *è un sottospazio dello spazio vettoriale* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(C, C)$ *e se ne calcoli la dimensione. Detta* $\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{C}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(C, C) \to M_3(\mathbb{R})$ *l'applicazione che ad ogni endomorfismo di* $C$ *associa la sua matrice rispetto alla base* $\mathcal{C}$, *si determini una base del sottospazio* $\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(W)$ *di* $M_3(\mathbb{R})$.

*Svolgimento.* (a) Un vettore $a_1u_1a_2u_2 + a_3u_3 + a_4u_4$ appartiene ad $U \cap C$ se, e solo se, scritto rispetto alla base canonica, i coefficienti di $e_4, \dots, e_7$ sono uguali a zero. Si han quindi le condizioni

$$\begin{cases} -a_1 + a_2 = 0 \\ a_2 = 0 \\ 2a_1 + a_2 + a_3 - a_4 = 0 \\ a_3 + a_4 = 0 \end{cases} \quad \text{da cui si deduce} \quad \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_4 = 0 \end{cases}.$$

Da questo calcolo si deduce che $U \cap C = \langle 0\rangle$ e che i vettori $u_1, \dots, u_4$ sono linearmente indipendenti e quindi $\dim U = 4$. Ciò significa che la proiezione su $D$ parallelamente a $C$ induce un isomorfismo tra $D$ ed $U$ e quindi l'applicazione $\phi : D \to C$, avente $U$ come grafico, è quella che al vettore $x \in D$ associa l'unico vettore $\phi(x) \in C$ tale che $x + \phi(x) \in U$. Il fatto che $U$ sia un sottospazio ci dice che $\phi$ è un'applicazione lineare, ovvero, presi comunque $x + \phi(x)$, $y + \phi(y)$ in $U$ e due scalari $\alpha$ e $\beta$, $\alpha(x + \phi(x)) + \beta(y + \phi(y)) = (\alpha x + \beta y) + (\alpha x\phi(x) + \beta\phi(y))$ appartiene ad $U$ e quindi $\phi(\alpha x + \beta y) = \alpha x\phi(x) + \beta\phi(y)$.

($b$) Guardando alla base data di $U$, si deduce che

$$\begin{aligned} \phi(-e_4 + 2e_6) &= e_1 - 4e_2 + e_3 \\ \phi(e_4 + e_5 + e_6) &= 2e_1 - 4e_2 \\ \phi(e_6 + e_7) &= 3e_1 - 4e_2 - e_3 \\ \phi(-e_6 + e_7) &= e_1 - e_3 \end{aligned} \quad \text{e quindi} \quad \begin{aligned} \phi(e_4) &= e_1 - e_3 \\ \phi(e_5) &= -2e_2 + e_3 \\ \phi(e_6) &= e_1 - 2e_2 \\ \phi(e_7) &= 2e_1 - 2e_2 - e_3 \end{aligned}.$$

Si conclude così che la matrice di $\phi$ rispetto alle basi date è

$$A = \alpha_{\mathcal{D},\mathcal{C}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

($c$) La matrice $A$ ha rango 2 e l'immagine di $\phi$ è il sottospazio vettoriale di $C$ generato dalla prima e dalla seconda colonna di $A$. Dunque $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{im}\phi = 2$, ed $\mathrm{im}\phi = \langle e_1 - e_3, -2e_2 + e_3\rangle$. Per la formula delle dimensioni abbiamo che $\dim_{\mathbb{R}} \ker\phi = 4 - 2 = 2$, e risolvendo il sistema $AX = 0$ troviamo che $\ker\phi = \langle e_4 + e_5 - e_6, 2e_4 + e_5 - e_7\rangle$.

($d$) L'insieme $W$ è formato da tutte le applicazioni lineari $\psi : C \to C$, per cui $\mathrm{im}\phi \subseteq \ker\psi$, ovvero sono tutte e sole le applicazioni lineari che mandano a zero il sottospazio $\mathrm{im}\phi$. Indicando con $Z$ un sottospazio complementare ad $\mathrm{im}\phi$, si può identificare $W$ con lo spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(Z, C)$. Dunque $W$ è un sottospazio di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(C, C)$ di dimensione $(\dim_{\mathbb{R}} Z)(\dim_{\mathbb{R}} C) = 1 \cdot 3 = 3$. Una base di $\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(W)$ è costituita dalle seguenti matrici in $M_3(\mathbb{R})$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ciò conclude la discussione. □

**ESERCIZIO 3**. *Nello spazio affine di dimensione 4 su $\mathbb{R}$, si considerino le due famiglie di sottovarietà lineari*

$$\mathbb{L}_t : \begin{cases} (t-1)X_1 + 2tX_3 + 2tX_4 = 1 \\ (t+2)X_2 - tX_3 - X_4 = 2 - t \\ (t-1)X_1 + (t+2)X_2 + 2tX_3 = 3 \end{cases}$$
$$\mathbb{M}_t : (t-1)X_1 + (t+2)X_2 + tX_3 - X_4 = 3 - t$$

*al variare di $t$ in $\mathbb{R}$.*

(a) *Si verifichi che le dimensioni di $\mathbb{L}_t$ ed $\mathbb{M}_t$ sono indipendenti da $t$.*

(b) *Trovare i valori di $t$ per cui $\mathbb{L}_t \cap \mathbb{M}_t$ è formato da un solo punto. In tali casi scrivere esplicitamente il punto $P_t$ di intersezione (in funzione di $t$).*

(c) *Trovare i valori di $t$ per cui $\mathbb{L}_t \cap \mathbb{M}_t$ è vuoto e quelli per cui $\mathbb{L}_t \cap \mathbb{M}_t$ è una retta e, in questo ultimo caso, scrivere l'equazione parametrica della retta intersezione.*

(d) *Si determini $\mathbb{L}_t \vee \mathbb{M}_t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Si determini la sottovarietà generata da tutte le intersezioni $\mathbb{L}_t \cap \mathbb{M}_t$.*

*Svolgimento.* (a) Si deve controllare che, per ogni valore di $t$, la matrice incompleta di $\mathbb{L}_t$ (risp. $\mathbb{M}_t$) abbia rango 3 (risp. 1). Per $\mathbb{M}_t$ basta osservare che il coefficiente di $X_4$ non è mai nullo e quindi $\mathbb{M}_t$ è un iperpiano per ogni valore di $t$. Per $\mathbb{L}_t$, sottraendo alla terza riga le prime due si ottiene la matrice di un sistema equivalente

$$\left(\begin{array}{cccc|c} t-1 & 0 & 2t & 2t & 1 \\ 0 & t+2 & -t & -1 & 2-t \\ 0 & 0 & t & 1-2t & t \end{array}\right)$$

che ha rango 3 per $t \notin \{-2, 0, 1\}$. Considerando separatamente i tre valori eccezionali di $t$, si conclude che $\dim \mathbb{L}_t = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

$(b)$ L'intersezione $\mathbb{L}_t \cap \mathbb{M}_t$ è definita dal sistema di matrice completa

$$\left(\begin{array}{cccc|c} t-1 & 0 & 2t & 2t & 1 \\ 0 & t+2 & -t & -1 & 2-t \\ t-1 & t+2 & 2t & 0 & 3 \\ t-1 & t+2 & t & -1 & 3-t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} t-1 & 0 & 2t & 2t & 1 \\ 0 & t+2 & -t & -1 & 2-t \\ 0 & 0 & t & 1-2t & t \\ 0 & 0 & 0 & -2t & 0 \end{array}\right),$$

come si verifica sottraendo alla terza ed alla quarta riga la somma delle prime due. Per il teorema di Rouché-Capelli l'intersezione consiste di un punto se, e solo se, $t \notin \{-2, 0, 1\}$. In tal caso il punto cercato è

$$P_t := \begin{pmatrix} \frac{1-2t}{t-1} \\ \frac{2}{t+2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$(c)$ Per $t = -2$ il sistema ha matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 0 & -4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right),$$

che non ha soluzione e l'intersezione è quindi vuota.

Per $t = 0$ il sistema ha matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Le soluzioni formano la retta $\mathbb{L}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Per $t=1$ il sistema ha matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right),$$

che non ha soluzione e l'intersezione è quindi vuota.

$(d)$ Se $\mathbb{L}_t \cap \mathbb{M}_t$ è vuoto, oppure si riduce ad un punto, allora la dimensione della sottovarietà lineare generata, $\mathbb{L}_t \vee \mathbb{M}_t$, è uguale a 4 e coincide perciò con tutto lo spazio. Ciò accade per $t \neq 0$. Per $t=0$, $\mathbb{L}_0 \subset \mathbb{M}_0$ e quindi la varietà generata è l'iperpiano $\mathbb{M}_0$, di equazione $X_1 - 2X_2 + X_4 = -3$.

La sottovarietà lineare generata da tutte le intersezioni, contiene la retta $\mathbb{L}_0$ e tutti i punti $P_t$, per $t \notin \{-2, 0, 1\}$. Tutti questi sono contenuti nell'iperpiano $X_4 = 0$ e quindi lo stesso vale per la sottovarietà lineare generata. Si tratta proprio di tutto l'iperpiano, come si verifica, ad esempio, prendendo due punti della retta $\mathbb{M}_0$ ed i due punti $P_2$ e $P_{-3}$. □

**ESERCIZIO 4**. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

*rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, di $\mathbb{R}^4$.*

*(a) Si determinino il polinomio caratteristico di $\phi$, gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori. Si dica se $\phi$ è invertibile.*

*(b) Si determinino il polinomio minimo di $\phi$ ed un autovettore generalizzato di periodo massimo per ogni autovalore di $\phi$.*

*(c) Si determinino una matrice di Jordan, $J$, di $\phi$, ed una matrice invertibile, $P$, tali che $P^{-1}AP = J$.*

*Svolgimento.* (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}) = x^4$, che ha termine noto uguale a zero e quindi $\phi$ non è invertibile. Il rango di $\phi$ è uguale a 3 e quindi vi è un sottospazio di autovettori di dimensione 1, $\ker\phi = \langle e_2 - e_3 + e_4 \rangle$.

$(b)$ L'endomorfismo $\phi$ ha un unico autovalore, 0, di molteplicità 4 e nullità 1, quindi non può essere diagonalizzabile. Osservando che

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{e} \qquad A^4 = \mathbf{0},$$

si conclude che il polinomio minimo coincide con il polinomio caratteristico ed esistono autovettori generalizzati di periodo uguale a 4. Uno di questi è, ad esempio $e_3$.

$(c)$ La matrice di Jordan di $\phi$ ha un unico blocco di ordine 4. Possiamo prendere $v_4 = e_3$, $v_3 = \phi(v_4) = -e_1 - 2e_2 + 2e_3$, $v_2 = \phi^2(v_4) = e_1 - e_2 + e_3 - 2e_4$ e $v_1 = \phi^3(v_4) = e_2 - e_3 + e_4$ ed otteniamo così una base rispetto a cui $\phi$ ha matrice di Jordan. Si conclude che

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono le matrici cercate. □

**ESERCIZIO 5**. *Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato dell'applicazione bilineare, $g$, di matrice*

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

*rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$.*

*(a) Si dica se $g$ è non-degenere e si determini il sottospazio $W = \langle e_2, e_4 \rangle^\perp$.*
*(b) Si dica se $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$ e, in caso affermativo, si scriva la matrice della proiezione ortogonale su $W^\perp$.*
*(c) Si determinino le segnature delle restrizioni di $g$ a $W$ ed a $W^\perp$. È vero che $W$ e $W^\perp$ sono isometrici?*

*Svolgimento.* (a) Con un calcolo diretto si verifica che $\det G = 11$ e quindi $g$ è non-degenere. Il sottospazio $W = \langle e_2, e_4 \rangle^\perp$ è formato dalle soluzioni del sistema lineare (omogeneo)

$$\begin{cases} X_2 - X_4 = 0 \\ X_1 - X_2 - X_3 + 2X_4 = 0 \end{cases};$$

e quindi $W = \langle e_1 + e_3, 4e_1 - 9e_2 - 5e_3 - 9e_4 \rangle$ ed i generatori scelti sono una base ortogonale del sottospazio $W$.

$(b)$ La matrice della restrizione di $g$ a $W$, rispetto alla base data, è $\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 99 \end{pmatrix}$, che è non degenere ($W \cap W^\perp = \langle 0 \rangle$) e quindi $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$. Per determinare la proiezione ortogonale su $W^\perp$, $p_{W^\perp} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, ragioniamo nel modo seguente. Preso un generico vettore, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, la sua proiezione, sarà $p_{W^\perp}(x) = ae_2 + be_4$, ove $a, b$ sono determinati in modo che $x - p_{W^\perp}(x) \in W$, ovvero $a = x_1 + x_2 - x_3$ e $b = x_1 - x_3 + x_4$. La matrice della proiezione su $W$ è quindi

$$Q = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(()p_W) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$(c)$ La segnatura di $g$ ristretta a $W$ è $(2, 0)$ e la segnatura di $g$ ristretta a $W^\perp = \langle e_2, e_4 \rangle$ è $(0, 2)$. Una base ortogonale di $W^\perp$ è $\{e_2, e_2 + e_4\}$ e la matrice della restrizione di $g$ è $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. I due spazi hanno segnatura opposta e quindi non può esistere un'isometria tra $W$ e $W^\perp$. $\square$

**ESERCIZIO 6**. [*Vecchio ordinamento*] *Studiare la conica* $\mathscr{C}$ *di equazione*

$$11x^2 - 6xy + 19y^2 - 4x - 28y = 0\ .$$

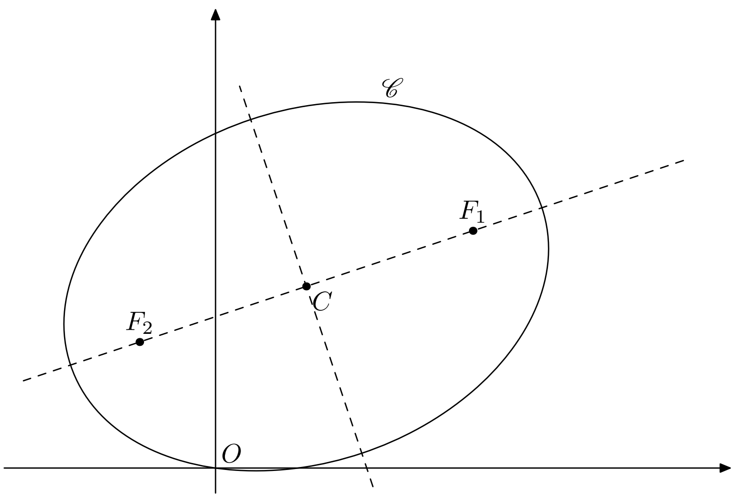
*In particolare determinare se è degenere, qual è il suo tipo, un'equazione canonica e l'opportuna trasformazione di coordinate, gli eventuali assi, asintoti, centro, fuochi. Se ne tracci infine un disegno approssimativo.*

*Svolgimento.* Consideriamo, come di consueto il piano affine immerso nel piano proiettivo prendendo $x_0 = 0$ come retta impropria. Una matrice della conica $\mathscr{C}$ è $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -14 \\ -2 & 11 & -3 \\ -14 & -3 & 19 \end{pmatrix}$. Poiché $\det A = -2400 \neq 0$ si tratta di una conica non degenere, e poiché $\det A_\infty = 200$ ($A_\infty$ è la sottomatrice quadrata di $A$ che si ottiene cancellando prima riga e prima colonna) si tratta di un'ellisse.

Il centro, ovvero il polo della retta impropria, è il punto di coordinate omogenee $C = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. La matrice $A_\infty$ ha autovalori 10 e 20 a cui corrispondono gli autovettori $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. L'equazione canonica di $\mathscr{C}$, in un opportuno sistema di riferimento ortonormale, è $\frac{5}{6}X^2 + \frac{5}{3}Y^2 = 1$ e la matrice dell'isometria che porta l'equazione in forma canonica è $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/5 & 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 4/5 & 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$, come si può verificare calcolando la matrice $\frac{1}{12}{}^tPAP$. Gli assi hanno quindi equazioni:

$$h_1 : x - 3y + 2 = 0 \text{ (asse focale)}, \qquad h_2 : 3x + y - 2 = 0.$$

Infine, ricordiamo che i fuochi si trovano sull'asse focale, a distanza $\sqrt{\frac{3}{5}}$ dal centro. Sono i punti $F_{1,2} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \pm \frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Un disegno approssimativo della conica in questione è riportato qui sotto




e la discussione è conclusa. □

## Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova scritta del 5 luglio 2005

**ESERCIZIO 1**. *Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino i punti*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si scriva l'equazione cartesiana del piano $\pi = P_1 \vee P_2 \vee P_3$ e si verifichi se $P \in \pi$.*

(b) *Determinare l'equazione cartesiana del piano $\pi'$, corrispondente a $\pi$ nella simmetria di asse $x - z = 0$ e verificare se la retta per $R = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è contenuta in $\pi'$.*

(c) *Posto $X_t = R + tv$, al variare di $t$ in $\mathbb{R}$, si determinino i valori di $t$ per cui la proiezione su $\pi$ di centro $X_t$ è ben definita e l'immagine del punto $P$ è interna al triangolo $P_1P_2P_3$.*

*Svolgimento.* (a) Il piano $\pi$ ha equazione $\pi : 2x - y + z = 2$, e $P \notin \pi$, come si verifica sostituendo le coordinate del punto nell'equazione del piano.

(*b*) La simmetria, $\sigma : E^3 \to E^3$, lascia invariata la coordinata $y$ mentre scambia tra loro le altre due e la sua matrice, nel riferimento canonico, è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il piano $\pi'$ avrà dunque equazione cartesiana $\pi' : x - y + 2z = 2$ e si verifica che il punto $R$ appartiene a $\pi'$ ed il vettore $v$ è parallelo ad esso. Dunque la retta $R + \langle v \rangle$ è contenuta in $\pi'$.

(*c*) La proiezione di centro $X_t$ su $\pi$ è definita se $X_t \notin \pi$, ovvero per $t \neq 1$, inoltre, non esiste l'immagine del punto $P$ se il vettore $P - X_t$ è parallelo a $\pi$, ovvero per $t = 3/2$. Per tutti gli altri valori di $t$, la proiezione di $P$ è il punto $Q_t = (P \vee X_t) \cap \pi$, di coordinate $Q_t = \begin{pmatrix} \frac{3t-4}{2t-3} \\ \frac{5t-6}{2t-3} \\ \frac{3t-4}{2t-3} \end{pmatrix}$. Il punto ha coordinate baricentriche

$$Q_t = \tfrac{2t-4}{8t-12} P_1 + \tfrac{6-5t}{8t-12} P_2 + \tfrac{11t-14}{8t-12} P_3,$$

ed è interno al triangolo $P_1P_2P_3$ se, e solo se, le tre coordinate baricentriche sono positive, ovvero per $\frac{6}{5} < t < \frac{14}{11}$. □

**ESERCIZIO 2**. *Si considerino gli spazi vettoriali $V$ e $W$, dotati, rispettivamente, delle basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$, e indichiamo con $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare che soddisfi alle seguenti condizioni*

$$\phi(v_1 - v_3) = -2w_1 + 2w_3, \qquad \phi(v_1 - v_2 + v_3) = w_1 - 2w_2,$$
$$\phi(v_1 + v_3) = -2w_1 - 4w_2, \qquad \phi(v_1 - v_3 + v_4) = -w_1 + w_3.$$

(a) *Si dica se $\phi$ è univocamente determinata dalle condizioni date e si determini la matrice di ogni tale $\phi$, rispetto alle basi $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$.*

(b) *Si determinino dimensioni e basi per im$\phi$ e ker$\phi$.*

(c) *Si mostri che il sottoinsieme $Z = \{ \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) \mid \phi \circ \psi = 0 \}$ è un sottospazio dello spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ e se ne calcoli la dimensione. Detta $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) \to M_4(\mathbb{R})$ l'applicazione che ad ogni endomorfismo di $V$ associa la sua matrice rispetto alla base $\mathcal{V}$, si determini una base del sottospazio $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(Z)$ di $M_4(\mathbb{R})$.*

*Svolgimento.* (a) I vettori $v_1 - v_3$, $v_1 - v_2 + v_3$, $v_1 + v_3$, $v_1 - v_3 + v_4$ formano una base di $V$ e quindi esiste un'unica applicazione lineare $\phi : V \to W$ che soddisfi alle condizioni date. In particolare, si ha

$$\begin{aligned}
\phi(v_1) &= \tfrac{1}{2}(\phi(v_1 - v_3) + \phi(v_1 + v_3)) = -2w_1 - 2w_2 + w_3,\\
\phi(v_2) &= \phi(v_1 + v_3) - \phi(v_1 - v_2 + v_3) = -3w_1 - 2w_2,\\
\phi(v_3) &= \tfrac{1}{2}(\phi(v_1 + v_3) - \phi(v_1 - v_3)) = -2w_2 - w_3,\\
\phi(v_4) &= \phi(v_1 - v_3 + v_4) - \phi(v_1 - v_3) = w_1 - w_3
\end{aligned}$$

La matrice di $\phi$ rispetto alle basi date è

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$(b)$ La matrice $A$ ha rango 3 e l'immagine di $\phi$ è lo spazio vettoriale $W$. Per la formula delle dimensioni abbiamo che $\dim_{\mathbb{R}} \ker\phi = 4 - 3 = 1$, e risolvendo il sistema $AX = 0$ troviamo che $\ker\phi = \langle v_1 - v_3 + 2v_4\rangle$.

$(c)$ L'insieme $Z$ è formato da tutte le applicazioni lineari $\psi : V \to V$, per cui $\operatorname{im}\psi \subseteq \ker\phi$, ovvero sono tutte e sole le applicazioni lineari di $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \ker\phi)$, che ha dimensione $(\dim_{\mathbb{R}} V)(\dim_{\mathbb{R}} \ker\phi) = 4 \cdot 1 = 4$. Una base di $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(Z)$ è costituita dalle seguenti matrici in $M_4(\mathbb{R})$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Ciò conclude la discussione. □

**ESERCIZIO 3**. *Nello spazio $\mathbb{R}^4$, dotato dell'usuale prodotto scalare, si consideri il sottospazio $U = \langle 3e_1 + e_3, e_2 + 3e_4\rangle$.*

*(a) Si scriva la matrice dell'applicazione $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che manda ogni vettore nella sua proiezione ortogonale sul sottospazio $U$.*

*(b) Si consideri l'applicazione $\sigma : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, definita da $\sigma(x) = x - \pi(x)$. Determinare $\ker\sigma$ ed $\operatorname{im}\sigma$.*

*(c) Dato il vettore $v = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, determinare il volume del tetraedro di spigoli $v, \pi(v), \sigma(v)$ e l'area del triangolo avente come vertici gli estremi di questi tre vettori.*

*Svolgimento.* (a) Siano $u_1 = 3e_1 + e_3$ ed $u_2 = e_2 + 3e_4$ i generatori di $U$. Dato un vettore $x \in \mathbb{R}^4$, si tratta di determinare il vettore $\pi(x) = \alpha u_1 + \beta u_2$ tale che

$$\begin{cases} u_1 \cdot (x - \alpha u_1 + \beta u_2) = 0 \\ u_2 \cdot (x - \alpha u_1 + \beta u_2) = 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} 3(x_1 - 3\alpha) + (x_3 - \alpha) = 0 \\ (x_2 - \beta) + 3(x_4 - 3\beta) = 0 \end{cases}.$$

In tal modo si ottiene $\alpha = \frac{1}{10}(3x_1 + x_3)$ e $\beta = \frac{1}{10}(x_2 + 3x_4)$ e quindi l'applicazione $\pi$ ha matrice

$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

$(b)$ $\sigma$ è l'applicazione lineare di matrice

$$B = \mathbf{1} - A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

ovvero la proiezione ortogonale sul sottospazio $U^\perp = \langle e_1 - 3e_3, 3e_2 - e_4\rangle$, che è quindi l'immagine di $\sigma$, mentre il nucleo è il sottospazio $U$.

$(c)$ Essendo, per costruzione, $v = \pi(v) + \sigma(v)$; i tre vettori sono linearmente dipendenti e quindi il tetraedro generato dai tre degenera ed ha volume nullo.

Detta $Y$ la matrice che ha le coordinate di $v - \pi(v)$ e $v - \sigma(v)$ come colonne, l'area del triangolo avente come vertici gli estremi dei tre vettori è uguale a $\frac{1}{2}\sqrt{\det({}^tYY)}$; ovvero

$$Y = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 3 & 2 \\ 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{e quindi} \qquad A = \tfrac{1}{2}\sqrt{\det \tfrac{4}{5}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right)} = \frac{4}{5}.$$

Ciò conclude la discussione. □

**ESERCIZIO 4**. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

*rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, di $\mathbb{R}^4$.*

*(a) Si determinino il polinomio caratteristico di $\phi$, gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori. Si dica se $\phi$ è invertibile.*
*(b) Si determinino il polinomio minimo di $\phi$ ed un autovettore generalizzato di periodo massimo per ogni autovalore di $\phi$.*
*(c) Si determinino una matrice di Jordan, $J$, di $\phi$, ed una matrice invertibile, $P$, tali che $P^{-1}AP = J$.*

*Svolgimento.* (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}) = (x-2)^4$, che ha termine noto uguale a 16 e quindi $\phi$ è invertibile. Il rango di $\phi - 2$ è uguale a 2 e quindi vi è un sottospazio di autovettori di dimensione 2, $\ker(\phi - 2) = \langle e_1 + e_3, e_2 - e_4\rangle$.

$(b)$ L'endomorfismo $\phi$ ha un unico autovalore, 2, di molteplicità 4 e nullità 2, quindi non può essere diagonalizzabile. Osservando che

$$A - 2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \qquad (A-2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{e} \qquad (A-2)^3 = \mathbf{0},$$

si conclude che il polinomio minimo è $(x-2)^3$ ed esistono autovettori generalizzati di periodo uguale a 3. Uno di questi è, ad esempio, $e_1$.

$(c)$ La matrice di Jordan di $\phi$ ha quindi due blocchi, uno dei quali ha ordine 3. Possiamo prendere $v_4 = e_1$, $v_3 = (\phi - 2)(v_4) = e_1 + 2e_2 + e_3 - 3e_4$, $v_2 = (\phi - 2)^2(v_4) = -3e_2 + 3e_4$ e, da ultimo, un autovettore, linearmente indipendente da $v_2$, ad esempio, $v_1 = e_1 + e_3$. Otteniamo così una base rispetto a cui $\phi$ ha matrice di Jordan. Si conclude che

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

sono le matrici cercate. □

**ESERCIZIO 5**. *Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato dell'applicazione bilineare, $g$, di matrice*

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

*rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$.*

(a) *Si dica se $g$ è non-degenere e si determini il sottospazio $W = \langle e_1, e_2 \rangle^\perp$.*
(b) *Si dica se $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$ e si determini una base ortogonale di ciascuno dei due sottospazi.*
(c) *Si determinino le segnature delle restrizioni di $g$ a $W$ ed a $W^\perp$. È vero che $W$ e $W^\perp$ sono isometrici? In caso affermativo, si determinino le immagini di $e_1$ ed $e_2$ in un'isometria $\phi : W^\perp \to W$.*

*Svolgimento.* (a) Con un calcolo diretto si verifica che $\det G = 32$ e quindi $g$ è non-degenere. Il sottospazio $W = \langle e_1, e_2 \rangle^\perp$ è formato dalle soluzioni del sistema lineare (omogeneo)

$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 + X_3 = 0 \\ -X_1 + X_3 - 2X_4 = 0 \end{cases};$$

e quindi $W = \langle e_1 + 3e_2 + e_3, 2e_2 + 2e_3 + e_4 \rangle$ ed i generatori scelti sono una base ortogonale del sottospazio $W$.

($b$) La matrice della restrizione di $g$ a $W$, rispetto alla base data, è $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$, che è non degenere e non definita ($W \cap W^\perp = \langle 0 \rangle$). Quindi $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$. Una base ortogonale di $W^\perp = \langle e_1, e_2 \rangle$ è $\{e_1, e_1 + 2e_2\}$ e la matrice della restrizione di $g$, rispetto a questa base, è $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

($c$) La segnatura di $g$ ristretta a $W$ ed a $W^\perp$ è $(1, 1)$ e quindi i due spazi sono isometrici. Per determinare un'isometria, $\phi : W^\perp \to W$, e le immagini di $e_1$ ed $e_2$, possiamo servirci delle basi ortogonali. Infatti, l'applicazione $\phi : W^\perp \to W$, definita da

$$e_1 \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + 3e_2 + e_3) \qquad e_1 + 2e_2 \mapsto \frac{1}{2}(2e_2 + 2e_3 + e_4)$$

è un'isometria, e

$$\phi(e_2) = \frac{1}{2}(\phi(e_1+2e_2)-\phi(e_1)) = \frac{1}{2}(e_2+e_3+\tfrac{1}{2}e_4-\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+3e_2+e_3)) = \frac{1}{4}(-\sqrt{2}e_1+(2-3\sqrt{2})e_2+(2-\sqrt{2})e_3+e_4).$$

Ciò conclude la discussione. □

**ESERCIZIO 6**. [*Vecchio ordinamento*] *Studiare la conica* $\mathscr{C}$ *di equazione*

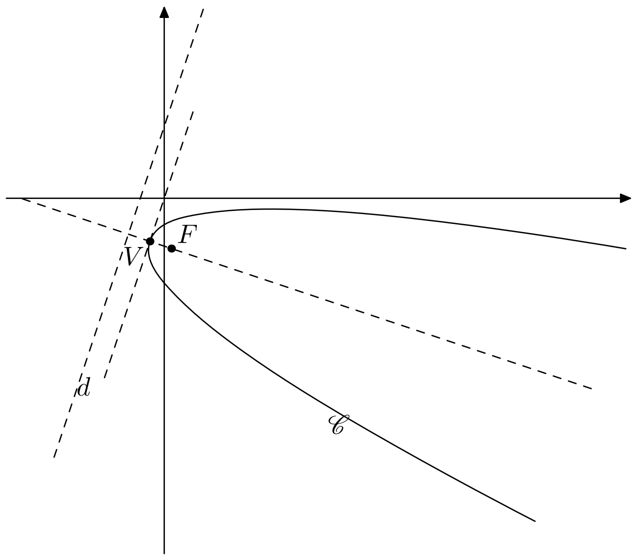
$$x^2 + 6xy + 9y^2 - 8x + 16y + 4 = 0 \; .$$

*In particolare determinare se è degenere, qual è il suo tipo, un'equazione canonica e l'opportuna trasformazione di coordinate, gli eventuali assi, asintoti, centro, fuochi. Se ne tracci infine un disegno approssimativo.*

*Svolgimento.* Consideriamo, come di consueto il piano affine immerso nel piano proiettivo prendendo $x_0 = 0$ come retta impropria. Una matrice della conica $\mathscr{C}$ è $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 8 \\ -4 & 1 & 3 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$. Poiché $\det A = -400 \neq 0$ si tratta di una conica non degenere, e poiché $\det A_\infty = 0$ ($A_\infty$ è la sottomatrice quadrata di $A$ che si ottiene cancellando prima riga e prima colonna) si tratta di una parabola.

La matrice $A_\infty$ ha autovalori 10 e 0 a cui corrispondono gli autovettori $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. L'asse è quindi la retta di coordinate plückeriane $(0, 1, 3)A = 10(2, 1, 3)$, che interseca la parabola nel vertice, di coordinate omogenee, $V = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

L'equazione canonica di $\mathscr{C}$, in un opportuno sistema di riferimento ortonormale, è $2Y - \frac{\sqrt{10}}{2}X^2 = 0$ e la matrice dell'isometria che porta l'equazione in forma canonica è $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/5 & -1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ -3/5 & -3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$, come si può verificare calcolando la matrice $\frac{1}{2\sqrt{10}}{}^tPAP$. Infine, ricordiamo che il fuoco si trova sull'asse, a distanza $1/\sqrt{10}$ dal vertice. È il punto $F = \begin{pmatrix} -1/5 \\ -3/5 \end{pmatrix} - \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/10 \\ -7/10 \end{pmatrix}$. Un disegno approssimativo della conica in questione è riportato qui sotto




e la discussione è conclusa. □

## Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova scritta del 13 settembre 2005

**ESERCIZIO 1**. *Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino le rette*

$$r : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} x + z = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}.$$

*(a) Verificare che le due rette sono sghembe e calcolarne la reciproca distanza.*
*(b) Si determini, se esiste, un piano, $\pi$, equidistante da $r$ ed $s$ e tale che $r \cap \pi = \emptyset = s \cap \pi$.*
*(c) Si determini il sottoinsieme $r'$ formato dai punti di $\pi$ aventi distanza minima da $r$ ed il sottoinsieme $s'$ formato dai punti di $\pi$ aventi distanza minima da $s$. Si determini $r' \cap s'$.*

*Svolgimento.* (a) La retta $r$ passa per il punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La retta $s$ passa per il punto $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dunque, le due rette non sono parallele e sono quindi sghembe se, e solo se, la reciproca distanza è positiva. La distanza è

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot v \times w|}{\|v \times w\|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

($b$) Affinché non intersechi le due rette, $r$ ed $s$, il piano $\pi$ deve essere parallelo ad entrambe e quindi deve avere un'equazione del tipo $y + z = k$, per un opportuno valore del parametro $k$. Si ha

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|1 - k|}{\sqrt{2}}, \qquad d(s, \pi) = d(Q, \pi) = \frac{|k|}{\sqrt{2}}, \qquad \text{e quindi} \quad k = \frac{1}{2}.$$

Dunque, il piano cercato è $\pi : 2y + 2z = 1$.

($c$) Poiché $r$ e $\pi$ sono paralleli, il sottoinsieme $r'$ è la proiezione ortogonale della retta $r$ su $\pi$ ed analogamente, $s'$ è la proiezione ortogonale della retta $s$ su $\pi$. Dunque

$$r' : \begin{cases} 2y + 2z = 1 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases} \qquad \text{ed} \qquad s' : \begin{cases} 2y + 2z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$$

e le due rette si intersecano nel punto $R = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. □

**ESERCIZIO 2**. *Siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$ basi degli spazi vettoriali $V$ e $W$, rispettivamente.*
*(a) Si dica se esiste un'applicazione lineare $\phi : V \to W$ tale che*

$$\phi(v_1+v_2) = w_1+3w_2, \quad \phi(v_2+v_3) = w_1+2w_2+w_3, \quad \phi(v_1+v_2-v_4) = 0, \quad \phi(v_1-v_2) = w_1+w_2+2w_3$$

*e si scriva l'eventuale matrice, $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$.*
*(b) Si determinino gli eventuali nucleo ed immagine di $\phi$ e si determini, se esiste, un sottospazio $U \subseteq V$ tale che $\phi_{|U}$ sia iniettiva e $\phi(U) = \mathrm{im}\phi$.*
*(c) Si determini l'insieme $\mathscr{E} = \{ \psi \in Hom(V, V) \mid \phi \circ \psi = \phi \}$ e la sua immagine, $E \subset M_4(\mathbb{R})$, tramite l'isomorfismo $\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}} : Hom_{\mathbb{R}}(V, V) \to M_4(\mathbb{R})$. Si dica se $E$ è un sottoinsieme di $M_4(\mathbb{R})$ definito da equazioni lineari ed, eventualmente, qual'è il numero minimo di equazioni necessario per determinare $E$.*

*Svolgimento.* (a) Dalle relazioni date, si ricava

$$\begin{aligned}
\phi(v_1) &= \tfrac{1}{2}\left(\phi(v_1+v_2)+\phi(v_1-v_2)\right) = w_1+2w_2+w_3,\\
\phi(v_2) &= \phi(v_1)-\phi(v_1-v_2) = w_2-w_3,\\
\phi(v_3) &= \phi(v_2+v_3)-\phi(v_2) = w_1+w_2+2w_3,\\
\phi(v_4) &= \phi(v_1+v_2) = w_1+3w_2.
\end{aligned}$$

Dunque $\phi$ è univocamente determinato dalle condizioni date e la matrice cercata è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(*b*) La matrice $A$ ha rango 2, $\operatorname{im}\phi = \langle w_2-w_3, w_1+3w_2\rangle$ e $\ker\phi = \langle v_1-v_2-v_3, v_1+v_2-v_4\rangle$. Qualsiasi sottospazio complementare del nucleo di $\phi$ ha le proprietà richieste al sottospazio $U$; possiamo prendere, ad esempio, $U = \langle v_1, v_2\rangle$.

(*c*) L'insieme $\mathscr{E}$ non è vuoto, perché contiene certamente l'applicazione identica $1_V : V \to V$. Se due applicazioni lineari, $\psi$ e $\psi'$, appartengono ad $\mathscr{E}$, la loro differenza soddisfa alla condizione $\phi\circ(\psi-\psi')=0$ e quindi appartiene al sottospazio vettoriale $\mathscr{B} = \{\,\lambda\in\operatorname{Hom}(V,V) \mid \operatorname{im}\lambda\subseteq\ker\phi\,\}$. $\mathscr{B}$ è un sottospazio, isomorfo a $\operatorname{Hom}(V,\ker\phi)$, e quindi di dimensione 8. Ne consegue che $E$ è una sottovarietà lineare di $M_4(\mathbb{R})$, di dimensione 8, e precisamente,

$$\begin{aligned}
E = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix} + \Bigg\langle & \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\-1&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&-1&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&-1&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&0&0&-1\\0&0&0&-1\\0&0&0&0 \end{pmatrix},\\
& \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&-1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&-1 \end{pmatrix}\Bigg\rangle
\end{aligned}$$

Poiché $E$ è una sottovarietà lineare di dimensione 8 ed $M_4(\mathbb{R})$ ha dimensione 16, servono 8 equazioni lineari indipendenti per determinare $E$. □

**ESERCIZIO 3**. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & 2\\ 0 & 5 & 0 & -3\\ 2 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

*rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1,\dots,e_4\}$, di $\mathbb{R}^4$.*

(a) *Si determinino il polinomio caratteristico di $\phi$, gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori. Si dica se $\phi$ è invertibile.*

(b) *Si determinino il polinomio minimo di $\phi$ ed un autovettore generalizzato di periodo massimo per ogni autovalore di $\phi$.*

(c) *Si determinino una matrice di Jordan, $J$, di $\phi$, ed una matrice invertibile, $P$, tali che $P^{-1}AP = J$.*

*Svolgimento.* (a) e (*b*) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}) = (x-2)^2(x-3)^2$, che ha termine noto uguale a 36 e quindi $\phi$ è invertibile. L'endomorfismo $\phi$ ha due autovalori, entrambo di molteplicità 2 e nullità 1, quindi non può essere diagonalizzabile. Si ha infatti

$$A-2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 2\\ 0 & 3 & 0 & -3\\ 2 & 2 & -1 & -1\\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad A-3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 2\\ 0 & 2 & 0 & -3\\ 2 & 2 & -2 & -1\\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad (A-3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & -5\\ 0 & -5 & 0 & 6\\ 0 & -1 & 0 & 4\\ 0 & -6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

e si conclude che il polinomio minimo coincide con il polinomio caratteristico ed esistono autovettori generalizzati di periodo uguale a 2 per ciascuno degli autovalori. Per l'autovalore 3 possiamo prendere, ad esempio, $e_1$. Ricordando che $(A-2)^2(A-3)^2 = 0$, si conclude che $\operatorname{im}(\phi-3)^2 \subseteq \ker(\phi-2)^2$ e quindi che i due sottospazi sono uguali, per motivi di dimensione. Quindi un autovalore generalizzato di periodo 2 per l'autovalore 2 è $6e_1 - 5e_2 - e_3 - 6e_4$.

$(c)$ La matrice di Jordan di $\phi$ ha un blocco di ordine 2 per ciascuno degli autovalori. Prendiamo $v_4 = e_1$, $v_3 = (\phi-3)(v_4) = 2e_1 + 2e_3$, $v_2 = 6e_1 - 5e_2 - e_3 - 6e_4$ e $v_1 = (\phi-2)(v_2) = 3e_1 + 3e_2 + 9e_3 + 3e_4$ ed otteniamo così una base rispetto a cui $\phi$ ha matrice di Jordan. Si conclude che

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 0 & 0 \\ 9 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono le matrici cercate. □

**ESERCIZIO 4**. *Si consideri sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, la forma quadratica*

$$q(X) = 2X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2 - 4X_2X_3 - 4X_2X_4 + 8X_3^2.$$

(a) *Detta $g$ l'applicazione bilineare simmetrica associata a $q(X)$, si scriva la matrice di $g$ e si dica se $g$ è non-degenere.*

(b) *Si consideri il sottospazio $W = \langle e_1, e_3 \rangle^{\perp}$; si dica se $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^{\perp}$ e si determini la matrice della proiezione ortogonale su $W^{\perp}$. È vero che $W$ ha una base fatta da vettori isotropi? In caso affermativo si determini tale base.*

(c) *Si determinino le segnature delle restrizioni di $g$ a $W$ ed a $W^{\perp}$. È vero che per ogni vettore $x \in W^{\perp}$ esiste un vettore $x' \in W$ tale che $g(x,x) = g(x',x')$, ma che $W$ e $W^{\perp}$ non sono isometrici?*

*Svolgimento.* (a) La forma quadratica $q(X)$ ha matrice

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 8 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ovvero $q(X) = {}^tXGX$. Con un calcolo diretto si verifica che $\det G = -64$ e quindi $g$ è non-degenere.

$(b)$ Il sottospazio $W = \langle e_1, e_3 \rangle^{\perp}$ è formato dalle soluzioni del sistema lineare (omogeneo)

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 = 0 \\ -X_2 + 4X_3 = 0 \end{cases};$$

e quindi $W = \langle e_4, 2e_1 - 4e_2 - e_3 \rangle$ ed i generatori scelti sono una base del sottospazio $W$ costituita da vettori isotropi. La matrice della restrizione di $g$ a $W$, rispetto alla base data, è $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, che è non degenere ($W \cap W^{\perp} = \langle 0 \rangle$) e quindi $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^{\perp}$. Per determinare la proiezione ortogonale su $W^{\perp}$, $p_{W^{\perp}} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, ragioniamo nel modo seguente. Preso un generico vettore, $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right)$, la sua proiezione, sarà $p_{W^{\perp}}(x) = ae_1 + be_3$, ove $a, b$ sono determinati in modo che $x - p_{W^{\perp}}(x) \in W$, ovvero $a = \frac{2x_1 + x_2}{2}$ e $b = \frac{-x_2 + 4x_3}{4}$. La matrice della proiezione ortogonale su $W^{\perp}$ è quindi

$$Q = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(p_{W^{\perp}}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$(c)$ La segnatura di $g$ ristretta a $W$ è $(1,1)$, perché vi è una base di vettori isotropi. La segnatura di $g$ ristretta a $W^\perp = \langle e_1, e_3 \rangle$ è $(2,0)$; infatti $\{e_1, e_3\}$ è una base ortogonale di $W^\perp$ e la matrice della restrizione di $g$ è $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$. I due spazi hanno segnatura diversa e quindi non può esistere un'isometria tra $W$ e $W^\perp$. D'altro canto, preso un qualsiasi vettore $w = a(2e_1 - 4e_2 - e_3) + be_4 \in W$, si ha $g(w,w) = 16ab$ e quindi, fissato comunque un numero reale $y$, esistono dei valori di $a$ e $b$ tali che $16ab = y$; ad esempio, $a = 1/16$, $b = y$. Quindi, per ogni vettore $x \in W^\perp$, esiste un vettore $x' \in W$ tale che $g(x,x) = g(x',x')$, ma $W$ e $W^\perp$ non sono isometrici. □

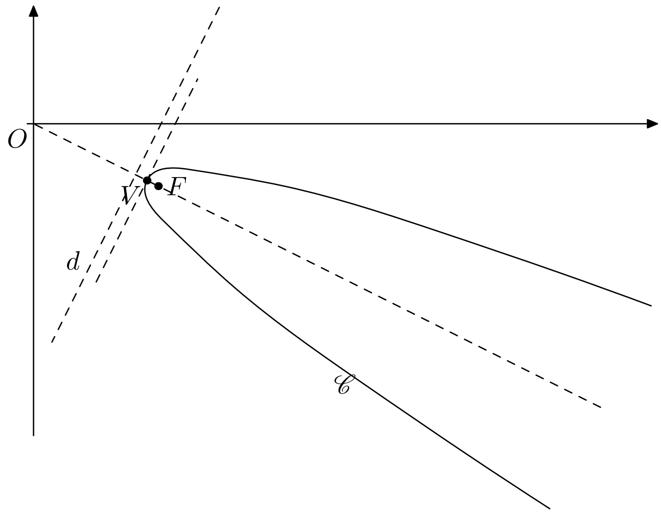
**ESERCIZIO 5**. [*Vecchio ordinamento*] *Studiare la conica* $\mathscr{C}$ *di equazione*

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x + 2y + 10 = 0 .$$

*In particolare determinare se è degenere, qual è il suo tipo, un'equazione canonica e l'opportuna trasformazione di coordinate, gli eventuali assi, asintoti, centro, fuochi. Se ne tracci infine un disegno approssimativo.*

*Svolgimento.* Consideriamo, come di consueto il piano affine immerso nel piano proiettivo prendendo $x_0 = 0$ come retta impropria. Una matrice della conica $\mathscr{C}$ è $A = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Poiché $\det A = -25 \neq 0$ si tratta di una conica non degenere, e poiché $\det A_\infty = 0$ ($A_\infty$ è la sottomatrice quadrata di $A$ che si ottiene cancellando prima riga e prima colonna) si tratta di una parabola.

La direzione dell'asse, ovvero il polo della retta impropria, è il punto improprio $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. La direzione ortogonale $P_\infty^\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è il polo dell'asse che è quindi la retta $h : x + 2y = 0$. Il vertice è il punto proprio di intersezione tra l'asse e la conica ovvero il punto di coordinate omogenee $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. La matrice $A_\infty$ ha autovalori 0 e 5 a cui corrispondono gli spazi di autovettori corrispondenti a $P_\infty$ e $P_\infty^\perp$. L'equazione canonica di $\mathscr{C}$, in un opportuno sistema di riferimento ortonormale, è $2Y = \sqrt{5}X^2$ e la matrice dell'isometria che porta l'equazione in forma canonica è $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -1 & -2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, come si può verificare calcolando il prodotto $\frac{1}{\sqrt{5}} {}^tPAP$. Infine, ricordiamo che il fuoco si trovano sull'asse focale, a distanza $\frac{1}{2\sqrt{5}}$ dal vertice ed è precisamente il punto $F = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Un disegno approssimativo della conica in questione è riportato qui sotto




e la discussione è conclusa. □

## Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova scritta del 20 settembre 2005

**ESERCIZIO 1**. *Nello spazio euclideo di dimensione 4, si considerino i punti*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) *Scrivere le equazioni cartesiane della sottovarietà lineare, $P_1 \vee P_2 \vee P_3$, generata dai tre punti, e determinarne la dimensione.*

(b) *Scrivere le equazioni cartesiane della retta, $r$, passante per $Q$ e per l'origine, $O$, e dire se $r$ e $P_1 \vee P_2 \vee P_3$ sono incidenti, parallele o sghembe e si determini il punto, $P_4 \in r$, di minima distanza da $P_1 \vee P_2 \vee P_3$.*

(c) *Si calcolino i volumi degli insiemi*

$$\Delta = \{ \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 \mid \lambda_i \in [0,1],\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_4 = 1 \},$$
$$S = \{ \lambda_0 O + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 \mid \lambda_i \in [0,1],\ \lambda_0 + \cdots + \lambda_4 = 1 \}.$$

*Che cosa rappresenta geometricamente il quoziente tra il volume di $S$ ed il volume di $\Delta$?*

*Svolgimento.* (a) I tre punti non sono allineati e quindi generano il piano $\pi$ di equazioni cartesiane

$$\pi : \begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

($b$) La retta $r$ è uno degli assi coordinati di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

Ponendo in un unico sistema le equazioni di $r$ e di $\pi$, si ottiene un sistema lineare con matrice incompleta di rango 4 e matrice completa di rango 5. Dunque il piano e la retta sono sghembi. Per determinare il punto di $r$ a minima distanza da $\pi$, possiamo ragionare così: il generico punto di $r$ ha coordinate $\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, il generico punto di $\pi$ ha coordinate $\begin{pmatrix} 1-u-v \\ 1+u \\ v-u \\ -v \end{pmatrix}$ i punti di minima distanza delle due sottovarietà sono determinati dal fatto che il vettore che li congiunge sia ortogonale sia ad $r$ che a $\pi$. Si ottengono le condizioni

$$\begin{cases} 1 - u - v - t = 0 \\ (1 - u - v - t) - (1 + u) + (v - u) = 0 \\ (1 - u - v - t) - (v - u) - v = 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} u = -2/3 \\ v = -1/3 \\ t = 2 \end{cases}.$$

Dunque $P_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

($c$) I punti $O, P_1, P_2, P_3, P_4$ sono in posizione generica e quindi $S$ è il simplesso 4 dimensionale generato da tali punti, mentre $\Delta$ è il simplesso tridimensionale (tetraedro) generato dagli ultimi quattro. Si ha quindi

$$Vol^4 S = \frac{1}{4!}\left| \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{12}, \qquad Vol^3 \Delta = \frac{1}{3!}\sqrt{\det({}^tYY)} = \frac{1}{2}, \quad \text{ove} \quad Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il quoziente $\frac{4!Vol^4 S}{3!Vol^3\Delta}$ rappresenta la distanza di $S$ dall'origine, $O$. Quindi il quoziente tra $Vol^4 S$ e $Vol^3\Delta$ è $\frac{1}{4}$ di tale distanza. □

**ESERCIZIO 2**. *Siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$ basi degli spazi vettoriali $V$ e $W$, rispettivamente.*

(a) *Si determinino tutte le applicazioni lineari $\phi : V \to W$ tali che*

$$\phi(v_1 + v_2) = w_1 + 3w_2, \quad \phi(v_2 + v_3) = w_1 + 2w_2 + w_3,$$
$$\phi(v_3 + v_4) = w_2 - w_3, \quad \phi(v_1 + v_4) = 2w_2 - 2w_3$$

*e si scrivano le loro matrici, rispetto alle basi $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$.*

(b) *Si dica se l'insieme, $A$, delle matrici $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$ del punto precedente è una sottovarietà lineare di $M_{3\times4}(\mathbb{R})$ e se ne determini la dimensione. Si determinino i ranghi delle matrici in $A$ e si dica se quelle di rango minore o uguale a 2 formano una sottovarietà lineare, $B$ e se ne indichi la dimensione.*

(c) *Si descriva l'insieme delle matrici $Q \in M_4(\mathbb{R})$ tali che $XQ = 0$ per ogni matrice $X$ in $A$.*

*Svolgimento.* (a) I vettori $v_1 + v_2$, $v_2 + v_3$, $v_3 + v_4$ e $v_1 + v_4$ non sono una base di $V$, perché $v_1 + v_4 = (v_1 + v_2) - (v_2 + v_3) + (v_3 + v_4)$. D'altra parte le immagini di questi vettori soddisfano alle stesse relazioni e quindi esistono infinite applicazioni lineari soddisfacenti a queste condizioni. Per determinarle tutte possiamo ragionare nel modo seguente. Consideriamo la base $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$ di $V$ così definita

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = v_1 + v_2, \quad u_3 = v_2 + v_3, \quad u_4 = v_3 + v_4.$$

Tutte le possibili applicazioni lineari, $\phi$, soddisfacenti alla condizione data si ottengono assegnando arbitrariamente il valore di $\phi$ sul vettore $u_1$ e rispettando le condizioni date per le immagini dei rimanenti vettori di base. Si ha quindi

$$\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ b & 3 & 2 & 1 \\ c & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

al variare dei parametri reali $a, b, c$. Per scrivere le matrici rispetto alle basi $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$, basta considerare la matrice

$$P = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e la sua inversa} \quad P^{-1} = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e si conclude che le matrici cercate sono

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(\phi)\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(1) = \begin{pmatrix} a & 1-a & a & -a \\ b & 3-b & b-1 & 2-b \\ c & 1-c & c+1 & -2-c \end{pmatrix},$$

al variare dei parametri reali $a, b, c$.

(b) Le matrici in $A$ formano una sottovarietà lineare di $M_{3\times4}(\mathbb{R})$ e quanto scritto qui sopra è una rappresentazione parametrica della varietà $A$, che ha quindi dimensione 3. Le applicazioni $\phi$ da esse rappresentate, hanno rango maggiore o uguale a 2, perché vi sono almeno due colonne indipendenti nella matrice $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(\phi)$ e la matrice ha rango 3 se, e solo se, la prima colonna è indipendente dalle rimanenti, ovvero se, e solo se, $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right) \notin \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$. Dunque gli elementi di $B$ formano una sottovarietà lineare di dimensione 2, ovvero le applicazioni lineari $\phi$ tali che

$$\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} s & 1 & 1 & 0 \\ 3s+t & 3 & 2 & 1 \\ -t & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e quindi} \quad \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} s & 1-s & s & -s \\ 3s+t & 3-3s-t & 3s+t-1 & 2-3s-t \\ -t & 1+t & 1-t & t-2 \end{pmatrix}$$

al variare di $s$ e $t$ in $\mathbb{R}$.

$(c)$ Le matrici, $Q$, tali che $XQ = 0$ per ogni $X$ in $A$, rappresentano applicazioni lineari di $V$ in sè la cui immagine è contenuta nel nucleo di tutte le applicazioni dell'insieme $A$. Si tratta di un sottospazio di dimensione minore o uguale ad 1, perché vi sono in $A$ applicazioni di rango 3 e si verifica facilmente che $u_2 - u_3 - u_4 = v_1 - 2v_3 - v_4$ appartiene al nucleo di tutte le applicazioni in $A$. Dunque l'insieme cercato è il sottospazio

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

di $M_4(\mathbb{R})$. □

**ESERCIZIO 3**. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \\ -13 & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

*rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, di $\mathbb{C}^4$.*

*(a) Si determinino il polinomio caratteristico di $\phi$, gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori. Si dica se $\phi$ è invertibile.*

*(b) Si determinino il polinomio minimo di $\phi$ ed un autovettore generalizzato di periodo massimo per ogni autovalore di $\phi$.*

*(c) Si determinino una matrice di Jordan, $J$, di $\phi$, ed una matrice invertibile, $P$, tali che $P^{-1}AP = J$.*

*Svolgimento.* (a) e (b) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}) = (x^2+1)^2 = (x-i)^2(x+i)^2$, che ha termine noto uguale a 1 e quindi $\phi$ è invertibile. L'endomorfismo $\phi$ ha due autovalori, entrambo di molteplicità 2 e nullità 1, quindi non può essere diagonalizzabile. Si ha infatti

$$A - i = \begin{pmatrix} 5-i & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2-i & 0 & -5 \\ -13 & -3 & -5-i & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2-i \end{pmatrix}, \qquad (A-i)^2 = \begin{pmatrix} -2-10i & 3-2i & -4i & 9-4i \\ 0 & -2-4i & 0 & 10i \\ 26i & 6i & -2+10i & -39-8i \\ 0 & -2i & 0 & -2+4i \end{pmatrix},$$

ed $A - i$ ha rango 3. Le matrici $A + i$ ed $(A + i)^2$ sono le coniugate delle due matrici scritte sopra ed hanno come nucleo i sottospazi coniugati dei nuclei delle due matrici scritte sopra. Quindi il polinomio minimo coincide con il polinomio caratteristico ed esistono autovettori generalizzati di periodo uguale a 2 per ciascuno degli autovalori. Inoltre, essendo $(A+i)^2(A-i)^2 = 0$, si ha che $\operatorname{im}(\phi-i)^2 \subseteq \ker(\phi+i)^2$ e quindi che i due sottospazi sono uguali, per motivi di dimensione. Si conclude che un autovettore generalizzato di periodo 2 per l'autovalore $-i$ è $(3-2i)e_1 - (2+4i)e_2 + 6ie_3 - 2ie_4$ ed un autovettore generalizzato di periodo 2 per l'autovalore $i$ è il coniugato, $(3+2i)e_1 - (2-4i)e_2 - 6ie_3 + 2ie_4$.

$(c)$ La matrice di Jordan di $\phi$ ha un blocco di ordine 2 per ciascuno degli autovalori. Prendiamo $v_4 = (3-2i)e_1 - (2+4i)e_2 + 6ie_3 - 2ie_4$, $v_3 = (\phi + i)(v_4) = (15-3i)e_1 - 39e_3$, ed i coniugati $v_2 = (3+2i)e_1 - (2-4i)e_2 - 6ie_3 + 2ie_4$, $v_1 = (\phi - i)(v_2) = (15+3i)e_1 - 39e_3$ ed otteniamo così una base rispetto a cui $\phi$ ha matrice di Jordan. Si conclude che

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 15+3i & 3+2i & 15-3i & 3-2i \\ 0 & -2+4i & 0 & -2-4i \\ -39 & -6i & -39 & 6i \\ 0 & 2i & 0 & -2i \end{pmatrix}$$

sono le matrici cercate. □

**ESERCIZIO 4**. *Si consideri sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, la forma quadratica*

$$q(X) = X_1^2 - 4X_1X_2 - 2X_1X_3 + 3X_2^2 - 2X_2X_4 - 4X_3^2 - 5X_4^2.$$

(a) *Detta $g$ l'applicazione bilineare simmetrica associata a $q(X)$, si scriva la matrice di $g$ e si dica se $g$ è non-degenere. Si determinino nucleo, $N$, e la segnatura di $g$.*
(b) *Si determinino la dimensione e una base di un sottospazio isotropo massimale.*
(c) *Si considerino i sottospazi $W_1 = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$ e $W_2 = \langle e_2, e_3, e_4\rangle$. Si verifichi che la restrizione a $W_1$ della proiezione su $W_2$, parallelamente ad $N$, è ben definita e se ne scriva la matrice nelle basi date. Si dimostri che questa applicazione è un'isometria di $W_1$ su $W_2$.*

*Svolgimento.* (a) La forma quadratica $q(X)$ ha matrice

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix},$$

ovvero $q(X) = {}^tXGX$. Con un calcolo diretto si verifica che $\det G = 0$ e quindi $g$ è degenere. Il sottospazio $N = \langle 8e_1 + 5e_2 - 2e_3 - e_4\rangle$ è formato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo di matrice $G$ e quindi è il nucleo di $g$. Infine, completando i quadrati, si vede che

$$q(X) = (X_1 - 2X_2 - X_3)^2 - (X_2 + 2X_3 + X_4)^2 - (X_3 - 2X_4)^2$$

e quindi la segnatura è $(1, 2)$.

$(b)$ Un sottospazio isotropo massimale si ottiene sommando al nucleo $N$ un sottospazio isotropo massimale della restrizione di $G$ ad un sottospazio complementare. Guardando alla segnatura la dimensione di quest'ultimo è uguale ad 1 e quindi un sottospazio isotropo massimale ha dimensione 2 e possiamo prendere, ad esempio, $H = \left\langle 8e_1 + 5e_2 - 2e_3 - e_4, 2e_2]\sqrt{3}e_3\right\rangle$.

$(c)$ I sottospazi $W_1$ e $W_2$ sono entrambi complementari del nucleo $N$ e quindi la proiezione è ben definita ed induce un isomorfismo di spazi vettoriali. Dato $w = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 \in W_1$, la sua proiezione è l'unico vettore del tipo $w - \alpha(8e_1 + 5e_2 - 2e_3 - e_4)$ appartenente a $W_2$. Ciò significa che $\alpha = x_1/8$ e quindi la proiezione cercata è l'applicazione

$$x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 \mapsto (x_2 - \tfrac{5}{8}x_1)v_2 + (x_3 + \tfrac{1}{4}x_1)v_3 + \tfrac{1}{8}x_1v_4.$$

La matrice nelle basi date è

$$P = \begin{pmatrix} -5/8 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 \\ 1/8 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Osservando che le matrici della restrizione di $g$ a $W_1$ e $W_2$ sono, rispettivamente,

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad H_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix},$$

si vede che ${}^tPH_2P = H_1$ e quindi che $P$ è un'isometria. $\square$

**ESERCIZIO 5**. [*Vecchio ordinamento*] *Studiare la conica* $\mathscr{C}$ *di equazione*

$$3x^2 - 8xy - 3y^2 - 2x - 14y = 0 .$$

*In particolare determinare se è degenere, qual è il suo tipo, un'equazione canonica, gli eventuali assi, asintoti, centro, fuochi e se ne tracci un disegno approssimativo. Si dica se esiste un'affinità del piano complesso che la trasforma nella conica,* $\mathscr{C}'$*, di equazione* $X^2 + Y^2 = 1$.

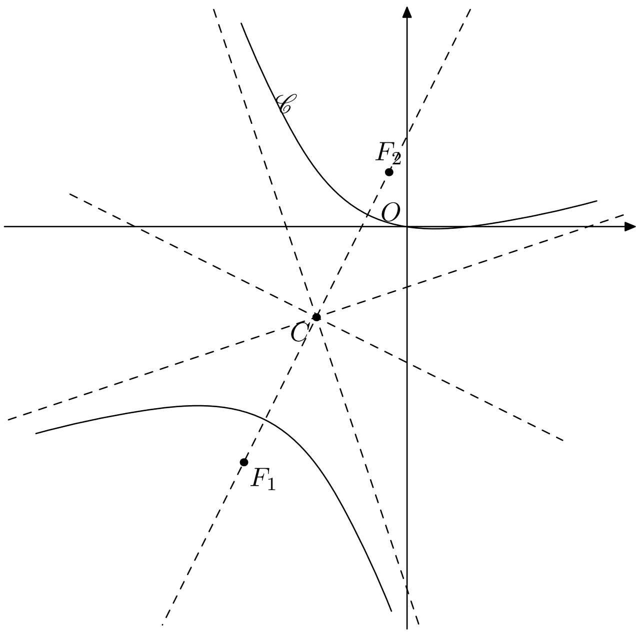
*Svolgimento.* Consideriamo, come di consueto il piano affine immerso nel piano proiettivo prendendo $x_0 = 0$ come retta impropria. Una matrice della conica $\mathscr{C}$ è $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -7 \\ -1 & 3 & -4 \\ -7 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. Poiché $\det A = -200 \neq 0$ si tratta di una conica non degenere, e poiché $\det A_\infty = -25$ ($A_\infty$ è la sottomatrice quadrata di $A$ che si ottiene cancellando prima riga e prima colonna) si tratta di un'iperbole.

Le direzioni degli asintoti sono i punti impropri $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ e $Q_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le due direzioni sono ortogonali e quindi si tratta di un'iperbole equilatera. Gli asintoti sono le polari di questi cue punti, ovvero le rette $a_1 : 3x + y + 4 = 0$ e $a_2 : x - 3y - 2 = 0$, che si incontrano nel centro, ovvero il punto di coordinate omogenee $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

La matrice $A_\infty$ ha autovalori $-5$ e $5$ a cui corrispondono gli spazi di autovettori corrispondenti ai punti impropri $R_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ed $S_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Gli assi hanno quindi equazioni

$$h_1 : 2x - y + 1 = 0 \text{ (asse focale)}, \qquad \text{e} \qquad h_2 : x + 2y + 3 = 0.$$

L'equazione canonica di $\mathscr{C}$, in un opportuno sistema di riferimento ortonormale, è $X^2 - Y^2 = \frac{8}{5}$ e la matrice dell'isometria che porta l'equazione in forma canonica è $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -1 & -2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, come si può verificare calcolando il prodotto $-\frac{1}{8}{}^tPAP$. Infine, ricordiamo che i fuochi si trovano sull'asse focale, a distanza $\frac{4}{\sqrt{5}}$ dal centro e sono i punti $F_{1,2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \pm \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Un disegno approssimativo della conica in questione è riportato qui sotto.




Sia $\mathscr{C}$ che $\mathscr{C}'$ sono coniche a centro e quindi esiste un'affinità del piano complesso che trasforma l'una nell'altra, una di queste si ottiene moltiplicando a destra la matrice $P$ per la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5}/2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{5}/2\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

□