

# 1. Curve

Un *cammino* in  $\mathbb{R}^n$  è una applicazione continua

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n .$$

Poniamo

$$l(\gamma) = \sup_{\Delta} l_{\Delta}(\gamma) ,$$

dove  $\Delta$  varia tra tutte le suddivisioni finite  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_h = b$  dell'intervallo  $[a, b]$  e

$$l_{\Delta}(\gamma) = \sum_{i=1}^h \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| .$$

Si dice che  $\gamma$  è *rettificabile* se  $l(\gamma) < +\infty$ , nel qual caso  $l(\gamma)$  si chiama *lunghezza* di  $\gamma$ . È una conseguenza immediata della definizione che, se  $f : [c, d] \rightarrow [a, b]$  è continua e biunivoca, il nuovo cammino  $\delta(t) = \gamma(f(t))$  ottenuto “riparametrizzando”  $\gamma$  tramite  $f$  ha la stessa lunghezza di  $\gamma$ . Ricordiamo che un cammino  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice *di classe  $\mathbf{C}^r$  a tratti* se esiste una suddivisione  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_h = b$  tale che la restrizione di  $\gamma$  a  $[t_{i-1}, t_i]$  sia  $\mathbf{C}^r$  per ogni  $i$ . Ricordiamo anche che

PROPOSIZIONE (1.1). *Ogni cammino  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $\mathbf{C}^1$  a tratti è rettificabile e*

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt .$$

Diremo che un cammino  $\gamma$  di classe  $\mathbf{C}^r$ ,  $r \geq 1$ , è *regolare* se  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$  per ogni valore di  $t$ . Un tale cammino ha una riparametrizzazione canonica, o più esattamente una classe di riparametrizzazioni canoniche. Poniamo

$$s(t) = c + \int_a^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau ,$$

dove  $c$  è una costante arbitraria. Allora  $s(t)$  è una funzione  $\mathbf{C}^r$  con derivata strettamente positiva; ha quindi una inversa  $t(s)$ , anch'essa  $\mathbf{C}^r$  con derivata strettamente positiva, e il cammino  $\delta(s) = \gamma(t(s))$  è  $\mathbf{C}^r$  e ha la proprietà che

$$(1.2) \quad \|\dot{\delta}(s)\| = 1 ,$$

in quanto

$$\frac{d\delta}{ds} = \frac{d\gamma/dt}{ds/dt} = \frac{d\gamma/dt}{\|d\gamma/dt\|} .$$

La proprietà (1.2) è equivalente a che sia  $ds/dt = \|d\gamma/dt\|$ ; le funzioni  $s(t)$  sono dunque caratterizzate, tra quelle crescenti, da (1.2). Il parametro  $s$  viene chiamato *parametro naturale* o *lunghezza d'arco*.

Due cammini di classe  $\mathbf{C}^r$ ,  $r \geq 1$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\delta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  saranno detti equivalenti, o più esattamente  $\mathbf{C}^r$ -equivalenti, se esiste una applicazione biunivoca e crescente  $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$  di classe  $\mathbf{C}^r$  e con inversa  $\mathbf{C}^r$  tale che  $\gamma(t) = \delta(f(t))$ . Questa è ovviamente una relazione di equivalenza; le classi di equivalenza di cammini regolari sono dette *curve orientate*. È utile notare che la riparametrizzazione  $f$  ha le caratteristiche richieste se e solo se  $f$  è  $\mathbf{C}^r$  e inoltre  $f(a) = c$ ,  $f(b) = d$  e  $\dot{f} > 0$  ovunque. Se nella definizione di equivalenza si lascia cadere la richiesta che  $f$  sia crescente, si ottiene la nozione di curva non orientata. Nel seguito ci occuperemo, salvo avviso esplicito, di curve orientate, che chiameremo semplicemente curve. Faremo anche un uso abbastanza “rilassato” dei termini “curva” e “cammino”, usando spesso uno al posto dell’altro.

Siano  $\delta(\tau)$  e  $\gamma(t)$  cammini equivalenti di classe  $\mathbf{C}^k$  in  $\mathbb{R}^n$ . Applicazioni ripetute della formula di derivazione delle funzioni composte mostrano che, per ogni  $i \leq k$  e per ogni valore di  $t$ ,  $\delta^{(i)}(\tau(t))$  è combinazione lineare di  $\gamma'(t), \gamma''(t), \dots, \gamma^{(i)}(t)$ . Poiché i ruoli di  $\delta$  e  $\gamma$  possono essere rovesciati, se ne deduce che il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$  generato da  $\gamma'(t), \dots, \gamma^{(k)}(t)$  coincide con quello generato da  $\delta'(\tau(t)), \dots, \delta^{(k)}(\tau(t))$ . Diremo che un cammino  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è *k-regolare* se è di classe  $\mathbf{C}^k$  e  $\gamma'(t), \dots, \gamma^{(k)}(t)$  sono indipendenti per ogni  $t \in [a, b]$ . Per quanto si è appena osservato, questa proprietà si conserva per riparametrizzazione. Se  $\gamma$  è *k-regolare*, per ogni  $i \leq k$  il sottospazio affine di  $\mathbb{R}^n$  passante per  $\gamma(t)$  e parallelo a  $\gamma'(t), \dots, \gamma^{(i)}(t)$  viene chiamato *i-esimo spazio osculatore* a  $\gamma$  nel punto  $\gamma(t)$ . Per  $i = 1$  si tratta semplicemente della retta tangente a  $\gamma$  in  $\gamma(t)$ , e per  $i = 2$  di quello che viene di norma chiamato piano osculatore a  $\gamma$  in  $\gamma(t)$ .

Siano  $(v_1, \dots, v_h)$  e  $(w_1, \dots, w_h)$  due basi di uno stesso spazio vettoriale reale  $V$ . Possiamo scrivere

$$v_i = \sum_{j=1}^h a_{ij} w_j, \quad i = 1, \dots, h.$$

Diremo che le basi  $(v_1, \dots, v_h)$  e  $(w_1, \dots, w_h)$  hanno la stessa orientazione (o sono concordemente orientate) se il determinante della matrice  $(a_{ij})$  è positivo. Quella di essere concordemente orientate è una relazione di equivalenza tra basi ordinate, per il teorema di Binet. Sempre per il teorema di Binet, due basi che non siano concordemente orientate con una terza sono concordemente orientate tra loro: vi sono dunque esattamente due classi di equivalenza, che sono dette *orientazioni* di  $V$ . Se su  $V$  si sceglie una orientazione, diremo che una base di  $V$  è *positivamente orientata* se appartiene alla orientazione scelta. Su  $\mathbb{R}^n$  vi è una orientazione canonica, determinata dalla base standard

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \quad e_n = (0, 0, \dots, 1).$$

Siano ora  $v_1(t), \dots, v_n(t)$  vettori in  $\mathbb{R}^n$  che dipendono in modo almeno  $\mathbf{C}^1$  da  $t$ , per  $t \in [a, b]$ . Supponiamo che, per ogni  $t$ , i vettori in questione costituiscano una base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$ ; diremo in questo caso che  $(v_1(t), \dots, v_n(t))$  è un *riferimento mobile ortonormale*. Possiamo scrivere

$$\dot{v}_i(t) = \sum_{j=1}^h a_{ij}(t) v_j(t), \quad i = 1, \dots, h,$$

Notiamo che le  $a_{ij}$  sono funzioni continue. Infatti le relazioni qui sopra sono equivalenti alla relazione tra matrici

$$\dot{V} = AV,$$

dove  $V(t)$  è la matrice le cui righe sono  $v_1(t), \dots, v_n(t)$  e  $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n}$ . Dunque  $A = \dot{V}V^{-1}$  dipende con continuità da  $t$ . Indichiamo ora con  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  il prodotto scalare euclideo in  $\mathbb{R}^n$  e deriviamo rispetto a  $t$  le relazioni di ortonormalità

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \dot{v}_i, v_j \rangle + \langle v_i, \dot{v}_j \rangle \\ &= \sum_{h=1}^n a_{ih} \langle v_h, v_j \rangle + \sum_{h=1}^n a_{jh} \langle v_i, v_h \rangle \\ &= a_{ij} + a_{ji}. \end{aligned}$$

In conclusione la matrice  $(a_{ij})$  è antisimmetrica.

Esempi particolari importanti di riferimenti mobili sono i cosiddetti riferimenti di Frenet associati a un cammino regolare  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $\mathbf{C}^2$ . Un *riferimento di Frenet* per  $\gamma$  è un riferimento mobile ortonormale positivamente orientato  $v_1(t), \dots, v_n(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , tale che  $v_1 = \gamma' / \|\gamma'\|$  e che  $\dot{v}_i(t)$  sia combinazione lineare di  $v_1(t), \dots, v_{i+1}(t)$  per ogni  $i$  e ogni  $t$ . Da queste condizioni segue, in particolare, che, per ogni  $i \leq n$  e ogni  $t$ ,  $\gamma^{(i)}(t)$  appartiene al sottospazio di  $\mathbb{R}^n$  generato da  $v_1(t), \dots, v_i(t)$ . Se indichiamo con  $s$  il parametro naturale per  $\gamma$  e scriviamo

$$(1.3) \quad \frac{dv_i}{ds} = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

segue dalla definizione di riferimento di Frenet che  $a_{ij} = 0$  se  $j > i+1$ ; per l'antisimmetria di  $(a_{ij})$ , ciò implica anche che  $a_{ij} = 0$  se  $j < i-1$ . In definitiva la matrice  $(a_{ij})$  è della forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & \cdots & & \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & \cdots & & \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \cdots & & \\ & & \cdots & & & \\ & & & \cdots & & \\ & \cdots & & & 0 & \kappa_{n-1} \\ & \cdots & 0 & -\kappa_{n-1} & 0 & \end{pmatrix}.$$

Le relazioni (1.3) si traducono dunque nelle *formule di Frenet generalizzate*

$$(1.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_1}{ds} = \kappa_1 v_2 \\ \frac{dv_2}{ds} = -\kappa_1 v_1 + \kappa_2 v_3 \\ \dots \\ \frac{dv_i}{ds} = -\kappa_{i-1} v_{i-1} + \kappa_i v_{i+1} \\ \dots \\ \frac{dv_n}{ds} = -\kappa_{n-1} v_{n-1} \end{array} \right.$$

Le funzioni  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$  sono le *curvature* di  $\gamma$ . Quando  $n = 2$  o  $n = 3$ , è d'uso scrivere  $T = v_1$ ,  $N = v_2$ ,  $B = v_3$ ,  $\kappa = \kappa_1$  e  $\tau = \kappa_2$ ; i nomi consueti di questi oggetti sono, rispettivamente, *tangente unitaria*, *normale*, *binormale*, *curvatura* e *torsione*. Quando  $n = 2$  o  $n = 3$  le formule di Frenet generalizzate si riducono alle usuali formule di Frenet, che, per curve in  $\mathbb{R}^3$ , sono

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds} &= \kappa N, \\ \frac{dN}{ds} &= -\kappa T + \tau B, \\ \frac{dB}{ds} &= -\tau N. \end{aligned}$$

Se  $\gamma$  è una curva regolare in  $\mathbb{R}^3$  o in  $\mathbb{R}^2$  e la sua curvatura, per un dato valore  $t$  del parametro, non è nulla, il *centro di curvatura* di  $\gamma$  nel punto  $\gamma(t)$  è definito come  $\gamma(t) + \frac{1}{\kappa} N(t)$ . Come mostra il seguente esempio, dal punto di vista geometrico il centro di curvatura non è altro che il centro del cerchio giacente nel piano osculatore e tangente a  $\gamma$  in  $\gamma(t)$ , avente la stessa curvatura che ha  $\gamma$  in  $\gamma(t)$ .

ESEMPIO (1.5). La curva piana  $\gamma(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$  è un cerchio di raggio  $r$  centrato nell'origine. Il parametro naturale è  $s(t) = rt$ . Inoltre

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= r(-\sin(t), \cos(t)), \\ T &= (-\sin(t), \cos(t)), \\ \frac{dT}{ds} &= \frac{\dot{T}}{\|\dot{\gamma}\|} = \frac{1}{r}(-\cos(t), -\sin(t)), \\ N &= (-\cos(t), -\sin(t)), \\ \kappa &= \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

ESEMPIO (1.6). Consideriamo l'elica circolare  $\gamma(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$ . Si ha che  $\|\dot{\gamma}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ , quindi il parametro naturale per  $\gamma$  è  $s = t/c$ , dove  $c = 1/\sqrt{a^2 + b^2}$ .

Dunque

$$\begin{aligned}
 T &= c(-a \sin(cs), a \cos(cs), b), \\
 \frac{dT}{ds} &= -ac^2(\cos(cs), \sin(cs), 0), \\
 \kappa &= ac^2 = \frac{a}{a^2 + b^2}, \\
 N &= -(\cos(cs), \sin(cs), 0), \\
 \frac{dN}{ds} &= c(\sin(cs), -\cos(cs), 0), \\
 B &= T \times N = c(b \sin(cs), -b \cos(cs), a), \\
 \frac{dB}{ds} &= c^2(b \cos(cs), b \sin(cs), 0) = -bc^2 N, \\
 \tau &= bc^2 = \frac{b}{a^2 + b^2}.
 \end{aligned}$$

Non è detto che una curva ammetta un riferimento di Frenet, come vedremo in seguito. Inoltre, in generale, un riferimento di Frenet è tutt'altro che unico. A rigor di termini, nelle ipotesi in cui ci siamo posti, solo  $v_1$  è univocamente determinato. Un caso importante in cui vi è un riferimento di Frenet canonico è quello in cui  $\gamma$  è di classe  $\mathbf{C}^n$  e  $(n-1)$ -regolare. In questo caso un riferimento di Frenet può essere ottenuto applicando dapprima ai vettori  $\gamma'(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t)$  il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, ponendo cioè

$$(1.7) \quad \left\{ \begin{array}{l}
 v_1 = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}, \\
 w_2 = \gamma'' - \langle \gamma'', v_1 \rangle v_1, \\
 v_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}, \\
 w_3 = \gamma^{(3)} - \langle \gamma^{(3)}, v_1 \rangle v_1 - \langle \gamma^{(3)}, v_2 \rangle v_2, \\
 v_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|}, \\
 \dots \\
 w_{n-1} = \gamma^{(n-1)} - \langle \gamma^{(n-1)}, v_1 \rangle v_1 - \dots - \langle \gamma^{(n-1)}, v_{n-2} \rangle v_{n-2}, \\
 v_{n-1} = \frac{w_{n-1}}{\|w_{n-1}\|}.
 \end{array} \right.$$

e aggiungendo poi un ulteriore vettore unitario  $v_n$  a  $v_1, \dots, v_{n-1}$  in modo da ottenere un riferimento mobile ortonormale positivamente orientato. Specificamente,  $v_n$  è il vettore la cui  $i$ -esima componente è  $(-1)^{n+i}$  volte il determinante del minore ottenuto cancellando la  $i$ -esima colonna dalla matrice le cui righe sono  $v_1, \dots, v_{n-1}$ . Per dimostrare che il riferimento  $v_1, \dots, v_n$  appena costruito è un riferimento di Frenet per  $\gamma$  basta mostrare che, per ogni  $i$  e ogni  $t$ ,  $\dot{v}_i(t)$  è combinazione lineare di  $v_1(t), \dots, v_{i+1}(t)$ ; lo faremo per induzione su  $i$ . Se  $i = 1$  l'asserto segue dalle prime tre tra le identità (1.7). Se  $i > 1$ ,

le (1.7) implicano che  $\dot{v}_i(t)$  è combinazione lineare di  $\dot{w}_i(t)$  e di  $v_i(t)$ . A sua volta,  $\dot{w}_i(t)$  è combinazione lineare di  $v_1(t), \dots, v_{i-1}(t), \dot{v}_1(t), \dots, \dot{v}_{i-1}(t)$  e  $\gamma^{(i+1)}(t)$ , cioè, per ipotesi induttiva, di  $v_1(t), \dots, v_i(t)$  e  $\gamma^{(i+1)}(t)$ . Infine, sempre per le (1.7),  $\gamma^{(i+1)}(t)$  è combinazione lineare di  $v_1(t), \dots, v_{i+1}(t)$ . Notiamo che l'ipotesi che  $\gamma$  sia  $(n-1)$ -regolare implica che, per ogni  $i < n$  e ogni  $t$ , i sottospazi di  $\mathbb{R}^n$  generati da  $\gamma'(t), \dots, \gamma^{(i)}(t)$  e da  $v_1(t), \dots, v_i(t)$  coincidono. Ciò ha come conseguenza che il riferimento di Frenet appena costruito è essenzialmente l'unico possibile per  $\gamma$ ; ogni altro riferimento di Frenet si ottiene da esso cambiando i segni di un numero pari dei  $v_i$  con  $i > 1$ . Sia infatti  $u_1, \dots, u_n$  un riferimento di Frenet per  $\gamma$ . Poiché  $\gamma$  è  $(n-1)$ -regolare, il sottospazio  $H_i(t)$  di  $\mathbb{R}^n$  generato da  $\gamma'(t), \dots, \gamma^{(i)}(t)$  ha dimensione  $i$  per ogni  $i$  compreso tra 0 e  $n-1$  e per ogni  $t$ ; dato che, come si è già osservato, è contenuto nel sottospazio generato da  $u_1(t), \dots, u_i(t)$ , coincide con quest'ultimo. Dunque, per ogni  $i$ ,  $u_i(t)$  è un vettore di norma 1 contenuto in  $H_i(t)$  e ortogonale a  $H_{i-1}(t)$ . Vi sono esattamente due vettori con queste caratteristiche, e sono uno l'opposto dell'altro. Dunque  $u_i = \varepsilon_i v_i$ , dove  $\varepsilon_1 = 1$  e  $\varepsilon_i = \pm 1$  se  $i > 1$ . Poiché  $(u_1, \dots, u_n)$  e  $(v_1, \dots, v_n)$  sono concordemente orientate deve essere  $\prod \varepsilon_i = 1$ . Notiamo infine che la condizione che  $\gamma$  sia  $(n-1)$ -regolare implica che le sue curvature  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-2}$  sono ovunque non nulle (anzi, positive, se si lavora con il riferimento di Frenet canonico) mentre in generale nulla può essere detto di  $\kappa_{n-1}$ . In effetti l'annullarsi di  $\kappa_i(t)$  per qualche  $i$  implica, in virtù delle formule di Frenet, che  $\dot{v}_1(t), \dots, \dot{v}_i(t)$  sono combinazioni lineari di  $v_1(t), \dots, v_i(t)$ . Derivando le (1.7) si ricava che  $\gamma^{(i+1)}(t)$  è combinazione lineare di  $v_1(t), \dots, v_i(t)$  e  $\dot{v}_1(t), \dots, \dot{v}_i(t)$ , cioè, per quanto appena accennato, di  $v_1(t), \dots, v_i(t)$ . Dunque  $\gamma^{(i+1)}(t)$  è combinazione lineare di  $\gamma'(t), \dots, \gamma^{(i)}(t)$ ; se  $i < n-1$  ciò contrasta con l'ipotesi che  $\gamma$  sia  $(n-1)$ -regolare.

Ci si può chiedere, da un lato, se esistano curve in  $\mathbb{R}^n$  con curvature assegnate ad arbitrio, e dall'alto, in quale misura una curva sia determinata dalle sue curvature. La risposta alla prima domanda è positiva senza riserve, la risposta alla seconda è che una curva è sostanzialmente nota una volta che ne siano note le curvature. Vale infatti il seguente risultato.

**TEOREMA (1.8).** *Siano assegnate  $n-1$  funzioni continue a valori reali  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$  definite su un intervallo  $[a, b]$ , un punto  $\gamma_0 \in \mathbb{R}^n$  e una base ortonormale positivamente orientata  $u_1, \dots, u_n$  di  $\mathbb{R}^n$ . Allora esistono, unici, un cammino  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $\mathbf{C}^2$  parametrizzato dalla lunghezza d'arco e un riferimento di Frenet  $v_1, \dots, v_n$  per  $\gamma$ , con curvature  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ , e tali che  $\gamma(a) = \gamma_0$  e  $v_i(a) = u_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Se la funzione  $\kappa_i$  è di classe  $\mathbf{C}^{n-i-1}$  per ogni  $i$ , allora  $\gamma$  è  $\mathbf{C}^n$ .*

Dimostriamo dapprima l'unicità. Scriviamo

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & \cdots & & \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & \cdots & & \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \cdots & & \\ & & \cdots & & & \\ & & & \cdots & & \\ & \cdots & & & 0 & \kappa_{n-1} \\ \cdots & \cdots & 0 & -\kappa_{n-1} & 0 & \end{pmatrix},$$

e indichiamo con  $V(t)$  e con  $U$  le matrici le cui righe sono i vettori  $v_1(t), \dots, v_n(t)$  e

$u_1, \dots, u_n$ , rispettivamente. Le formule di Frenet si riducono alla relazione tra matrici

$$(1.9) \quad \dot{V} = KV.$$

Questa è un sistema di  $n^2$  equazioni differenziali lineari del primo ordine in forma normale le cui incognite sono le  $n^2$  componenti di  $V$ . Vi è quindi una e una sola soluzione di (1.9) con valore iniziale  $V(a) = U$ , tale cioè che  $v_i(a) = u_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Il riferimento di Frenet  $v_1, \dots, v_n$  è dunque univocamente determinato. Quanto a  $\gamma$ , ha  $v_1$  come derivata e vale  $\gamma_0$  per  $t = a$ , quindi anch'esso è univocamente determinato. Passiamo ora all'esistenza. Come abbiamo detto, esiste una soluzione di (1.9) tale che  $V(a) = U$ ; siano  $v_1, \dots, v_n$  le sue righe. Dico che  $v_1, \dots, v_n$  sono un riferimento mobile ortonormale, cioè che  $V(t)$  è una matrice ortogonale per ogni  $t$ . In effetti si ha che

$${}^tV(a)V(a) = {}^tUU = I,$$

dove  $I$  sta per la matrice identità  $n \times n$ , e inoltre che

$$\frac{d}{dt}({}^tVV) = {}^tV'V + {}^tVV' = {}^tV{}^tKV + {}^tVKV = -{}^tVKV + {}^tVKV = 0,$$

perchè  $K$  è antisimmetrica. Quindi  ${}^tV(t)V(t) = I$  per ogni  $t$ . Inoltre  $V(t)$  ha determinante 1 perchè  $V(a) = U$  ha determinante 1. Ciò equivale a dire che il riferimento  $v_1(t), \dots, v_n(t)$  è positivamente orientato per ogni  $t$ . Poniamo

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \int_a^t v_1(r) dr.$$

Il cammino  $\gamma$  è parametrizzato dalla lunghezza d'arco perchè  $\gamma' = v_1$  e  $\|v_1\| = 1$ , mentre il riferimento  $v_1, \dots, v_n$  soddisfa le relazioni (1.9) e quindi è di Frenet per  $\gamma$ . Inoltre  $\gamma$  è  $\mathbf{C}^2$  perchè  $v_1$  è  $\mathbf{C}^1$ . Resta da dimostrare che  $\gamma$  è  $\mathbf{C}^n$ , cioè che  $v_1$  è di classe  $\mathbf{C}^{n-1}$ , quando ogni  $\kappa_i$  è di classe  $\mathbf{C}^{n-i-1}$ . Lo faremo dimostrando, per induzione discendente su  $k$ , che  $v_1, \dots, v_k$  sono di classe  $\mathbf{C}^{n-k}$ , per ogni  $k$  compreso tra 1 e  $n$ . Ciò è certo vero quando  $k = n$  o  $k = n - 1$ . Supponiamo ora di aver già mostrato che  $v_1, \dots, v_{k+1}$  sono  $\mathbf{C}^{n-k-1}$ . Se  $1 < i \leq k$ , la formula di Frenet

$$\dot{v}_i = -\kappa_{i-1}v_{i-1} + \kappa_i v_{i+1},$$

l'ipotesi induttiva e il fatto che  $\kappa_{i-1}$  è di classe  $\mathbf{C}^{n-i}$  e  $\kappa_i$  di classe  $\mathbf{C}^{n-i-1}$  mostrano che  $\dot{v}_i$  è di classe  $\mathbf{C}^{n-k-1}$ , e quindi che  $v_i$  è di classe  $\mathbf{C}^{n-k}$ . Usando la formula di Frenet  $\dot{v}_1 = \kappa_1 v_2$ , lo stesso ragionamento mostra che anche  $v_1$  è di classe  $\mathbf{C}^{n-k}$ . La dimostrazione del Teorema (1.8) è completa.

A volte per una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è definito in modo naturale o canonico solo un riferimento di Frenet "parziale", cioè un sistema di vettori unitari e ortogonali fra loro  $v_1(t), \dots, v_k(t)$ , con  $v_1 = \gamma' / \|\gamma'\|$ , che dipendono in modo  $\mathbf{C}^1$  da  $t \in [a, b]$  e soddisfano le prime  $k - 1$  tra le relazioni di Frenet (1.4). Un caso tipico è quello di una curva  $k$ -regolare ma non  $(k + 1)$ -regolare. In questo caso il procedimento descritto per associare

a una curva non degenerare il suo riferimento di Frenet produce  $v_1, \dots, v_k$ , e qui si arresta. Nel caso in cui si abbia a disposizione solo un riferimento di Frenet parziale sono definite solo le prime  $k - 1$  curvatures  $\kappa_1, \dots, \kappa_{k-1}$ . Anche se  $\kappa_k$  non è ben definita ha però senso dire che “ $\kappa_k$  si annulla” per un certo valore  $t$  del parametro. In effetti, nel caso in cui si abbia a disposizione un riferimento di Frenet completo, segue dalle formule di Frenet che l’annullarsi di  $\kappa_k(t)$  è equivalente a che  $\dot{v}_k(t)$  sia linearmente dipendente da  $v_1(t), \dots, v_k(t)$ . Questa ultima condizione, in cui la curvatura  $\kappa_k$  non interviene, può essere presa come definizione dell’annullarsi di  $\kappa_k(t)$  nel caso di un riferimento di Frenet parziale.

Le curve per cui la  $k$ -esima curvatura si annulla identicamente sono assai particolari. Si ha infatti il seguente risultato.

**PROPOSIZIONE (1.10).** *Se la  $k$ -esima curvatura della curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  si annulla identicamente,  $\gamma([a, b])$  è contenuto in un sottospazio affine  $k$ -dimensionale di  $\mathbb{R}^n$ .*

La dimostrazione è semplice. Non è restrittivo supporre che  $\gamma$  sia parametrizzata dalla lunghezza d’arco. Supponiamo che la sua  $k$ -esima curvatura si annulli, e sia  $u$  un vettore ortogonale a  $v_1(a), \dots, v_k(a)$ . Se indichiamo con  $V$  la matrice le cui righe sono  $v_1, \dots, v_k$ ,  $V$  soddisfa il sistema di equazioni differenziali

$$\dot{V} = KV,$$

dove

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & \cdots & & \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & \cdots & & \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \cdots & & \\ & & \cdots & \cdots & & \\ & & & \cdots & & \\ & \cdots & & 0 & \kappa_{k-1} & \\ \cdots & \cdots & 0 & -\kappa_{k-1} & 0 & \end{pmatrix}.$$

Moltiplicando questa relazione a destra per  ${}^t u$  si ottiene

$$(1.11) \quad (V \dot{{}^t u}) = KV {}^t u.$$

Ma  $V {}^t u$  è una matrice colonna le cui componenti sono i prodotti scalari  $\langle v_i, u \rangle$  per  $i = 1, \dots, k$ . Dunque  $V {}^t u$  si annulla per  $t = a$ , e quindi per ogni  $t$ , dato che  $V {}^t u$  soddisfa il sistema di equazioni differenziali del primo ordine (1.11). Ciò significa che, per ogni  $t$ ,  $v_1(t), \dots, v_k(t)$  appartengono al sottospazio  $W$  di  $\mathbb{R}^n$  generato da  $v_1(a), \dots, v_k(a)$ ; in particolare,  $\gamma'(t) \in W$ . Siano ora  $u_1, \dots, u_{n-k}$  vettori indipendenti ortogonali a  $W$ . Dico che  $\gamma([a, b])$  è contenuto nel sottospazio affine  $k$ -dimensionale di  $\mathbb{R}^n$  di equazioni

$$\langle X, u_i \rangle - \langle \gamma(a), u_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, n - k.$$

Basta osservare che  $\gamma(a)$  soddisfa ovviamente queste equazioni, mentre la derivata rispetto a  $t$  di

$$\langle \gamma(t), u_i \rangle - \langle \gamma(a), u_i \rangle$$



vale  $\langle \gamma'(t), u_i \rangle$ , che è nullo perchè  $\gamma'(t)$  appartiene a  $W$ . Ciò dimostra la Proposizione (1.10).

Conseguenze particolari della Proposizione (1.10) sono che una curva in  $\mathbb{R}^3$  con torsione nulla è una curva piana, cioè contenuta in un piano, e che una curva in  $\mathbb{R}^3$  (o in  $\mathbb{R}^2$ ) con curvatura nulla è un pezzo di retta. Vale anche un parziale reciproco della Proposizione (1.10): una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  che sia contenuta in un sottospazio affine  $k$ -dimensionale di  $\mathbb{R}^n$  e che sia  $k$ -regolare ha curvatura  $k$ -esima identicamente nulla. In effetti, sia  $W$  un sottospazio vettoriale  $k$ -dimensionale di  $\mathbb{R}^n$  tale che  $\gamma$  sia contenuta in un suo traslato. Allora  $\gamma'(t), \dots, \gamma^{(k)}(t)$  sono contenuti in  $W$  per ogni  $t$ , anzi lo generano, perchè sono indipendenti. Quindi, se  $v_1, \dots, v_k$  è un riferimento di Frenet parziale per  $\gamma$ , anche  $v_1, \dots, v_k$  sono contenuti in  $W$ , e lo stesso vale per le loro derivate, in particolare per  $\dot{v}_k$ , che è perciò linearmente dipendente da  $v_1, \dots, v_k$ . Ciò significa che la curvatura  $k$ -esima di  $\gamma$  è nulla. Casi particolari di quanto ora detto sono che un pezzo di retta ha curvatura nulla e che una curva in  $\mathbb{R}^3$  che sia piana e abbia curvatura diversa da zero ovunque ha torsione nulla.

Sia  $\gamma(t)$  un cammino in  $\mathbb{R}^n$ , non necessariamente parametrizzato dalla lunghezza d'arco. Può avere interesse ottenere formule che esprimano le curvatures di  $\gamma$  in funzione delle derivate di  $\gamma$  rispetto a  $t$ , senza dover fare uso del parametro naturale. Ci limiteremo a dare formule di questo tipo per curve in  $\mathbb{R}^3$  e in  $\mathbb{R}^2$ . Sia dunque  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  un cammino 2-regolare, e sia  $s$  il suo parametro naturale. Indicando con un apice la derivazione rispetto a  $t$ , si ha che

$$\begin{aligned} T &= \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}, \\ \kappa N &= \frac{dT}{ds} = \frac{\gamma''}{\|\gamma'\|^2} - \frac{1}{\|\gamma'\|^2} \frac{d}{ds}(\|\gamma'\|)\gamma', \\ T \times \frac{dT}{ds} &= \frac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma'\|^3}, \\ \kappa &= \left\| T \times \frac{dT}{ds} \right\| = \frac{\|\gamma' \times \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3}, \\ B &= \frac{1}{\kappa} T \times \frac{dT}{ds} = \frac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma' \times \gamma''\|}. \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\tau = - \left\langle \frac{dB}{ds}, N \right\rangle = - \frac{1}{\kappa} \left\langle \frac{dB}{ds}, \frac{dT}{ds} \right\rangle,$$

mentre

$$\frac{dB}{ds} = \frac{1}{\|\gamma'\|} B' = \frac{\gamma' \times \gamma'''}{\|\gamma'\| \|\gamma' \times \gamma''\|} + \frac{1}{\|\gamma'\|} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\|\gamma' \times \gamma''\|} \right) \gamma' \times \gamma''.$$

Quindi

$$\tau = - \frac{\langle \gamma'', \gamma' \times \gamma''' \rangle}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2} = \frac{\langle \gamma' \times \gamma'', \gamma''' \rangle}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2},$$

o ancora

$$\tau = \frac{\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2},$$

dove  $\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')$  sta per il determinante della matrice le cui righe (o colonne, se si preferisce) sono  $\gamma', \gamma'', \gamma'''$ . Per curve in  $\mathbb{R}^2$ , la formula per la curvatura è

$$\kappa = \frac{\det(\gamma', \gamma'')}{\|\gamma'\|^3}.$$

ESEMPIO (1.12). Torniamo al cerchio  $\gamma(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$  in  $\mathbb{R}^2$ . Si ha che

$$\gamma' = r(-\sin(t), \cos(t)) \quad , \quad \gamma'' = r(-\cos(t), -\sin(t)),$$

quindi

$$\kappa = \frac{\det(\gamma', \gamma'')}{\|\gamma'\|^3} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}.$$

ESEMPIO (1.13). La parabola  $y = ax^2$  in  $\mathbb{R}^2$  può essere descritta, in forma parametrica, come la curva  $\gamma(t) = (t, at^2)$ . Si ha che

$$\gamma' = (1, 2at) \quad , \quad \gamma'' = (0, 2a) \quad , \quad \|\gamma'\| = \sqrt{1 + 4a^2t^2},$$

quindi

$$\kappa = \frac{\det(\gamma', \gamma'')}{\|\gamma'\|^3} = \frac{2a}{(1 + 4a^2t^2)^{3/2}} = \frac{2a}{(1 + 4ay)^{3/2}}.$$

ESEMPIO (1.14) (LE ELICHE). Sia  $\gamma(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , una curva regolare in  $\mathbb{R}^3$ . Diremo che  $\gamma$  è un'elica se vi è una direzione con la quale  $\dot{\gamma}(t)$  formi un angolo costante. In altre parole,  $\gamma$  è un'elica se e solo se vi è un vettore non nullo  $v$  tale che  $\langle T, v \rangle$  sia indipendente da  $t$ ; chiameremo la retta generata da  $v$  asse dell'elica. D'ora in poi supporremo che  $\gamma$  ammetta un riferimento di Frenet. Dire che  $\langle T, v \rangle$  è costante equivale a dire che la sua derivata, che in virtù delle formule di Frenet vale  $\kappa \langle N, v \rangle$ , è identicamente nulla. Ne segue che, se  $\gamma$  è un'elica la cui curvatura sia non nulla su un sottinsieme denso di  $[a, b]$ , esiste un piano (e precisamente il piano di equazione  $\langle X, v \rangle = 0$ ) al quale  $N$  è parallelo per ogni valore del parametro. Viceversa, se questa ultima condizione è soddisfatta, allora  $\gamma$  è un'elica.

Supponiamo ora che esista un vettore non nullo  $v$  tale che  $\langle B, v \rangle$  sia costante; per le formule di Frenet ciò equivale a dire che  $\tau \langle N, v \rangle$  è identicamente nullo. Dunque, in completa analogia con quanto si è appena visto, se la torsione di  $\gamma$  è non nulla su un sottinsieme denso di  $[a, b]$  esiste un piano al quale  $N$  è parallelo per ogni valore del parametro, e viceversa se questa ultima condizione è soddisfatta c'è un vettore non nullo  $v$  tale che  $\langle B, v \rangle$  sia costante.

Riassumendo, possiamo concludere che, se curvatura e torsione di  $\gamma$  sono diverse da zero su sottinsiemi densi di  $[a, b]$ , allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- i)  $\gamma$  è un'elica;
- ii) esiste un piano al quale  $N(t)$  è parallelo per ogni  $t$ ;
- iii) esiste una direzione che forma un angolo costante con  $B$ .

Inoltre *ii)* implica *i)* e *iii)* in ogni caso, anche senza ipotesi di non annullamento sulla curvatura e la torsione.

Vi è un'altra caratterizzazione delle eliche che può essere utile. Supponiamo ancora che  $\gamma$  sia una curva regolare in  $\mathbb{R}^3$  che ammette un riferimento di Frenet. Supponiamo anche che la curvatura e la torsione di  $\gamma$  siano tra loro proporzionali, cioè che ci siano costanti  $a$  e  $b$ , non entrambe nulle, tali che  $a\kappa = b\tau$ . Poniamo  $v = aT + bB$ , e notiamo che, per le formule di Frenet,

$$\dot{v} = a\dot{T} + b\dot{B} = a\kappa N - b\tau N = 0;$$

in altre parole,  $v$  è costante. Inoltre  $v$  non è nullo e  $\langle N, v \rangle = 0$ , quindi  $\gamma$  è un'elica. Viceversa, supponiamo che vi sia un vettore non nullo  $v$  tale che  $\langle N, v \rangle = 0$ . Possiamo allora scrivere  $v = fT + gB$ , dove  $f$  e  $g$  sono funzioni che non si annullano mai contemporaneamente. Differenziando si ottiene

$$0 = \dot{v} = \dot{f}T + \dot{g}B + (f\kappa - g\tau)N.$$

Dato che  $T$ ,  $N$  e  $B$  sono ovunque indipendenti ne segue che  $f$  e  $g$  sono costanti e che  $f\kappa = g\tau$ , quindi che  $\kappa$  e  $\tau$  sono proporzionali. In particolare, se  $\gamma$  è un'elica la cui curvatura si annulla al più su un insieme privo di parte interna, allora la curvatura e la torsione di  $\gamma$  sono tra loro proporzionali.

ESEMPIO (1.15). Costruiamo un cammino regolare in  $\mathbb{R}^3$  che non ammette un riferimento di Frenet. Poniamo

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (a(t) \cos(t), a(t) \sin(t), t) && \text{per } t \leq 0, \\ \gamma(t) &= (a(-t) \cos(t + \varphi), a(-t) \sin(t + \varphi), t) && \text{per } t \geq 0, \end{aligned}$$

dove  $a(t)$  è una funzione che si annulla di ordine sufficientemente alto per  $t = 0$  ed è positiva e strettamente decrescente per  $t < 0$ , e  $\varphi$  è una costante da determinarsi. Se  $a(t)$  è di classe  $\mathbf{C}^k$  e si annulla con le sue prime  $k$  derivate per  $t = 0$ , allora anche  $\gamma$  è di classe  $\mathbf{C}^k$ ; in particolare, se si sceglie una  $a(t)$  che sia  $\mathbf{C}^\infty$  e tale che tutte le sue derivate si annullino per  $t = 0$ , il cammino  $\gamma$  è  $\mathbf{C}^\infty$ . Inoltre  $\gamma$  è 2-regolare per  $t \neq 0$ ; dunque la normale  $N$  è univocamente determinata per  $t \neq 0$ . Basta dunque mostrare che, per una scelta opportuna di  $\varphi$ ,  $N$  non è continua per  $t = 0$ . Supponiamo che  $N$  sia continua per una certa scelta di  $\varphi$ . Per  $t = 0$ ,  $N$  è ortogonale a  $\gamma'(0)$ , e quindi all'asse delle  $z$ . Sostituire il  $\varphi$  originale con  $\varphi + \varepsilon$  ha l'effetto di ruotare di  $\varepsilon$  intorno all'asse delle  $z$  la parte di  $\gamma$  corrispondente a valori positivi di  $t$ ; anche  $\lim_{t \rightarrow 0^+} N$  viene ruotato di  $\varepsilon$  rispetto alla posizione originale. Dunque, se  $\varepsilon$  non è multiplo di  $2\pi$ ,  $N$  non è più continua.

## Esercizi

Salvo avviso contrario, si suppone che tutte le curve considerate in questi esercizi posseggano un riferimento di Frenet.

1.1) Trovare una parametrizzazione naturale per la parabola in  $\mathbb{R}^2$ .

1.2) Calcolare il parametro naturale, curvatura e torsione per il cammino:

$$\gamma(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t), e^t)$$

1.3) Trovare una parametrizzazione naturale e la curvatura per la curva piana di equazione cartesiana  $x^3 = y^2$ .

1.4) Si mostri che, se tutte le rette tangenti a una curva in  $\mathbb{R}^3$  passano per uno stesso punto, la curva è una retta.

1.5) Si mostri che, se tutti i piani osculatori a una curva in  $\mathbb{R}^3$  passano per uno stesso punto, la curva è piana.

1.6) Sia  $\gamma$  una curva differenziabile in  $\mathbb{R}^3$  i cui piani normali passano tutti per un punto fissato  $p$ . Dimostrare che  $\gamma$  giace su una superficie sferica.

1.7) Sia  $\gamma$  una curva tracciata su una superficie sferica in  $\mathbb{R}^3$ . Si mostri che, se  $\gamma$  ha curvatura costante, è una curva piana.

1.8) Calcolare curvatura e torsione della curva di equazione parametrica

$$x = 3t - t^3, \quad y = 3t + t^3, \quad z = 3t^2.$$

Si mostri che questa curva è un'elica, e si calcoli la direzione del suo asse.

1.9) Si descrivano tutte le curve in  $\mathbb{R}^3$  con curvatura e torsione costanti.

1.10) Per quali valori di  $a$  e  $b$  la curva  $\gamma(t) = (at, bt^2, t^3)$  è un'elica ?

1.11) Sia  $\gamma(t)$  una curva in  $\mathbb{R}^3$ . Consideriamo il cammino  $\eta(t)$  in  $\mathbb{R}^3$  che associa a ogni  $t$  la tangente unitaria a  $\gamma$  in  $\gamma(t)$ . Mostrare che  $\gamma$  è un'elica se e solo se l'immagine di  $\eta$  è contenuta in un cerchio.

1.12) Trovare curvatura e torsione di:

$$\begin{aligned} a) \quad & \gamma(t) = \left( t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t} \right) \\ b) \quad & \delta(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t), bt) \\ c) \quad & \eta(t) = (a(3t - t^3), 3at^2, a(3t + t^3)) \\ d) \quad & \xi(t) = (a(1 + \cos t), a \sin t, 2a \sin \frac{1}{2}t) \end{aligned}$$

1.13) Trovare una funzione  $\varphi(t)$  tale che la curva

$$\gamma(t) = \left( \int_0^t \varphi(\tau) \sin(\tau) d\tau, \int_0^t \varphi(\tau) \cos(\tau) d\tau, \int_0^t \varphi(\tau) \tan(\tau) d\tau \right)$$

abbia curvatura costante.

1.14) Mostrare che il luogo dei centri di curvatura di un'elica circolare

$$\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t, ht)$$

è un'altra elica circolare coassiale alla precedente.

1.15) Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva di classe almeno  $C^2$ .

- Si mostri che, se  $\gamma$  è una curva contenuta in un piano passante per l'origine, allora  $\gamma(t)$ ,  $\gamma'(t)$  e  $\gamma''(t)$  sono linearmente dipendenti per ogni  $t$ .
- Si mostri che, se  $\gamma(t)$  e  $\gamma'(t)$  sono indipendenti e  $\gamma(t)$ ,  $\gamma'(t)$  e  $\gamma''(t)$  linearmente dipendenti per ogni  $t \in [a, b]$ , allora  $\gamma$  è contenuta in un piano passante per l'origine.
- Si mostri che la conclusione di b) non è necessariamente valida se non si suppongono  $\gamma(t)$  e  $\gamma'(t)$  indipendenti.

1.16) Sia  $\gamma(t)$  una curva in  $\mathbb{R}^3$  parametrizzata dalla lunghezza d'arco, e se ne denotino con  $\kappa$  e  $\tau$  curvatura e torsione. Mostrare che

$$\gamma''' = -\kappa^2 T + \kappa' N + \kappa \tau B.$$

1.17) Sia  $\mathbf{x}(s)$  una curva  $C^\infty$  in  $\mathbb{R}^3$  con parametro naturale  $s$ . L'immagine sferica normale di  $\mathbf{x}$  è la curva  $N(s)$ ; indichiamo con  $\tilde{s}$  il suo parametro naturale. Mostrare che

$$\frac{d\tilde{s}}{ds} = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2},$$

dove  $\kappa$  e  $\tau$  sono curvatura e torsione di  $\mathbf{x}(s)$ .

1.18) Sia  $\gamma(t)$  una curva in  $\mathbb{R}^3$ . Supponiamo che  $t$  ne sia il parametro naturale e indichiamone con  $T$ ,  $\kappa$  e  $\tau$  la tangente unitaria, la curvatura e la torsione, che supponiamo ben definite. La mappa  $T(t)$  descrive una curva sulla sfera unitaria di  $\mathbb{R}^3$ , che supponiamo regolare. Indichiamo con  $\kappa_1$  e  $\tau_1$  curvatura e torsione di questa curva, che supponiamo ben definite. Si mostri che tra  $\kappa$ ,  $\tau$ ,  $\kappa_1$  e  $\tau_1$  intercorrono le seguenti relazioni:

$$\kappa_1^2 = \frac{(\kappa^2 + \tau^2)}{\kappa^2}, \quad \tau_1 = \frac{(\kappa\tau' - \kappa'\tau)}{\kappa(\kappa^2 + \tau^2)}.$$

1.19) Dimostrare che, se una curva differenziabile di classe almeno  $C^3$  in  $\mathbb{R}^3$  con parametro naturale  $s$ , curvatura  $\kappa$  e torsione  $\tau$  giace su una sfera, allora curvatura e torsione soddisfano la relazione

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} \right) = \frac{\tau}{\kappa}$$

1.20) Sia  $\mathbf{x}(s)$  una curva in  $\mathbb{R}^3$ , dove  $s$  è il parametro naturale, e siano  $\kappa$  e  $\tau$  curvatura e torsione di  $\mathbf{x}$ . Poniamo  $\rho = -1/\kappa$ ,  $\sigma = -1/\tau$ . Mostrare che, se vale la relazione

$$\rho^2 + (\dot{\rho}\sigma)^2 = r^2,$$

dove  $r$  è una costante positiva, e  $\dot{\rho}$  non si annulla, allora  $\mathbf{x}$  ha immagine contenuta in una superficie sferica di raggio  $r$ .

- 1.21) Sia  $\gamma$  una curva differenziabile chiusa in  $\mathbb{R}^3$  interamente contenuta nella superficie sferica unitaria di  $\mathbb{R}^3$ . Siano  $\kappa$  e  $\tau$  la curvatura e la torsione di  $\gamma$ . Mostrare che

$$\int_{\gamma} \frac{\tau}{\kappa} ds = 0 .$$

- 1.22) Sia  $\gamma$  una curva tracciata su una superficie sferica in  $\mathbb{R}^3$  di raggio  $r$ . Si mostri che la curvatura di  $\gamma$  è ovunque almeno  $1/r$ .
- 1.23) Sia  $\gamma(t)$  una curva non degenera in  $\mathbb{R}^3$ . Mostrare che i vettori tangenti a  $\gamma$  e al luogo dei suoi centri di curvatura in punti corrispondenti sono tra loro ortogonali.

## 2. Il teorema delle funzioni implicite

Un *diffeomorfismo*  $\mathbf{C}^k$  tra aperti  $A$  e  $B$  di  $\mathbb{R}^n$  è un omeomorfismo  $f : A \rightarrow B$  di classe  $\mathbf{C}^k$  con inversa anch'essa di classe  $\mathbf{C}^k$ . Sia  $U$  un aperto in  $\mathbb{R}^n$  e sia  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  una applicazione  $\mathbf{C}^1$ . Se  $p \in U$  indicheremo con  $J_p f$  la matrice Jacobiana

$$J_p f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \cdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \end{pmatrix}.$$

Diremo che  $f$  ha rango  $k$  nel punto  $p$  se  $J_p f$  ha rango  $k$ . Se  $x = (x_1, \dots, x_n)$  è un gruppo di variabili, useremo anche la notazione

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

per indicare la matrice Jacobiana di  $f$  rispetto alle variabili  $x$ . Supponiamo ora che  $U$  sia convesso, e siano  $p$  e  $q$  punti di  $U$ . La funzione  $F(t) = f(t(q-p) + p)$  è  $\mathbf{C}^1$  su  $[0, 1]$ , e  $F(0) = f(p)$ ,  $F(1) = f(q)$ . Dunque possiamo scrivere

$$f(q) - f(p) = \int_0^1 \frac{dF}{dt} dt = \sum_{i=1}^n (q_i - p_i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(t(q-p) + p) dt.$$

Si possono quindi trovare funzioni continue  $h_1, \dots, h_n$  tali che

$$f(q) - f(p) = \sum_{i=1}^n (q_i - p_i) h_i(q, p).$$

Se  $f$  è di classe  $\mathbf{C}^k$ , le  $h_i$  sono di classe  $\mathbf{C}^{k-1}$ . Inoltre, se le derivate  $\partial f / \partial x_i$  hanno norma (euclidea) uniformemente limitata da una costante  $\varepsilon$  su  $U$ , anche  $\|h_i\|$  è limitata da  $\varepsilon$ , e quindi si ha

$$\|f(q) - f(p)\| \leq \sum |q_i - p_i| \|h_i(q, p)\| \leq \varepsilon \sum |q_i - p_i| \leq \sqrt{n} \varepsilon \|q - p\|.$$

**TEOREMA (2.1) (DELLA FUNZIONE INVERSA).** *Sia  $U$  un aperto in  $\mathbb{R}^n$ , e sia  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una applicazione di classe  $\mathbf{C}^k$ ,  $k \geq 1$ . Se la matrice Jacobiana  $J_{p_0} f$  di  $f$  nel punto  $p_0$  è non singolare vi è un intorno aperto  $V$  di  $p_0$  tale che  $W = f(V)$  sia aperto e che la applicazione  $f|_V : V \rightarrow W$  sia un diffeomorfismo  $\mathbf{C}^k$ .*

Nella dimostrazione converrà pensare i punti di  $\mathbb{R}^n$  come matrici *colonna*. Dimostreremo innanzitutto il teorema sotto le ipotesi aggiuntive che  $p_0 = f(p_0) = 0$  e che  $J_{p_0} f = I$ . Poniamo

$$T_y(x) = x - f(x) + y,$$

e osserviamo che le ipotesi aggiuntive su  $f$  implicano che  $J_0 T_y = 0$ . Inoltre  $f(x) = y$  se e solo se  $T_y(x) = x$ , cioè se e solo se  $x$  è un punto fisso di  $T_y$ . Dato  $\varepsilon > 0$ , esiste una palla chiusa  $\overline{B(0, r)}$  su cui tutte le derivate parziali di  $T_y$  hanno norma limitata da  $\varepsilon$ . Possiamo inoltre supporre che in ogni punto di questa palla la matrice Jacobiana di  $f$  sia non singolare. Dunque, se  $p$  e  $q$  appartengono a  $\overline{B(0, r)}$ ,

$$\|T_y(p) - T_y(q)\| \leq \sqrt{n}\varepsilon\|p - q\|.$$

Se scegliamo  $\varepsilon \leq 1/(4\sqrt{n})$ , si ha dunque

$$\|T_y(p) - T_y(q)\| \leq \frac{1}{4}\|p - q\|;$$

inoltre, dato che  $T_y(0) = y$ , se  $\|y\| \leq r/4$  si ha che, per ogni  $p$  in  $\overline{B(0, r)}$ ,

$$\|T_y(p)\| \leq \|y\| + \frac{1}{4}\|p\| \leq \frac{r}{2}.$$

Dunque  $T_y$  è una contrazione di  $\overline{B(0, r)}$  in sè tale che  $T_y(\overline{B(0, r)}) \subset \overline{B(0, r/2)}$ ; in particolare  $T_y(\overline{B(0, r)}) \subset B(0, r)$ . Ne segue che  $T_y$  ha uno e un solo punto fisso  $x$  in  $\overline{B(0, r)}$ , e che  $x \in \overline{B(0, r/2)}$ . Ciò significa che, per ogni  $y \in \overline{B(0, r/4)}$ , vi è uno e un solo  $x \in \overline{B(0, r)}$  tale che  $f(x) = y$ , e che  $x \in \overline{B(0, r/2)}$ . Dunque la restrizione di  $f$  a  $f^{-1}(\overline{B(0, r/4)}) \cap \overline{B(0, r/2)}$  è iniettiva e ha come immagine  $\overline{B(0, r/4)}$ ; poiché è una applicazione continua da uno spazio topologico compatto su uno di Hausdorff, è un omeomorfismo di  $f^{-1}(\overline{B(0, r/4)}) \cap \overline{B(0, r/2)}$  su  $\overline{B(0, r/4)}$ . Ponendo ora

$$V = B(0, r) \cap f^{-1}(B(0, r/4)),$$

si conclude che  $W = f(V) = B(0, r/4)$ , che  $f|_V$  è un omeomorfismo di  $V$  su  $W$ , e che  $f|_V$  ha ovunque Jacobiano non singolare.

Vogliamo ora mostrare che l'inversa di  $f|_V : V \rightarrow W$ , che indicheremo con  $g$ , è differenziabile. Per fare ciò notiamo intanto che, se  $p$  e  $q$  appartengono a  $\overline{B(0, r)}$ , per ogni  $y$  in  $\overline{B(0, r/4)}$ ,

$$\|p - q - f(p) + f(q)\| = \|T_y(p) - T_y(q)\| \leq \frac{1}{4}\|p - q\|,$$

e dunque

$$\|f(p) - f(q)\| \geq \frac{3}{4}\|p - q\|.$$

Ora, se  $p$  e  $q$  appartengono a  $W$ ,

$$\begin{aligned} \|g(p) - g(q) - (J_{g(q)}f)^{-1}(p - q)\| &\leq \|(J_{g(q)}f)^{-1}\| \|(J_{g(q)}f)(g(p) - g(q)) - f(g(p)) + f(g(q))\| \\ &= o(\|g(p) - g(q)\|), \end{aligned}$$

perchè  $f$  è differenziabile nel punto  $g(q)$ . D'altra parte, per quanto si è appena visto,  $\|g(p) - g(q)\| = O(\|p - q\|)$ . Quindi  $g$  è differenziabile nel punto  $q$  e

$$J_q g = (J_{g(q)} f)^{-1}.$$



Poichè gli elementi dell'inversa di una matrice  $A$  sono funzioni razionali degli elementi di  $A$ ,  $J_q g$  ha dunque la stessa classe di differenziabilità di  $J_{g(q)} f$ . Dobbiamo mostrare che  $g$  è  $\mathbf{C}^k$ , cioè che  $J_q g$  è  $\mathbf{C}^{k-1}$ , o ancora, per quanto appena osservato, che  $J_{g(q)} f$  è  $\mathbf{C}^{k-1}$ . Poichè  $J_q f$  è  $\mathbf{C}^{k-1}$ , basterà mostrare che  $g$  è  $\mathbf{C}^{k-1}$ ; per far ciò basterà mostrare che  $g$  è  $\mathbf{C}^{k-2}$ , e così via. La tesi segue dunque dalla continuità di  $g$ .

Per completare la dimostrazione del teorema basta ora rimuovere le ipotesi aggiuntive che  $p_0 = f(p_0) = 0$  e che  $J_{p_0} f = I$ . Poniamo

$$\varphi(x) = (J_{p_0} f)^{-1}(f(x + p_0) - f(p_0)).$$

La matrice Jacobiana di  $\varphi$  nell'origine è la matrice identità e  $\varphi(0) = 0$ . Dunque, per quanto è stato già dimostrato, esiste un intorno aperto dell'origine  $V'$  tale che la restrizione di  $\varphi$  a  $V'$  sia un diffeomorfismo  $\mathbf{C}^k$  da  $V'$  a  $W' = \varphi(V')$ . Ma allora si può scegliere  $V = V' + p_0$ . In effetti la restrizione di  $f$  a  $V$  è  $\alpha \circ \beta \circ \varphi|_{V'} \circ \gamma$ , dove  $\gamma$  è la traslazione di  $-p_0$ ,  $\alpha$  quella di  $f(p_0)$ , e  $\beta$  la moltiplicazione per la matrice  $J_{p_0} f$ . La dimostrazione del teorema è ora completa.

Dimostriamo ora una prima importante conseguenza del teorema della funzione inversa. Chiameremo cubo un aperto di  $\mathbb{R}^n$  che sia un prodotto di  $n$  intervalli aperti.

**COROLLARIO (2.2) (TEOREMA DEL RANGO).** *Sia  $U$  un aperto in  $\mathbb{R}^n$  e sia  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  una applicazione  $\mathbf{C}^k$ ,  $k \geq 1$ . Supponiamo che il rango di  $f$  sia costante su  $U$ , e indichiamolo con  $r$ . Allora, se  $p$  è un punto di  $U$ , vi sono intorni aperti  $A$  di  $p$  e  $B$  di  $f(p)$  e diffeomorfismi di classe  $\mathbf{C}^k$   $\alpha : A \rightarrow P$  e  $\beta : B \rightarrow Q$ , dove  $P$  e  $Q$  sono cubi in  $\mathbb{R}^n$  e in  $\mathbb{R}^m$ , tali che  $\beta \circ f \circ \alpha^{-1}$  sia della forma*

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

Si può scegliere  $A = P$  e  $\alpha$  uguale all'identità quando  $r = n$ , oppure  $B = Q$  e  $\beta$  uguale all'identità quando  $r = m$  (ma non entrambe le cose contemporaneamente quando  $r = m = n$ ).

Scriveremo i punti di  $\mathbb{R}^n$  sotto la forma  $(x, y)$ , dove  $x \in \mathbb{R}^r$  e  $y \in \mathbb{R}^{n-r}$ , e scriveremo anche  $f(x, y) = (g(x, y), h(x, y))$ , dove  $g$  ha valori in  $\mathbb{R}^r$  e  $h$  ha valori in  $\mathbb{R}^{m-r}$ . Tratteremo per primo il caso  $r = n \leq m$ , poi quello  $r = m \leq n$ , e infine quello generale. Se  $r = n \leq m$ , salvo cambiare l'ordine delle variabili in  $\mathbb{R}^m$  e restringere  $U$ , possiamo supporre che la matrice Jacobiana  $\partial g / \partial x$  sia non singolare su tutto  $U$ . Definiamo ora una applicazione  $F$  di classe  $\mathbf{C}^k$  da  $U \times \mathbb{R}^{m-n}$  a  $\mathbb{R}^m$  ponendo

$$F(x, \eta) = (g(x), h(x) + \eta).$$

La matrice Jacobiana di  $F$  è

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x} & I \end{pmatrix},$$

quindi

$$\det(JF) = \det\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) \neq 0.$$

Per il teorema della funzione inversa vi è un cubo  $Q = A \times Q'$  in  $\mathbb{R}^m$ , dove  $A$  e  $Q'$  sono cubi in  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^{m-n}$ , contenente  $(p, 0)$ , tale che  $B = F(Q)$  sia aperto e che  $F : Q \rightarrow B$  abbia un'inversa  $\beta$  di classe  $\mathbf{C}^k$ . In particolare

$$\beta(g(x), h(x) + \eta) = (x, \eta).$$

Ponendo  $\eta = 0$  si ottiene che, per ogni  $x \in A$ ,

$$\beta(f(x)) = \beta(g(x), h(x)) = (x, 0),$$

come si voleva.

Supponiamo ora che  $r = m \leq n$ . Salvo cambiare l'ordine delle variabili in  $\mathbb{R}^n$  e restringere  $U$ , possiamo supporre che la matrice Jacobiana  $\partial f / \partial x$  sia non singolare su tutto  $U$ . Definiamo ora una applicazione  $\alpha$  di classe  $\mathbf{C}^k$  da  $U$  a  $\mathbb{R}^n$  ponendo

$$\alpha(x, y) = (f(x, y), y).$$

La matrice Jacobiana di  $\alpha$  è

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

quindi

$$\det(J\alpha) = \det\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \neq 0.$$

Per il teorema della funzione inversa vi è un intorno aperto  $A$  di  $p$  tale che  $P = \alpha(A)$  sia un cubo e che  $\alpha : A \rightarrow P$  abbia un'inversa  $\mathbf{C}^k$ . Dunque, se scriviamo

$$\alpha^{-1}(x, y) = (\gamma(x, y), \delta(x, y)),$$

dove  $\gamma$  ha valori in  $\mathbb{R}^m$  e  $\delta$  ha valori in  $\mathbb{R}^{n-m}$ , si ha

$$y = \delta(x, y), \quad x = f(\gamma(x, y), \delta(x, y)),$$

e quindi

$$x = f(\gamma(x, y), y).$$

In altre parole  $f(\alpha^{-1}(x, y)) = x$ , come si voleva (e  $B = f(A)$  è un cubo).

Trattiamo ora il caso generale. Salvo permutare le variabili in  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$  e restringere  $U$ , si può supporre che la matrice Jacobiana  $\partial g / \partial x$  sia non singolare su tutto  $U$ . Per quanto è stato appena dimostrato, vi sono dunque un intorno  $A$  di  $p$ , un cubo  $P$  in  $\mathbb{R}^n$ , e un diffeomorfismo  $\alpha : A \rightarrow P$  tali che  $g(\alpha^{-1}(x, y)) = x$  per ogni  $(x, y)$  in  $P$ . Dunque

$$f(\alpha^{-1}(x, y)) = (x, h(\alpha^{-1}(x, y)))$$

per ogni  $(x, y)$  in  $P$ . D'altra parte la matrice Jacobiana di  $f \circ \alpha^{-1}$  deve avere rango  $r$  ovunque. Questo è possibile solo se  $\partial(h \circ \alpha^{-1}) / \partial y$  è identicamente nullo, cioè solo se

$h(\alpha^{-1}(x, y))$  non dipende da  $y$ , ma solo da  $x$ . Quindi vi è una funzione  $\psi$  di classe  $\mathbf{C}^k$  tale che  $h(\alpha^{-1}(x, y)) = \psi(x)$ , e dunque

$$f(\alpha^{-1}(x, y)) = (x, \psi(x)).$$

Se scriviamo  $P = P' \times P''$ , dove  $P'$  è un cubo in  $\mathbb{R}^r$  e  $P''$  un cubo in  $\mathbb{R}^{n-r}$ , l'applicazione  $\beta : P' \times \mathbb{R}^{m-r} \rightarrow P' \times \mathbb{R}^{m-r}$  definita da

$$\beta(\xi, \eta) = (\xi, \eta - \psi(\xi))$$

è un diffeomorfismo  $\mathbf{C}^k$  (ha come inversa  $(\xi, \eta) \mapsto (\xi, \eta + \psi(\xi))$ ). Inoltre

$$\beta(f(\alpha^{-1}(x, y))) = \beta(x, \psi(x)) = (x, 0).$$

Per concludere basta scegliere  $Q = P' \times Q''$ , dove  $Q''$  è un cubo in  $\mathbb{R}^{m-r}$  contenente l'origine, e  $B = \beta^{-1}(Q)$ . La dimostrazione di (2.2) è ora completa.

**COROLLARIO (2.3) (TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE).** *Sia  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una applicazione  $\mathbf{C}^k$ ,  $k \geq 1$ , dove  $U$  è un aperto in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Indichiamo con  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e con  $y = (y_1, \dots, y_m)$  le variabili in  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$ . Supponiamo che in un punto  $(x_0, y_0)$  di  $U$  la matrice  $\partial f / \partial x$  sia non singolare. Allora esistono intorno aperti  $A$  di  $x_0$  e  $B$  di  $y_0$  e una funzione  $\varphi : B \rightarrow A$  di classe  $\mathbf{C}^k$  tali che*

$$\{(x, y) \in A \times B \mid f(x, y) = f(x_0, y_0)\}$$

coincida con il grafico di  $\varphi$ , cioè con

$$\{(\varphi(y), y) \mid y \in B\}.$$

La dimostrazione è sostanzialmente identica a quella del caso  $r = m \leq n$  del corollario (2.2). Costruiamo una applicazione  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  ponendo

$$F(x, y) = (f(x, y), y).$$

La matrice Jacobiana di  $F$  è

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

quindi

$$\det(J_{(x_0, y_0)} F) = \det\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right) \neq 0.$$

Per il teorema della funzione inversa vi è un intorno aperto di  $(x_0, y_0)$ , che possiamo supporre della forma  $A \times B'$ , tale che la restrizione di  $F$  ad  $A \times B'$  è un diffeomorfismo su  $W = F(A \times B')$ . Sia  $x = G(\xi, \eta)$ ,  $y = H(\xi, \eta)$  la funzione inversa di  $F|_{A \times B'}$ . In altri termini

$$\xi = f(G(\xi, \eta), H(\xi, \eta)) \quad , \quad \eta = H(\xi, \eta).$$

Ne segue che

$$(2.4) \quad \xi = f(G(\xi, \eta), \eta).$$

Se poniamo  $f_0 = f(x_0, y_0)$ , l'insieme  $\{(x, y) \in A \times B' \mid f(x, y) = f_0\}$  coincide con  $F^{-1}(\{(x, y) \in W \mid x = f_0\})$ , e quindi, per la (2.4), con  $\{(G(f_0, y), y) \mid (f_0, y) \in W\}$ . D'altra parte si può trovare un intorno  $B$  di  $y_0$  tale che  $\{f_0\} \times B$  sia interamente contenuto in  $W$ . Ne segue che

$$\{(x, y) \in A \times B \mid f(x, y) = f_0\} = \{(G(f_0, y), y) \mid y \in B\}.$$

Se poniamo  $\varphi(y) = G(f_0, y)$ , ciò è esattamente quello che si voleva dimostrare.

## Esercizi

- 2.1) Sia  $U$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ , e sia  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  una applicazione di classe  $\mathbf{C}^k$ ,  $k \geq 1$ . Supponiamo che  $f$  abbia rango costante  $r$  su  $U$ . Si mostri che per ogni punto  $p \in U$  esistono un intorno  $V$  e una funzione  $\mathbf{C}^k$   $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dove  $A$  è un aperto di  $\mathbb{R}^{n-r}$ , iniettiva e di rango  $n - r$  ovunque, tale che

$$V \cap f^{-1}(f(p)) = \{\varphi(x) \mid x \in A\} .$$

- 2.2) Sia  $U$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ , e siano  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^h$  applicazioni di classe  $\mathbf{C}^k$ ,  $k \geq 1$ . Supponiamo che  $f$  abbia ovunque rango  $m$  e  $g$  abbia ovunque rango  $h$ .
- a) Supponiamo che, per ogni punto  $q \in U$ , le righe delle matrici  $J_q f$  e  $J_q g$  siano tutte indipendenti. Si mostri che, dato un punto  $p \in U$ , esistono un intorno  $V$  di  $p$  e una funzione  $\mathbf{C}^k$   $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dove  $A$  è un aperto di  $\mathbb{R}^{n-m-h}$ , iniettiva e di rango  $n - m - h$  ovunque, tale che

$$V \cap f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) = \{\varphi(x) \mid x \in A\} .$$

- b) La conclusione di a) vale anche senza l'ipotesi che le righe di  $J_q f$  e  $J_q g$  siano tutte indipendenti?

### 3. Superficie: teoria locale elementare

In questo capitolo, provvisoriamente, per superficie  $\mathbf{C}^k$  in  $\mathbb{R}^3$  (con  $k \geq 1$ ) intenderemo una applicazione  $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  di classe  $\mathbf{C}^k$ , dove  $U$  è un aperto di  $\mathbb{R}^2$ , tale che:

- a)  $\alpha$  è un omeomorfismo di  $U$  su  $\alpha(U)$ ,
- b)  $J\alpha$  ha rango 2 su tutto  $U$ .

Non saremo interessati a ottenere risultati ottimali di differenziabilità, e quindi supporremo, salvo avviso esplicito, che  $k$  sia grande “quanto basta”, cioè che si possano fare tutte le derivate che ci serviranno; in pratica ci comporteremo come se tutte le funzioni che intervengono fossero  $\mathbf{C}^\infty$ . Indicheremo le coordinate in  $U$  con  $u_1, u_2$ .

Sia dunque  $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie  $\mathbf{C}^k$ . Poniamo  $S = \alpha(U)$ . Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  un cammino tale che  $\gamma([a, b]) \subset S$ , cioè, come diremo spesso, un cammino *tracciato su*  $S$ . Poiché  $\alpha$  è un omeomorfismo da  $U$  a  $S$ , possiamo scrivere

$$\gamma(t) = \alpha(u_1(t), u_2(t)),$$

dove  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  sono funzioni continue. Osserviamo che, in realtà, se  $\gamma$  è  $\mathbf{C}^{k'}$ , con  $k' \leq k$ , allora  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  sono di classe  $\mathbf{C}^{k'}$ . In effetti dal teorema del rango (corollario (2.2)) segue che, fissato  $t_0$ , esistono intorno  $A$  di  $(u_1(t_0), u_2(t_0))$  e  $B$  di  $\gamma(t_0)$  e un diffeomorfismo  $\varphi$  di  $B$  su un aperto di  $\mathbb{R}^3$  tali che  $\varphi(\alpha(u_1, u_2)) = (u_1, u_2, 0)$ . Ma allora, se  $t$  è vicino a  $t_0$ ,  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  non sono altro che le prime due componenti di  $\varphi(\alpha(u_1(t), u_2(t))) = \varphi(\gamma(t))$ , che è  $\mathbf{C}^{k'}$ .

Sia ora  $p$  un punto di  $S$ . Un *vettore tangente a  $S$  nel punto  $p$*  è un vettore  $v \in \mathbb{R}^3$  della forma  $\gamma'(t_0)$  per qualche curva  $\gamma(t)$  tracciata su  $S$  e tale che  $\gamma(t_0) = p$ . In altre parole, un vettore tangente a  $S$  in  $p$  è il vettore “velocità” di una curva su  $S$  passante per  $p$ , calcolato nel punto  $p$ . Se  $\gamma(t) = \alpha(u_1(t), u_2(t))$  è come sopra, possiamo scrivere

$$\gamma'(t_0) = u_1'(t_0) \frac{\partial \alpha}{\partial u_1}(v_1, v_2) + u_2'(t_0) \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}(v_1, v_2),$$

dove si è posto  $v_i = u_i(t_0)$ . Dunque ogni vettore tangente a  $S$  in  $p$  è combinazione lineare di  $\partial \alpha / \partial u_1$  e  $\partial \alpha / \partial u_2$ , calcolati nel punto  $(v_1, v_2)$ . Viceversa ogni vettore

$$a \frac{\partial \alpha}{\partial u_1}(v_1, v_2) + b \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}(v_1, v_2)$$

è tangente ad  $S$  in  $p$ , in quanto è della forma  $\gamma'(0)$  per la curva tracciata su  $S$

$$\gamma(t) = \alpha(at + v_1, bt + v_2).$$

Poiché richiedere che  $J\alpha$  abbia rango 2 equivale a richiedere che  $\partial \alpha / \partial u_1$  e  $\partial \alpha / \partial u_2$  siano indipendenti, l'insieme dei vettori tangenti a  $S$  in  $p$  è dunque uno spazio vettoriale reale di dimensione 2, che viene di solito indicato con  $T_p S$ . Su questo spazio vettoriale vi

è un prodotto scalare naturale, che non è altro che la restrizione a  $T_p S$  del prodotto scalare euclideo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  su  $\mathbb{R}^3$ . Questo prodotto scalare va anche sotto il nome di *prima forma fondamentale* di  $S$ , e si scrive anche  $I(\cdot, \cdot)$ . È d'uso scrivere

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u_i}, \frac{\partial \alpha}{\partial u_j} \right\rangle.$$

In altri termini, la matrice della prima forma fondamentale rispetto alla base  $\partial \alpha / \partial u_1, \partial \alpha / \partial u_2$  è  $(g_{ij})$ . È chiaro dalla definizione che  $g_{ij}$  dipende in modo  $\mathbf{C}^{k-1}$  da  $u_1$  e  $u_2$ .

I vettori tangenti a  $S$  hanno una interpretazione come derivate direzionali. Sia infatti  $X$  un vettore tangente a  $S$  in un punto  $p = \alpha(v_1, v_2)$ , sia  $f$  una funzione definita su un intorno di  $p$  in  $S$ , e supponiamo che  $f \circ \alpha$  sia almeno  $\mathbf{C}^1$ . Definiamo la derivata di  $f$  rispetto ad  $X$ , che scriveremo  $X(f)$ , nel modo seguente. Scegliamo un cammino  $\gamma(t)$  su  $S$  tale che  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = X$  e poniamo

$$X(f) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0).$$

Se scriviamo  $\gamma(t) = \alpha(u_1(t), u_2(t))$  possiamo anche scrivere

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0) = u_1'(0) \frac{\partial(f \circ \alpha)}{\partial u_1} + u_2'(0) \frac{\partial(f \circ \alpha)}{\partial u_2}.$$

Ciò mostra che  $X(f)$  non dipende dalla scelta di  $\gamma$ , ma solo da  $u_1'(0)$  e da  $u_2'(0)$ , e cioè da  $X$ . Segue anche da questa formula che  $X(f)$  è lineare in  $X$  ed  $f$ . Infine l'operazione di derivazione rispetto a  $X$  soddisfa anche la regola di Leibniz

$$X(fg) = fX(g) + gX(f).$$

Vogliamo ora definire per  $S$  un analogo della nozione di curvatura per le curve in  $\mathbb{R}^2$ . Un *campo di vettori unitari normali a  $S$*  è il dato, per ogni  $p \in S$ , di un vettore unitario  $N_p$  che sia ortogonale a  $T_p S$  e che dipenda con continuità da  $p$ . Una scelta canonica per  $N$  è

$$(3.1) \quad N = \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial u_1} \times \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}}{\left\| \frac{\partial \alpha}{\partial u_1} \times \frac{\partial \alpha}{\partial u_2} \right\|}.$$

Per ogni  $p$  vi sono solo due scelte possibili per  $N_p$ . Poiché  $N$  deve dipendere con continuità da  $p$ , su ogni componente connessa di  $S$  le sole scelte possibili per  $N$  sono dunque quella data dalla (3.1) e il suo negativo. La formula (3.1) mostra che  $N$  è una funzione  $\mathbf{C}^{k-1}$  di  $u_1$  e  $u_2$ . Fissiamo un campo  $N$  di vettori unitari normali a  $S$  e poniamo, per ogni  $X \in T_p S$

$$LX = \nabla_X N,$$

dove  $\nabla_X N$  è il vettore che si ottiene derivando rispetto a  $X$  ogni componente di  $N$  separatamente. Notiamo che  $LX$  è una funzione lineare di  $X$  e che inoltre  $LX \in T_p S$ .

Infatti, derivando rispetto a  $X$  l'identità  $1 = \langle N, N \rangle$  e usando la regola di Leibniz si ottiene che

$$0 = X(\langle N, N \rangle) = \langle \nabla_X N, N \rangle + \langle N, \nabla_X N \rangle = 2 \langle LX, N \rangle ,$$

cioè che  $LX$  è ortogonale a  $N_p$  e quindi tangente a  $S$  in  $p$ . L'applicazione lineare

$$L : T_p S \longrightarrow T_p S$$

va sotto il nome di *applicazione di Weingarten*. Questa applicazione ha la importante proprietà di essere autoaggiunta rispetto alla prima forma fondamentale. Si ha cioè

$$\langle LX, Y \rangle = \langle X, LY \rangle$$

per ogni coppia di vettori  $X, Y \in T_p S$ . Affermare questo è equivalente ad affermare che la *seconda forma fondamentale* di  $S$ , definita come  $\langle LX, Y \rangle$  e scritta di norma  $\text{II}(X, Y)$ , è simmetrica. Per dimostrare quanto affermato basta perciò vedere che la matrice della seconda forma fondamentale rispetto alla base  $\partial\alpha/\partial u_1, \partial\alpha/\partial u_2$ , e cioè la matrice  $(b_{ij})$ , dove

$$b_{ij} = \left\langle L \frac{\partial\alpha}{\partial u_i}, \frac{\partial\alpha}{\partial u_j} \right\rangle ,$$

è simmetrica. Per la regola di Leibniz

$$\left\langle L \frac{\partial\alpha}{\partial u_i}, \frac{\partial\alpha}{\partial u_j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial N}{\partial u_i}, \frac{\partial\alpha}{\partial u_j} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial u_i} \left\langle N, \frac{\partial\alpha}{\partial u_j} \right\rangle - \left\langle N, \frac{\partial^2\alpha}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle .$$

Poiché  $N$  e  $\frac{\partial\alpha}{\partial u_j}$  sono ortogonali, se ne ricava che

$$b_{ij} = - \left\langle N, \frac{\partial^2\alpha}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle .$$

Questa espressione è chiaramente simmetrica in  $i$  e  $j$ .

Anche se questo può sembrare bizzarro, l'applicazione di Weingarten è un esatto analogo della curvatura di una curva in  $\mathbb{R}^2$ . Per vedere ciò definiamo una "applicazione di Weingarten" per un cammino regolare  $\gamma$  in  $\mathbb{R}^2$ . Sia  $N$  la normale unitaria di  $\gamma$ . Se  $p = \gamma(t_0)$ , un vettore  $X$  tangente a  $\gamma$  in  $p$  non è altro che la derivata di una riparametrizzazione  $\gamma(t(\eta))$  rispetto a  $\eta$ , calcolata in un punto  $\eta_0$  tale che  $t(\eta_0) = t_0$ , cioè

$$\frac{d}{d\eta}(\gamma(t(\eta)))|_{\eta=\eta_0} = \frac{dt}{d\eta}(\eta_0)\gamma'(t_0) .$$

Dunque un vettore tangente non è altro che un multiplo  $c\gamma'(t_0)$  della tangente unitaria a  $\gamma$  in  $p$ . Se  $X$  è un vettore tangente a  $\gamma$  in  $p$  si può definire  $LX = \nabla_X N$  esattamente come per le superficie in  $\mathbb{R}^3$ . Ma allora

$$LX = \nabla_X N = c \frac{dN}{dt} = c \frac{ds}{dt} \frac{dN}{ds} = -c \frac{ds}{dt} \kappa T = -\kappa X .$$

A meno del segno, dunque, la “applicazione di Weingarten” per una curva in  $\mathbb{R}^2$  non è altro che la moltiplicazione per la curvatura.

Poiché l’applicazione di Weingarten è autoaggiunta, vi è una base ortonormale  $X, Y$  di  $T_p S$  costituita da autovettori di  $L$ , tale cioè che

$$LX = hX, \quad LY = kY,$$

dove  $h$  e  $k$  sono gli autovalori di  $L$ . Nel caso in cui  $h \neq k$  i vettori  $X$  e  $Y$  sono univocamente determinati a meno del segno. Tradizionalmente,  $h$  e  $k$  sono chiamati *curvature principali* di  $S$  nel punto  $p$ , e  $X$  e  $Y$  *direzioni principali di curvatura*. La *curvatura Gaussiana*  $K(p)$  e la *curvatura media*  $H(p)$  di  $S$  nel punto  $p$  sono definite, rispettivamente, come

$$K(p) = hk = \det(L)$$

e

$$H(p) = h + k = \text{Tr}(L),$$

dove  $\text{Tr}(L)$  è la traccia di  $L$ . Se sono note la prima e la seconda forma fondamentale di  $S$  è immediato calcolare curvatura Gaussiana e media. Infatti, se  $(a_{ij})$  è la matrice di  $L$  rispetto alla base  $\partial\alpha/\partial u_1, \partial\alpha/\partial u_2$  di  $T_p S$ , si ha che

$$b_{ij} = \left\langle L \frac{\partial\alpha}{\partial u_i}, \frac{\partial\alpha}{\partial u_j} \right\rangle = \left\langle \sum_l a_{il} \frac{\partial\alpha}{\partial u_l}, \frac{\partial\alpha}{\partial u_j} \right\rangle = \sum_l a_{il} g_{lj},$$

cioè che

$$(a_{ij}) = (b_{ij})(g_{ij})^{-1}.$$

È d’uso denotare l’inversa di  $(g_{ij})$  con  $(g^{ij})$ . Dunque

$$K = \frac{\det(b_{ij})}{\det(g_{ij})} = \det(b_{ij}) \det(g^{ij}), \quad H = \text{Tr}((b_{ij})(g^{ij})).$$

È chiaro dalla definizione che il segno delle curvature principali dipende dalla scelta della normale unitaria  $N$ , e che lo stesso avviene per la curvatura media. La curvatura Gaussiana invece non dipende dalla scelta di  $N$ . Essa è nulla se una delle curvature principali è nulla, positiva se le curvature principali hanno lo stesso segno, negativa se hanno segni opposti. Un punto  $p$  di  $S$  si dice *ellittico*, *iperbolico* o *parabolico* se  $K(p)$  è, rispettivamente, positiva, negativa o nulla. Un punto  $p \in S$  si dice *ombelicale*, o un *ombelico*, se le due curvature principali di  $S$  in  $p$  coincidono. Un vettore  $X$  tangente a  $S$  in  $p$  si dice *asintotico* se  $\langle LX, X \rangle = 0$ . Una curva tracciata su  $S$  si dice una *linea asintotica* (rispettivamente, una *linea di curvatura*) se i suoi vettori tangenti sono ovunque vettori asintotici (risp., direzioni principali di curvatura).

ESEMPIO (3.2). Consideriamo una superficie della forma

$$\alpha(u_1, u_2) = (u_1, u_2, f(u_1, u_2)).$$



Si ha che

$$\begin{aligned}\frac{\partial \alpha}{\partial u_1} &= \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u_1}\right), \\ \frac{\partial \alpha}{\partial u_2} &= \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial u_2}\right), \\ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u_i \partial u_j} &= \left(0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}\right), \\ N &= \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial u_1}, -\frac{\partial f}{\partial u_2}, 1\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial u_2}\right)^2}}.\end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}g_{ij} &= \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u_i}, \frac{\partial \alpha}{\partial u_j} \right\rangle = \delta_{ij} + \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial f}{\partial u_j}, \\ b_{ij} &= - \left\langle N, \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle = - \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial u_2}\right)^2}}, \\ \det(g_{ij}) &= 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial u_2}\right)^2, \\ \det(b_{ij}) &= \frac{\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}\right)}{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial u_2}\right)^2}.\end{aligned}$$

Ne segue che

$$K = \frac{\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}\right)}{\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial u_2}\right)^2\right)^2}.$$

Esaminiamo ora cosa accade nel punto  $p = (0, 0, 0)$  nel caso particolare in cui  $f(0, 0) = 0$  e, ciò che è più importante,  $\frac{\partial f}{\partial u_1}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial u_2}(0, 0) = 0$ . In questo caso possiamo scrivere

$$f(u_1, u_2) = Q(u_1, u_2) + R(u_1, u_2),$$

dove

$$Q(u_1, u_2) = \sum q_{ij} u_i u_j$$

è un polinomio omogeneo di secondo grado e  $R(u_1, u_2)$  ha uno zero di ordine superiore al secondo nell'origine. Si può supporre, senza modificare  $Q$ , che la matrice  $(q_{ij})$  sia simmetrica. Le formule che abbiamo ricavato nel caso di una  $f$  generale ci dicono che, nel punto  $p$ ,

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \quad b_{ij} = -2q_{ij}.$$

In un certo senso dunque, a parte un ininfluyente fattore  $-2$ , la seconda forma fondamentale “è” il polinomio di secondo grado che meglio approssima  $f$ . O ancora, data la matrice  $(b_{ij})$  della seconda forma fondamentale, a meno di termini di ordine superiore al secondo, vicino all’origine la nostra superficie è il paraboloido di equazione

$$x_3 = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1,2} b_{ij} x_i x_j .$$

La curvatura della superficie risulta positiva se la matrice  $(b_{ij})$  è definita (positiva o negativa), cioè se abbiamo a che fare con un paraboloido ellittico (figura 1), negativa se  $(b_{ij})$  è indefinita ma non singolare, cioè se abbiamo a che fare con un paraboloido iperbolico (figura 2), nulla se  $(b_{ij})$  è singolare, cioè se abbiamo a che fare con un piano o con un cilindro parabolico (figura 3).

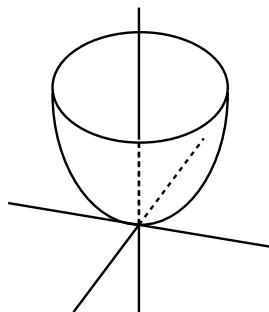


fig. 1

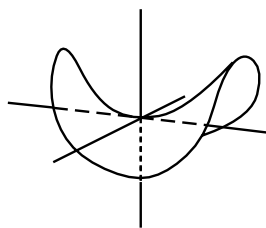


fig. 2

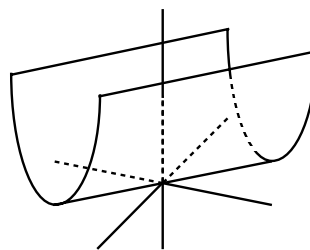


fig. 3

Sia  $\alpha(u_1, u_2)$ ,  $(u_1, u_2) \in U$ , una superficie in  $\mathbb{R}^3$ , e sia  $\gamma$  una cammino regolare  $\mathbf{C}^1$  tracciato su  $S = \alpha(U)$ . Indichiamo con  $s$  il parametro naturale per  $\gamma$ , con  $T$  la tangente unitaria a  $\gamma$ , e con  $N$  una normale unitaria per  $S$  (attenzione:  $N$  non è la normale principale di  $\gamma$ !). Per ogni punto  $p = \gamma(t)$  indichiamo con  $G_p$  il vettore unitario in  $T_p S$  ortogonale a  $T$  e tale che  $(T, G)$  sia una base di  $T_p S$  orientata concordemente a  $(\partial\alpha/\partial u_1, \partial\alpha/\partial u_2)$ . La *curvatura normale* di  $\gamma$  è

$$\kappa_n = \left\langle \frac{dT}{ds}, N \right\rangle ,$$

mentre la *curvatura geodetica* di  $\gamma$  è

$$\kappa_g = \left\langle \frac{dT}{ds}, G \right\rangle .$$

Osserviamo che

$$\frac{dT}{ds} = \kappa_n N + \kappa_g G .$$

Derivando rispetto a  $s$  l'identità  $\langle T, N \rangle = 0$  si ottiene

$$0 = \left\langle \frac{dT}{ds}, N \right\rangle + \langle T, \nabla_T N \rangle .$$

Dunque

$$\kappa_n = -\langle T, \nabla_T N \rangle = -\langle LT, T \rangle = -\text{II}(T, T).$$

In particolare se ne ricava che, se in un punto  $p = \gamma(t)$  il vettore  $T$  è una direzione principale di curvatura e  $k$  è la curvatura principale corrispondente, allora nel punto  $p$  la curvatura normale di  $\gamma$  è  $-k$ .

Diremo che  $\gamma$  è una *geodetica* se la sua curvatura geodetica è identicamente nulla e la norma di  $\gamma'$  è costante.

ESEMPIO (3.3). Una superficie di rotazione, intuitivamente, è una superficie spazzata da una curva giacente in un piano quando questo piano viene fatto ruotare rigidamente intorno a un asse in esso contenuto. Dunque una superficie di rotazione nello spazio euclideo con coordinate  $x, y, z$  avente come asse di rotazione l'asse delle  $z$  è della forma

$$\alpha(u, \vartheta) = (a(u) \cos \vartheta, a(u) \sin \vartheta, b(u)).$$

Questa superficie è ottenuta facendo ruotare intorno all'asse  $z$  la curva  $\gamma(t) = (0, a(t), b(t))$  contenuta nel piano  $yz$ . Al solito, indichiamo con  $S$  l'immagine di  $\alpha$ . Una scelta di normale unitaria a  $S$  è

$$N = \frac{(b' \cos \vartheta, b' \sin \vartheta, -a')}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}.$$

Per ragioni evidenti chiameremo *meridiani* le curve su  $S$  della forma  $\{\vartheta = \text{costante}\}$  e *paralleli* quelle della forma  $\{u = \text{costante}\}$ . Osserviamo che i meridiani sono linee di curvatura. Infatti il meridiano  $\{\vartheta = \vartheta_0\}$  è tagliato su  $S$  dal piano  $\Pi$  di equazione  $\sin \vartheta_0 x - \cos \vartheta_0 y = 0$ . È chiaro che  $N_p$  giace in  $\Pi$  per ogni  $p$  su  $\{\vartheta = \vartheta_0\}$ . Dunque la derivata di  $N$  rispetto a  $u$  giace in  $\Pi$ , ed è quindi proporzionale a  $\partial\alpha/\partial u$ . La curvatura principale corrispondente a  $\partial\alpha/\partial u$  non è altro che la curvatura della curva piana  $\gamma$  (attenzione ai segni!) e vale perciò

$$h = \frac{a'b'' - a''b'}{(a'^2 + b'^2)^{3/2}}.$$

I paralleli su  $S$  sono anch'essi linee di curvatura perchè sono ovunque ortogonali ai meridiani. Per calcolare la corrispondente curvatura principale basta calcolarne la curvatura normale. La tangente unitaria a un parallelo è  $T = (-\sin \vartheta, \cos \vartheta, 0)$ , e la sua derivata  $dT/ds$  rispetto al parametro naturale vale

$$-\frac{1}{a}(\cos \vartheta, \sin \vartheta, 0).$$

Quindi la curvatura principale corrispondente a  $T$  è

$$k = -\kappa_n = -\left\langle \frac{dT}{ds}, N \right\rangle = \frac{b'}{a\sqrt{a'^2 + b'^2}}.$$

In conclusione, la curvatura Gaussiana della nostra superficie vale

$$K = hk = \frac{a'b'b'' - a''b'^2}{a(a'^2 + b'^2)^2},$$

mentre la curvatura media è

$$H = h + k = \frac{b'^3 + b'a'^2 + aa'b'' - aa''b'}{a(a'^2 + b'^2)^{3/2}}.$$

Nel caso particolare (che è quello che più spesso si presenta) in cui  $a(u) = u$ , la formula per la curvatura Gaussiana di  $S$  si riduce a

$$K = \frac{b'b''}{u(1 + b'^2)^2}.$$

## Esercizi

- 3.1) Mostrare che i paralleli di una superficie di rotazione in  $\mathbb{R}^3$  hanno curvatura geodetica costante.
- 3.2) Si considerino le superficie date in forma parametrica da:

$$x = a \sin u \cos v, \quad y = b \sin u \sin v, \quad z = c \cos u.$$

(ellissoide)

$$x = a \sinh u \cos v, \quad y = b \sinh u \sin v, \quad z = c \cosh u.$$

(iperboloide a due falde)

$$x = a \sinh u \sinh v, \quad y = b \sinh u \cosh v, \quad z = c \sinh u.$$

(cono)

$$x = au \cos v, \quad y = bu \sin v, \quad z = u^2.$$

(paraboloide ellittico)

$$x = au \cosh v, \quad y = bu \sinh v, \quad z = u^2.$$

(paraboloide iperbolico)

Trovare l'equazione di queste superficie sotto la forma  $F(x, y, z) = 0$  e dire quali curve sono le curve  $u = \text{costante}$  e  $v = \text{costante}$ .

- 3.3) Si consideri una superficie della forma  $z = f(x, y)$ . Si trovino prima e seconda forma fondamentale e l'equazione delle linee di curvatura.
- 3.4) Si mostri che le linee asintotiche sulla superficie

$$z = \frac{x^4}{a^4} - \frac{y^4}{b^4}$$

sono le curve lungo cui la superficie incontra le due famiglie di cilindri

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \text{costante} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \text{costante}.$$

3.5) Si calcolino curvatura Gaussiana e curvatura media delle superficie in  $\mathbb{R}^3$  di equazione

$$\begin{aligned} e^z &= \cos(x)/\cos(y) \ , \\ z &= e^{-x^2-y^2} \ . \end{aligned}$$

3.6) Due superficie si intersecano lungo una curva  $\gamma$  con angolo costante. Si mostri che, se  $\gamma$  è una linea di curvatura su una delle due superficie, lo è anche sull'altra.

3.7) Si calcolino la curvatura Gaussiana e media e le curvatures principali delle superficie in  $\mathbb{R}^3$  di equazione:

$$\begin{aligned} z &= \cos x + \cos y \ , \\ z &= \sin x + \cos y \ , \\ z &= \sin x + \sin y \ , \\ y \cosh(z) &= x \sinh(z) \ . \end{aligned}$$

3.8) Calcolare la curvatura Gaussiana e media della superficie generata dalle normali principali all'elica  $\gamma(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$ .

3.9) Si calcolino la seconda forma fondamentale, le curvatures principali, Gaussiana e media della superficie con rappresentazione parametrica

$$x = a(u + 2v), \quad y = b(2u - v), \quad z = uv,$$

dove  $a$  e  $b$  sono costanti non nulle.

3.10) Calcolare la curvatura Gaussiana della superficie in  $\mathbb{R}^3$  di equazione

$$x^2 + y^2 - a^2 z^2 = 1.$$

3.11) In  $\mathbb{R}^3$  è data la superficie  $S$  con la rappresentazione parametrica

$$x(t, \vartheta) = (e^t \cos(\vartheta), e^t \sin(\vartheta), t) \ .$$

Si calcolino prima e seconda forma fondamentale di  $S$ , linee di curvatura su  $S$ , curvatures principali e curvatura Gaussiana. Si determinino i due sistemi di curve asintotiche su  $S$ .

3.12) Sia  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0, x^2 + y^2 = z^2\}$ . Mostrare che  $S$  è una superficie regolare e calcolare in ogni punto  $p \in S$  la prima e seconda forma fondamentale, l'operatore di Weingarten, le curvatures principali, la curvatura media e quella Gaussiana, le

direzioni principali e asintotiche, le linee di curvatura e le linee asintotiche. Mostrare che ogni  $p \in S$  è parabolico. Infine, se  $C = \pi \cap S$ , dove  $\pi$  è il piano di equazione  $y + z = 2$ , calcolare la curvatura normale nei punti di  $C$ .

3.13) Mostrare che la curvatura geodetica delle curve  $u = \text{costante}$  sul paraboloido

$$x = u \cos \theta, \quad y = u \sin \theta, \quad z = \frac{1}{2}au^2$$

è

$$\frac{1}{u(1+u^2)^{1/2}}.$$

3.14) Due superficie in  $\mathbb{R}^3$  sono tangenti lungo una curva  $\gamma$ . Mostrare che, se  $\gamma$  è una geodetica su una delle due superficie, lo è anche sull'altra.

3.15) Esistono superfici di rotazione con curvatura Gaussiana costante e curvatura media nulla ?

3.16) Sia  $X$  una superficie in  $\mathbb{R}^3$ .

a) Si mostri che, se  $X$  contiene un (pezzo di) retta, questa è una linea asintotica.

b)  $X$  si dice rigata se per ogni suo punto passa un (pezzo di) retta. Si mostri che in questo caso  $X$  ha curvatura gaussiana  $\leq 0$ .

3.17) Sia  $S$  una superficie in  $\mathbb{R}^3$ . Si supponga che vi siano tre rette distinte contenute in  $S$  e passanti per uno stesso punto  $p$  di  $S$ . Si mostri che la seconda forma fondamentale di  $S$  in  $p$  è nulla.

3.18) Sia  $S$  una superficie in  $\mathbb{R}^3$ . Mostrare che per ogni punto di  $S$  passano esattamente due linee asintotiche distinte se e solo se la curvatura Gaussiana di  $S$  è ovunque strettamente negativa.

3.19) Sia  $\gamma$  una curva di curvatura non nulla su una superficie  $S$ . Si mostri che, se  $\gamma$  è una linea asintotica, la normale principale a  $\gamma$  è ovunque tangente a  $S$ .

3.20) Si mostri che le curvature principali della superficie di equazione

$$y \cos(z/a) = x \sin(z/a)$$

sono uguali a  $\pm a/(x^2 + y^2 + a^2)$ .

3.21) Sia  $S$  la superficie generata dalle rette normali a una curva  $\gamma(s)$  in  $\mathbb{R}^3$  con parametro naturale  $s$ . Si scriva una rappresentazione parametrica di  $S$ , se ne calcolino prima e seconda forma fondamentale, curvatura Gaussiana e media. Si determinino su  $S$  le curve asintotiche.

3.22) Trovare i punti ombelicali sull'ellissoide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

- 3.23) Sia  $\gamma(t)$  una curva differenziabile in  $\mathbb{R}^3$  e sia  $S$  la superficie generata da tutte le binormali a  $\gamma$ . Si calcolino la curvatura Gaussiana e la curvatura media di  $S$ .
- 3.24) Sia  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie e sia  $\gamma(s)$  una linea di curvatura di  $S$ . Se  $L$  è l'applicazione di Weingarten possiamo scrivere

$$L\dot{\gamma}(s) = \lambda(s)\dot{\gamma}(s),$$

dove  $\lambda(s)$  è una funzione. Sia  $T$  la superficie di equazione parametrica

$$\alpha(s, v) = \gamma(s) + vN(s),$$

dove  $N(s)$  è il vettore unitario normale a  $S$  in  $\gamma(s)$ . Si mostri che  $T$  ha curvatura Gaussiana identicamente nulla e curvatura media

$$H = \frac{\kappa_g}{1 + v\lambda},$$

dove  $\kappa_g$  è la curvatura geodetica di  $\gamma$  come curva in  $S$ . Si mostri inoltre che, se  $\gamma$  è una geodetica su  $T$  con curvatura non nulla, allora  $\gamma$  è una curva piana.

- 3.25) Mostrare che la superficie di rotazione

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = a \log(u + \sqrt{u^2 - a^2})$$

ha curvatura media nulla. Mostrare anche che è la sola superficie di rotazione di curvatura media nulla.

- 3.26) Sia  $X$  una superficie in  $\mathbb{R}^3$ , e sia  $N$  una normale principale lungo  $X$ . Sia  $\gamma(t)$  una curva tracciata su  $X$ , e si consideri la curva  $\eta$  in  $\mathbb{R}^3$  data da  $\eta(t) = N_{\gamma(t)}$ . Si mostri che  $\eta'(t)$  è proporzionale a  $\gamma'(t)$  per ogni  $t$  se e solo se  $\gamma$  è una linea di curvatura su  $X$ .
- 3.27) Sia  $\gamma(t)$  un arco di curva su una superficie  $M$  in  $\mathbb{R}^3$ . Si supponga che  $\gamma$  sia una linea di curvatura e sia  $k$  la curvatura principale corrispondente.
- Si mostri che, se  $k \equiv 0$ ,  $\gamma$  è una curva piana.
  - Si mostri che, se  $k$  è costante e non nulla, tutte le rette normali a  $M$  passanti per punti di  $\gamma$  passano per uno stesso punto  $p$  e  $\gamma$  giace su una superficie sferica di centro  $p$  tangente a  $M$  lungo  $\gamma$ .
- 3.28) Siano  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  curve su una superficie  $S$  passanti per un punto  $p$ . Si supponga che le tangenti a queste curve in  $p$  formino tra loro angoli di  $2\pi/n$ . Si indichi con  $\kappa_i$  la curvatura normale di  $\gamma_i$  in  $p$  e con  $H$  la curvatura media di  $S$ . Si mostri che, se  $n > 2$ , allora

$$\kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_n = \frac{-n}{2}H(p).$$

- 3.29) Sia  $S$  la superficie in  $\mathbb{R}^3$  di rappresentazione parametrica

$$x(u, v) = \left( u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, (u^2 - v^2) \right).$$

Si calcolino:

- a) Prima e seconda forma fondamentale di  $S$ .
- b) Linee di curvatura e curvatures principali di  $S$ .
- c) Curvatura Gaussiana di  $S$ .
- d) Curve asintotiche di  $S$ .

3.30) Sia  $S$  la superficie in  $\mathbb{R}^3$  data dalla rappresentazione parametrica:

$$x(u, v) = \left( u(3v^2 - u^2 - \frac{1}{3}), v(3u^2 - v^2 - \frac{1}{3}), 2uv \right) .$$

Si calcolino prima e seconda forma fondamentale, curvatura media e Gaussiana di  $S$ . Si determinino le linee di curvatura su  $S$ , le curve asintotiche, e la natura del punto  $(u, v) = (0, 0)$ .

3.31) Calcolare prima e seconda forma fondamentale, curvatura Gaussiana e media della superficie di rotazione:

$$x = \cosh u \cos v, \quad y = \cosh u \sin v, \quad z = u.$$

3.32) Sia  $\nu$  una linea asintotica su una superficie  $X \subset \mathbb{R}^3$  di curvatura Gaussiana  $K$ . Si mostri che la torsione di  $\nu$  è uguale a  $\pm\sqrt{-K}$ .

3.33) Sia data la superficie  $S$  in  $\mathbb{R}^3$  con rappresentazione parametrica

$$x(t, \vartheta) = (t \cos(\vartheta), t \sin(\vartheta), \exp(-t^2)) .$$

- a) Si calcolino direzioni principali e curvatures principali di  $S$ .
- b) Si calcoli la curvatura Gaussiana di  $S$ .
- c) Si determini quali punti di  $S$  sono ellittici, quali iperbolici, quali parabolici.
- d) Le curve  $\vartheta = \text{costante}$  sono geodetiche?

3.34) Sia  $X$  la superficie di rotazione in  $\mathbb{R}^3$  di rappresentazione parametrica

$$(\alpha(u) \cos(v), \alpha(u) \sin(v), \beta(u)),$$

e si supponga che  $\alpha'^2 + \beta'^2 = 1$ .

- a) Si mostri che  $\alpha' \alpha'' = -\beta' \beta''$  e che la curvatura Gaussiana di  $X$  è  $K = -\alpha''/\alpha$ .
- b) Si trovino i casi in cui  $X$  ha curvatura costante positiva.
- c) Si mostri che vi sono superfici (non compatte) in  $\mathbb{R}^3$  di curvatura costante positiva che non sono localmente congruenti a sfere.

3.35) Sia  $\gamma(t)$  una geodetica parametrizzata dalla lunghezza d'arco su una superficie  $S$  in  $\mathbb{R}^3$ .

- a) Supponendo che la curvatura di  $\gamma$  non sia mai nulla si mostri che  $\gamma'(t_0)$  è una direzione principale di curvatura per  $S$  in  $\gamma(t_0)$  se e solo se la torsione di  $\gamma(t)$  si annulla per  $t = t_0$ .



- b) Si può dedurre da questo che una geodetica che sia una linea di curvatura è una curva piana ?

3.36) Mostrare che, sull'ellissoide  $M$  di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

le curve ottenute intersecando  $M$  con il piano  $x = 0$ , con il piano  $y = 0$  o con il piano  $z = 0$  sono geodetiche.

3.37) Si considerino le seguenti proprietà di una curva  $\gamma$  su una superficie in  $\mathbb{R}^3$ :

- a)  $\gamma$  è asintotica.
- b)  $\gamma$  è una retta.
- c)  $\gamma$  è una geodetica. Si mostri che a) e c) implicano b). È vero o no che a) e b) implicano c) ? E che b) e c) implicano a) ?

## 4. Varietà differenziabili

Siano  $X, Y$  e  $Z$  tre insiemi, sia  $A$  un sottinsieme di  $Y$ , e siano  $f : A \rightarrow Z$ ,  $g : X \rightarrow Y$  due applicazioni. Nel seguito sarà conveniente dare un senso alla notazione  $f \circ g$  anche quando  $g(X) \not\subset A$  ponendo

$$f \circ g = f \circ g|_{g^{-1}(A)}.$$

In altri termini  $f \circ g$  è l'applicazione  $g^{-1}(A) \rightarrow Z$  definita da  $f \circ g(x) = f(g(x))$ .

Sia ora  $X$  uno spazio topologico. Una *carta locale di dimensione  $n$*  su  $X$  è una coppia  $(U, \Phi)$ , dove  $U$  è un aperto di  $X$  e  $\Phi$  è un omeomorfismo da  $U$  su un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Diremo che  $U$  è un *aperto coordinato*, che  $\Phi$  è un *sistema di coordinate locali su  $U$* , e chiameremo le componenti di  $\Phi$  *coordinate locali*. Un insieme  $\mathcal{A}$  di carte locali che ricopra tutto  $X$  si dice un *atlante*. Un atlante  $\mathcal{A}$  si dice *di classe  $\mathbf{C}^k$*  se, per ogni coppia  $(U, \Phi)$ ,  $(V, \Psi)$  di carte di  $\mathcal{A}$ , l'applicazione

$$\Psi \circ \Phi^{-1} : \Phi(U \cap V) \rightarrow \Psi(U \cap V)$$

è di classe  $\mathbf{C}^k$ . Poiché i ruoli di  $(U, \Phi)$  e  $(V, \Psi)$  possono essere scambiati,  $\Psi \circ \Phi^{-1}$  è un diffeomorfismo  $\mathbf{C}^k$ . Chiameremo le applicazioni della forma  $\Psi \circ \Phi^{-1}$  *cambiamenti di coordinate*. Diremo che un atlante di classe  $\mathbf{C}^k$  è massimale (come atlante  $\mathbf{C}^k$ ) se non è propriamente contenuto in alcun altro atlante  $\mathbf{C}^k$ . Una *varietà di classe  $\mathbf{C}^k$*  è il dato di uno spazio topologico  $X$  e di un atlante massimale  $\mathcal{A}$  di classe  $\mathbf{C}^k$  su  $X$ ; se  $x$  è un punto di  $X$  definiremo *dimensione* della varietà nel punto  $x$  la dimensione di una carta  $(U, \Phi) \in \mathcal{A}$  tale che  $U$  contenga  $x$ . Notiamo che questa è una buona definizione, cioè che l'intero così definito non dipende dalla scelta di  $(U, \Phi)$ . Per  $k = 0$  questo è un risultato non immediato di topologia algebrica, che va sotto il nome di "Teorema di invarianza del dominio". Per  $k > 0$  la dimostrazione è semplice. Sia  $(V, \Psi)$  un'altra carta tale che  $x \in V$ , e siano  $n$  e  $m$  le dimensioni di  $(U, \Phi)$  e  $(V, \Psi)$ . Le applicazioni differenziabili  $\Phi \circ \Psi^{-1}$  e  $\Psi \circ \Phi^{-1}$  sono una inversa dell'altra. Dunque la matrice Jacobiana di  $\Phi \circ \Psi^{-1}$  in  $\Psi(x)$  è l'inversa della matrice Jacobiana di  $\Psi \circ \Phi^{-1}$  in  $\Phi(x)$ , ed è perciò invertibile, quindi quadrata. Dato che si tratta di una matrice  $n \times m$  la tesi segue. Se  $x$  è un punto di una varietà  $M$ , indicheremo con  $\dim_x(M)$  la dimensione di  $M$  nel punto  $x$ ; se  $M$  ha in ogni suo punto la stessa dimensione, questa verrà chiamata *dimensione di  $M$*  e la si indicherà con  $\dim(M)$ . Osserviamo che  $\dim_x(M)$  è una funzione localmente costante: dunque una varietà connessa ha una dimensione. Le varietà di classe  $\mathbf{C}^0$  non sono altro che le varietà topologiche. Le varietà di classe  $\mathbf{C}^k$  con  $k \geq 1$  si chiamano *varietà differenziabili di classe  $\mathbf{C}^k$* .

LEMMA (4.1). *Sia  $\mathcal{A}$  un atlante  $\mathbf{C}^k$  sullo spazio topologico  $X$ . Allora  $\mathcal{A}$  è contenuto in un unico atlante massimale  $\mathbf{C}^k$ .*

Il lemma dice, in particolare, che un atlante  $\mathbf{C}^k$  su uno spazio topologico  $X$  individua su  $X$  una struttura di varietà  $\mathbf{C}^k$ . Vi sono però più atlanti che determinano la stessa struttura di varietà  $\mathbf{C}^k$ .

Dimostriamo il lemma. Sia  $\mathcal{B}$  l'insieme di tutte le coppie  $(V, \Psi)$  tali che  $V$  sia un aperto di  $X$ , che  $\Psi$  sia un omeomorfismo da  $V$  a un aperto di  $\mathbb{R}^n$  per qualche  $n$  e che  $\Psi \circ \Phi^{-1}$  sia un diffeomorfismo  $\mathbf{C}^k$  per ogni carta  $(U, \Phi)$  in  $\mathcal{A}$ . È ovvio che  $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$  e che  $\mathcal{B}$ , se è un atlante  $\mathbf{C}^k$ , è massimale. È anche chiaro che, se  $\mathcal{C}$  è un atlante  $\mathbf{C}^k$  contenente  $\mathcal{A}$ , allora  $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ ; quindi, se  $\mathcal{B}$  è un atlante  $\mathbf{C}^k$ , è l'unico atlante massimale contenente  $\mathcal{A}$ . Resta dunque da dimostrare che, se  $(V, \Psi)$  e  $(W, \Theta)$  sono carte di  $\mathcal{B}$ , allora  $\Psi \circ \Theta^{-1}$  è di classe  $\mathbf{C}^k$ . Sia  $x$  un punto di  $V \cap W$ , e mostriamo che  $\Psi \circ \Theta^{-1}$  è  $\mathbf{C}^k$  su un intorno di  $\Theta(x)$ . Scegliamo una carta  $(U, \Phi)$  in  $\mathcal{A}$  tale che  $x \in U$ . Allora

$$\Psi \circ \Theta^{-1} = (\Psi \circ \Phi^{-1}) \circ (\Phi \circ \Theta^{-1})$$

sull'aperto  $\Theta(U \cap V \cap W)$ , che contiene  $\Theta(x)$ . Su questo aperto  $\Psi \circ \Theta^{-1}$  è  $\mathbf{C}^k$  perchè è composizione delle due applicazioni  $\Psi \circ \Phi^{-1}$  e  $\Phi \circ \Theta^{-1}$ , che sono  $\mathbf{C}^k$  per come è stato costruito  $\mathcal{B}$ . Il lemma è dimostrato.

Gli esempi più semplici di varietà differenziabili (di classe  $\mathbf{C}^k$ , per ogni  $k \leq \infty$ ) sono gli spazi  $\mathbb{R}^n$ , muniti dell'atlante consistente della sola applicazione identica  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  (o, se vogliamo essere più pedanti, del corrispondente atlante massimale  $\mathbf{C}^k$ ). Un altro semplice esempio è dato dalle sfere.

ESEMPIO (4.2) (LE SFERE). Poniamo una struttura di varietà differenziabile  $\mathbf{C}^\infty$  sulla sfera  $S^n$ . Siano  $x, y_1, \dots, y_n$  le coordinate standard in  $\mathbb{R}^{n+1}$ ; scriveremo  $y$  al posto di  $y_1, \dots, y_n$ . La sfera  $S^n$  è il luogo in  $\mathbb{R}^{n+1}$  di equazione

$$x^2 + \|y\|^2 = 1.$$

Indicheremo con  $p$  il "polo nord"  $(1, 0)$  di  $S^n$ , e con  $q$  il "polo sud"  $(-1, 0)$ . Indicheremo con  $\pi_p$  la proiezione stereografica di  $U_p = S^n \setminus p$  da  $p$  sull'iperpiano  $x = 0$ , che identificheremo nel modo naturale a  $\mathbb{R}^n$ . In altre parole, se  $(x, y)$  è un punto di  $U_p$ , allora  $(0, \pi_p(x, y))$  è il punto di intersezione dell'iperpiano  $x = 0$  con la retta per  $p$  e  $(x, y)$ . Dato che questa retta ha equazione parametrica

$$(tx + 1 - t, ty), \quad t \in \mathbb{R},$$

il punto  $(0, \pi_p(x, y))$  corrisponde al valore  $1/(1-x)$  del parametro  $t$ , e perciò

$$\pi_p(x, y) = \frac{y}{1-x}.$$

Analogamente, se poniamo  $U_q = S^n \setminus q$  e indichiamo con  $\pi_q : U_q \rightarrow \mathbb{R}^n$  la proiezione stereografica da  $q$ , abbiamo che

$$\pi_q(x, y) = \frac{y}{1+x}.$$

Vogliamo mostrare che  $(U_q, \pi_q), (U_p, \pi_p)$  costituiscono un atlante  $\mathbf{C}^\infty$  su  $S^n$ . Per farlo notiamo che l'inversa di  $\pi_p$  è

$$\pi_p^{-1}(\eta) = \left( \frac{\|\eta\|^2 - 1}{\|\eta\|^2 + 1}, \frac{2\eta}{\|\eta\|^2 + 1} \right).$$

In particolare  $\pi_p$  è un omeomorfismo, e lo stesso vale ovviamente per  $\pi_q$ . Inoltre

$$\pi_q \circ \pi_p^{-1}(\eta) = \frac{\eta}{\|\eta\|^2}.$$

Quindi  $\pi_q \circ \pi_p^{-1}$  è un diffeomorfismo  $\mathbf{C}^\infty$  (e coincide con il proprio inverso).

Sia  $A$  un aperto di una varietà differenziabile  $X$  di classe  $\mathbf{C}^k$ ; allora anche  $A$  ha una struttura naturale di varietà  $\mathbf{C}^k$ . Se  $\mathcal{A}$  è un atlante per  $X$ , un atlante per  $A$  è  $\{(U \cap A, \Phi|_{U \cap A})\}_{(U, \Phi) \in \mathcal{A}}$ . Il lettore potrà facilmente verificare che la struttura differenziabile su  $A$  così definita non dipende dal particolare atlante scelto per  $X$ . Se  $X$  ha una dimensione,  $A$  ha la stessa dimensione di  $X$ . Quanto abbiamo detto si applica in particolare alle componenti connesse di  $X$ . In effetti, se  $Y$  è una componente connessa di  $X$ , allora è un aperto di  $X$ . Per vederlo, basta osservare che ogni varietà è localmente connessa, cioè che ogni suo punto ha un sistema fondamentale di intorni connessi; ma se  $x$  è un punto di  $Y$ , un suo intorno connesso deve essere contenuto in  $Y$ . Questo mostra che  $Y$  è aperta. Ogni componente connessa di una varietà di classe  $\mathbf{C}^k$  ha quindi una struttura naturale di varietà  $\mathbf{C}^k$ .

Siano ora  $M$  e  $N$  varietà differenziabili  $\mathbf{C}^k$ , e sia  $h$  un intero minore o uguale a  $k$ . Una applicazione  $f : M \rightarrow N$  si dice di classe  $\mathbf{C}^h$  in un punto  $x \in M$  se esistono carte  $(U, \Phi)$  su  $M$  e  $(V, \Psi)$  su  $N$  tali che  $x \in U$ ,  $f(x) \in V$ , e che la applicazione composta  $\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}$  sia  $\mathbf{C}^h$ . In particolare, una applicazione che sia  $\mathbf{C}^h$  in  $x$  è continua su un intorno di  $x$ . Diremo che  $f$  è  $\mathbf{C}^h$  se è tale in ogni punto di  $M$ ; per quanto abbiamo appena osservato, in questo caso  $f$  è continua. È importante notare che, se  $f$  è  $\mathbf{C}^h$ , allora  $\Xi \circ f \circ \Theta^{-1}$  è  $\mathbf{C}^h$  per ogni carta  $(A, \Theta)$  su  $M$  e ogni carta  $(B, \Xi)$  su  $N$ . Infatti, se  $x \in A \cap f^{-1}(B)$ , possiamo trovare carte  $(U, \Phi)$  e  $(V, \Psi)$  tali che  $x \in U$ ,  $f(x) \in V$ , e che  $\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}$  sia  $\mathbf{C}^h$ . Ma allora su un intorno di  $\Theta(x)$  l'applicazione  $\Xi \circ f \circ \Theta^{-1}$  coincide con  $(\Xi \circ \Psi^{-1}) \circ (\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}) \circ (\Phi \circ \Theta^{-1})$ , che è  $\mathbf{C}^h$  in quanto composizione di tre applicazioni  $\mathbf{C}^h$  tra aperti di  $\mathbb{R}^n$ .

Diremo che una applicazione  $f : M \rightarrow N$  è un *diffeomorfismo*  $\mathbf{C}^h$  se  $f$  è biunivoca e sia  $f$  che  $f^{-1}$  sono  $\mathbf{C}^h$ . Siano ora  $f : M \rightarrow N$  e  $g : N \rightarrow L$  applicazioni  $\mathbf{C}^h$  tra varietà  $\mathbf{C}^k$ . L'applicazione composta  $g \circ f$  è anch'essa  $\mathbf{C}^h$ . Infatti, se  $x$  è un punto di  $M$  e  $(U, \Phi)$ ,  $(V, \Psi)$  e  $(W, \Theta)$  sono carte locali su intorni di  $x$ ,  $f(x)$  e  $g(f(x))$ , le applicazioni  $\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}$  e  $\Theta \circ g \circ \Psi^{-1}$  sono  $\mathbf{C}^h$ , e dunque lo stesso è vero anche di

$$\Theta \circ g \circ f \circ \Phi^{-1} = (\Theta \circ g \circ \Psi^{-1}) \circ (\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}).$$

Poiché l'inclusione di un aperto  $A$  in una varietà  $M$  di classe  $\mathbf{C}^k$  è ovviamente  $\mathbf{C}^k$ , la composizione di questa inclusione con una applicazione  $f : M \rightarrow N$ , cioè la restrizione di  $f$  ad  $A$ , ha lo stesso ordine di differenziabilità di  $f$ .

Sia  $f : M \rightarrow N$  una applicazione di classe  $\mathbf{C}^h$  tra varietà  $\mathbf{C}^k$ , e sia  $x$  un punto di  $M$ . Siano  $(U, \Phi)$  una carta locale su un intorno di  $x$  e  $(W, \Psi)$  una su un intorno di  $f(x)$ . Definiamo il *rango di  $f$  nel punto  $x$*  come il rango di  $\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}$  nel punto  $\Phi(x)$ . Questa è una buona definizione: infatti, se  $(V, \Theta)$  e  $(Z, \Xi)$  sono altre carte su intorni di  $x$  e  $f(x)$ , si ha

$$J(\Xi \circ f \circ \Theta^{-1}) = J(\Xi \circ \Psi^{-1}) J(\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}) J(\Phi \circ \Theta^{-1}).$$

Dato che le matrici  $J(\Xi \circ \Psi^{-1})$  e  $J(\Phi \circ \Theta^{-1})$  sono invertibili, il rango di  $\Xi \circ f \circ \Theta^{-1}$  nel punto  $\Theta(x)$  coincide con quello di  $\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}$  nel punto  $\Phi(x)$ . Diremo che  $f$  è una *immersione locale* se il suo rango in ogni punto  $x$  di  $M$  è pari alla dimensione di  $M$  in  $x$ , e che è una *immersione* se è una immersione locale ed inoltre è un omeomorfismo di  $M$  su  $f(M)$ . Diremo che  $f$  è un *diffeomorfismo locale* se ogni  $x \in M$  ha un intorno

aperto  $W$  tale che  $f(W)$  sia aperto e che la restrizione a  $W$  di  $f$  sia un diffeomorfismo su  $f(W)$ . Per il teorema della funzione inversa, una condizione necessaria e sufficiente perchè  $f$  sia un diffeomorfismo locale è che in ogni punto  $x$  di  $M$  il rango di  $f$  sia uguale sia alla dimensione di  $M$  in  $x$  che alla dimensione di  $N$  in  $f(x)$ . Un diffeomorfismo non è altro che un diffeomorfismo locale biunivoco.

Consideriamo ora il caso particolare delle applicazioni da una varietà  $M$  in  $\mathbb{R}^n$ . Segue dalle definizioni che una applicazione  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  è  $\mathbf{C}^h$  se e solo se, per ogni punto  $x \in M$  e ogni componente  $f_i$  di  $f$ , esiste una carta  $(U, \Phi)$ , dove  $U$  è un intorno di  $x$ , tale che  $f_i \circ \Phi^{-1}$  sia  $\mathbf{C}^h$ . Le applicazioni  $\mathbf{C}^h$  da  $M$  in  $\mathbb{R}$  si possono sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere tra loro (purché il denominatore non si annulli) e i risultati di queste operazioni sono ancora funzioni  $\mathbf{C}^h$ ; ciò segue dal fatto che questa affermazione è vera nel caso particolare in cui  $M = \mathbb{R}^m$ . Analogamente, le applicazioni che si ottengono sommando tra loro applicazioni  $\mathbf{C}^h$  da  $M$  in  $\mathbb{R}^n$  o moltiplicando applicazioni  $\mathbf{C}^h$  da  $M$  in  $\mathbb{R}^n$  per funzioni  $\mathbf{C}^h$  da  $M$  in  $\mathbb{R}$  sono  $\mathbf{C}^h$ .

ESEMPIO (4.3). Vogliamo mostrare che l'inclusione  $j : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  è una immersione di classe  $\mathbf{C}^\infty$ . Siano  $\pi_p$  e  $\pi_q$  i due sistemi di coordinate locali su  $S^n$  introdotti nell'esempio (4.2). Bisogna mostrare innanzitutto che  $j \circ \pi_p^{-1}$  e  $j \circ \pi_q^{-1}$  sono  $\mathbf{C}^\infty$ . In (4.2) si è calcolata esplicitamente l'inversa di  $\pi_p$ , mostrando che

$$(4.4) \quad \pi_p^{-1}(\eta) = \left( \frac{\|\eta\|^2 - 1}{\|\eta\|^2 + 1}, \frac{2\eta}{\|\eta\|^2 + 1} \right).$$

Questa formula mostra che  $\pi_p^{-1}(\eta)$ , come punto di  $\mathbb{R}^n$ , dipende in modo  $\mathbf{C}^\infty$  da  $\eta$ , cioè che  $j \circ \pi_p^{-1}$  è  $\mathbf{C}^\infty$ . In modo del tutto analogo si mostra che  $j \circ \pi_q^{-1}$  è  $\mathbf{C}^\infty$ . La formula (4.4) permette anche di calcolare la matrice Jacobiana di  $j \circ \pi_p^{-1}$ , che è

$$J_\eta(j \circ \pi_p^{-1}) = \frac{1}{(\|\eta\|^2 + 1)^2} \begin{pmatrix} 4\eta \\ 2(\|\eta\|^2 + 1)I_n - 4{}^t\eta\eta \end{pmatrix}.$$

La matrice  ${}^t\eta\eta$  ha rango 1 (o 0, quando  $\eta = 0$ ) perchè tutte le sue righe sono proporzionali a  $\eta$ . Dunque  $n - 1$  tra gli autovalori di  ${}^t\eta\eta$  sono nulli. Il rimanente autovalore vale  $\|\eta\|^2$  e un autovettore ad esso corrispondente è  ${}^t\eta$ , dato che  $\eta{}^t\eta = \|\eta\|^2$  e quindi  ${}^t\eta\eta{}^t\eta = (\|\eta\|^2) {}^t\eta$ . La matrice  $A = 2(\|\eta\|^2 + 1)I_n - 4{}^t\eta\eta$  è singolare se e solo se  $(\|\eta\|^2 + 1)/2$  è un autovalore di  ${}^t\eta\eta$ , dunque se e solo se  $\|\eta\|^2 = 1$ ; in questo caso ha rango  $n - 1$  e i vettori colonna  $X$  tali che  $AX = 0$  sono tutti proporzionali a  ${}^t\eta$ . Però quando  $\|\eta\|^2 = 1$  si ha che  $4\eta{}^t\eta = 4\|\eta\|^2 = 4$ , e quindi il solo vettore colonna  $X$  tale che  $J_\eta(j \circ \pi_p^{-1})X = 0$  è anche in questo caso il vettore nullo. Ciò mostra che  $J_\eta(j \circ \pi_p^{-1})$  ha rango  $n$  per ogni  $\eta$ . Ragionamenti del tutto analoghi mostrano che anche la matrice Jacobiana di  $j \circ \pi_q^{-1}$  ha rango  $n$  ovunque. Dunque  $j$  è un'immersione.

D'ora in poi ci occuperemo, salvo avviso esplicito, solo di varietà e applicazioni differenziabili di classe  $\mathbf{C}^\infty$ . Useremo la parola *liscio* come sinonimo di  $\mathbf{C}^\infty$ . Per ora conosciamo pochissimi esempi di varietà differenziabili. Vi sono però varie costruzioni che permettono di ottenere nuove varietà differenziabili da quelle già note. La più importante tra esse è senza dubbio quella che ha a che fare con il concetto di sottovarietà

differenziabile. Sia  $M$  una varietà differenziabile. Un sottoinsieme  $N$  di  $M$  si dice una *sottovarietà differenziabile* di  $M$  se per ogni punto  $x$  di  $N$  esistono un aperto coordinato  $U$  su  $M$  contenente  $x$  e un sistema di coordinate locali  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  su  $U$  tali che

$$N \cap U = \{p \in U \mid \varphi_{r+1}(p) = \dots = \varphi_n(p) = 0\}$$

per qualche  $r$ . In parole povere, nella carta  $(U, (\varphi_1, \dots, \varphi_n))$ , l'insieme  $N$  appare come un pezzo di sottovarietà affine di  $\mathbb{R}^n$ . Segue dalla definizione che una sottovarietà  $N$  è un sottoinsieme localmente chiuso di  $M$ , cioè che ogni punto di  $N$  ha un intorno aperto  $U$  tale che  $N \cap U$  sia chiuso in  $U$ .

LEMMA (4.5). *Sia  $N$  una sottovarietà differenziabile di una varietà differenziabile  $M$ . Allora vi è su  $N$  un'unica struttura di varietà differenziabile tale che l'inclusione  $j : N \rightarrow M$  sia una immersione.*

Dimostriamo il lemma. Ricopriamo  $N$  con carte  $(U, (\varphi_1, \dots, \varphi_n))$  tali che

$$N \cap U = \{p \in U \mid \varphi_{r+1}(p) = \dots = \varphi_n(p) = 0\}$$

per qualche  $r$ ; per ognuna di queste definiamo una carta

$$(U \cap N, (\varphi_1|_{U \cap N}, \dots, \varphi_r|_{U \cap N}))$$

su  $N$ . L'insieme di queste carte è un atlante  $\mathcal{A}$  su  $N$ . Dico che  $\mathcal{A}$  è liscio e che, con la struttura differenziabile su  $N$  che ne risulta,  $j$  è un'immersione. La seconda affermazione è ovvia perchè, in coordinate locali,  $j$  è della forma  $(x_1, \dots, x_r) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$ . Resta da vedere che  $\mathcal{A}$  è un atlante liscio. Siano allora  $(U \cap N, (\varphi_1|_{U \cap N}, \dots, \varphi_r|_{U \cap N}))$  e  $(V \cap N, (\psi_1|_{V \cap N}, \dots, \psi_s|_{V \cap N}))$  due carte in  $\mathcal{A}$ . Sappiamo che ogni  $\varphi_i$  è una funzione liscia di  $\psi_1, \dots, \psi_n$ ; se si tengono  $\psi_{s+1}, \dots, \psi_n$  fissi e uguali a 0, dunque, ogni  $\varphi_i$  è una funzione liscia di  $\psi_1, \dots, \psi_s$ , come si doveva mostrare. L'esistenza di una struttura differenziabile su  $N$  con le caratteristiche cercate è dimostrata. Dobbiamo ora provare che è unica. Supponiamo dunque data su  $N$  una struttura differenziabile tale che  $j$  sia un'immersione, e scegliamo un sistema di coordinate locali  $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_r)$  su un aperto  $V$  di  $N$ . Per il teorema del rango, salvo restringere  $V$ , vi sono un aperto  $U$  in  $M$  e coordinate locali  $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$  su  $U$  tali che  $V = U \cap N$  e che  $\Psi \circ j \circ \Phi^{-1}$  sia della forma  $(x_1, \dots, x_r) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$ . Questo significa che  $V$  è il sottoinsieme di  $U$  definito dall'annullarsi di  $\psi_{r+1}, \dots, \psi_n$  e che  $\varphi_i = \psi_i|_V$  per  $i = 1, \dots, r$ , cioè che  $(V, \Phi)$  appartiene ad  $\mathcal{A}$ . Il lemma è ora completamente dimostrato.

D'ora in poi, quando parleremo di sottovarietà differenziabili, le penseremo sempre come varietà differenziabili la cui struttura è data dal lemma (4.5). Siano ora  $M$  e  $N$  varietà differenziabili, sia  $L$  una sottovarietà differenziabile di  $N$ , e indichiamo con  $j$  l'inclusione di  $L$  in  $N$ . È utile osservare che una applicazione  $f : M \rightarrow L$  è liscia se e solo se lo è  $j \circ f$ . Una delle due implicazioni è ovvia, poiché  $j$  è liscia e la composizione di applicazioni lisce è liscia. Supponiamo viceversa di sapere che  $j \circ f$  è liscia. Vogliamo mostrare che  $f$  è liscia in ogni punto  $x \in M$ . Scegliamo una carta locale  $(U, (\varphi_1, \dots, \varphi_n))$  su un intorno di  $f(x)$  in modo che  $L \cap U$  sia il luogo dei punti  $p \in U$  tali che  $\varphi_{r+1}(p) = \dots = \varphi_n(p) = 0$ . Poiché  $j \circ f$  è liscia, ogni  $\varphi_i \circ j \circ f = \varphi_i|_{L \cap U} \circ f$  è liscia. Dato che le restrizioni di  $\varphi_1, \dots, \varphi_r$  a  $L \cap U$  sono coordinate locali su un intorno di  $f(x)$  in  $L$ ,  $f$  è liscia su un intorno di  $x$ .

Molte sottovarietà possono essere costruite usando il seguente corollario del teorema del rango.

PROPOSIZIONE (4.6). Siano  $M$  e  $N$  varietà differenziabili e sia  $f : M \rightarrow N$  una applicazione liscia. Sia  $x$  un punto di  $N$ . Supponiamo che  $f$  abbia rango costante su un intorno di  $f^{-1}(x)$ . Allora  $f^{-1}(x)$  è una sottovarietà differenziabile di  $M$ . Se  $M$  ha dimensione  $m$  e  $f$  ha rango  $r$  su un intorno di  $f^{-1}(x)$ , allora  $f^{-1}(x)$  ha dimensione  $m - r$ .

Nella maggior parte dei casi si usa una versione leggermente meno generale di questo risultato.

COROLLARIO (4.7). Siano  $M$  e  $N$  varietà differenziabili di dimensioni  $m$  e  $n$  e sia  $f : M \rightarrow N$  una applicazione liscia. Sia  $x$  un punto di  $N$ . Supponiamo che  $f$  abbia rango  $n$  su  $f^{-1}(x)$ . Allora  $f^{-1}(x)$  è una sottovarietà differenziabile di  $M$  di dimensione  $m - n$ .

Il corollario segue dalla proposizione se si osserva che la funzione rango è semicontinua inferiormente; se il rango di  $f$  è  $n$  su  $f^{-1}(x)$ , deve dunque essere almeno  $n$  su un intorno  $A$  di  $f^{-1}(x)$ . Poiché non può superare  $n$ , deve essere costante su  $A$ .

Dimostriamo ora (4.6). Possiamo supporre, rimpiazzando  $M$  con un intorno opportuno di  $f^{-1}(x)$ , che il rango di  $f$  sia costante. Il teorema del rango asserisce che, dato un punto  $y$  di  $f^{-1}(x)$ , vi sono carte locali  $(V, \Psi)$  su  $N$  e  $(U, \Phi)$  su  $M$  tali che  $y \in U$ ,  $x \in V$ , che  $\Psi(x) = 0$  e che  $\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}$  sia della forma  $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$ . Se  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  sono le componenti di  $\Phi$  ciò significa che

$$f^{-1}(x) \cap U = \{p \in U \mid \varphi_1(p) = \dots = \varphi_r(p) = 0\}.$$

Ciò mostra che  $f^{-1}(x)$  è una sottovarietà differenziabile di  $M$ . La dimensione di  $f^{-1}(x) \cap U$  è chiaramente pari a  $m - r$ . Questo dimostra (4.6).

Applichiamo il corollario (4.7) e il lemma (4.5) per ritrovare la struttura differenziabile sulle sfere descritta nell'esempio (4.2). La sfera  $S^n$  può essere descritta come  $f^{-1}(1)$ , dove  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  è l'applicazione  $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum x_i^2$ . Le derivate parziali di  $f$  si annullano tutte solo nell'origine, quindi il rango di  $f$  su  $S^n$  è 1. Dunque  $S^n$  è una sottovarietà differenziabile di dimensione  $n$  di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . La struttura differenziabile fornita da (4.5) è la sola per cui l'inclusione di  $S^n$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$  sia una immersione. Poiché anche la struttura differenziabile su  $S^n$  data da (4.2) è tale che l'inclusione di  $S^n$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$  sia una immersione (cf. l'esempio (4.3)), essa deve coincidere con quella data da (4.5).

Descriveremo ora varie altre costruzioni che permettono di ottenere nuove varietà differenziabili a partire da altre già note. Le semplici dimostrazioni di molte delle affermazioni che faremo saranno lasciate al lettore.

COSTRUZIONE (4.8). Se  $\{M_i\}_{i \in I}$  è una famiglia di varietà differenziabili, sull'unione disgiunta  $M = \coprod M_i$  vi è una struttura naturale di varietà differenziabile. Un atlante per  $M$  è  $\mathcal{A} = \coprod \mathcal{A}_i$ , dove  $\mathcal{A}_i$  è un atlante per  $M_i$ . Ogni  $M_i$  è un aperto di  $M$ .

COSTRUZIONE (4.9) (PRODOTTO DI VARIETÀ). Siano  $M$  e  $N$  varietà differenziabili. Vi è su  $M \times N$  una struttura naturale di varietà differenziabile. Questa è definita dall'atlante costituito da tutte le applicazioni

$$\Phi \times \Psi : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n,$$

dove  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $\Psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  sono carte locali per  $M$  e  $N$ . Le proiezioni

$$\pi_M : M \times N \rightarrow M \quad , \quad \pi_N : M \times N \rightarrow N$$

sono lisce, e una applicazione

$$F : L \rightarrow M \times N$$

è liscia se e solo se lo sono  $\pi_M \circ F$  e  $\pi_N \circ F$ .

**COSTRUZIONE (4.10).** Sia  $M$  una varietà differenziabile, siano  $A$  e  $B$  due aperti di  $M$  con chiusure disgiunte, e sia  $f : A \rightarrow B$  un diffeomorfismo. Sia  $X$  lo spazio topologico ottenuto da  $M$  identificando ogni punto  $x$  di  $A$  con il punto  $f(x) \in B$ ; in altri termini,  $X$  è il quoziente di  $M$  modulo la relazione di equivalenza

$$x \sim y \iff x = y \text{ oppure } y = f(x) \text{ oppure } x = f(y).$$

Su  $X$  vi è una struttura naturale di varietà differenziabile. Indichiamo con  $\pi$  l'applicazione naturale da  $M$  a  $X$ . Osserviamo che  $\pi$  è aperta, che  $\pi|_{(M \setminus \overline{A})}$  è un omeomorfismo da  $M \setminus \overline{A}$  a  $\pi(M \setminus \overline{A})$  e analogamente per  $\pi|_{(M \setminus \overline{B})}$ , mentre la restrizione ad  $A$  di  $\pi|_{(M \setminus \overline{A})}^{-1} \circ \pi|_{(M \setminus \overline{B})}$  non è altro che  $f$ . Le carte che definiscono la struttura differenziabile su  $X$  sono le applicazioni del tipo  $\Phi \circ \pi|_{(M \setminus \overline{A})}^{-1}$  e  $\Psi \circ \pi|_{(M \setminus \overline{B})}^{-1}$ , dove  $(U, \Phi)$  varia tra le carte locali su  $M$  tali che  $U \cap \overline{A} = \emptyset$ , e  $(V, \Psi)$  tra quelle per cui  $V \cap \overline{B} = \emptyset$ . La sola cosa da dimostrare è che  $\Phi \circ \pi|_{(M \setminus \overline{A})}^{-1} \circ \pi|_{(M \setminus \overline{B})} \circ \Psi^{-1}$  e la sua inversa sono lisce per ogni  $\Phi$  e ogni  $\Psi$ . Ciò equivale a dire che  $\pi|_{(M \setminus \overline{A})}^{-1} \circ \pi|_{(M \setminus \overline{B})}$  e la sua inversa sono lisce. Ma  $\pi|_{(M \setminus \overline{A})}^{-1} \circ \pi|_{(M \setminus \overline{B})}$  è definita su  $A \cup (M \setminus \overline{A})$ , coincide con l'identità su  $M \setminus \overline{A}$  e con  $f$  su  $A$ , quindi è liscia. Analoghe considerazioni si applicano a  $\pi|_{(M \setminus \overline{B})}^{-1} \circ \pi|_{(M \setminus \overline{A})}$ . Notiamo, per concludere, che  $\pi$  è un diffeomorfismo locale.

**ESEMPIO PATOLOGICO (4.11).** Applichiamo la costruzione (4.10) nel caso in cui  $M = \mathbb{R} \amalg \mathbb{R}$ ,  $A$  è l'intervallo aperto  $]0, 1[$  in una delle due copie di  $\mathbb{R}$ ,  $B$  è l'intervallo aperto  $]0, 1[$  nell'altra copia, e  $f$  è l'identità. La varietà  $X$  che si ottiene non è di Hausdorff perchè, se  $p$  è l'immagine in  $X$  del punto 1 di una delle due copie di  $\mathbb{R}$  e  $q$  l'immagine in  $X$  del punto 1 dell'altra,  $p$  e  $q$ , pur essendo distinti, non hanno intorni disgiunti.

Per evitare patologie del tipo di quella descritta nell'esempio (4.11), d'ora in poi tutte le varietà che prenderemo in considerazione saranno di Hausdorff. Per evitare altre patologie che non è il caso di discutere qui, prenderemo inoltre in considerazione solo varietà la cui topologia abbia una base numerabile. D'ora in poi, dunque, salvo esplicito avviso contrario, varietà significherà varietà di Hausdorff a base numerabile.

**COSTRUZIONE (4.12).** Sia  $X$  una varietà differenziabile e sia  $\pi : M \rightarrow X$  un rivestimento. Allora  $M$  ha una struttura naturale di varietà differenziabile, che può essere definita come segue. Scegliamo innanzitutto un atlante  $\mathcal{A}$  per  $X$  tale che, per ogni sua carta  $(U, \Phi)$ ,  $U$  sia un aperto ammissibile. Ricordiamo che ciò significa che l'immagine inversa  $\pi^{-1}(U)$  è l'unione disgiunta  $\amalg U_i$  di aperti in  $M$  con la proprietà che la restrizione a  $U_i$



di  $\pi$  è un omeomorfismo su  $U$ . Un atlante per  $M$  è l'insieme delle coppie  $(U_i, \Phi \circ \pi|_{U_i})$ . Bisogna mostrare che i cambiamenti di coordinate di questo atlante sono lisci. Siano dunque  $(U, \Phi)$  e  $(V, \Psi)$  due carte di  $\mathcal{A}$ , e scriviamo  $\pi^{-1}(U) = \coprod U_i$ ,  $\pi^{-1}(V) = \coprod V_j$ , dove ogni  $U_i$  è omeomorfo a  $U$  e ogni  $V_j$  a  $V$ . Vogliamo mostrare che

$$\Phi \circ \pi|_{U_i} \circ \pi|_{V_j}^{-1} \circ \Psi^{-1}$$

è liscia. Ma questa applicazione, dove è definita, coincide con  $\Phi \circ \Psi^{-1}$ , che è liscia. Notiamo, per concludere, che  $\pi$  è un diffeomorfismo locale.

**COSTRUZIONE (4.13).** Sia  $M$  una varietà differenziabile, e sia  $G$  un gruppo che agisce su  $M$ . Supponiamo che l'azione sia liscia; ciò significa che, per ogni  $g \in G$ , l'applicazione  $m \mapsto gm$  è un diffeomorfismo. Supponiamo anche che  $G$  agisca in modo propriamente discontinuo e senza punti fissi. Ricordiamo che ciò equivale a dire che ogni punto  $m$  di  $M$  ha un intorno aperto  $A$  tale che, se  $g$  è un elemento di  $G$  tale che  $A \cap gA \neq \emptyset$ , allora  $g = 1_G$ . Per abbreviare, chiameremo provvisoriamente “buoni” gli aperti con questa proprietà. Vogliamo dare una struttura naturale di varietà differenziabile a  $X = M/G$ . Sia  $\pi : M \rightarrow X$  l'applicazione quoziente. Consideriamo l'atlante  $\mathcal{A}$  su  $M$  costituito da tutte le carte  $(U, \Phi)$ , dove  $U$  è un aperto buono. Osserviamo che, poiché  $U$  è buono,

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \coprod_{g \in G} gU,$$

e che  $\pi$  è un omeomorfismo da  $U$  a  $\pi(U)$ . Un atlante su  $X$  è costituito da tutte le carte  $(\pi(U), \Phi \circ \pi|_U^{-1})$ . Per mostrare che questo atlante definisce su  $X$  una struttura di varietà differenziabile dobbiamo mostrare che, date  $(U, \Phi)$  e  $(V, \Psi)$  in  $\mathcal{A}$ ,

$$\Phi \circ \pi|_U^{-1} \circ \pi|_V \circ \Psi^{-1}$$

è liscia. In altri termini, dobbiamo mostrare che  $\pi|_U^{-1} \circ \pi|_V$  è una applicazione liscia. Se  $v \in V$  e  $u \in U$  sono tali che  $\pi|_U^{-1} \circ \pi|_V(v) = u$ , cioè che  $\pi|_V(v) = \pi|_U(u)$ , vi è un elemento  $g$  di  $G$  tale che  $u = gv$ . Poiché  $U$  è un intorno di  $u$ , per continuità vi è un intorno  $W$  di  $v$  tale che  $gW \subset U$  e  $\pi|_U^{-1} \circ \pi|_V(W) \subset U$ . Per ogni  $w \in W$ ,  $\pi(gw) = \pi(\pi|_U^{-1} \circ \pi|_V(w))$ . Poiché la restrizione di  $\pi$  a  $U$  è iniettiva ne segue che, su  $W$ , l'applicazione  $\pi|_U^{-1} \circ \pi|_V$  coincide con la moltiplicazione per  $g$ , ed è dunque liscia, come si doveva dimostrare. Una osservazione finale è che l'applicazione  $\pi$  è un diffeomorfismo locale di  $M$  su  $X$ .

**ESEMPIO (4.14) (I TORI).** Applichiamo la costruzione (4.13) al caso in cui  $M = \mathbb{R}^n$ ,  $G = \mathbb{Z}^n$ , e l'azione di  $g \in \mathbb{Z}^n$  è la traslazione  $x \mapsto g + x$ . Il risultato è una struttura di varietà differenziabile sul toro  $n$ -dimensionale  $T = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ . Il toro  $T$  è diffeomorfo al prodotto di  $n$  copie di  $S^1$ ; se identifichiamo  $S^1$  al cerchio unitario in  $\mathbb{C}$ , un diffeomorfismo si ottiene per passaggio al quoziente da

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (e^{2\pi\sqrt{-1}x_1}, \dots, e^{2\pi\sqrt{-1}x_n}).$$

**ESEMPIO (4.15) (GLI SPAZI PROIETTIVI REALI).** Lo spazio proiettivo reale di dimensione  $n$ , che indicheremo con  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ , è il quoziente di  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  modulo l'azione del gruppo

$\mathbb{R}^\times$  dei numeri reali non nulli agente su  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  per moltiplicazione. In modo del tutto equivalente, può essere visto come quoziente di  $S^n$  modulo l'azione del gruppo  $G = \{\pm 1\}$ . Poiché la moltiplicazione per  $-1$  è un diffeomorfismo di  $S^n$  in sé (verificare!)  $G$  agisce in modo liscio su  $S^n$ . L'azione di  $G$  su  $S^n$  è senza punti fissi ed è propriamente discontinua perché  $G$  è un gruppo finito. Per (4.13), dunque,  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è una varietà differenziabile e l'applicazione quoziente  $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è liscia. Indicheremo con lo stesso simbolo  $\pi$  anche l'applicazione quoziente  $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ . Indichiamo le coordinate in  $\mathbb{R}^{n+1}$  con  $x_0, x_1, \dots, x_n$  e ricordiamo che è d'uso scrivere  $\pi(x_0, \dots, x_n) = [x_0 : \dots : x_n]$ . Descriviamo ora esplicitamente un atlante per  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ . Seguendo la ricetta di (4.13), dobbiamo trovare aperti coordinati buoni su  $S^n$ . Aperti di questa natura sono per esempio gli insiemi

$$U_i^+ = \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_i > 0\} \quad , \quad U_i^- = \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_i < 0\}.$$

Su  $U_i^+$  e su  $U_i^-$ , un sistema di coordinate locali è dato per esempio da  $\varphi_0, \dots, \widehat{\varphi}_i, \dots, \varphi_n$ , dove  $\widehat{\varphi}_i$  sta a significare che  $\varphi_i$  viene omessa e

$$\varphi_j(x_0, \dots, x_n) = \frac{x_j}{x_i}.$$

Per mostrare che ciò è corretto bisogna mostrare che queste coordinate sono funzioni lisce delle coordinate definite in (4.2), e viceversa. Ricordiamo che i sistemi di coordinate definiti in (4.2) sono

$$\pi_p(x_0, \dots, x_n) = \frac{(x_1, \dots, x_n)}{1 - x_0} \quad , \quad \pi_q(x_0, \dots, x_n) = \frac{(x_1, \dots, x_n)}{1 + x_0}.$$

Ora

$$\frac{x_j}{x_i} = \frac{x_j}{1 - x_0} \left( \frac{x_i}{1 - x_0} \right)^{-1} = \frac{x_j}{1 + x_0} \left( \frac{x_i}{1 + x_0} \right)^{-1},$$

mentre, su  $U_i^+$ ,

$$\frac{x_j}{1 - x_0} = \frac{x_j}{x_i} \frac{1}{\sqrt{\sum_h \left( \frac{x_h}{x_i} \right)^2 - \frac{x_0}{x_i}}};$$

su  $U_i^-$  vale la stessa formula, ma con il segno della radice cambiato. Analoghe formule esprimono le  $x_j/(1+x_0)$  in funzione delle  $\varphi_j$ , che sono dunque coordinate lisce su  $S^n$ . Se indichiamo con  $\pi$  l'applicazione quoziente  $S^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ , un atlante per  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è dunque dato dalle carte  $(V_i, \Phi_i)$ , dove

$$V_i = \pi(U_i^+) = \pi(U_i^-)$$

e

$$\Phi_i([x_0 : \dots : x_n]) = \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\widehat{x_i}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right).$$

È importante notare che quest'ultima formula ha perfettamente senso per un qualsiasi punto  $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ , cioè anche se si pensa  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  come quoziente di  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  modulo  $\mathbb{R}^\times$ . In effetti il lato destro della formula dipende solo dalla classe di omotopia di  $(x_0, \dots, x_n)$ .

ESEMPIO (4.16) (GLI SPAZI PROIETTIVI COMPLESSI). Lo spazio proiettivo complesso di dimensione (complessa)  $n$ , che si indica con  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ , è il quoziente di  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  modulo l'azione del gruppo  $\mathbb{C}^\times$  dei numeri complessi non nulli. Indichiamo con  $(z_0, z_1, \dots, z_n)$  le coordinate complesse standard in  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Vogliamo porre su  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  una struttura di varietà differenziabile di dimensione  $2n$ . Un ricoprimento aperto di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  è dato dagli aperti

$$X_i = \{[z_0 : \dots : z_n] \mid z_i \neq 0\}.$$

Definiamo omeomorfismi  $\Phi_i : X_i \rightarrow \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$  ponendo

$$\Phi_i([z_0 : \dots : z_n]) = \left( \frac{z_0}{z_i}, \dots, \widehat{\frac{z_i}{z_i}}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right).$$

Dico che  $\{(X_i, \Phi_i)\}_{i=0, \dots, n}$  è un atlante liscio su  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . In effetti, i cambiamenti di coordinate  $\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}$  sono della forma

$$\frac{z_h}{z_i} = \frac{z_h}{z_j} \left( \frac{z_i}{z_j} \right)^{-1}, \quad h \neq i, j, \quad \frac{z_j}{z_i} = \left( \frac{z_i}{z_j} \right)^{-1},$$

e sono dunque lisci. È da notare che l'applicazione quoziente  $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  è liscia.

ESEMPIO (4.17) (IL GRUPPO LINEARE E IL GRUPPO ORTOGONALE). Un *gruppo di Lie* è il dato di un gruppo  $G$  e di una struttura di varietà differenziabile su  $G$  tale che le applicazioni “prodotto”

$$G \times G \rightarrow G, \quad (g, g') \mapsto gg'$$

e “inverso”

$$G \rightarrow G, \quad g \mapsto g^{-1}$$

siano lisce. L'esempio base è dato dal *gruppo lineare*  $GL(n, \mathbb{R})$ , costituito da tutte le matrici reali invertibili  $n \times n$ , con l'operazione prodotto di matrici. Si tratta di un aperto nello spazio  $\mathbb{R}^{n^2}$  di tutte le matrici  $n \times n$ , e il prodotto è ovviamente liscio. Quanto all'applicazione che associa a ogni matrice invertibile la sua inversa, per mostrare che è liscia basta notare che, per la regola di Cramer, gli elementi dell'inversa di una matrice  $A$  sono funzioni razionali degli elementi di  $A$ .

Descriveremo ora alcuni altri esempi di gruppi di Lie. Questi saranno tutti sottovarietà di  $GL(n, \mathbb{R})$ , e l'operazione sarà il prodotto di matrici. Che prodotto e inverso siano lisci sarà perciò automaticamente verificato. Un primo esempio è dato dal *gruppo lineare speciale*  $SL(n, \mathbb{R})$ , costituito da tutte le matrici in  $GL(n, \mathbb{R})$  che hanno determinante 1. Si tratta dunque del sottoinsieme dell'insieme di tutte le matrici  $n \times n$  definito dall'equazione

$$\det(X) = 1.$$

Per mostrare che si tratta di una sottovarietà differenziabile di  $GL(n, \mathbb{R})$  basta mostrare che, per ogni matrice invertibile  $A$ , almeno una delle derivate parziali di  $\det(X)$  non è nulla in  $A$ . Scriviamo  $X = (x_{ij})$  e osserviamo che, per la regola di Laplace,

$$\det(X) = \sum_h (-1)^{i+h} x_{ih} \det(X_{ih}),$$

dove  $X_{ih}$  è la matrice ottenuta da  $X$  cancellando la riga  $i$ -esima e la colonna  $h$ -esima. Dunque

$$\frac{\partial \det(X)}{\partial x_{ij}} = (-1)^{i+j} \det(X_{ij}).$$

Poiché, quando  $A$  è non singolare, almeno uno dei suoi minori  $(n-1) \times (n-1)$  è non singolare, la tesi segue.

Un altro esempio è dato dal *gruppo ortogonale*  $O(n)$ , costituito da tutte le matrici ortogonali  $n \times n$ , cioè da tutte le matrici reali  $n \times n$  che hanno come inversa la propria trasposta. Si tratta dunque del sottoinsieme dello spazio  $\mathbb{R}^{n^2}$  di tutte le matrici  $n \times n$  definito dalle equazioni

$$X^t X = I.$$

Mostriamo che la applicazione  $f(X) = X^t X$  ha rango costante su  $GL(n, \mathbb{R})$ . Se scriviamo  $X = (x_{ij})$ , si ha che

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_{hk}} = \delta_{ih} x_{jk} + \delta_{jh} x_{ik}.$$

Dunque, se  $A = (a_{ij}) \in GL(n, \mathbb{R})$  e  $B = (b_{ij})$  è una matrice  $n \times n$ ,

$$c_{ij} = \sum_{h,k} \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_{hk}}(A) b_{hk} = \sum_k a_{jk} b_{ik} + \sum_k a_{ik} b_{jk},$$

cioè

$$(c_{ij}) = B^t A + A^t B.$$

Da ciò segue che  $(c_{ij}) = 0$  se e solo se la matrice  $A^t B$  è antisimmetrica. Quest'ultima condizione equivale a  $(n^2 + n)/2$  condizioni lineari indipendenti sui coefficienti di  $B$ , perchè  $A$  è non singolare. Il rango della matrice Jacobiana di  $f$  è quindi costante su  $GL(n, \mathbb{R})$  e vale  $(n^2 + n)/2$ . Dunque  $O(n)$  è una sottovarietà differenziabile di  $GL(n, \mathbb{R})$  di dimensione  $(n^2 - n)/2$ . Inoltre  $O(n)$  è compatto perchè è una sottovarietà chiusa e limitata di  $\mathbb{R}^{n^2}$ , ed ha due componenti connesse, quella delle matrici ortogonali di determinante 1 e quella delle matrici ortogonali di determinante -1. La prima tra queste è un gruppo di Lie, il *gruppo ortogonale speciale*, e si indica con  $SO(n)$ .

ESEMPIO (4.18). Sia  $n$  un intero positivo, e sia  $l$  un intero compreso tra 0 e  $n$ . Indichiamo con  $\mathbb{F}(l, n)$  l'insieme costituito da tutte le  $l$ -uple  $(v_1, \dots, v_l)$  di vettori indipendenti in  $\mathbb{R}^n$ . Indicheremo anche con  $\mathbb{FO}(l, n)$  il sottoinsieme di  $\mathbb{F}(l, n)$  costituito dalle  $l$ -uple di vettori unitari e tra loro ortogonali (rispetto al prodotto scalare euclideo su  $\mathbb{R}^n$ ). È utile associare a ogni elemento  $(v_1, \dots, v_l)$  di  $\mathbb{F}(l, n)$  la matrice  $l \times n$  le cui righe sono i vettori  $v_1, \dots, v_l$ , e pensare quindi  $\mathbb{F}(l, n)$  come l'insieme delle matrici reali  $l \times n$  di rango  $l$ . Osserviamo che, quando  $l = n$ ,  $\mathbb{F}(l, n)$  coincide con  $GL(n, \mathbb{R})$  e  $\mathbb{FO}(l, n)$  con  $O(n)$ . Dato che  $\mathbb{F}(l, n)$  è un aperto nello spazio  $\mathbb{R}^{ln}$  di tutte le matrici reali  $l \times n$ , ha una struttura naturale di varietà differenziabile di dimensione  $ln$ . Vogliamo mostrare che  $\mathbb{FO}(l, n)$  è una sottovarietà chiusa di  $\mathbb{R}^{ln}$  di dimensione  $nl - (l^2 + l)/2$ . Se  $X = (x_{ij})$  è una matrice  $l \times n$  di indeterminate, le equazioni che definiscono  $\mathbb{FO}(l, n)$  sono

$$\sum_h x_{ih} x_{jh} = \delta_{ij},$$

o anche

$$X^t X = I.$$

Bisogna dunque mostrare che la matrice Jacobiana di  $f(X) = X^t X$  ha rango  $(l^2 + l)/2$  in ogni punto di  $\mathbb{F}(l, n)$ . La dimostrazione è identica a quella fatta nell'esempio (4.17) per mostrare che  $O(n)$  è una sottovarietà chiusa di  $\mathbb{R}^{n^2}$ , e non verrà ripetuta. Dato che  $\mathbb{F}O(l, n)$  è limitata, è compatta.

Sia  $A$  una matrice in  $\mathbb{F}(l, n)$ . La matrice  $A^t A$  è simmetrica e definita positiva. Vi sono dunque una matrice ortogonale  $M$  e una matrice diagonale  $D$  tali che

$$A^t A = M D M^{-1};$$

inoltre i termini diagonali di  $D$  sono positivi. Sia  $E$  la matrice diagonale i cui termini diagonali sono le radici quadrate positive dei corrispondenti termini di  $D$ , e poniamo  $B = M E M^{-1}$ . È chiaro che  $B^2 = A^t A$ ; si vede anche facilmente che  $B$  è la sola matrice simmetrica definita positiva il cui quadrato sia  $A^t A$ . Scriviamo ora  $Q = B^{-1} A$ . Si ha che

$$Q^t Q = B^{-1} A^t A B^{-1} = B^{-1} B^2 B^{-1} = I,$$

e dunque  $Q \in \mathbb{F}O(l, n)$ . Si può quindi scrivere  $A$  come prodotto  $BQ$  di una matrice definita positiva e di una appartenente a  $\mathbb{F}O(l, n)$ . Questa decomposizione è unica. In effetti, se  $A = BQ$ , dove  $B$  è definita positiva e  $Q \in \mathbb{F}O(l, n)$ , allora

$$A^t A = BQ^t Q B = B^2.$$

Come si è osservato, vi è una sola matrice definita positiva con questa proprietà, quindi  $B$ , e dunque  $Q$ , sono univocamente determinate. Indichiamo con  $P(l)$  l'insieme di tutte le matrici reali simmetriche definite positive  $l \times l$ : è un aperto della sottovarietà lineare dello spazio di tutte le matrici  $l \times l$  costituita dalle matrici simmetriche. Quanto si è osservato mostra che l'applicazione

$$\mu : P(l) \times \mathbb{F}O(l, n) \rightarrow \mathbb{F}(l, n), \quad (B, Q) \mapsto BQ$$

è biunivoca. Si tratta ovviamente di una applicazione liscia. Vogliamo vedere che in effetti è un diffeomorfismo. Siano dunque  $\xi_1, \dots, \xi_{(l^2+l)/2}$  coordinate su  $P(l)$  e  $\xi_{((l^2+l)/2)+1}, \dots, \xi_{ln}$  coordinate su  $\mathbb{F}O(l, n)$ . Bisogna mostrare che la matrice Jacobiana di  $\mu$  rispetto alle  $\xi$  è non singolare. Bisogna cioè mostrare che, se  $\alpha_1, \dots, \alpha_{ln}$  sono numeri reali e  $\sum \frac{\partial \mu}{\partial \xi_i} \alpha_i = 0$ , allora gli  $\alpha_i$  sono tutti nulli. Ora è chiaro che  $\frac{\partial \mu}{\partial \xi_i}$  è uguale a  $\frac{\partial B}{\partial \xi_i} Q$  se  $i \leq (l^2 + l)/2$  e a  $B \frac{\partial Q}{\partial \xi_i}$  se  $i > (l^2 + l)/2$ . È anche chiaro che  $\frac{\partial B}{\partial \xi_i}$  è una matrice simmetrica, e quindi che  $C = \sum \frac{\partial B}{\partial \xi_i} \alpha_i$  è simmetrica. Per quanto riguarda  $\frac{\partial Q}{\partial \xi_i}$ , derivando la relazione  $Q^t Q = I$  si ottiene la relazione

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi_i} {}^t Q + Q \frac{\partial {}^t Q}{\partial \xi_i} = 0.$$

Dunque, se poniamo  $D = \sum \frac{\partial Q}{\partial \xi_i} \alpha_i$ , vale la relazione

$$D^t Q + Q^t D = 0;$$

in altri termini,  $D^tQ$  è una matrice antisimmetrica. Ora, affermare che  $\sum \frac{\partial \mu}{\partial \xi_i} \alpha_i = 0$  equivale a dire che  $CQ + BD = 0$ , il che implica, moltiplicando a destra per  ${}^tQ$  e sfruttando la relazione  $Q^tQ = I$ , che  $C + BD^tQ = 0$ . Per concludere basta dunque mostrare che  $BD^tQ$  non può essere simmetrica, a meno che  $C$  e  $D$ , e quindi  $\alpha_1, \dots, \alpha_{l_n}$ , non siano nulli. Poniamo  $F = D^tQ$ , e ricordiamo che  $F$  è antisimmetrica. Se  $BF$  è simmetrica, si ha

$$BF = {}^t(BF) = {}^tF^tB = -FB.$$

Ma allora, se  $v$  è un autovettore di  $B$  e  $\lambda$  il corrispondente autovalore, si ha

$$BFv = -FBv = -\lambda Fv,$$

e quindi anche  $-\lambda$  è un autovalore di  $B$ , contro l'ipotesi che  $B$  sia definita positiva.

Nel caso particolare in cui  $l = n$ , quanto ora dimostrato si riduce all'affermazione che l'applicazione  $\mu : P(n) \times O(n) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$  data da  $\mu(B, Q) = BQ$  è un diffeomorfismo.

**ESEMPIO (4.19) (LE GRASSMANNIANE REALI).** Sia  $n$  un intero positivo, e sia  $l$  un intero compreso tra 0 e  $n$ . Indichiamo con  $\mathbb{G}(l, n)$  l'insieme dei sottospazi vettoriali  $l$ -dimensionali di  $\mathbb{R}^n$ , e con  $\mathbb{GO}(l, n)$  l'insieme dei sottospazi vettoriali  $l$ -dimensionali orientati di  $\mathbb{R}^n$ . Chiameremo  $\mathbb{G}(l, n)$  *Grassmanniana degli  $l$ -piani in  $\mathbb{R}^n$* , e  $\mathbb{GO}(l, n)$  *Grassmanniana degli  $l$ -piani orientati in  $\mathbb{R}^n$* . Vi è una applicazione 2-1 naturale  $\mathbb{GO}(l, n) \rightarrow \mathbb{G}(l, n)$  che corrisponde a "dimenticare" l'orientazione. Osserviamo che  $\mathbb{G}(1, n)$  non è altro che lo spazio proiettivo reale  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$  e  $\mathbb{GO}(1, n)$  non è altro che la sfera  $S^{n-1}$ .

Vi sono applicazioni naturali da  $\mathbb{F}(l, n)$  a  $\mathbb{G}(l, n)$  e a  $\mathbb{GO}(l, n)$  che assegnano a ogni  $l$ -upla  $(v_1, \dots, v_l)$  di vettori indipendenti il sottospazio (naturalmente orientato) che essi generano. Osserviamo che  $GL(l, \mathbb{R})$  agisce su  $\mathbb{F}(l, n)$  per moltiplicazione a sinistra, e che il quoziente di  $\mathbb{F}(l, n)$  modulo questa azione si identifica in modo naturale a  $\mathbb{G}(l, n)$ . Se  $A \in GL(l, \mathbb{R})$  e  $V \in \mathbb{FO}(l, n)$ , allora

$$AV^t(AV) = AV^tV^tA = A^tA.$$

In particolare,  $AV \in \mathbb{FO}(l, n)$  se e solo se  $A \in O(l)$ . Ne segue, in particolare, che  $\mathbb{G}(l, n)$  può anche essere descritto come il quoziente di  $\mathbb{FO}(l, n)$  modulo l'azione di  $O(l)$ . Sia  $\alpha : \mathbb{F}(l, n) \rightarrow \mathbb{G}(l, n)$  l'applicazione naturale, e  $\beta : \mathbb{FO}(l, n) \rightarrow \mathbb{F}(l, n)$  l'inclusione. Poniamo su  $\mathbb{G}(l, n)$  la topologia quoziente di quella di  $\mathbb{F}(l, n)$ . Poiché  $\mathbb{FO}(l, n)$  è compatto, anche  $\mathbb{G}(l, n)$  è compatta. Osserviamo che  $\alpha$  è aperta; infatti, se  $U$  è un aperto in  $\mathbb{F}(l, n)$ ,

$$\alpha^{-1}(\alpha(U)) = GL(l, \mathbb{R})U = \bigcup_{\gamma \in GL(l, \mathbb{R})} \gamma U.$$

Mostriamo ora che anche l'applicazione composta  $\alpha \circ \beta$  è aperta, cosicché la topologia di  $\mathbb{G}(l, n)$  può anche essere descritta come la topologia quoziente di quella di  $\mathbb{FO}(l, n)$ . Basta osservare che, se  $U$  è un aperto in  $\mathbb{FO}(l, n)$ ,

$$\alpha^{-1}(\alpha \circ \beta(U)) = P(l)O(l)U,$$

e che questo è aperto in  $\mathbb{F}(l, n)$  perchè  $O(l)U$  è aperto in  $\mathbb{FO}(l, n)$  mentre  $\mathbb{F}(l, n)$  è diffeomorfo a  $P(l) \times \mathbb{FO}(l, n)$ , come è stato dimostrato nell'esempio (4.18).

Definiremo ora una struttura naturale di varietà differenziabile su  $\mathbb{G}(l, n)$ . Sia  $E$  una matrice  $n \times n$  non singolare, e siano  $e_1, \dots, e_n$  le sue righe. Sia  $Y_E$  l'aperto in  $\mathbb{F}(l, n)$  costituito da tutte le matrici  $V$  tali che, se  $v_1, \dots, v_l$  sono le righe di  $V$ , allora  $v_1, \dots, v_l, e_{l+1}, \dots, e_n$  sono indipendenti. Poniamo  $X_E = \alpha(Y_E)$ ; poiché  $\alpha$  è aperta,  $X_E$  è aperto. È anche chiaro che, al variare di  $E$ , gli aperti  $X_E$  ricoprono  $\mathbb{G}(l, n)$ . Sia  $V$  un punto di  $Y_E$ . Per ogni  $i \leq l$  possiamo scrivere, in un unico modo,

$$e_i = \sum_{h=1}^l b_{ih} v_h + \sum_{h=1}^{n-l} a_{ih} e_{l+h}.$$

Possiamo riscrivere questa relazione in forma matriciale come

$$(4.20) \quad \begin{pmatrix} B & A \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ E'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E' \\ E'' \end{pmatrix},$$

dove  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$ ,  $E'$  è la matrice le cui righe sono  $e_1, \dots, e_l$ , ed  $E''$  è la matrice le cui righe sono  $e_{l+1}, \dots, e_n$ . Osserviamo che  $B$  è invertibile e che inoltre, se si rimpiazza  $V$  con  $MV$ , dove  $M \in GL(l, \mathbb{R})$ , la matrice  $A$  resta inalterata. Ciò significa che  $A$  dipende solo dal sottospazio di  $\mathbb{R}^n$  generato da  $v_1, \dots, v_l$ . Possiamo dunque definire una applicazione continua

$$\Phi_E : X_E \rightarrow \mathbb{R}^{l(n-l)},$$

dove  $\mathbb{R}^{l(n-l)}$  è identificato allo spazio delle matrici  $l \times (n-l)$ , ponendo  $\Phi_E(\alpha(V)) = A$ . L'applicazione  $\Phi_E$  è biunivoca; la sua inversa è  $\alpha \circ \xi_E$ , dove  $\xi_E : \mathbb{R}^{l(n-l)} \rightarrow Y_E$  è definita da

$$\xi_E(A) = E' - AE''.$$

È chiaro che  $\xi_E$  è liscia; poiché la relazione (4.20) può anche essere riscritta sotto la forma

$$\begin{pmatrix} B & A \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E' \\ E'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ E'' \end{pmatrix}^{-1},$$

anche  $\Phi_E \circ \alpha$  è liscia. Siamo ora in grado di mostrare che le carte  $(X_E, \Phi_E)$  formano un atlante liscio su  $\mathbb{G}(l, n)$ . Infatti, se  $E$  e  $F$  sono due matrici  $n \times n$  non singolari,

$$\Phi_F \circ \Phi_E^{-1} = \Phi_F \circ \alpha \circ \xi_E$$

è liscia in quanto è la composizione delle due applicazioni lisce  $\Phi_F \circ \alpha$  e  $\xi_E$ . Abbiamo dunque definito su  $\mathbb{G}(l, n)$  una struttura di varietà differenziabile di dimensione  $l(n-l)$ . L'applicazione  $\alpha : \mathbb{F}(l, n) \rightarrow \mathbb{G}(l, n)$  è liscia in quanto  $\Phi_E \circ \alpha$  è liscia per ogni  $E$ ; ha inoltre rango  $l(n-l)$  ovunque. La varietà  $\mathbb{G}(l, n)$  è di Hausdorff. In effetti, se  $p$  e  $q$  sono punti di  $\mathbb{G}(l, n)$ , vi è una matrice  $E$  tale che sia  $p$  che  $q$  appartengano a  $X_E$ . Poiché  $X_E$  è un aperto in  $\mathbb{G}(l, n)$  ed è di Hausdorff, in quanto è omeomorfo a  $\mathbb{R}^{l(n-l)}$ ,  $p$  e  $q$  hanno intorni disgiunti in  $\mathbb{G}(l, n)$ . Infine lasciamo al lettore di verificare che, nel caso in cui  $l = 1$ , la struttura differenziabile ora definita su  $\mathbb{G}(1, n) = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$  coincide con quella dell'esempio (4.15).

La Grassmanniana orientata  $\mathbb{G}\mathbb{O}(l, n)$  è un rivestimento doppio di  $\mathbb{G}(l, n)$ , e quindi ha anch'essa una struttura di varietà differenziabile. Essa può anche essere descritta come il quoziente di  $\mathbb{F}(l, n)$  modulo l'azione del sottogruppo di  $GL(l, \mathbb{R})$  costituito da tutte le matrici con determinante positivo, o anche come il quoziente di  $\mathbb{F}\mathbb{O}(l, n)$  modulo l'azione di  $SO(l)$ .

**Esercizi**

- 4.1) Sia  $M(2)$  l'insieme delle matrici  $2 \times 2$  a coefficienti reali e sia  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow M(2)$  l'applicazione definita da

$$\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ yx & y^2 \end{pmatrix} .$$

Calcolare il differenziale e il rango di  $\varphi$  in ogni punto. Mostrare infine che  $\varphi(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$  è una sottovarietà differenziabile chiusa di  $M(2) - \{0\}$ .

- 4.2) Mostrare che la conclusione della proposizione (4.6) non è necessariamente vera se si sostituisce l'ipotesi che  $f$  abbia rango costante su un intorno di  $f^{-1}(x)$  con quella più debole che  $f$  abbia rango costante su  $f^{-1}(x)$ .
- 4.3) In  $\mathbb{R}^2$  con le usuali coordinate  $(x, y)$  si consideri la curva  $C$  di equazione  $y^2 = x^3$ . Si dica se  $C$  è una sottovarietà differenziabile di  $\mathbb{R}^2$ , o se  $C$ , privata di un opportuno insieme di punti, è una sottovarietà differenziabile. Assegnato  $P_0 \in C$ ,  $P_0 = (x_0, y_0) \neq (0, 0)$ , la tangente a  $C$  in  $P_0$  interseca  $C$  in un ulteriore punto  $P_1$ , la tangente a  $C$  in  $P_1$  interseca  $C$  in un ulteriore punto  $P_2$ , e così via. Si definisce così per ricorrenza una successione di punti  $\{P_n\}$  su  $C$ . Mostrare che  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = (0, 0)$  (suggerimento: usare la parametrizzazione di  $C$ :  $x = t^2$ ,  $y = t^3$ ).

- 4.4) Trovare esplicitamente un diffeomorfismo tra  $S^2$  e l'ellissoide di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

- 4.5) Si consideri il sottinsieme di  $\mathbb{R}^{2n}$ :

$$A = \{(u, v) \mid u, v \in \mathbb{R}^n, \|u\| = \|v\| = 1, \langle u, v \rangle = 0\}.$$

Si mostri che  $A$  è una sottovarietà differenziabile di  $\mathbb{R}^{2n}$  e se ne calcoli la dimensione.

- 4.6) Mostrare che il luogo di equazione

$$x^2y^2 + y^4 + y^2z^2 + x^3 + xy^2 + xz^2 = 0$$

è una sottovarietà differenziabile chiusa di  $\mathbb{R}^3$ .

- 4.7) Sia  $M$  una varietà differenziabile, e sia  $\Delta$  la diagonale in  $M \times M$ . Si mostri che  $\Delta$  è una sottovarietà differenziabile di  $M \times M$ .
- 4.8) Sia  $M$  una varietà differenziabile e sia  $p$  un suo punto. Mostrare che, dato comunque un intorno  $U$  di  $p$ , esiste una funzione  $C^\infty$  da  $M$  in  $\mathbb{R}$  che vale 1 in  $p$  ed è nulla fuori da  $U$  (Suggerimento: trattare dapprima il caso  $M = \mathbb{R}^n$ ).
- 4.9) Sia  $GL(n)$  il gruppo delle matrici reali  $n \times n$  a determinante non nullo. Indichiamo con  $SL(n)$  e  $SO(n)$  i sottogruppi delle matrici a determinante 1 e delle matrici



ortogonali a determinante 1.  $GL(n)$  può essere considerato come un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^{n^2}$ .

- a) Mostrare che  $GL(n)$  è un aperto in  $\mathbb{R}^{n^2}$ .
- b) Mostrare che  $SL(n)$  e  $SO(n)$  sono sottovarietà differenziabili di  $GL(n)$ .
- c) Mostrare che  $SO(n)$  è una sottovarietà differenziabile di  $SL(n)$ .
- d) Mostrare che l'applicazione prodotto

$$GL(n) \times GL(n) \rightarrow GL(n)$$

è  $C^\infty$ . Stessa domanda ove al posto di  $GL(n)$  si sostituisca  $SL(n)$  o  $SO(n)$ .

4.10) Mostrare che l'insieme dei punti di  $\mathbb{R}^3$  della forma

$$\left(\frac{1}{4} \sin t \cos s, \frac{1}{4} \sin t \sin s, \frac{1}{4} \cos t\right)$$

è una sottovarietà differenziabile di  $\mathbb{R}^3$  di dimensione 2.

- 4.11) Sia  $M_2^*(\mathbb{R})$  l'insieme delle matrici  $2 \times 2$  reali non nulle e sia  $X$  l'insieme delle matrici  $A \in M_2^*(\mathbb{R})$  con autovalori nulli. Si mostri che  $X$  è una sottovarietà differenziabile chiusa di  $M_2^*(\mathbb{R})$  e se ne calcoli la dimensione.
- 4.12) Siano  $h$ ,  $k$  e  $n$  interi positivi tali che  $h \leq k \leq n$ . Sia  $X$  l'insieme di tutte le coppie  $(V, W)$ , dove  $V$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$  di dimensione  $h$  e  $W$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$  di dimensione  $k$ , tali che  $V \subset W$ . Si mostri che  $X$  è una sottovarietà differenziabile di  $\mathbb{G}(h, n) \times \mathbb{G}(k, n)$ .

## 5. Il fibrato tangente

Un cammino liscio su una varietà differenziabile  $M$  è una applicazione liscia da un intervallo (non necessariamente aperto o chiuso o limitato) a  $M$ . Sia  $M$  una varietà differenziabile e sia  $p$  un suo punto. Sia  $\mathcal{V}_p$  l'insieme dei cammini lisci  $\gamma$  da un intervallo aperto centrato nell'origine di  $\mathbb{R}$  a  $M$  tali che  $\gamma(0) = p$ . Scelto un sistema di coordinate locali  $\Phi$  su un intorno di  $p$ , ad un elemento  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M$  di  $\mathcal{V}_p$  possiamo associare il vettore in  $\mathbb{R}^n$

$$\frac{d(\Phi \circ \gamma)}{dt}(0).$$

Questo definisce una applicazione  $\alpha$  da  $\mathcal{V}_p$  a  $\mathbb{R}^n$ . Notiamo innanzitutto che  $\alpha$  è suriettiva. Dato infatti  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ , se poniamo  $\gamma(t) = \Phi^{-1}(a_1 t + b_1, \dots, a_n t + b_n)$ , dove  $\Phi(p) = (b_1, \dots, b_n)$ , è chiaro che  $\alpha(\gamma) = (a_1, \dots, a_n)$ . Lo spazio tangente a  $M$  in  $p$ , che verrà indicato con  $T_p(M)$ , è l'insieme quoziente di  $\mathcal{V}_p$  modulo la relazione di equivalenza indotta da  $\alpha$ ; è quindi, in modo naturale, in corrispondenza biunivoca con  $\mathbb{R}^n$ , e da questo eredita una struttura di spazio vettoriale reale. Gli elementi di  $T_p(M)$  si dicono *vettori tangenti a  $M$  in  $p$* . Osserviamo che lo spazio tangente a  $M$  in  $p$  e la sua struttura di spazio vettoriale non dipendono dalla scelta del sistema di coordinate  $\Phi$ . Sia infatti  $\Psi$  un altro sistema di coordinate, e sia  $\beta$  la corrispondente applicazione da  $\mathcal{V}_p$  a  $\mathbb{R}^n$ . Se  $\gamma$  è un elemento di  $\mathcal{V}_p$ , considerando temporaneamente gli elementi di  $\mathbb{R}^n$  come matrici colonna, si ha che

$$\beta(\gamma) = \frac{d(\Psi \circ \gamma)}{dt}(0) = \frac{d(\Psi \circ \Phi^{-1} \circ \Phi \circ \gamma)}{dt}(0) = J_{\Phi(p)}(\Psi \circ \Phi^{-1}) \frac{d(\Phi \circ \gamma)}{dt}(0).$$

Se ne ricava che  $\beta = \xi \circ \alpha$ , dove  $\xi$  è la moltiplicazione per la matrice invertibile  $J_{\Phi(p)}(\Psi \circ \Phi^{-1})$ . Poiché  $\xi$  è un isomorfismo di spazi vettoriali ne segue dunque che  $T_p(M)$ , come spazio vettoriale, non dipende dal sistema di coordinate scelto. Esaminiamo il caso particolare in cui  $M = \mathbb{R}^n$ . Se  $p$  è un qualsiasi punto di  $\mathbb{R}^n$  vi è una identificazione canonica tra  $T_p(\mathbb{R}^n)$  e  $\mathbb{R}^n$ , data dal sistema di coordinate banale su  $\mathbb{R}^n$ . Nel seguito, quando parleremo di vettori tangenti a  $\mathbb{R}^n$ , sarà dunque lecito trattarli come elementi di  $\mathbb{R}^n$ .

I vettori tangenti a una varietà differenziabile  $M$  in un suo punto  $p$  hanno anche una interpretazione come operatori di derivazione direzionale. Sia  $X$  un elemento di  $T_p(M)$ , rappresentato da un cammino liscio  $\gamma$ . Sia poi  $f$  una funzione liscia a valori reali su un intorno di  $p$ . Poniamo

$$X(f) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0),$$

e osserviamo che  $X(f)$  non dipende dal particolare rappresentante scelto per  $X$ . In effetti, se  $\Phi = (x_1, \dots, x_n)$  è un sistema di coordinate locali su un intorno di  $p$  e  $(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \Phi(\gamma(t))$  è la rappresentazione di  $\gamma$  in queste coordinate, si ha che

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\Phi(p)) \frac{dx_i}{dt}(0).$$

L'espressione di destra dipende solo dalle derivate prime delle funzioni  $x_i(t)$  nell'origine, cioè dalla classe di equivalenza del cammino  $\gamma$ , ovvero da  $X$ . Chiameremo  $X(f)$  la *derivata di  $f$  rispetto a  $X$* . Sia  $g$  un'altra funzione liscia su un intorno di  $p$ . Valgono le seguenti proprietà:

$$(5.1) \quad \begin{cases} X(f) = 0 & \text{se } f \text{ è costante,} \\ X(f+g) = X(f) + X(g), \\ X(fg) = f(p)X(g) + g(p)X(f). \end{cases}$$

Esse seguono dalle analoghe proprietà della derivata delle funzioni reali di variabile reale.

Scegliamo un sistema di coordinate locali  $\Phi = (x_1, \dots, x_n)$  su un intorno  $U$  di  $p$ . Per ogni  $i$  definiamo il vettore tangente

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \in T_p(M)$$

come la classe di equivalenza del cammino

$$\gamma(t) = \Phi^{-1}(te_i + \Phi(p)),$$

dove  $e_i$  è l' $i$ -esimo vettore della base standard di  $\mathbb{R}^n$ . La notazione è giustificata dal fatto che, se  $f$  è una funzione a valori reali su un intorno di  $p$ ,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f) = \frac{\partial f \circ \Phi^{-1}}{\partial x_i}(\Phi(p)).$$

Osserviamo che, se  $\alpha$  è l'isomorfismo tra  $T_p(M)$  e  $\mathbb{R}^n$  determinato dal sistema di coordinate  $\Phi$ , allora  $\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = e_i$ . Ne segue, in particolare, che i vettori tangenti  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sono una base di  $T_p(M)$ . Osserviamo anche che, data una operazione  $\xi$  che associ a ogni funzione  $f$  definita su un intorno di  $p$  un numero reale  $\xi(f)$  e che goda delle proprietà formali (5.1), questa corrisponde alla derivazione rispetto a uno e un solo vettore tangente  $X \in T_p(M)$ . Poniamo infatti  $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , dove  $a_i = \xi(x_i)$ . Una qualsiasi funzione  $f$  definita su un intorno di  $p$  si scrive in modo unico sotto la forma

$$f = f(p) + \sum_i (x_i - x_i(p))h_i,$$

dove le  $h_i$  sono funzioni lisce, e dunque

$$\begin{aligned} \xi(f) &= \xi(f(p)) + \sum_i h_i(p)\xi(x_i - x_i(p)) + \sum_i (x_i(p) - x_i(p))\xi(h_i) \\ &= \sum_i a_i h_i(p) = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(f) = X(f). \end{aligned}$$

Se poi  $Y = \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  è un altro vettore tangente tale che  $Y(f) = \xi(f)$  per ogni  $f$ , i calcoli appena effettuati mostrano che  $b_i = \xi(x_i) = a_i$ , e quindi che  $Y = X$ . La notazione

$\frac{\partial}{\partial x_i}$  individua un elemento di  $T_q(M)$  per ogni  $q \in U$ ; dunque  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  è quello che si chiama un campo di vettori tangenti su  $U$ . Formalmente, dato un aperto  $A \subset M$ , un *campo di vettori tangenti a  $M$  su  $A$*  (o, più sbrigativamente, un campo di vettori su  $A$ ) è una applicazione che a ogni punto  $q$  di  $A$  associa un elemento di  $T_q(M)$ . Se  $X$  è un campo di vettori su  $A$ ,  $q \in A$  e  $\Phi = (x_1, \dots, x_n)$  è un sistema di coordinate locali su un intorno  $U \subset A$  di  $q$ , la restrizione di  $X$  a  $U$  si può scrivere in modo unico sotto la forma  $\sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , dove le  $a_i$  sono funzioni. Diremo che il campo di vettori  $X$  è liscio nel punto  $q$  se esiste un sistema di coordinate locali come sopra tale che le funzioni  $a_i$  siano lisce. Notiamo che questa nozione, in realtà, è indipendente dal sistema di coordinate scelto. Infatti, se  $(y_1, \dots, y_n)$  è un altro sistema di coordinate, vale la relazione

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j},$$

e dunque, se si scrive  $X = \sum b_j \frac{\partial}{\partial y_j}$ , si ha che

$$b_j = \sum_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i} a_i.$$

Quindi, se le  $a_i$  sono lisce lo stesso è vero per le  $b_i$ . Se il campo di vettori  $X$  è liscio in ogni punto di  $A$  diremo semplicemente che è liscio. I campi di vettori su  $A$  possono essere sommati tra loro o moltiplicati per funzioni a valori reali definite su  $A$ . I risultati di queste operazioni sono ancora campi di vettori su  $A$ ; essi sono lisci se i dati di partenza sono lisci. D'ora in poi, salvo esplicito avviso contrario, "campo di vettori" significherà *campo di vettori liscio*.

Siano  $X$  e  $Y$  campi di vettori su un aperto  $A$  di una varietà differenziabile  $M$ , e sia  $p$  un punto di  $A$ . Per ogni funzione liscia  $f$  definita su un intorno  $U$  di  $p$ , sia  $X(f)$  che  $Y(f)$  sono funzioni lisce su  $U$ . Poniamo allora

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)).$$

Questa operazione gode delle proprietà formali (5.1), e definisce quindi un elemento di  $T_p(M)$ . La sola cosa che richieda qualche verifica è la validità della regola di Leibniz. Se  $f$  e  $g$  sono funzioni su un intorno di  $p$  si ha che

$$\begin{aligned} [X, Y]_p(fg) &= X_p(Y(fg)) - Y_p(X(fg)) = X_p(fY(g) + gY(f)) - Y_p(fX(g) + gX(f)) \\ &= f(p)X_p(Y(g)) + X_p(f)Y_p(g) + g(p)X_p(Y(f)) + X_p(g)Y_p(f) \\ &\quad - f(p)Y_p(X(g)) - Y_p(f)X_p(g) - g(p)Y_p(X(f)) - Y_p(g)X_p(f) \\ &= f(p)[X_p(Y(g)) - Y_p(X(g))] + g(p)[X_p(Y(f)) - Y_p(X(f))] \\ &= f(p)[X, Y]_p(g) + g(p)[X, Y]_p(f). \end{aligned}$$

Quindi  $[X, Y]$  è un campo di vettori tangenti a  $M$  su  $A$ , che si chiama *parentesi di Lie* di  $X$  e  $Y$ . Si tratta di un campo di vettori liscio. Se infatti  $(x_1, \dots, x_n)$  è un sistema di coordinate locali e scriviamo  $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  e  $Y = \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , si ha che

$$[X, Y] = \sum_i \sum_j \left( a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

In un certo senso, la parentesi di Lie di due campi di vettori tangenti  $X$  e  $Y$  misura quanto le derivate direzionali rispetto a  $X$  e  $Y$  siano intercambiabili. In particolare la parentesi di Lie  $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]$  è nulla. Segue immediatamente dalle definizioni che la parentesi di Lie gode delle seguenti proprietà. Siano  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  campi di vettori e  $f$  una funzione liscia; allora

$$\begin{aligned} [X, Y] &= -[Y, X], \\ [X + Z, Y] &= [X, Y] + [Z, Y], \\ [X, fY] &= X(f)Y + f[X, Y]. \end{aligned}$$

Vale inoltre l'identità di Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Infatti, se  $f$  è una funzione liscia, si ha

$$\begin{aligned} ([X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]])(f) &= XYZ(f) - XZY(f) - YZX(f) + ZYX(f) \\ &\quad + YZX(f) - YXZ(f) - ZXY(f) + XZY(f) \\ &\quad + ZXY(f) - ZYX(f) - XYZ(f) + YXZ(f) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sia  $f : M \rightarrow N$  una applicazione liscia tra varietà differenziabili. Siano  $p$  un punto di  $M$  e  $X$  un elemento di  $T_p(M)$ . Scegliamo un cammino  $\gamma$  che rappresenta  $X$ . Definiamo  $df(X)$  (scritto a volte anche  $df_p(X)$ ) come il vettore tangente a  $N$  in  $f(p)$  rappresentato dal cammino  $f \circ \gamma$ . Per mostrare che questa è una buona definizione scegliamo sistemi di coordinate locali  $\Phi = (x_1, \dots, x_m)$  e  $\Psi = (y_1, \dots, y_n)$  su intorno di  $p$  e  $f(p)$ , scriviamo  $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $df(X) = \sum b_j \frac{\partial}{\partial y_j}$ , e osserviamo che

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{d(x_i \circ \gamma)}{dt}(0), \\ b_j &= \frac{d(y_j \circ f \circ \gamma)}{dt}(0) \\ &= \sum_i \frac{\partial(y_j \circ f)}{\partial x_i} \frac{d(x_i \circ \gamma)}{dt}(0) \\ &= \sum_i \frac{\partial(y_j \circ f)}{\partial x_i} a_i. \end{aligned}$$

Questo mostra che  $df(X)$  non dipende dalla scelta di  $\gamma$ , che

$$df_p : T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N)$$

è una applicazione lineare, e che la sua matrice rispetto alle basi  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, \dots, m$  e  $\frac{\partial}{\partial y_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$  non è altro che la matrice Jacobiana di  $\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}$  nel punto  $\Phi(p)$  (o

la sua trasposta, a seconda delle convenzioni). L'applicazione  $df_p$  si chiama *differenziale* di  $f$  nel punto  $p$ . Per quanto si è appena mostrato, il suo rango coincide con il rango di  $f$  nel punto  $p$ , come definito nel capitolo 4. Lasciamo al lettore di verificare che nel caso di una applicazione  $f$  da  $\mathbb{R}^m$  a  $\mathbb{R}^n$  il differenziale di  $f$  ora definito coincide con quello usuale, ove si identifichino gli spazi tangenti a  $\mathbb{R}^m$  e a  $\mathbb{R}^n$  in  $p$  e  $f(p)$  con  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^n$  nel modo canonico. Se  $f : M \rightarrow N$  e  $g : L \rightarrow M$  sono applicazioni lisce tra varietà differenziabili, segue immediatamente dalla definizione del differenziale che  $d(f \circ g) = df \circ dg$ .

Se  $M$  è una sottovarietà differenziabile della varietà differenziabile  $N$  e  $j : M \rightarrow N$  è l'inclusione, per ogni punto  $p$  di  $M$  l'omomorfismo  $dj_p$  identifica  $T_p(M)$  a un sottospazio vettoriale di  $T_p(N)$ . Nel caso particolare in cui  $M$  è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^n$ , gli spazi tangenti  $T_p(M)$  possono dunque essere pensati come sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^n$ . Rendiamo questo più esplicito. Sia  $\Phi$  un sistema di coordinate locali su  $M$  e poniamo  $\alpha(u_1, \dots, u_m) = j \circ \Phi^{-1}(u_1, \dots, u_m)$ . Per costruzione

$$dj \left( \frac{\partial}{\partial u_i} \right) = \frac{\partial \alpha}{\partial u_i}.$$

Sia  $f$  una funzione liscia a valori reali definita su un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$  che si annulla su  $A \cap M$ . È importante notare che, se  $p$  è un punto di  $A \cap M$ , il gradiente di  $f$  in  $p$  è ortogonale a  $T_p(M)$ . Per vederlo basta derivare la relazione  $f(\alpha(u_1, \dots, u_m)) \equiv 0$ . Indicando con  $x_1, \dots, x_n$  le coordinate standard su  $\mathbb{R}^n$ , con  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  le componenti di  $\alpha$  e con  $\text{grad}(f)$  il gradiente  $\left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$  di  $f$  si ottiene infatti

$$0 = \frac{\partial f(\alpha(u_1, \dots, u_m))}{\partial u_i} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial u_i} = \left\langle \text{grad}(f), \frac{\partial \alpha}{\partial u_i} \right\rangle.$$

Apriamo una piccola parentesi per enunciare e dimostrare una versione un po' più generale del corollario (4.7). Sia  $f : M \rightarrow N$  una applicazione liscia tra varietà differenziabili, e sia  $L$  una sottovarietà differenziabile di  $N$ . Diremo che  $f$  è *trasversa* a  $L$  se per ogni  $p \in f^{-1}(L)$  si ha che

$$T_{f(p)}(N) = T_{f(p)}(L) + df(T_p(M)).$$

Vale il seguente risultato.

**PROPOSIZIONE (5.2).** *Siano  $M$  e  $N$  varietà differenziabili, e sia  $L$  una sottovarietà di  $N$ . Sia poi  $f : M \rightarrow N$  una applicazione liscia trasversa a  $L$ . Allora  $f^{-1}(L)$  è una sottovarietà differenziabile di  $M$ . La dimensione di  $f^{-1}(L)$  in un suo punto  $p$  è pari a  $\dim_p(M) - \dim_{f(p)}(N) + \dim_{f(p)}(L)$ .*

Sia  $(x_1, \dots, x_n)$  un sistema di coordinate locali su un aperto  $U$  di  $N$  tale che  $L \cap U$  sia definito dall'annullarsi di  $x_{r+1}, \dots, x_n$ . L'ipotesi di trasversalità significa che il differenziale di  $(x_{r+1} \circ f, \dots, x_n \circ f)$  ha rango  $n - r$  lungo  $f^{-1}(L \cap U)$ . Il teorema delle funzioni implicite implica che, per ogni punto  $p$  di  $f^{-1}(L \cap U)$ , vi è un sistema di coordinate locali  $(y_1, \dots, y_m)$  su un intorno  $V$  di  $p$  in  $M$  tale che

$y_{m-n+r+1} = x_{r+1} \circ f, \dots, y_m = x_n \circ f$ . Si può anche supporre che  $f(V) \subset U$ . Dunque  $f^{-1}(L) \cap V$  è definito dall'annullarsi delle coordinate  $y_{m-n+r+1}, \dots, y_m$ . Quindi  $f^{-1}(L)$  è una sottovarietà differenziabile di  $M$  e

$$\dim_p(f^{-1}(L)) = m - n + r = \dim_p(M) - \dim_{f(p)}(N) + \dim_{f(p)}(L).$$

Questo conclude la dimostrazione di (5.2).

Come insieme, il *fibrato tangente* a una varietà differenziabile  $M$ , che indicheremo con il simbolo  $TM$ , è l'unione disgiunta degli spazi tangenti a  $M$ . In simboli

$$TM = \coprod_{p \in M} T_p(M).$$

Vi è una applicazione naturale  $\pi : TM \rightarrow M$  che associa ad ogni vettore tangente il punto di applicazione. Mostriamo che  $TM$  è in modo naturale una varietà differenziabile e che l'applicazione  $\pi$  è liscia. Per fare ciò useremo un risultato molto generale.

**PROPOSIZIONE (5.3).** *Sia  $X$  una varietà differenziabile (non necessariamente a base numerabile), e sia  $f : X \rightarrow Y$  una applicazione suriettiva. Poniamo  $R = \{(x, y) \in X \times X \mid f(x) = f(y)\}$ . Supponiamo che  $R$  sia una sottovarietà differenziabile di  $X \times X$  e che le proiezioni di  $R$  sui due fattori di  $X \times X$  siano diffeomorfismi locali. Allora su  $Y$  vi è una e una sola struttura di varietà differenziabile (non necessariamente di Hausdorff o a base numerabile) tale che  $f$  sia un diffeomorfismo locale. Inoltre  $Y$  è di Hausdorff se e solo se  $R$  è un chiuso in  $X \times X$ .*

Diamo uno schizzo di dimostrazione. Se  $f$  è un diffeomorfismo locale tutte le applicazioni della forma  $\Phi \circ g$ , dove  $g : V \rightarrow U$  è una inversa locale di  $f$  e  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una carta locale su  $X$ , sono carte locali per la struttura differenziabile di  $Y$ , che è quindi univocamente determinata da quella di  $X$ . Dimostriamo ora l'esistenza della struttura differenziabile su  $Y$ . Indichiamo con  $\alpha$  e  $\beta$  le proiezioni di  $R$  sui due fattori di  $X \times X$ . Notiamo intanto che, se si pone su  $Y$  la topologia quoziente,  $f$  è aperta. Infatti, se  $A$  è un aperto in  $X$ , allora  $f^{-1}(f(A)) = \alpha(\beta^{-1}(A))$  è aperto perchè  $\alpha$  è aperta. Indichiamo con  $\Delta_X$  la diagonale in  $X \times X$ . Sia  $p$  un punto di  $X$  e sia  $\Phi$  una sistema di coordinate locali su un intorno  $U$  di  $p$ ; se  $U$  è sufficientemente piccolo,  $R \cap (U \times U) = \Delta_X \cap (U \times U)$ . Quindi la restrizione di  $f$  a  $U$  è un omeomorfismo sull'aperto  $f(U)$ ; ne sia  $\varphi_U$  l'inversa. Dunque  $(f(U), \Phi \circ \varphi_U)$  è una carta locale su  $Y$ . Dico che l'insieme di queste carte è un atlante liscio su  $Y$ . Se si accetta questo, è chiaro che  $f$  è un diffeomorfismo locale; infatti  $\Phi \circ \varphi_U \circ f \circ \Phi^{-1}$  è l'identità su  $\Phi(U)$ . Sia dunque  $(f(U), \Phi \circ \varphi_U)$  la carta locale su  $Y$  costruita poco fa, e sia  $(f(V), \Psi \circ \varphi_V)$  un'altra carta costruita con lo stesso metodo. Dobbiamo mostrare che  $\Psi \circ \varphi_V \circ (\Phi \circ \varphi_U)^{-1} = \Psi \circ \varphi_V \circ \varphi_U^{-1} \circ \Phi^{-1}$  è liscia, cioè che  $\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}$  è liscia. Ma questo è chiaro, dato che le restrizioni di  $\alpha$  e  $\beta$  a  $R \cap (V \times U)$  sono iniettive, e quindi dei diffeomorfismi sulle loro immagini, e  $\varphi_V \circ \varphi_U^{-1} = \alpha \circ \gamma$ , dove  $\gamma : \beta(R \cap (V \times U)) \rightarrow R \cap (V \times U)$  è l'inversa della restrizione di  $\beta$  a  $R \cap (V \times U)$ .

Il criterio per stabilire se  $Y$  è di Hausdorff è di natura puramente topologica. Per dimostrarlo notiamo intanto che  $R = (f \times f)^{-1}(\Delta_Y)$ . Se  $Y$  è di Hausdorff,  $\Delta_Y$  è un chiuso in  $Y \times Y$ , e quindi  $R$  è un chiuso in  $X \times X$ . Supponiamo viceversa che  $R$  sia un

chiuso. Se  $p$  e  $q$  sono punti di  $X$  tali che  $f(p) \neq f(q)$ , cioè tali che  $(p, q) \notin R$ , vi sono intorni  $U$  di  $p$  e  $V$  di  $q$  tali che  $R \cap (U \times V) = \emptyset$ . Dunque  $f(U)$  e  $f(V)$  sono intorni disgiunti di  $f(p)$  e  $f(q)$ . Questo conclude la dimostrazione della proposizione.

Come abbiamo annunciato, la proposizione (5.3) permette di costruire una struttura di varietà differenziabile sul fibrato tangente di una varietà differenziabile  $M$ . Scegliamo un atlante liscio  $\{(U_i, \Phi_i)\}_{i \in I}$  su  $M$ . Siano  $x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i}$  le componenti di  $\Phi_i$ . Poniamo

$$X_i = U_i \times \mathbb{R}^{n_i},$$

e definiamo una applicazione  $f_i : X_i \rightarrow TM$  ponendo

$$f_i(p, a_1, \dots, a_{n_i}) = \sum_j a_j \left( \frac{\partial}{\partial x_{i,j}} \right)_p,$$

dove  $\left( \frac{\partial}{\partial x_{i,j}} \right)_p$  sta per il valore del campo di vettori tangenti  $\frac{\partial}{\partial x_{i,j}}$  nel punto  $p$ . È chiaro che  $f_i(X_i) = \pi^{-1}(U_i)$ , dove  $\pi : TM \rightarrow M$  è la proiezione naturale. Poniamo poi

$$X = \coprod_{i \in I} X_i,$$

e sia  $f : X \rightarrow TM$  l'applicazione la cui restrizione a ogni  $X_i$  è  $f_i$ . In questo caso  $R$  è l'unione disgiunta degli  $R_{ij} = R \cap (X_i \times X_j)$ . Chiaramente,  $R_{ij}$  è l'insieme dei punti  $(p, a_1, \dots, a_{n_i}, p, b_1, \dots, b_{n_j})$ , dove  $p \in U_i \cap U_j$  e  $a_h = \sum_k b_k \frac{\partial x_{i,h}}{\partial x_{j,k}}$ . Dunque  $R_{ij}$  è una sottovarietà differenziabile di  $X_i \times X_j$  e le sue proiezioni sui fattori sono diffeomorfismi su  $(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^{n_i}$ . Le condizioni della proposizione (5.3) sono soddisfatte. È anche chiaro che  $\pi$  è liscia. Per mostrare che  $TM$  è di Hausdorff ci si può di nuovo appellare alla proposizione (5.3) oppure ragionare direttamente come segue. Se due punti  $v$  e  $w$  di  $TM$  sono tali che  $\pi(v) \neq \pi(w)$ , allora  $\pi(v)$  e  $\pi(w)$  hanno intorni disgiunti  $V$  e  $W$  e quindi  $\pi^{-1}(V)$  e  $\pi^{-1}(W)$  sono intorni disgiunti di  $v$  e  $w$ . Se  $\pi(v) = \pi(w)$ , allora  $v$  e  $w$  appartengono a un aperto  $\pi^{-1}(U_i)$ , che è di Hausdorff perchè omeomorfo a  $U_i \times \mathbb{R}^{n_i}$ . Risulta infine dalla costruzione che, per ogni  $v \in TM$ , si ha

$$\dim_v(TM) = 2 \dim_{\pi(v)}(M).$$

La costruzione che abbiamo appena completata fornisce anche un atlante liscio per  $TM$ . Questo è la collezione di tutte le carte  $(\pi^{-1}(U_i), \Psi_i)$ , dove  $\Psi_i$  è la composizione dell'inversa di  $f_i : U_i \times \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$  con l'applicazione

$$(p, a_1, \dots, a_{n_i}) \mapsto (\Phi(p), a_1, \dots, a_{n_i}).$$

In altre parole, se  $v \in T_p(M)$ ,  $p \in U_i$  e scriviamo

$$v = \sum_j a_j \frac{\partial}{\partial x_{i,j}},$$

si ha

$$\Psi(v) = (x_{i,1}(p), \dots, x_{i,n_i}(p), a_1, \dots, a_{n_i}).$$

Notiamo infine che un campo di vettori tangenti su un aperto  $A$  di  $M$  non è altro che una applicazione liscia  $\alpha : A \rightarrow TM$  tale che  $\pi \circ \alpha$  sia l'identità su  $A$ .



OSSERVAZIONE (5.4). La proposizione (5.3) generalizza parecchie delle costruzioni del Capitolo 4. Questo è chiaro per la costruzione (4.10). Anche la costruzione (4.13) è un caso particolare di (5.3). Infatti

$$R = \{(m, n) \in M \times M \mid n = gm \text{ per qualche } g \in G\} = \coprod_{g \in G} \{(m, gm) \mid m \in M\}.$$

Chiaramente, per ogni  $g \in G$ ,  $M_g = \{(m, gm) \mid m \in M\}$  è una sottovarietà di  $M \times M$  e le sue proiezioni sui due fattori sono diffeomorfismi. Per concludere basta mostrare che, per ogni  $g$ , ogni punto di  $M_g$  ha un intorno che non tocca  $M_{g'}$  per ogni  $g' \neq g$ . In effetti, ogni  $m \in M$  ha un intorno  $U$  tale che  $U \cap \gamma U = \emptyset$  per ogni  $\gamma \neq 1_G$ . Ora  $U \times gU$  è un intorno di  $(m, gm)$ , mentre se vi è un punto della forma  $(n, g'n)$  in  $U \times gU$  si deve concludere che  $n \in U \cap g'^{-1}gU$  e quindi che  $g = g'$ .

## Esercizi

5.1) Siano  $X, Y, Z$  campi di vettori tangenti su una varietà differenziabile  $M$ . Si dimostri l'identità di Jacobi:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

5.2) Siano  $M$  e  $N$  varietà differenziabili e si supponga  $M$  connessa. Sia  $f : M \rightarrow N$  una applicazione differenziabile. Si mostri che  $f$  è costante se e solo se  $df \equiv 0$ .

5.3) Sia  $M$  una varietà differenziabile e siano  $A$  e  $B$  sue sottovarietà chiuse. Diremo che  $A$  e  $B$  sono trasverse se per ogni  $p \in A \cap B$  si ha che

$$T_p A + T_p B = T_p M.$$

Si mostri che, se  $A$  e  $B$  sono trasverse,  $A \cap B$  è una sottovarietà di  $M$  di dimensione  $\dim A + \dim B - \dim M$  e che, per ogni  $p \in A \cap B$ :

$$T_p(A \cap B) = T_p A \cap T_p B.$$

5.4) Siano  $M, N$  e  $L$  varietà differenziabili e  $l$  e siano  $f : M \rightarrow L$  e  $g : N \rightarrow L$  applicazioni lisce tali che  $df_p$  e  $dg_q$  siano suriettivi per ogni  $p \in M$  e ogni  $q \in N$ . Il prodotto fibrato di  $M$  con  $N$  su  $L$  è

$$M \times_L N = \{(x, y) \in M \times N \mid f(x) = g(y)\}.$$

Si mostri che  $M \times_L N$  è una sottovarietà differenziabile chiusa di  $M \times N$ .

5.5) Sia  $M$  una varietà differenziabile. Si mostri che le applicazioni

$$\begin{aligned} s : TM \times_M TM &\rightarrow TM \\ p : \mathbb{R} \times TM &\rightarrow TM \end{aligned}$$

definite da  $s(v, w) = v + w$  e  $p(r, v) = rv$  sono lisce.

5.6) Sia  $S$  una superficie chiusa in  $\mathbb{R}^3$  e si consideri il sottinsieme di  $\mathbb{R}^6$ :

$$N = \{(p, v) \mid p \in S, v \perp T_p S\}.$$

Sia  $f : N \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione definita da:

$$f(p, v) = p + v.$$

i) Si mostri che  $N$  è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^6$  di dimensione 3.

ii) Si mostri che  $f$  è  $C^\infty$  e che  $df$  ha rango 3 in ogni punto della forma  $(p, 0)$ .

5.7) Si consideri il gruppo  $O(n)$  delle matrici  $n \times n$  ortogonali.  $O(n)$  è una sottovarietà differenziabile dello spazio  $\mathbb{R}^{n^2}$  di tutte le matrici reali  $n \times n$ . Si mostri che lo spazio tangente a  $O(n)$  nel punto corrispondente alla matrice identità, come sottospazio dello spazio di tutte le matrici reali  $n \times n$ , consiste di tutte e sole le matrici antisimmetriche.

5.8) Sia  $H$  la matrice  $(p+q) \times (p+q)$ :

$$H = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}.$$

dove  $I_p$  e  $I_q$  sono le matrici identità  $p \times p$  e  $q \times q$ . Si indichi con  $O(p, q)$  l'insieme di tutte le matrici  $A$ , reali e  $(p+q) \times (p+q)$ , tali che

$${}^t A H A = H.$$

Si mostri che  $O(p, q)$  è una sottovarietà differenziabile dello spazio  $\mathbb{R}^{(p+q)^2}$  delle matrici reali  $(p+q) \times (p+q)$  e se ne calcoli la dimensione.

5.9) Indichiamo con  $Q$  la matrice  $2n \times 2n$

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

dove  $I$  è la matrice identità  $n \times n$ . Sia  $G$  l'insieme di tutte le matrici  $2n \times 2n$   $A$  tali che

$${}^t A Q A = Q.$$

Si mostri che  $G$  è una sottovarietà differenziabile chiusa di  $\mathbb{R}^{(2n)^2}$ , identificato allo spazio di tutte le matrici  $2n \times 2n$ , e se ne calcoli la dimensione.

## 6. Le equazioni fondamentali della teoria delle superficie

D'ora in poi, per *superficie liscia* intenderemo una varietà differenziabile di dimensione 2; una *superficie liscia in  $\mathbb{R}^3$*  è una sottovarietà differenziabile bidimensionale di  $\mathbb{R}^3$ . Spesso, quando non c'è rischio di equivoco, ometteremo l'aggettivo "liscia". Il collegamento tra queste nozioni e la definizione provvisoria di superficie usata nel capitolo 3 è data dal seguente corollario del teorema delle funzioni implicite.

PROPOSIZIONE (6.1). *Siano  $M$  e  $N$  due varietà differenziabili, e sia  $f : M \rightarrow N$  una immersione. Allora  $f(M)$  è una sottovarietà differenziabile di  $N$ .*

Sia  $p$  un punto di  $M$ . Il teorema del rango implica che vi sono un intorno  $A$  di  $p$  e un intorno  $B$  di  $f(p)$  tali che  $f(A) \subset B$  e che, rispetto a opportune coordinate  $x_1, \dots, x_m$  su  $A$  e  $y_1, \dots, y_n$  su  $B$ , l'immersione  $f$  sia data da

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad \dots, \quad y_m = x_m, \quad y_{m+1} = \dots = y_n = 0.$$

Restringendo  $B$  e  $A$ , se necessario, si può anche fare in modo che l'insieme dei punti di  $B$  dove  $y_{m+1} = \dots = y_n = 0$  sia uguale a  $f(A)$ . Poiché  $f$  è una immersione, in particolare è un omeomorfismo da  $M$  a  $f(M)$ , e quindi, eventualmente restringendo  $B$ , si può supporre che  $f^{-1}(B) = A$ . Ora è chiaro che l'intersezione di  $B$  e  $f(M)$  è il luogo dei punti di  $B$  dove  $y_{m+1} = \dots = y_n = 0$ . Quindi  $f(M)$  è una sottovarietà differenziabile di  $N$ .

Una "superficie", nella accezione del capitolo 3, non è altro che una immersione  $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dove  $U$  è un aperto in  $\mathbb{R}^2$ . Dunque  $S = \alpha(U)$  è una superficie nel senso specificato all'inizio di questo capitolo; in più l'inversa di  $\alpha : U \rightarrow S$  fornisce un sistema di coordinate su tutta  $S$ . Osserviamo che le nozioni di vettore tangente e spazio tangente e l'interpretazione dei vettori tangenti come derivazioni direzionali date nel capitolo 3 sono in perfetto accordo con quelle date in generale nel capitolo 5. Dunque tutto quanto mostrato nel capitolo 3 vale, al più con ovvii aggiustamenti terminologici, per un aperto su una superficie in  $\mathbb{R}^3$  su cui sia fissato un sistema di coordinate locali. In realtà molte delle nozioni definite nel capitolo 3 sono del tutto indipendenti dalla scelta delle coordinate. Questo vale, in particolare, per l'applicazione di Weingarten e le altre nozioni ad essa collegate, come quelle di seconda forma fondamentale, curvatura principale, curvatura media e Gaussiana, curvatura normale e geodetica, e così via.

Sia  $Y$  un campo di vettori su un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^3$ , e sia  $X$  un vettore tangente a  $\mathbb{R}^3$  in un punto  $p \in A$ . Come nel capitolo 3, indichiamo con  $\nabla_X Y$  il vettore tangente a  $\mathbb{R}^3$  in  $p$  le cui componenti sono le derivate delle componenti di  $Y$  rispetto a  $X$ . È importante notare che, per poter definire  $\nabla_X Y$ , non è in realtà necessario che  $Y$  sia definito su tutto un intorno di  $p$ ; basta che sia definito su una superficie, o addirittura su una curva, passante per  $p$  e tangente a  $X$ . Descriviamo ora alcune proprietà formali dell'operazione  $\nabla_X Y$ . È chiaro innanzitutto che  $\nabla_X Y$  è lineare in  $Y$ , mentre, se  $Y'$  è un altro campo di vettori e  $f$  è una funzione liscia, si verifica subito che

$$\begin{aligned}\nabla_X(Y + Y') &= \nabla_X Y + \nabla_X Y', \\ \nabla_X(fY) &= f(p)\nabla_X Y + X(f)Y_p.\end{aligned}$$

Come d'uso, indichiamo con  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  il prodotto scalare euclideo. Se  $X$  e  $Y$  sono campi di vettori e  $Z$  è un vettore tangente a  $\mathbb{R}^3$  nel punto  $p$  è immediato che valgono anche le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} Z \langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle, \\ \nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) &= [X, Y]. \end{aligned}$$

Sia ora  $S$  una superficie in  $\mathbb{R}^3$ . Se  $Y$  è un campo di vettori su un aperto di  $S$  e  $X$  è un vettore tangente a  $S$  in un punto  $p$ ,  $\nabla_X Y$  non è, in generale, tangente a  $S$ . Indichiamo con  $D_X Y$  la sua proiezione ortogonale su  $T_p S$ . In simboli, indicando con  $N$  un campo di vettori unitari normali a  $S$  definito su un intorno di  $p$ , si ha

$$(6.2) \quad D_X Y = \nabla_X Y - \langle \nabla_X Y, N_p \rangle N_p.$$

Ricordiamo che  $\nabla_X N = LX$  e deriviamo rispetto a  $X$  la relazione di ortogonalità  $\langle N, Y \rangle = 0$ , ottenendo

$$0 = X \langle N, Y \rangle = \langle \nabla_X N, Y \rangle + \langle N, \nabla_X Y \rangle = \langle LX, Y \rangle + \langle N, \nabla_X Y \rangle.$$

La (6.2) si riduce dunque alla *equazione di Gauss*

$$(6.3) \quad D_X Y = \nabla_X Y + \langle LX, Y \rangle N.$$

Diremo che  $D_X Y$  è la *derivata covariante* di  $Y$  rispetto ad  $X$ . L'operazione  $D$  va anche sotto il nome di *connessione Riemanniana* (o *connessione metrica*) su  $S$ . La derivata covariante può essere pensata come una sorta di derivata direzionale per campi di vettori anziché per funzioni.

La derivazione covariante gode di proprietà formali analoghe a quelle di  $\nabla_X Y$  (che in effetti non è altro che la connessione Riemanniana su  $\mathbb{R}^3$ , come vedremo in seguito). Più esattamente, se  $X$  e  $Y$  sono campi di vettori tangenti a  $S$ ,  $Z$  è un vettore tangente a  $S$  in  $p$  e  $f$  è una funzione liscia su  $S$ , si ha che

$$(6.4) \quad \begin{cases} D_Z X \text{ è lineare in } Z, \\ D_Z(X + Y) = D_Z X + D_Z Y, \\ D_Z(fX) = f(p)D_Z X + Z(f)X_p. \end{cases}$$

Le prime due di queste proprietà sono chiare dalla definizione di  $D$ . Quanto alla terza, ricordando che  $X$  e  $N$  sono ortogonali si può scrivere

$$\begin{aligned} D_Z(fX) &= \nabla_Z(fX) - \langle \nabla_Z(fX), N_p \rangle N_p \\ &= f(p)\nabla_Z X + Z(f)X_p - \langle f(p)\nabla_Z X + Z(f)X_p, N_p \rangle N_p \\ &= f(p)\nabla_Z X + Z(f)X_p - f(p)\langle \nabla_Z X, N_p \rangle N_p \\ &= f(p)D_Z X + Z(f)X_p. \end{aligned}$$

Un secondo gruppo di proprietà formali di  $D$  è

$$(6.5) \quad \begin{cases} Z \langle X, Y \rangle = \langle D_Z X, Y \rangle + \langle X, D_Z Y \rangle, \\ D_X Y - D_Y X = [X, Y]. \end{cases}$$

Per ricavare la prima identità basta osservare che, dato che  $\nabla_Z X$  e  $D_Z X$  differiscono per un vettore che è ortogonale a  $T_p S$ , essi hanno lo stesso prodotto scalare con  $Y$ , e lo stesso è vero se si scambiano i ruoli di  $X$  e  $Y$ . Quindi

$$\begin{aligned} Z \langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle \\ &= \langle D_Z X, Y \rangle + \langle X, D_Z Y \rangle . \end{aligned}$$

Per dimostrare la seconda identità ci servono un paio di semplici osservazioni preliminari. La prima è che, date una varietà differenziabile  $M$  e una sua sottovarietà  $N$ , un campo  $X$  di vettori tangenti a  $N$  può sempre essere esteso, localmente, a un campo di vettori tangenti a  $M$ . Possiamo infatti scegliere coordinate locali  $x_1, \dots, x_m$  su  $M$  in modo che, in queste coordinate,  $N$  sia definito dall'annullarsi di  $x_{n+1}, \dots, x_m$ , e che quindi  $x_1, \dots, x_n$  siano coordinate locali su  $N$ . In queste coordinate si può scrivere

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} ,$$

dove le  $a_i$  sono funzioni di  $x_1, \dots, x_n$ . Una estensione locale di  $X$  a un aperto di  $M$  è

$$\tilde{X} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + 0 \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} + \dots + 0 \frac{\partial}{\partial x_m} .$$

Se  $Y$  è un altro campo di vettori su  $N$  e  $\tilde{Y}$  una sua estensione locale a  $M$ , si vede immediatamente che

$$[X, Y] = [\tilde{X}, \tilde{Y}]|_N .$$

Torniamo ora alla seconda delle (6.5). Usando l'equazione di Gauss e la simmetria della seconda forma fondamentale si ottiene

$$\begin{aligned} D_X Y - D_Y X &= \nabla_X Y - \nabla_Y X + \langle LX, Y \rangle N - \langle LY, X \rangle N \\ &= \nabla_X Y - \nabla_Y X \\ &= \left( \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \nabla_{\tilde{Y}} \tilde{X} \right) |_S \\ &= [\tilde{X}, \tilde{Y}]|_S \\ &= [X, Y] . \end{aligned}$$

Siano  $X, Y, Z$  campi di vettori su un aperto di  $\mathbb{R}^3$ . Vale l'identità

$$(6.6) \quad \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z = 0 .$$

In effetti, se  $z$  è una componente di  $Z$ , la corrispondente componente di (6.6) si riduce a

$$X(Y(z)) - Y(X(z)) - [X, Y](z) = 0 ,$$

cioè alla definizione di  $[X, Y](z)$ .

Segue dalle considerazioni svolte nel dimostrare le (6.5) che l'identità (6.6) è valida anche quando  $X, Y, Z$  sono campi di vettori tangenti su un aperto di una superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$ . La (6.6) ha in questo caso conseguenze assai profonde, che si ottengono dividendola nelle sue componenti tangenziale e normale e usando l'equazione di Gauss. Tratteremo separatamente i tre termini del lato sinistro di (6.6). Si ha

$$\begin{aligned}\nabla_{[X,Y]}Z &= D_{[X,Y]}Z - \langle L[X,Y], Z \rangle N, \\ \nabla_X \nabla_Y Z &= \nabla_X (D_Y Z - \langle LY, Z \rangle N) \\ &= D_X D_Y Z - \langle LY, Z \rangle LX - \langle LX, D_Y Z \rangle N - X \langle LY, Z \rangle N, \\ \nabla_Y \nabla_X Z &= D_Y D_X Z - \langle LX, Z \rangle LY - \langle LY, D_X Z \rangle N - Y \langle LX, Z \rangle N.\end{aligned}$$

Dunque la parte tangenziale di (6.6) è

$$(6.7) \quad 0 = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]}Z + \langle LX, Z \rangle LY - \langle LY, Z \rangle LX,$$

mentre la parte normale è

$$0 = \langle LX, D_Y Z \rangle - \langle LY, D_X Z \rangle + X \langle LY, Z \rangle - Y \langle LX, Z \rangle - \langle L[X,Y], Z \rangle,$$

che, usando le identità

$$\begin{aligned}X \langle LY, Z \rangle &= \langle D_X LY, Z \rangle + \langle LY, D_X Z \rangle, \\ Y \langle LX, Z \rangle &= \langle D_Y LX, Z \rangle + \langle LX, D_Y Z \rangle,\end{aligned}$$

si riduce a

$$0 = \langle D_X LY, Z \rangle - \langle D_Y LX, Z \rangle - \langle L[X,Y], Z \rangle.$$

Poiché  $Z$  è del tutto arbitrario, questa identità è equivalente alle cosiddette *equazioni di Codazzi-Mainardi*

$$(6.8) \quad L[X,Y] = D_X LY - D_Y LX.$$

Torniamo ora all'identità (6.7). Questa è, nella sostanza, il cosiddetto "Theorema Egregium" di Gauss. Poniamo

$$R(X,Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]}Z.$$

Osserviamo che  $R(X,Y)Z$  è antisimmetrico in  $X$  e  $Y$  e  $\mathbb{R}$ -lineare in ciascuno dei suoi tre argomenti. In altre parole si ha che

$$R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$$

e, se  $a$  e  $b$  sono numeri reali e  $X', Y'$  e  $Z'$  sono campi di vettori, si ha anche che

$$\begin{aligned}R(aX + bX', Y)Z &= aR(X,Y)Z + bR(X', Y)Z, \\ R(X, aY + bY')Z &= aR(X,Y)Z + bR(X, Y')Z, \\ R(X, Y)(aZ + bZ') &= aR(X,Y)Z + bR(X, Y)Z' .\end{aligned}$$

Ciò che è più inatteso, dato che la definizione di  $R$  coinvolge derivate, è che, se  $f$  è una funzione, si ha anche

$$(6.9) \quad R(fX, Y)Z = R(X, fY)Z = R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z.$$

Per vederlo, scriviamo

$$\begin{aligned} R(fX, Y)Z &= D_{fX}D_Y Z - D_Y D_{fX} Z - D_{[fX, Y]} Z \\ &= fD_X D_Y Z - D_Y fD_X Z - D_{f[X, Y] - Y(f)X} Z \\ &= fD_X D_Y Z - fD_Y D_X Z - Y(f)D_X Z - fD_{[X, Y]} Z + Y(f)D_X Z \\ &= fD_X D_Y Z - fD_Y D_X Z - fD_{[X, Y]} Z \\ &= fR(X, Y)Z. \end{aligned}$$

Che  $R(X, fY)Z = fR(X, Y)Z$  segue per l'antisimmetria di  $R(X, Y)Z$  nelle prime due variabili. Infine

$$\begin{aligned} R(X, Y)fZ &= D_X D_Y (fZ) - D_Y D_X (fZ) - D_{[X, Y]} (fZ) \\ &= D_X (fD_Y Z + Y(f)Z) - D_Y (fD_X Z + X(f)Z) - fD_{[X, Y]} Z - [X, Y](f)Z \\ &= fR(X, Y)Z + X(f)D_Y Z + Y(f)D_X Z - Y(f)D_X Z - X(f)D_Y Z \\ &\quad + X(Y(f))Z - Y(X(f))Z - [X, Y](f)Z \\ &= fR(X, Y)Z. \end{aligned}$$

Una importante conseguenza di (6.9) è che il valore di  $R(X, Y)Z$  in un punto  $p$  dipende solo dai valori di  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  in  $p$ . Dato che  $R(X, Y)Z$  è  $\mathbb{R}$ -lineare nelle tre variabili, per dimostrarlo basta mostrare che  $R(X, Y)Z$  si annulla in  $p$  se almeno uno tra  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  si annulla in  $p$ . Supponiamo, per esempio, che  $X_p = 0$ . Scegliamo coordinate locali  $u_1, u_2$  centrate in  $p$ , definite cioè su un intorno di  $p$  e tali che  $u_1(p) = u_2(p) = 0$ . Allora possiamo scrivere, su un intorno di  $p$

$$X = u_1 X_1 + u_2 X_2,$$

dove  $X_1$  e  $X_2$  sono campi di vettori. Ma allora

$$R(X, Y)Z = u_1 R(X_1, Y)Z + u_2 R(X_2, Y)Z$$

si annulla in  $p$ . Se  $Y_p = 0$  oppure  $Z_p = 0$  si procede in modo analogo. In conclusione, dati  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  in  $T_p S$ , è ben definito un elemento  $R(X, Y)Z$  di  $T_p S$ . Per calcolarlo basta scegliere campi di vettori  $\tilde{X}$ ,  $\tilde{Y}$  e  $\tilde{Z}$  su un intorno di  $p$  che valgano  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  in  $p$ ; allora  $R(X, Y)Z$  è uguale al valore di  $R(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z}$  nel punto  $p$ .

**TEOREMA (6.10) (THEOREMA EGREGIUM).** *Sia  $S$  una superficie in  $\mathbb{R}^3$  e sia  $p$  un suo punto. Siano  $X$  e  $Y$  elementi indipendenti di  $T_p S$ . Allora la curvatura Gaussiana di  $S$  nel punto  $p$  è*

$$K(p) = \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2}.$$

Come abbiamo annunciato, il Teorema è sostanzialmente l'identità (6.7). In effetti la curvatura Gaussiana di  $S$  è  $\det(L)$ , mentre (6.7) implica che

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Y, X \rangle &= \langle LX, X \rangle \langle LY, Y \rangle - \langle LX, Y \rangle \langle LY, X \rangle \\ &= \det \begin{pmatrix} \langle LX, X \rangle & \langle LX, Y \rangle \\ \langle LY, X \rangle & \langle LY, Y \rangle \end{pmatrix} \\ &= \det(L) \det \begin{pmatrix} \langle X, X \rangle & \langle X, Y \rangle \\ \langle Y, X \rangle & \langle Y, Y \rangle \end{pmatrix} \\ &= \det(L) (\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle \langle Y, X \rangle). \end{aligned}$$

Per comprendere l'importanza dei risultati che abbiamo dimostrato conviene porsi da un punto di vista un po' più generale di quello adottato finora. Sia  $M$  una varietà differenziabile. Una *connessione* (o *derivata covariante*) su  $M$  (più propriamente, sul fibrato tangente  $TM$ ) è un operatore  $D$  che associa a ogni campo liscio di vettori  $Y$  su un aperto  $A$  di  $M$  e a ogni vettore  $X$  tangente a  $M$  in un punto  $p \in A$  un elemento  $D_X Y \in T_p M$  e gode delle seguenti proprietà. Innanzitutto  $D_X Y$  deve essere lineare in  $X$  e, se  $Y$  e  $Z$  sono campi lisci di vettori e  $f$  è una funzione liscia, si deve avere

$$\begin{aligned} D_X(Y + Z) &= D_X Y + D_X Z, \\ D_X(fY) &= f(p)D_X Y + X(f)Y_p. \end{aligned}$$

Poi la derivata covariante deve essere compatibile con le restrizioni, nel senso che, se  $Y$  è un campo di vettori su un intorno  $A$  di  $p$  e  $B$  è un altro intorno di  $p$  contenuto in  $A$ , deve essere  $D_X Y = D_X Y|_B$ . Da ultimo, se  $X$  e  $Y$  sono campi lisci di vettori tangenti, anche il campo di vettori  $D_X Y$  deve essere liscio. Abbiamo già incontrato un esempio di connessione, e precisamente la connessione Riemanniana su una superficie in  $\mathbb{R}^3$ . Un altro esempio è fornito dall'operatore  $\nabla$ , che è una connessione su  $\mathbb{R}^3$ . Sia  $D$  una connessione su una varietà differenziabile  $M$ . Come per le superficie in  $\mathbb{R}^3$ , dati campi di vettori  $X, Y$  e  $Z$ , poniamo

$$R(X, Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]} Z.$$

Per motivi che saranno chiariti più avanti,  $R(X, Y)Z$  si chiama *tensore di curvatura* di  $D$ . Come nel caso delle superficie in  $\mathbb{R}^3$ , il valore di  $R(X, Y)Z$  in un punto  $p \in M$  dipende solo da  $X_p, Y_p$  e  $Z_p$ ; inoltre  $R(X_p, Y_p)Z_p$  è lineare in ognuna delle variabili. Infine,  $R(X, Y)Z$  è antisimmetrico in  $X$  e  $Y$ .

Sia  $M$  una varietà differenziabile. Una *metrica Riemanniana* su  $M$  è il dato di un prodotto scalare definito positivo  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  su ogni spazio tangente  $T_p M$ ,  $p \in M$ , che dipenda in modo liscio da  $p$  nel senso che, se  $X$  e  $Y$  sono campi di vettori lisci,  $\langle X, Y \rangle$  deve essere una funzione liscia. Una *varietà Riemanniana* è una varietà differenziabile munita di una metrica Riemanniana. Abbiamo già incontrato esempi di varietà Riemanniane. Un primo esempio è dato dagli spazi  $\mathbb{R}^n$ , muniti della metrica euclidea. Un secondo esempio, assai più interessante, è dato dalle superficie in  $\mathbb{R}^3$ , muniti della metrica indotta da quella euclidea di  $\mathbb{R}^3$ .



Una varietà Riemanniana è dotata di una connessione canonica, la cosiddetta *connessione Riemanniana* (o *connessione metrica*). Siano infatti  $x_1, \dots, x_n$  coordinate locali su  $M$ . È d'uso scrivere

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle.$$

La matrice  $(g_{ij})$  è simmetrica definita positiva e determina la metrica riemanniana (sull'aperto dove  $x_1, \dots, x_n$  sono coordinate locali). In effetti, se  $\sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  e  $\sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  sono vettori tangenti, si deve avere

$$\left\langle \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle = \sum_{i,j} g_{ij} a_i b_j.$$

Scriveremo  $(g^{ij})$  per indicare la matrice inversa di  $(g_{ij})$ . Se  $D$  è una connessione su  $M$ , possiamo scrivere

$$D_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

I coefficienti  $\Gamma_{ij}^k$  si chiamano *simboli di Christoffel di seconda specie*. Essi determinano completamente la connessione (sull'aperto dove  $x_1, \dots, x_n$  sono coordinate locali). Infatti, se  $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  è un vettore tangente e  $Y = \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  è un campo di vettori si deve avere

$$\begin{aligned} D_X Y &= \sum_{i,j} a_i D_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left( b_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ (6.11) \quad &= \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i,j,k} a_i b_j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

I *simboli di Christoffel di prima specie*  $\Gamma_{ijh}$  sono definiti come

$$\Gamma_{ijh} = \sum_k g_{hk} \Gamma_{ij}^k.$$

I simboli di Christoffel di seconda specie possono essere ricavati da quelli di prima specie usando la formula

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_h g^{kh} \Gamma_{ijh}.$$

Supponiamo ora che la connessione  $D$  sia *compatibile con la metrica*, cioè che si abbia, per ogni vettore tangente  $X$  e ogni coppia di campi di vettori tangenti  $Y$  e  $Z$ ,

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle D_X Y, Z \rangle + \langle Y, D_X Z \rangle.$$

Supponiamo inoltre che  $D$  sia *simmetrica* (o *priva di torsione*), cioè che si abbia, per ogni coppia di campi di vettori  $X$  e  $Y$ ,

$$D_X Y - D_Y X = [X, Y].$$

Notiamo che questa condizione è equivalente a che si abbia

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k,$$

o, che è lo stesso,  $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}$ , per ogni  $i, j$  e  $k$ . Infatti, se  $D$  è simmetrica si ha

$$\sum_k (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \frac{\partial}{\partial x_k} = D_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - D_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \left[ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0,$$

e dunque  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ . Viceversa, se questa condizione è verificata, la (6.11) mostra che  $D$  è simmetrica. L'ipotesi che  $D$  sia compatibile con la metrica mostra che

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_l \Gamma_{ki}^l \frac{\partial}{\partial x_l}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_l \Gamma_{kj}^l \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle \\ &= \sum_l \Gamma_{ki}^l g_{lj} + \sum_l \Gamma_{kj}^l g_{il} \\ &= \Gamma_{kij} + \Gamma_{kji} \end{aligned}$$

Usando la simmetria dei simboli di Christoffel se ne ricava

$$(6.12) \quad \Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right).$$

In conclusione la connessione  $D$  è completamente determinata dalla metrica Riemanniana. Viceversa, lasciamo al lettore di verificare che la (6.12) e la (6.11) definiscono una connessione sull'aperto di  $M$  dove sono definite le coordinate  $x_1, \dots, x_n$ . Ogni punto di  $M$  ha dunque un intorno su cui vi è una connessione simmetrica e compatibile con la metrica. Il fatto, appena dimostrato, che una connessione con queste caratteristiche, se esiste, è unica, mostra che queste connessioni "si incollano" e danno una connessione simmetrica e compatibile con la metrica su tutto  $M$ . Abbiamo dunque dimostrato il seguente risultato.

**PROPOSIZIONE (6.13).** *Sia  $M$  una varietà Riemanniana. Su  $M$  vi è una e una sola connessione  $D$  tale che, per ogni vettore tangente  $X$  e ogni coppia di campi di vettori  $Y$  e  $Z$  si abbia*

$$\begin{aligned} X \langle Y, Z \rangle &= \langle D_X Y, Z \rangle + \langle Y, D_X Z \rangle, \\ D_Y Z - D_Z Y &= [Y, Z]. \end{aligned}$$

La connessione la cui esistenza è asserita da (6.13) è detta *connessione Riemanniana* (o *connessione metrica*) su  $M$ . D'ora in poi, quando parleremo di una connessione su una varietà Riemanniana, intenderemo sempre la connessione metrica, salvo esplicito avviso contrario. Segue da (6.13) che l'operatore  $\nabla$  definito all'inizio del capitolo non è altro che la connessione Riemanniana su  $\mathbb{R}^3$ , munito della metrica euclidea. Segue da (6.13) e dalle (6.4) e (6.5) che, data una superficie  $S$  in  $\mathbb{R}^3$ , l'operatore  $D$  definito dalla formula

(6.2) è la connessione Riemanniana su  $S$ , quando si prenda come metrica Riemanniana su  $S$  quella indotta dalla metrica euclidea di  $\mathbb{R}^3$ .

Alla luce della proposizione (6.13), il Theorema Egregium afferma, in particolare, che la curvatura Gaussiana di una superficie è completamente nota una volta che sia nota la prima forma fondamentale della superficie stessa. Più esattamente, segue dal Theorema Egregium e dalle formule esplicite (6.12) che la curvatura Gaussiana è una funzione razionale degli elementi della matrice  $(g_{ij})$  e delle loro derivate prime e seconde. Da un altro punto di vista, il Theorema Egregium può essere preso come *definizione* della curvatura Gaussiana di una superficie munita di una metrica Riemanniana, anche quando questa non sia data come sottovarietà di  $\mathbb{R}^3$ .

Sia  $M$  una varietà Riemanniana. Il *tensore di curvatura di Riemann* (o, più brevemente *tensore di Riemann*) di  $M$  è il tensore di curvatura della connessione Riemanniana su  $M$ . Il tensore di Riemann gode delle seguenti proprietà di simmetria.

PROPOSIZIONE (6.14) (SIMMETRIE DEL TENSORE DI CURVATURA DI RIEMANN). *Siano  $X, Y, Z$  e  $W$  campi di vettori sulla varietà Riemanniana  $M$ . Allora*

- a)  $R(X, Y)Z + R(Y, X)Z = 0,$
- b)  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle R(X, Y)W, Z \rangle = 0,$
- c)  $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0,$
- d)  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle .$

Si è già osservato che a) è verificata. Dato che il valore di  $R(X, Y)Z$  in un punto dipende solo dal valore di  $X, Y$  e  $Z$  nel punto stesso, per dimostrare le altre identità possiamo supporre che tutte le parentesi di Lie tra  $X, Y, Z$  e  $W$  siano nulle. Dimostriamo c).

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y \\ &= D_X D_Y Z - D_Y D_X Z + D_Y D_Z X - D_Z D_Y X + D_Z D_X Y - D_X D_Z Y \\ &= D_X (D_Y Z - D_Z Y) - D_Y (D_X Z - D_Z X) + D_Z (D_X Y - D_Y X) \\ &= D_X [Y, Z] - D_Y [X, Z] + D_Z [X, Y] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dimostriamo ora b); è chiaro che basta mostrare che  $\langle R(X, Y)Z, Z \rangle = 0$ .

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, Z \rangle &= \langle D_X D_Y Z, Z \rangle - \langle D_Y D_X Z, Z \rangle \\ &= X \langle D_Y Z, Z \rangle - \langle D_Y Z, D_X Z \rangle - Y \langle D_X Z, Z \rangle + \langle D_X Z, D_Y Z \rangle \\ &= \frac{1}{2} XY \langle Z, Z \rangle - \frac{1}{2} YX \langle Z, Z \rangle \\ &= \frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Passiamo ora a d). Valgono le seguenti identità

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle R(Y, Z)X, W \rangle + \langle R(Z, X)Y, W \rangle &= 0, \\ \langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle R(Y, W)Z, X \rangle + \langle R(X, W)Y, Z \rangle &= 0, \\ \langle R(Y, W)Z, X \rangle + \langle R(Y, Z)X, W \rangle + \langle R(Z, W)X, Y \rangle &= 0, \\ \langle R(X, W)Y, Z \rangle + \langle R(Z, X)Y, W \rangle + \langle R(Z, W)X, Y \rangle &= 0. \end{aligned}$$

La prima tra queste non è altro che la  $c$ ). Le altre si riducono anch'esse alla  $c$ ) per mezzo della  $a$ ) e della  $b$ ). Per esempio, la seconda identità segue da

$$R(X, W)Y + R(W, Y)X + R(Y, X)W = 0$$

se si tiene conto del fatto che  $\langle R(Y, W)Z, X \rangle = \langle R(W, Y)X, Z \rangle$  e  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Y, X)W, Z \rangle$ . Sommando le prime due identità e sottraendo dal risultato le ultime due si ottiene

$$2 \langle R(X, Y)Z, W \rangle - 2 \langle R(Z, W)X, Y \rangle = 0,$$

come si voleva.

Sulla varietà Riemanniana  $M$  fissiamo un sistema di coordinate locali  $x_1, \dots, x_n$  e definiamo i *simboli di Riemann*  $R_{ijh}^k$  tramite la formula

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_h} = \sum_k R_{ijh}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Porremo anche

$$R_{ijhk} = \sum_l g_{kl} R_{ijh}^l.$$

Si ha

$$\begin{aligned} R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_h} &= D_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left( \sum_l \Gamma_{jh}^l \frac{\partial}{\partial x_l} \right) - D_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \left( \sum_l \Gamma_{ih}^l \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \\ &= \sum_l \frac{\partial \Gamma_{jh}^l}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_l} - \sum_l \frac{\partial \Gamma_{ih}^l}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_l} + \sum_l \Gamma_{jh}^l \Gamma_{il}^r \frac{\partial}{\partial x_r} - \sum_l \Gamma_{ih}^l \Gamma_{jl}^r \frac{\partial}{\partial x_r}, \end{aligned}$$

e quindi

$$(6.15) \quad R_{ijh}^k = \frac{\partial \Gamma_{jh}^k}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{ih}^k}{\partial x_j} - \sum_l (\Gamma_{ih}^l \Gamma_{lj}^k - \Gamma_{jh}^l \Gamma_{li}^k).$$

ESEMPIO (6.16). Calcoliamo il tensore di Riemann per una metrica che sia *conforme* a quella euclidea di  $\mathbb{R}^n$ , per una metrica cioè che, in opportune coordinate  $x_1, \dots, x_n$ , sia della forma  $g_{ij} = f \delta_{ij}$ , dove  $f$  è una funzione liscia. La formula (6.12) dà

$$\begin{aligned} \Gamma_{jh}^k &= \frac{1}{2f} \sum_l \delta_{kl} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \delta_{hl} + \frac{\partial f}{\partial x_h} \delta_{jl} - \frac{\partial f}{\partial x_l} \delta_{jh} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \delta_{hk} \frac{\partial \log f}{\partial x_j} + \delta_{jk} \frac{\partial \log f}{\partial x_h} - \delta_{jh} \frac{\partial \log f}{\partial x_k} \right). \end{aligned}$$

Dopo conti abbastanza dolorosi, che non riproduciamo, la (6.15) dà

$$\begin{aligned} 4R_{ijh}^k &= \delta_{jk} \left( 2 \frac{\partial^2 \log f}{\partial x_i \partial x_h} - \frac{\partial \log f}{\partial x_i} \frac{\partial \log f}{\partial x_h} \right) - \delta_{jh} \left( 2 \frac{\partial^2 \log f}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial \log f}{\partial x_i} \frac{\partial \log f}{\partial x_k} \right) \\ &\quad - \delta_{ik} \left( 2 \frac{\partial^2 \log f}{\partial x_j \partial x_h} - \frac{\partial \log f}{\partial x_j} \frac{\partial \log f}{\partial x_h} \right) + \delta_{ih} \left( 2 \frac{\partial^2 \log f}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial \log f}{\partial x_j} \frac{\partial \log f}{\partial x_k} \right) \\ &\quad + (\delta_{ih} \delta_{jk} - \delta_{jh} \delta_{ik}) \sum_l \left( \frac{\partial \log f}{\partial x_l} \right)^2. \end{aligned}$$

ESEMPIO (6.17) (IL DISCO DI POINCARÉ). Specializziamo al caso bidimensionale le considerazioni svolte nell'esempio precedente, di cui conserviamo le notazioni. Per il Theorema Egregium la curvatura Gaussiana è

$$K = \frac{R_{1221}}{\det(g_{ij})} = \frac{1}{f} R_{122}^1.$$

D'altra parte, i calcoli svolti nell'esempio (6.16) mostrano che

$$\begin{aligned} R_{122}^1 &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \log f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \log f}{\partial x_2^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \Delta(\log f), \end{aligned}$$

dove  $\Delta$  è l'operatore di Laplace. Dunque la curvatura Gaussiana è

$$(6.18) \quad K = -\frac{1}{2f} \Delta(\log f).$$

Consideriamo ora il caso particolare del *disco di Poincaré*, cioè del disco unitario  $B$  in  $\mathbb{R}^2$ , munito della metrica

$$g_{ij} = \frac{4}{(1 - \|x\|^2)^2} \delta_{ij},$$

dove  $x = (x_1, x_2)$ . Si ha

$$\begin{aligned} \Delta \left( \log \left( \frac{4}{(1 - \|x\|^2)^2} \right) \right) &= 2 \Delta \left( \log \left( \frac{1}{1 - \|x\|^2} \right) \right) \\ &= 2 \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( (1 - \|x\|^2) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{1 - \|x\|^2} \right) \right) \\ &= 2 \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{2x_i}{1 - \|x\|^2} \right) \\ &= \frac{8}{1 - \|x\|^2} + \sum_i \frac{8x_i^2}{(1 - \|x\|^2)^2} \\ &= \frac{8}{(1 - \|x\|^2)^2}. \end{aligned}$$

La formula (6.18) dà quindi

$$K = -1.$$

Più in generale, gli stessi calcoli mostrano che la metrica

$$g_{ij} = \frac{4}{c(1 - \|x\|^2)^2} \delta_{ij}$$

su  $B$  ha curvatura Gaussiana costante pari a  $-c$ .

Gli esempi precedenti, e in particolare (6.16), mostrano che i calcoli necessari per trovare la curvatura Gaussiana, o più in generale il tensore di Riemann, di una varietà Riemanniana possono essere abbastanza pesanti. A volte può essere di aiuto il seguente risultato.

LEMMA (6.19). *Sia  $M$  una varietà Riemanniana di dimensione  $n$ , e sia  $p$  un suo punto. Esistono coordinate locali  $u_1, \dots, u_n$  centrate in  $p$  rispetto alle quali la prima forma fondamentale è data da*

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j} \right\rangle = \delta_{ij} + \varphi_{ij},$$

dove le funzioni  $\varphi_{ij}$  e le loro derivate prime si annullano nel punto  $p$ .

È chiaro che si possono trovare coordinate  $x_1, \dots, x_n$  centrate in  $p$  rispetto alle quali la prima forma fondamentale sia data da una matrice  $(h_{ij})$  con  $h_{ij}(0) = \delta_{ij}$ . Ciò che non è a priori evidente è che si può fare in modo che anche le derivate prime delle  $h_{ij}$  si annullino per  $x_1 = \dots = x_n = 0$ . Sceglieremo coordinate  $u_1, \dots, u_n$  legate alle  $x_1, \dots, x_n$  da relazioni della forma

$$x_i = u_i + f_i(u_1, \dots, u_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

dove le  $f_i$  sono polinomi omogenei di secondo grado da determinarsi. Si ha allora

$$\frac{\partial}{\partial u_i} = \sum_j \left( \delta_{ij} + \frac{\partial f_j}{\partial u_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Scriviamo

$$h_{ij} = \delta_{ij} + \alpha_{ij}(x_1, \dots, x_n) + O(2) = \delta_{ij} + \alpha_{ij}(u_1, \dots, u_n) + O(2),$$

dove le  $\alpha_{ij}$  sono funzioni lineari e  $O(2)$  sta per infinitesimi di ordine superiore al primo; si noti che  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ . Allora

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \sum_k \left( \delta_{ik} + \frac{\partial f_k}{\partial u_i} \right) \sum_m \left( \delta_{jm} + \frac{\partial f_m}{\partial u_j} \right) (\delta_{km} + \alpha_{km}(u_1, \dots, u_n) + O(2)) \\ &= \sum_{k,m} \left( \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{km} + \delta_{ik} \delta_{jm} \alpha_{km}(u_1, \dots, u_n) + \delta_{ik} \frac{\partial f_m}{\partial u_j} \delta_{km} + \frac{\partial f_k}{\partial u_i} \delta_{jm} \delta_{km} \right) + O(2) \\ &= \delta_{ij} + \alpha_{ij}(u_1, \dots, u_n) + \frac{\partial f_i}{\partial u_j} + \frac{\partial f_j}{\partial u_i} + O(2). \end{aligned}$$

Bisogna dunque mostrare che si possono scegliere le  $f_i$  in modo che

$$\alpha_{ij}(u_1, \dots, u_n) + \frac{\partial f_i}{\partial u_j} + \frac{\partial f_j}{\partial u_i} = 0$$

per ogni scelta di  $i$  e  $j$ . In altre parole bisogna dimostrare la suriettività dell'applicazione lineare  $T$  dallo spazio delle  $n$ -uple di polinomi quadratici omogenei a quello delle matrici simmetriche di funzioni lineari che associa ad ogni  $n$ -upla  $(f_1, \dots, f_n)$  la matrice

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j} + \frac{\partial f_j}{\partial u_i}.$$

Notiamo che entrambi gli spazi vettoriali in gioco hanno dimensione  $n(n^2 + n)/2$ . Basta quindi mostrare che  $T$  è iniettiva, cioè che, se

$$(6.20) \quad \frac{\partial f_i}{\partial u_j} + \frac{\partial f_j}{\partial u_i} = 0 \quad \text{per ogni } i \text{ e ogni } j,$$

allora tutti gli  $f_h$  sono nulli. Per farlo basta osservare che dalla (6.20) segue che, per ogni terna  $i, j, h$  di indici,

$$\frac{\partial^2 f_h}{\partial u_i \partial u_j} = -\frac{\partial^2 f_j}{\partial u_i \partial u_h} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial u_h} = -\frac{\partial^2 f_h}{\partial u_i \partial u_j},$$

e quindi che tutte le derivate seconde di ogni  $f_h$  sono identicamente nulle. Ciò conclude la dimostrazione di (6.19).

Consideriamo ora una delle possibili generalizzazioni del concetto di curvatura Gaussiana a varietà Riemanniane di dimensione superiore a 2, e cioè la nozione di curvatura sezionale. Sia  $M$  una varietà Riemanniana di dimensione  $n \geq 2$ . Dato un punto  $p \in M$  e un sottospazio bidimensionale  $\sigma$  di  $T_p M$ , la *curvatura sezionale* di  $M$  lungo  $\sigma$  è definita come

$$K(\sigma) = \frac{\langle R(X_1, X_2)X_2, X_1 \rangle}{\|X_1\|^2 \|X_2\|^2 - \langle X_1, X_2 \rangle^2},$$

dove  $\{X_1, X_2\}$  è una base di  $\sigma$ . In particolare, quando  $M$  è una superficie,  $K(\sigma)$  non è altro che la curvatura Gaussiana di  $M$ . Naturalmente bisogna dimostrare che  $K(\sigma)$  è indipendente dalla scelta di una base per  $\sigma$ . Sia  $\{Y_1, Y_2\}$  un'altra base, scriviamo

$$Y_i = \sum_j a_{ij} X_j,$$

e indichiamo con  $A$  la matrice  $(a_{ij})$ . Allora

$$\|Y_1\|^2 \|Y_2\|^2 - \langle Y_1, Y_2 \rangle^2 = (\det A)^2 \left( \|X_1\|^2 \|X_2\|^2 - \langle X_1, X_2 \rangle^2 \right),$$

mentre

$$\langle R(Y_1, Y_2)Y_2, Y_1 \rangle = \sum_{i_1, i_2, j_1, j_2} a_{1i_1} a_{2i_2} a_{1j_1} a_{2j_2} \langle R(X_{i_1}, X_{i_2})X_{j_2}, X_{j_1} \rangle.$$

D'altra parte, visto che  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle$  è antisimmetrico nelle prime due variabili e nelle ultime due variabili, si ha

$$\langle R(Y_1, Y_2)Y_2, Y_1 \rangle = \sum_{i, j} \text{Sgn}(i)\text{Sgn}(j)a_{1i_1}a_{2i_2}a_{1j_1}a_{2j_2} \langle R(X_1, X_2)X_2, X_1 \rangle ,$$

dove  $\text{Sgn}(i)$  è il segno di  $i$  se  $i$  è una permutazione e vale zero se  $i_1 = i_2$ . In definitiva

$$\langle R(Y_1, Y_2)Y_2, Y_1 \rangle = (\det A)^2 \langle R(X_1, X_2)X_2, X_1 \rangle ,$$

e quindi

$$\frac{\langle R(X_1, X_2)X_2, X_1 \rangle}{\|X_1\|^2\|X_2\|^2 - \langle X_1, X_2 \rangle^2} = \frac{\langle R(Y_1, Y_2)Y_2, Y_1 \rangle}{\|Y_1\|^2\|Y_2\|^2 - \langle Y_1, Y_2 \rangle^2} .$$

ESEMPIO (6.21) (LE SFERE). Consideriamo la sfera unitaria  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . La metrica euclidea su  $\mathbb{R}^{n+1}$  induce su  $S^n$  una metrica Riemanniana. Dico che questa metrica ha curvatura sezionale costante e uguale a 1. Daremo due schizzi di dimostrazione di questa affermazione. La prima dimostrazione è di natura computazionale. Adottiamo le notazioni dell'esempio (4.2). Calcoliamo esplicitamente la metrica di  $S^n$  nelle coordinate  $\eta_1, \dots, \eta_n$  date dalla proiezione stereografica  $\pi_p$ . Si calcola facilmente che, se  $v = (v_1, \dots, v_n)$  è un vettore tangente a  $\mathbb{R}^n$  in un punto  $\eta$ , allora  $v = d(\pi_p)(X)$ , dove

$$X = \frac{1}{(\|\eta\|^2 + 1)^2} (4 \langle \eta, v \rangle, 2\|\eta\|^2 v - 4 \langle \eta, v \rangle \eta + 2v) .$$

In altri termini, questo  $X$  “è” il vettore tangente  $\sum v_i \frac{\partial}{\partial \eta_i}$ , o, più esattamente,  $X = dj(\sum v_i \frac{\partial}{\partial \eta_i})$ , dove  $j : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  è l'inclusione. Ne segue che, se  $\sum w_i \frac{\partial}{\partial \eta_i}$  è un altro vettore tangente a  $S^n$  nel punto di coordinate  $\eta$ , e poniamo  $w = (w_1, \dots, w_n)$ , il prodotto scalare di  $\sum v_i \frac{\partial}{\partial \eta_i}$  e  $\sum w_i \frac{\partial}{\partial \eta_i}$  risulta uguale al prodotto scalare euclideo di  $X$  e di

$$Y = \frac{1}{(\|\eta\|^2 + 1)^2} (4 \langle \eta, w \rangle, 2\|\eta\|^2 w - 4 \langle \eta, w \rangle \eta + 2w) ,$$

cioè a

$$\frac{4 \langle v, w \rangle}{(1 + \|\eta\|^2)^2} .$$

Dunque, nelle coordinate  $\eta$ , la metrica di  $S^n$  è della forma

$$g_{ij} = \frac{4\delta_{ij}}{(1 + \|\eta\|^2)^2} .$$

La curvatura sezionale di questa metrica si può ora calcolare usando le formule ricavate nell'esempio (6.16). I calcoli risultano particolarmente semplici se si nota che ci si può limitare a fare il calcolo per  $\eta = 0$ . In effetti, dato che il nostro problema è quello di calcolare le curvatures sezionali in un punto di  $S^n$ , si può supporre fin dall'inizio, dopo un opportuno cambiamento di coordinate, che il punto in questione sia il “polo sud”  $(0, 1)$ .



La seconda dimostrazione del fatto che la curvatura sezionale di  $S^n$  è 1 è di natura più concettuale e si basa sul fatto che  $S^n$  è una *ipersuperficie* in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , cioè una sottovarietà differenziabile di  $\mathbb{R}^{n+1}$  di dimensione  $n$ . In generale, se  $V$  è una ipersuperficie in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , nell'intorno di ogni punto di  $V$  è determinato, a meno del segno, un campo  $N$  di vettori unitari normali a  $V$ . Esattamente come per le superficie in  $\mathbb{R}^3$  si può definire una applicazione di Weingarten  $LX = \nabla_X N$ , dove  $\nabla$  è la connessione metrica su  $\mathbb{R}^{n+1}$  con la metrica euclidea. Esattamente come per le superficie in  $\mathbb{R}^3$ , la connessione metrica su  $V$ , rispetto alla metrica indotta da quella euclidea su  $\mathbb{R}^{n+1}$ , è data dalla equazione di Gauss (6.3), mentre il tensore di Riemann è dato dalla equazione (6.7). La stessa dimostrazione che nel caso  $n = 2$  dà il Theorema Egregium dice in questo caso che, se  $\sigma$  è il piano in  $T_p M$  generato da due vettori  $X$  e  $Y$ , allora la curvatura sezionale lungo  $\sigma$  vale

$$(6.22) \quad K(\sigma) = \frac{\langle LX, X \rangle \langle LY, Y \rangle - \langle LX, Y \rangle^2}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2}.$$

Nel caso particolare in cui  $V = S^n$ , per ogni punto  $p \in S^n$  si ha che  $N_p = \pm p$ . Se scegliamo  $N_p = p$ , ne ricaviamo che l'applicazione di Weingarten è l'identità, e la (6.22) dà  $K(\sigma) \equiv 1$ .

ESEMPIO (6.23) (LE PSEUDOSFERE). Consideriamo  $\mathbb{R}^{n+1}$  come l'insieme delle coppie  $(x, y)$ , dove  $y = (y_1, \dots, y_n)$  è un punto di  $\mathbb{R}^n$ . Indicheremo con  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sia il prodotto scalare euclideo su  $\mathbb{R}^n$  che il prodotto scalare "Lorentziano"

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = \langle y, y' \rangle - xx'$$

su  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Indichiamo con  $M$  l'insieme dei punti  $\xi = (x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tali che

$$(6.24) \quad \langle \xi, \xi \rangle = -1, \quad x > 0.$$

Osserviamo che  $M$  è una sottovarietà differenziabile di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Infatti le derivate parziali dell'equazione che definisce  $M$  si annullano tutte solo nell'origine di  $\mathbb{R}^{n+1}$ , che non appartiene a  $M$ . Se poi  $\gamma(t)$  è un cammino su  $M$ , derivando la (6.24) si vede che  $\langle \xi, \gamma'(0) \rangle = 0$ , dove  $\xi = \gamma(0)$ . Dunque

$$T_\xi M = \{u \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle \xi, u \rangle = 0\}.$$

Notiamo che, se  $u = (v, w) \in T_\xi M$  e  $\xi = (x, y)$ , usando la disuguaglianza di Schwarz si ottiene

$$\begin{aligned} x^2 v^2 &= \langle y, w \rangle^2 \\ &\leq \|y\|^2 \|w\|^2 \\ &= x^2 \|w\|^2 - \|w\|^2. \end{aligned}$$

Dato che  $x^2 = 1 + \|y\|^2 \geq 1$ , se ne ricava che

$$\|u\|^2 = \|w\|^2 - v^2 \geq \frac{\|w\|^2}{x^2}.$$

D'altra parte, se  $w = 0$  allora  $xv = 0$ , quindi  $v = 0$  e  $u = 0$ ; in definitiva, il prodotto scalare su  $\mathbb{R}^{n+1}$  induce un prodotto scalare definito positivo su tutti gli spazi tangenti a  $M$ , cioè una metrica Riemanniana su  $M$ . Dico che la curvatura sezionale di questa metrica è costante e pari a  $-1$ . La dimostrazione, salvo alcuni cambiamenti di segno, è formalmente la stessa fatta per mostrare che la curvatura sezionale di  $S^n$  è 1. Dato  $\xi \in M$ , un vettore normale a  $M$  in  $\xi$ , cioè un vettore  $N_\xi$  tale che  $\langle N_\xi, u \rangle = 0$  per ogni vettore  $u$  tangente a  $M$  in  $\xi$ , è  $\xi$  stesso. Dunque l'"applicazione di Weingarten"  $Lu = \nabla_u N$  è l'identità. La connessione metrica su  $M$  è data da un analogo della equazione di Gauss, che differisce da quella ordinaria solo per un segno, e cioè da

$$D_X Y = \nabla_X Y - \langle LX, Y \rangle N.$$

La differenza di segno è dovuta al fatto che  $\|N\|^2$  vale  $-1$  e non 1. Vale un analogo della (6.7) e cioè

$$R(X, Y)Z = \langle LX, Z \rangle LY - \langle LY, Z \rangle LX.$$

Anche questa formula differisce dalla (6.7) per un segno; ciò dipende dal cambiamento di segno nella equazione di Gauss. Dunque, se  $\sigma$  è un piano in  $T_\xi M$  e  $X$  e  $Y$  ne sono una base, si ha

$$\begin{aligned} K(\sigma) &= \frac{\langle \langle LX, Y \rangle LY - \langle LY, Y \rangle LX, X \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} \\ &= \frac{\langle X, Y \rangle \langle Y, X \rangle - \langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Si può dare una descrizione alternativa della varietà Riemanniana  $M$ . Indichiamo con  $\pi$  la proiezione stereografica di  $M$  dal punto  $(-1, 0)$  sull'iperpiano di equazione  $x = 0$ , che identifichiamo a  $\mathbb{R}^n$  nel modo ovvio. Se  $(x, y)$  è un punto di  $M$ , l'equazione parametrica della retta per  $(-1, 0)$  e  $(x, y)$  è  $(t(x+1) - 1, ty)$ , e il punto di intersezione di questa retta con l'iperpiano  $x = 0$  è il punto  $(0, \frac{y}{x+1})$ . Dunque

$$\pi(x, y) = \frac{y}{x+1}.$$

Notiamo che  $\pi$  è un diffeomorfismo di  $M$  sulla palla unitaria in  $\mathbb{R}^n$ , che indichiamo con  $B$ . Infatti, se  $(x, y) \in M$ ,

$$\left\| \frac{y}{x+1} \right\|^2 = \frac{x^2 - 1}{(x+1)^2} = \frac{x-1}{x+1},$$

che è minore di 1 dato che  $x > 0$ . D'altra parte una inversa di  $\pi : M \rightarrow B$  è

$$\pi^{-1}(\eta) = \left( \frac{1 + \|\eta\|^2}{1 - \|\eta\|^2}, \frac{2\eta}{1 - \|\eta\|^2} \right).$$

La metrica Riemanniana su  $M$  può essere "trapiantata" su  $B$  tramite  $\pi$ . La metrica che ne risulta su  $B$  è

$$g_{ij} = \frac{4\delta_{ij}}{(1 - \|\eta\|^2)^2}.$$

I calcoli per mostrarlo sono, tranne qualche cambiamento di segno, come gli analoghi calcoli per  $S^n$ .

**Esercizi**

- 6.1) Calcolare i simboli di Christoffel per le coordinate polari nel piano.
- 6.2) Sia  $S$  una superficie. Si supponga che vi siano su  $S$  due campi di vettori  $X$  e  $Y$  linearmente indipendenti e tali che

$$[X, Y] = D_Y D_X X = 0.$$

Si mostri che  $S$  ha curvatura Gaussiana nulla se e solo se  $\langle D_X D_X Y, Y \rangle = 0$ .

- 6.3) Calcolare i simboli di Christoffel per una superficie di rotazione:

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = h(u).$$

- 6.4) Sia  $X$  il disco di Poincaré. Si descriva il luogo di tutti i punti di  $X$  che hanno distanza 1 (nella metrica di Poincaré) dal punto  $1/2$ .
- 6.5) Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione 2 con metrica Riemanniana  $\ll, \gg$ , e si consideri la nuova metrica

$$\langle, \rangle = f \ll, \gg,$$

dove  $f$  è una funzione  $C^\infty$  positiva. Si calcolino i simboli di Christoffel e la curvatura Gaussiana di  $\langle, \rangle$  in funzione di quelli di  $\ll, \gg$ , di  $f$  e delle sue derivate.

- 6.6) Sia  $(x, y, z) = F(u, v)$  la rappresentazione parametrica di una superficie  $S$  in  $\mathbb{R}^3$ . Si supponga che il campo  $\partial F / \partial u$  di vettori tangenti a  $S$  sia parallelo (cioè che  $D_X(\partial F / \partial u)$  sia nullo per ogni vettore  $X$  tangente a  $S$ ). Si mostri che la curvatura di  $S$  è identicamente nulla.
- 6.7) Siano  $u_1$  e  $u_2$  coordinate locali su una superficie  $M$  in  $\mathbb{R}^3$ . Si supponga che, in queste coordinate, la prima forma fondamentale sia data da

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = \lambda^2, \quad g_{12} = 0.$$

Si mostri che la curvatura Gaussiana di  $M$  è

$$-\frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_1^2}.$$

- 6.8) Si trovino tutte le metriche Riemanniane su un intorno dell'origine in  $\mathbb{R}^2$  che siano della forma

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = \lambda^2$$

e abbiano curvatura  $\pm 1$ . (Suggerimento: mostrare che la curvatura vale  $-\frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_1^2}$ )

- 6.9) Sia  $M$  una varietà Riemanniana bidimensionale, e sia  $p$  un suo punto. Siano  $r$  e  $\vartheta$  coordinate polari geodetiche su  $M$  centrate in  $p$ ; in altre parole, per  $r$  piccolo il punto di coordinate  $(r, \vartheta)$  è  $\exp_p(\cos(\vartheta)v_1 + \sin(\vartheta)v_2)$ , dove  $v_1, v_2$  è una base ortonormale dello spazio tangente a  $M$  nel punto  $p$ . Supponiamo che la curvatura Gaussiana di  $M$  vicino al punto  $p$  sia

$$K = \frac{-6}{1+r^2}.$$

Per ogni numero reale sufficientemente piccolo  $c$  si calcoli la lunghezza della curva chiusa  $\gamma_c$  di equazione  $r = c$ .

- 6.10) Sia  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie con coordinate locali  $x_1, x_2$  rispetto alle quali la prima forma fondamentale abbia le proprietà che  $g_{22}$  non dipende da  $x_2$  e che  $\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} = 2\frac{\partial g_{12}}{\partial x_2}$ . Mostrare che le curve  $x_1 = \text{costante}$ ,  $x_2 = t$  sono geodetiche su  $S$ .

## 7. Superficie di curvatura costante

Siano  $M$  una varietà Riemanniana di dimensione  $n$  e  $p$  un suo punto. Se  $U$  è un intorno sufficientemente piccolo di  $p$  esistono su  $U$  campi di vettori ortonormali  $X_1, \dots, X_n$ , tali cioè che  $\langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}$ . Per vederlo, basta considerare campi di vettori  $Y_1, \dots, Y_n$  su un intorno di  $p$  che siano ovunque indipendenti e applicare loro il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmid. Basta porre cioè

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{Y_1}{\|Y_1\|} \\ \xi_2 &= Y_2 - \langle Y_2, X_1 \rangle X_1 \\ X_2 &= \frac{\xi_2}{\|\xi_2\|} \\ &\dots \\ \xi_h &= Y_h - \sum_{i=1}^{h-1} \langle Y_h, X_i \rangle X_i \\ X_h &= \frac{\xi_h}{\|\xi_h\|} \\ &\dots \end{aligned}$$

Diremo che  $X_1, \dots, X_n$  è un *riferimento ortonormale* per  $TM$ . Scriviamo

$$D_{X_i} X_j = \sum a_{ij}^h X_h.$$

Differenziando le relazioni di ortogonalità tra gli  $X_i$  si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= X_k (\langle X_i, X_j \rangle) \\ &= \langle D_{X_k} X_i, X_j \rangle + \langle X_i, D_{X_k} X_j \rangle \\ &= \sum_h a_{ki}^h \langle X_h, X_j \rangle + \sum_h a_{kj}^h \langle X_i, X_h \rangle \\ &= a_{ki}^j + a_{kj}^i. \end{aligned}$$

Consideriamo il caso particolare in cui  $M$  è una superficie. In questo caso poniamo  $X = X_1$  e  $Y = X_2$ . I soli coefficienti  $a_{ij}^k$  che non siano nulli sono  $a_{11}^2 = -a_{12}^1$ , che indicheremo con  $f$ , e  $a_{22}^1 = -a_{21}^2$ , che indicheremo con  $g$ . Si ha dunque

$$(7.1) \quad D_X X = fY, \quad D_Y Y = gX, \quad D_X Y = -fX, \quad D_Y X = -gY.$$

Notiamo che

$$(7.2) \quad [X, Y] = D_X Y - D_Y X = gY - fX.$$

Dunque la curvatura Gaussiana di  $M$  è

$$\begin{aligned}
 (7.3) \quad K &= \langle D_X D_Y Y - D_Y D_X Y - D_{[X,Y]} Y, X \rangle \\
 &= \langle D_X(gX) + D_Y(fX) + fD_X Y - gD_Y Y, X \rangle \\
 &= \langle X(g)X + gD_X X + Y(f)X + fD_Y X - f^2 X - g^2 X, X \rangle \\
 &= Y(f) + X(g) - f^2 - g^2.
 \end{aligned}$$

Supponiamo ora che  $M$  sia una superficie in  $\mathbb{R}^3$ . Sia  $N$  un campo di vettori unitari normali a  $M$  su un aperto  $U$ . Per ogni  $p \in U$  siano  $h(p) \geq k(p)$  le corrispondenti curvatures principali. Se indichiamo con  $K$  e con  $H$  le curvatures Gaussiana e media,  $h$  e  $k$  sono le radici del polinomio

$$X^2 - HX + K,$$

e quindi

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{H + \sqrt{H^2 - 4K}}{2}, \\
 k &= \frac{H - \sqrt{H^2 - 4K}}{2}.
 \end{aligned}$$

Dato che  $H$  e  $K$  sono funzioni lisce su  $U$ , queste formule mostrano che  $h$  e  $k$  sono funzioni continue su  $U$ , lisce nei punti non ombelicali. In particolare ne segue che l'insieme dei punti ombelicali è chiuso in  $M$ . Sia  $p$  un punto non ombelicale. Vogliamo mostrare che su un intorno di  $p$  vi è un riferimento ortonormale  $X, Y$  tale che

$$LX = hX, \quad LY = kY.$$

Su un intorno di  $p$  scegliamo due campi di vettori indipendenti  $Z$  e  $W$ . Scriviamo

$$LZ = aZ + bW, \quad LW = cZ + dW,$$

dove  $a, b, c$  e  $d$  sono funzioni lisce. Osserviamo che

$$H = a + d = h + k, \quad K = ad - bc = hk.$$

Possiamo supporre che  $b(p) \neq 0$ . Infatti, se  $b(p) = 0$  ma  $c(p) \neq 0$  possiamo scambiare  $Z$  con  $W$ . Se invece  $b(p) = c(p) = 0$  possiamo sostituire  $Z$  con  $Z + W$ ; si ha infatti

$$L(Z + W) = aZ + dW = a(Z + W) + (d - a)W$$

e  $d(p) - a(p) \neq 0$  perchè in questo caso  $a(p)$  e  $d(p)$  sono le due curvatures principali nel punto  $p$ . Poniamo ora

$$X' = (h - d)Z + bW.$$

Notiamo che  $X'$  non si annulla su un intorno di  $p$  dato che  $b(p) \neq 0$  e che

$$\begin{aligned}
 L(X') &= (h - d)(aZ + bW) + b(cZ + dW) \\
 &= h(aZ + bW) - KZ \\
 &= h(aZ + bW) - hkZ \\
 &= hX'
 \end{aligned}$$

dato che  $a - k = h - d$ . Se ora poniamo

$$Y' = bZ + (d - h)W,$$

allora  $Y'$  non si annulla su un intorno di  $p$  ed è ortogonale a  $X'$ ; dunque

$$L(Y') = kY'.$$

Il riferimento ortonormale cercato è quindi

$$X = \frac{X'}{\|X'\|}, \quad Y = \frac{Y'}{\|Y'\|}.$$

Applichiamo la formula (7.3) per calcolare la curvatura di  $M$ . Dobbiamo innanzitutto valutare  $f$  e  $g$ . Usando le (7.1) e (7.2), l'equazione di Codazzi-Mainardi dà

$$\begin{aligned} 0 &= D_X LY - D_Y LX - L[X, Y] \\ &= D_X(kY) - D_Y(hX) + L(fX - gY) \\ &= X(k)Y - fkX - Y(h)X + ghY + fhX - gkY, \end{aligned}$$

cioè

$$0 = Y(h) + fk - fh = X(k) + gh - gk.$$

Dunque

$$(7.4) \quad f = \frac{Y(h)}{h - k}, \quad g = \frac{-X(k)}{h - k}.$$

La (7.3) ora dà

$$\begin{aligned} (7.5) \quad K &= Y \left( \frac{Y(h)}{h - k} \right) + X \left( \frac{-X(k)}{h - k} \right) - \frac{Y(h)^2 + X(k)^2}{(h - k)^2} \\ &= \frac{Y^2(h)}{h - k} - \frac{X^2(k)}{h - k} + \frac{X(k)X(h - k)}{(h - k)^2} - \frac{Y(h)Y(h - k)}{(h - k)^2} - \frac{Y(h)^2 + X(k)^2}{(h - k)^2} \\ &= \frac{Y^2(h) - X^2(k)}{h - k} + \frac{X(k)X(h - 2k) + Y(h)Y(k - 2h)}{(h - k)^2}. \end{aligned}$$

Useremo la (7.5) per studiare la struttura delle superficie di curvatura Gaussiana costante. Il primo risultato è il seguente.

**TEOREMA (7.6) (LIEBMANN).** *Sia  $M$  una superficie chiusa e connessa in  $\mathbb{R}^3$  di curvatura costante  $K > 0$ . Allora  $M$  è una sfera di raggio  $1/\sqrt{K}$ .*

Per ora dimostreremo il teorema sotto l'ipotesi aggiuntiva che  $M$  sia compatta. Questa ipotesi verrà rimossa nel capitolo ?? quando vedremo che una superficie in  $\mathbb{R}^3$  che sia chiusa e connessa e abbia curvatura limitata inferiormente da una costante positiva è necessariamente compatta.

Iniziamo con una considerazione di carattere generale che ci sarà utile anche in seguito. Sia  $T$  una superficie in  $\mathbb{R}^3$ , non necessariamente chiusa. Supponiamo che la curvatura Gaussiana di  $T$  sia ovunque non negativa e che  $T$  non contenga punti planari, punti cioè dove entrambe le curvatures principali si annullano. Allora esiste un campo liscio  $N$  di vettori normali unitari su tutta la superficie  $T$ . Sappiamo infatti che su ogni disco coordinato  $U$  esiste un campo liscio di vettori normali unitari  $N_U$ , e che inoltre  $N_U$  è univocamente determinato a meno del segno. Dato che la curvatura Gaussiana di  $T$  è non negativa, le curvatures principali hanno lo stesso segno; inoltre, dato che su  $T$  non vi sono punti planari, esse non possono cambiare segno su  $U$ . Salvo rimpiazzare  $N_U$  con  $-N_U$ , se necessario, possiamo dunque supporre che la curvatura media sia positiva su ogni  $U$ . Ne segue che, dati due dischi coordinati  $U$  e  $V$ , i campi di vettori normali  $N_U$  e  $N_V$  coincidono su  $U \cap V$ . Dunque i campi  $N_U$  si "incollano" tra loro e definiscono il campo  $N$  cercato su tutta  $T$ . Notiamo anche che le curvatures principali relative al campo  $N$  che abbiamo costruito risultano ovunque non negative.

Torniamo alla superficie  $M$ . Sia  $N$  un campo di vettori normali unitari su  $M$ , e siano  $h$  e  $k$ ,  $h \geq k$ , le corrispondenti curvatures principali. Come abbiamo appena osservato, possiamo supporre che  $h$  e  $k$  siano positive. Dato che  $M$  è compatta, vi è un punto  $p$  di  $M$  in cui  $h$  raggiunge il suo massimo e quindi, dato che  $K = hk$  è supposta costante e positiva,  $k$  raggiunge il suo minimo. Vogliamo mostrare che  $p$  è un punto ombelicale. Dato che per ogni punto  $q$  di  $M$  si ha

$$h(p) \geq h(q) \geq k(q) \geq k(p),$$

ciò implica che ogni punto di  $M$  è ombelicale. Ragioniamo per assurdo, supponendo che  $p$  non sia ombelicale. Se questo è vero  $h$  e  $k$  sono lisce su un intorno di  $p$ ; inoltre nel punto  $p$  le derivate prime di  $h$  e  $k$  si annullano, le derivate seconde di  $h$  sono non positive e quelle di  $k$  non negative. Dunque la (7.5) dà

$$K = \frac{Y^2(h) - X^2(k)}{h - k} \leq 0,$$

contro l'ipotesi. Abbiamo mostrato che ogni punto di  $M$  è ombelicale. Il teorema ora segue dal seguente risultato.

**LEMMA (7.7).** *Sia  $T$  una superficie connessa in  $\mathbb{R}^3$  di curvatura costante positiva  $K$ . Supponiamo che ogni punto di  $T$  sia ombelicale. Allora  $T$  è un aperto di una sfera di raggio  $1/\sqrt{K}$ .*

In effetti il lemma implica che la nostra superficie  $M$  è contenuta in una sfera  $S$  di raggio  $1/\sqrt{K}$ . D'altra parte, per ipotesi,  $M$  è un chiuso in  $\mathbb{R}^3$ , e poiché  $S$  è connessa deve coincidere con  $S$ . Resta da dimostrare il lemma. Le ipotesi implicano che l'applicazione di Weingarten di  $T$  è data da  $LX = hX$ , dove  $h = \sqrt{K}$  è costante. Consideriamo ora l'applicazione

$$F : T \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(p) = p - \frac{1}{h}N_p.$$



Vogliamo mostrare che vi è un vettore  $F_0 \in \mathbb{R}^3$  tale che  $F(p) = F_0$  per ogni  $p$ , cioè che tutti i punti di  $T$  giacciono sulla sfera  $S$  di raggio  $\frac{1}{h}$  e centro  $F_0$ . Dato che  $T$  è connessa basta mostrare che le derivate di  $F$  sono ovunque nulle. In effetti, se  $X$  è un vettore tangente a  $T$ ,

$$X(F) = X - \frac{1}{h}LX = 0.$$

Abbiamo dunque dimostrato che  $T$  è contenuta nella sfera  $S$ . Dato che  $T$  e  $S$  sono varietà differenziabili della stessa dimensione,  $T$  deve essere un aperto di  $S$ . La dimostrazione di (7.7), e quindi del teorema (7.6), è conclusa.

Il lemma (7.7) serve anche a dimostrare il seguente risultato.

**PROPOSIZIONE (7.8).** *Sia  $M$  una superficie connessa in  $\mathbb{R}^3$ . Supponiamo che ogni punto di  $M$  sia ombelicale. Allora  $M$  è un aperto di una sfera o di un piano.*

La curvatura Gaussiana di  $M$  deve essere positiva o nulla. Mostriamo che essa è costante. Si ha  $LX = hX$ , dove  $h^2$  è la curvatura Gaussiana. Vogliamo mostrare che  $h$  è costante. Se  $h$  è identicamente nulla, non vi è nulla da dimostrare; altrimenti basterà mostrare che le derivate di  $h$  sono nulle in ogni punto  $p$  in cui  $h$  non è nulla (osserviamo che in un tale punto  $h$  è liscia). Se  $X$  e  $Y$  sono campi di vettori indipendenti su un intorno di  $p$ , l'equazione di Codazzi-Mainardi dice che

$$\begin{aligned} 0 &= D_XLY - D_YLX - L[X, Y] \\ &= X(h)Y + hD_XY - Y(h)X - hD_YX - h[X, Y] \\ &= X(h)Y - Y(h)X + h(D_XY - D_YX - [X, Y]) \\ &= X(h)Y - Y(h)X, \end{aligned}$$

e quindi in particolare che  $X(h) = 0$ . Dato che  $X$  è del tutto arbitrario questo mostra che  $h$  è costante. Se la curvatura di  $M$  è positiva sono dunque verificate le ipotesi del lemma (7.7) e quindi  $M$  è un aperto di una sfera. Supponiamo invece che la curvatura di  $M$  sia identicamente nulla, cioè che  $h$  sia identicamente nulla. Questo significa che l'applicazione di Weingarten di  $M$  è nulla, e quindi che l'applicazione da  $M$  in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  che associa a ogni punto  $p$  di  $M$  la retta generata da un vettore normale a  $M$  in  $p$  è localmente costante, e dunque costante dato che  $M$  è connessa; in altri termini, vi è un vettore unitario  $N$  che è ortogonale a  $T_pM$  per ogni  $p$ . Se  $p$  è un qualsiasi punto di  $M$ , ne segue che  $M$  è contenuta nel piano  $\Pi$  di equazione  $P(\xi) = 0$ , dove

$$P(\xi) = \langle N, \xi \rangle - \langle N, p \rangle.$$

Infatti, se  $X$  è un vettore tangente a  $M$ ,

$$X(P|_M) = \langle N, X \rangle = 0,$$

quindi  $P|_M$  è localmente costante su  $M$ , dunque costante poiché  $M$  è connesso, quindi nulla dato che si annulla in  $p$ . Abbiamo mostrato che  $M$  è contenuta nel piano  $\Pi$ ; dato che  $\Pi$  e  $M$  sono varietà differenziabili della stessa dimensione,  $M$  è un aperto di  $\Pi$ . Questo conclude la dimostrazione di (7.8).

Ora che abbiamo chiarito quale sia la natura delle superficie in  $\mathbb{R}^3$  di curvatura costante positiva, passiamo a quelle di curvatura costante negativa. In questo caso la risposta è ancora più semplice: non ce ne sono. Più esattamente, vale il seguente risultato.

TEOREMA (7.9) (HILBERT). Sia  $M$  una superficie chiusa in  $\mathbb{R}^3$ . Allora  $\sup_{p \in M} K(p) \geq 0$ .

Non dimostreremo questo teorema, ma ci limiteremo a un suo caso estremamente particolare.

PROPOSIZIONE (7.10). Sia  $M$  una superficie compatta in  $\mathbb{R}^3$ . Allora vi è almeno un punto in cui la curvatura Gaussiana di  $M$  è strettamente positiva.

Sia  $r$  l'estremo superiore delle distanze da punti di  $M$  all'origine di  $\mathbb{R}^3$ ; dato che  $M$  è compatta vi è un suo punto  $p$  la cui distanza dall'origine di  $\mathbb{R}^3$  è esattamente  $r$ . Dimostreremo che  $K(p) \geq \frac{1}{r^2}$ . Sia  $\gamma(s)$  un cammino tracciato su  $M$  e tale che  $\gamma(0) = p$ ; supponiamo che  $s$  sia il parametro naturale di  $\gamma$ . La derivata prima rispetto a  $s$  di  $\|\gamma(s)\|^2$  è

$$2 \left\langle \frac{d\gamma}{ds}, \gamma \right\rangle.$$

Per  $s = 0$  questa derivata si deve annullare; ciò significa che un vettore unitario normale a  $M$  in  $p = \gamma(0)$  è

$$N_p = \frac{1}{r} \gamma(0).$$

La derivata seconda rispetto a  $s$  di  $\|\gamma(s)\|^2$  è

$$2 \left\langle \frac{d^2\gamma}{ds^2}, \gamma \right\rangle + 2 \left\| \frac{d\gamma}{ds} \right\|^2 = 2 \left\langle \frac{d^2\gamma}{ds^2}, \gamma \right\rangle + 2.$$

Per  $s = 0$  questa derivata è minore o uguale a zero. Dunque

$$\left\langle \frac{d^2\gamma}{ds^2}(0), \gamma(0) \right\rangle + 1 \leq 0.$$

Dato che la curvatura normale di  $\gamma$  in  $p$  è

$$k_n = \left\langle \frac{d^2\gamma}{ds^2}(0), N_p \right\rangle,$$

la disuguaglianza qui sopra si può riscrivere sotto la forma

$$k_n \leq -\frac{1}{r}.$$

In particolare, se  $\frac{d\gamma}{ds}(0)$  è una direzione principale di curvatura e  $k$  è la corrispondente curvatura principale, ne segue che

$$k = -k_n \geq \frac{1}{r}.$$

Quindi  $K(p) \geq \frac{1}{r^2}$ , come si voleva.

Prima di analizzare la struttura delle superficie di curvatura nulla in  $\mathbb{R}^3$  facciamo una digressione sull'integrazione dei campi vettoriali. Sia  $M$  una varietà differenziabile; se  $\gamma(t)$  è un cammino liscio su  $M$  indicheremo con  $\frac{d\gamma}{dt}(\tau)$  il vettore tangente a  $M$  nel punto  $\gamma(\tau)$  determinato dal cammino  $s \mapsto \gamma(s + \tau)$ . In altri termini,

$$\frac{d\gamma}{dt} = d\gamma \left( \frac{\partial}{\partial t} \right).$$

Sia ora  $X$  un campo di vettori tangenti a  $M$ . Una *curva integrale* di  $X$  è un cammino  $\gamma(t)$  tale che

$$\frac{d\gamma}{dt}(\tau) = X_{\gamma(\tau)}$$

per ogni  $\tau$ . È importante notare che, se  $\gamma(t)$  è una curva integrale di  $X$ , anche  $\gamma(t + c)$  lo è, per ogni costante  $c$ . Sia  $p$  un punto di  $M$  e cerchiamo una curva integrale di  $X$  passante per  $p$ ; per quanto abbiamo osservato basta cercare una  $\gamma$  con  $\gamma(0) = p$ . In coordinate locali  $x_1, \dots, x_n$  su un intorno di  $p$  la traduzione del problema è la seguente. Scriviamo  $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  e poniamo  $y_i = x_i \circ \gamma$ . Allora quello che si cerca è una soluzione del sistema di  $n$  equazioni differenziali ordinarie del primo ordine nelle  $n$  funzioni incognite  $y_1, \dots, y_n$

$$\frac{dy_i}{dt} = a_i(y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

che soddisfi le condizioni iniziali

$$y_i(0) = x_i(p), \quad i = 1, \dots, n.$$

Il teorema di esistenza e unicità per le soluzioni di equazioni differenziali ordinarie assicura che una soluzione di questo problema esiste sull'intervallo  $|t| \leq \varepsilon$ , se  $\varepsilon$  è sufficientemente piccolo, e che inoltre questa soluzione è unica. In realtà il teorema afferma molto di più. In primo luogo, se  $q$  è un punto di  $M$  e  $p$  varia su un intorno sufficientemente piccolo di  $q$ , allora si può scegliere un  $\varepsilon$  indipendente da  $p$ . In secondo luogo le funzioni  $y_i$  dipendono in modo liscio da  $t$  e dai valori iniziali, e quindi in definitiva da  $p$ . Concludendo, esistono un intorno aperto  $U$  di  $M \times \{0\}$  in  $M \times \mathbb{R}$  e una applicazione liscia  $\varphi : U \rightarrow M$  tale che

$$\frac{d\varphi}{dt}(p, \tau) = X_{\varphi(p, \tau)}, \quad \varphi(p, 0) = p.$$

Torniamo alle superficie di curvatura Gaussiana costante. Vale il seguente risultato.

**PROPOSIZIONE (7.11) (MASSEY).** *Sia  $M$  una superficie chiusa e connessa in  $\mathbb{R}^3$  di curvatura Gaussiana identicamente nulla. Allora o  $M$  è un piano oppure per ogni punto  $p \in M$  passa una e una sola retta  $l_p$  che sia contenuta in  $M$ . Inoltre le rette  $l_p$  sono tutte parallele.*

Se ogni punto di  $M$  è ombelicale,  $M$  è un piano per la proposizione (7.8). Supporremo d'ora in poi che  $M$  contenga punti che non sono ombelicali. Sia  $p$  un punto di  $M$  e supponiamo che per  $p$  passi un segmento aperto  $\sigma$  di equazione parametrica  $t \mapsto tX + p$ , dove  $X$  è un vettore unitario. Dico che  $LX = 0$ . Sia infatti  $N$  un campo di vettori unitari normali a  $M$  su un intorno di  $p$ ; allora, considerando  $X$  come un campo di vettori lungo  $\sigma$ , si ha

$$0 = X(\langle N, X \rangle) = \langle LX, X \rangle + \langle N, \nabla_X X \rangle = \langle LX, X \rangle,$$

dato che  $\nabla_X X = 0$ . Dunque, se  $Y$  è un vettore unitario tangente a  $M$  in  $p$  e ortogonale a  $X$ ,

$$LX = aY.$$

Dato che  $L$  è una applicazione lineare autoaggiunta si deve avere

$$LY = aX + bY.$$

Dunque la curvatura Gaussiana di  $M$  in  $p$  è  $-a^2$ . Ne segue che  $a = 0$ , come si voleva.

Indichiamo ora con  $A$  l'insieme dei punti non ombelicali di  $M$  e con  $B$  l'insieme dei punti ombelicali. Se  $p$  è un punto di  $A$  indichiamo con  $X$  e  $Y$  due campi di vettori tangenti unitari e ortogonali fra loro su un intorno di  $p$  tali che

$$LX = 0, \quad LY = kY.$$

Segue dalla (7.1) e dalla (7.4) che  $D_X X = 0$ . Dato che  $\langle LX, X \rangle = 0$ , l'equazione di Gauss implica allora che  $\nabla_X X = 0$ ; se  $\gamma(t)$  è una curva integrale di  $X$  questo dice che  $\frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0$ , cioè che  $\gamma$  è la rappresentazione parametrica di un segmento. Dunque per ogni punto non ombelicale di  $M$  passa una retta tale che la sua intersezione con  $M$  contenga un segmento contenente  $p$ ; questa retta è unica, altrimenti il punto  $p$  sarebbe ombelicale. Indichiamo con  $l_p$  il segmento massimale passante per  $p$  e contenuto in  $M$ ; ovviamente  $l_p$  è chiuso e  $p$  è al suo interno. Vogliamo mostrare che  $l_p$  è una retta. Sia  $\gamma(t)$  una rappresentazione parametrica della retta su cui  $l_p$  giace, dove  $\gamma(0) = p$  e  $t$  è il parametro naturale. Nei punti non ombelicali di  $l_p$  la (7.5) dà

$$(7.12) \quad 0 = K = \frac{X^2(k)}{k} - 2\frac{X(k)^2}{k^2} = -kX^2\left(\frac{1}{k}\right).$$

Supponiamo che  $l_p$  contenga punti ombelicali, e sia  $t_0$  il valore minimo, in modulo, del parametro  $t$  per cui  $\gamma(t_0)$  è ombelicale. La (7.12) implica che sull'intervallo di estremi  $0$  e  $t_0$  la curvatura media  $k$ , come funzione di  $t$ , è della forma

$$(7.13) \quad k = \frac{1}{\alpha t + \beta},$$

per opportune costanti  $\alpha$  e  $\beta$ . Per la continuità di  $k$  questa identità deve valere anche in  $t_0$ , e quindi si giunge alla conclusione che  $\gamma(t_0)$  non è ombelicale, contro l'ipotesi. Se  $l_p$  non è una retta, esso ha un estremo  $q$ . Per quanto abbiamo appena osservato,  $q$  non

è ombelicale. Dunque per  $q$  passa un segmento aperto contenuto in  $M$ , che non può essere allineato con  $l_p$ . Per quanto osservato durante la costruzione di  $l_p$ , questo implica che  $q$  è ombelicale, una contraddizione. Ora sappiamo che  $l_p$  è una retta e che nessuno dei suoi punti è ombelicale. Inoltre, come abbiamo già osservato, per ogni  $t \in \mathbb{R}$  vale la (7.13). Questo è possibile solo se  $\alpha = 0$ , e quindi  $k$  è costante lungo  $l_p$ .

Tenendo conto delle (7.1) e delle (7.4), il fatto che  $k$  sia costante lungo le rette  $l_p$  implica che  $D_Y X = 0$ . Dato che  $\langle LY, X \rangle = 0$ , ne segue che  $\nabla_Y X = 0$ . Questo, a sua volta, mostra che la direzione di  $l_p$  è localmente costante, e quindi costante su ogni componente connessa di  $A$ . In altri termini, tutte le rette  $l_p$ , dove  $p$  varia su una componente connessa di  $A$ , sono parallele.

Ci proponiamo di mostrare che anche per un punto ombelicale di  $M$  passa una e una sola retta contenuta in  $M$ . Per ogni punto  $q$  di  $A$  indichiamo con  $\lambda(q)$  la retta parallela a  $l_q$  passante per l'origine di  $\mathbb{R}^3$ ; dunque  $\lambda$  è una applicazione da  $A$  in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Sia ora  $p$  un punto ombelicale di  $M$ . Supponiamo che  $p$  appartenga alla frontiera di  $A$ . Ciò significa che vi è una successione  $\{p_n\}$  di punti di  $A$  che converge a  $p$ . Dato che  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  è compatto, salvo passare a una sottosuccessione, possiamo supporre che la successione  $\{\lambda(p_n)\}$  converga a una retta  $\lambda_0$  passante per l'origine; dunque per ogni punto  $q$  di  $\lambda_0$  vi sono punti  $q_n \in \lambda(p_n)$  tali che la successione  $\{q_n\}$  converga a  $q$ . Ne segue che la successione dei punti  $p_n + q_n \in l_{p_n}$  converge a  $p + q$ ; dato che  $M$  è chiusa  $p + q$  appartiene a  $M$ . Si conclude che la retta  $l_p = p + \lambda_0$  è contenuta in  $M$  e passa per  $p$ . Vogliamo mostrare che non vi sono altre rette con questa proprietà. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che una tale retta, che indichiamo con  $l$ , esista. Dato che le rette  $l_{p_n}$  convergono a  $l_p$ , se  $n$  è sufficientemente grande  $l_{p_n}$  deve intersecare  $l$  in un punto  $q$ . Poiché  $l_{p_n}$  è costituita interamente da punti non ombelicali,  $q$  non è ombelicale. Ciò è assurdo dato che si è già mostrato che per un punto non ombelicale passa una sola retta contenuta in  $M$ . Notiamo infine che ogni punto di  $l_p$  appartiene alla frontiera di  $A$ . Infatti, come si è osservato, tutti i punti di  $l_p$  appartengono alla chiusura di  $A$ ; d'altra parte, se un punto  $q$  di  $l_p$  appartenesse ad  $A$ , se ne concluderebbe che  $l_p = l_q$ , e quindi che ogni punto di  $l_p$ , incluso  $p$ , appartiene ad  $A$ , una contraddizione.

Quanto abbiamo appena osservato mostra che la frontiera di  $A$ , che è uguale alla frontiera di  $B$ , è una unione di rette a due a due disgiunte. Sia ora  $B'$  una componente connessa della parte interna di  $B$ . Dato che ogni punto di  $B'$  è ombelicale e  $M$  ha curvatura Gaussiana nulla, la proposizione (7.8) implica che  $B'$  è un aperto in un piano. Per quanto si è appena osservato sulla struttura della frontiera di  $B$ , la frontiera di  $B'$  può essere costituita o da una sola retta, o da due rette parallele. Nel primo caso  $B'$  è un semipiano, nel secondo è una striscia. In ogni caso, per ogni punto  $p$  di  $B'$  passa una e una sola retta  $l_p$  contenuta in  $B'$ . Nessuna altra retta  $l$  passante per  $p$  è contenuta in  $M$ . Infatti, se  $l$  è contenuta nel piano di  $B'$  essa deve incontrare le rette che costituiscono la frontiera di  $B'$ ; dato che per un punto della frontiera di  $B'$  passa una sola retta contenuta in  $M$ , la retta  $l$  non può essere contenuta in  $M$ .

Abbiamo mostrato che per ogni punto  $p$  di  $M$  passa una e una sola retta  $l_p$  contenuta in  $M$ . Come abbiamo già fatto, indichiamo con  $\lambda(p)$  la retta parallela a  $l_p$  e passante per l'origine. Sappiamo già che l'applicazione  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  è localmente costante sia su  $A$  che sulla parte interna di  $B$ , e dunque su un aperto denso di  $M$ . Se riuscissimo a mostrare che  $\lambda$  è di classe almeno  $\mathbf{C}^1$  se ne concluderebbe che è localmente

costante, e dunque costante, su tutta  $M$ . Ciò mostrerebbe che le rette  $l_p$  sono tutte parallele e quindi concluderebbe la dimostrazione del teorema (7.11). Cominciamo col dimostrare che  $\lambda$  è continua. Ragioniamo per assurdo: se  $\lambda$  non è continua si possono trovare un punto  $p$  di  $M$ , una successione  $\{p_n\}$  convergente a  $p$  e un intorno  $U$  di  $p$  tali che  $\lambda(p_n) \notin U$  per ogni  $n$ . Per la compattezza di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  si può trovare una sottosuccessione  $\{p_{n_i}\}$  di  $\{p_n\}$  tale che  $\{\lambda(p_{n_i})\}$  converga a una retta  $\lambda_0$  passante per l'origine. La retta  $p + \lambda_0$  passa per  $p$  ed è contenuta in  $M$ ; poiché vi è una sola retta con queste caratteristiche,  $\lambda_0 = \lambda(p)$ , il che è assurdo dato che  $\lambda(p_n) \notin U$  per ogni  $n$ .

Vogliamo ora mostrare che  $\lambda$  è liscia. La chiave per farlo è la seguente osservazione. Se  $q$  è un qualsiasi punto di  $M$  e  $X$  è un vettore tangente a  $l_q$ , si è mostrato che  $LX = 0$ , cioè che  $N$  è costante lungo  $l_q$ , o, equivalentemente, che il piano tangente a  $M$  nel punto  $q$ , che indicheremo con  $\Pi_q$ , è tangente a  $M$  in ogni punto di  $l_q$ . Sappiamo già che  $\lambda$  è liscia in  $A$  e all'interno di  $B$ . Sia ora  $p$  uno dei punti della frontiera di  $A$ . Con una opportuna scelta di coordinate cartesiane  $x, y$  e  $z$  in  $\mathbb{R}^3$  si può supporre che  $p$  sia l'origine, che  $l_p$  sia la retta  $\{x = z = 0\}$  e che  $\Pi_p$  sia il piano  $\{z = 0\}$ . Tagliamo  $M$  con il piano  $\{y = 0\}$  e indichiamo con  $\sigma$  la componente connessa dell'intersezione di  $M$  con la striscia  $\{(x, y, z) \mid y = 0, |x| < \varepsilon\}$  che contiene  $p$ . Se  $\varepsilon$  è sufficientemente piccolo  $\sigma$  è una sottovarietà differenziabile di  $\mathbb{R}^3$  e la proiezione ortogonale da  $\sigma$  sul segmento  $\{(x, y, z) \mid y = z = 0, |x| < \varepsilon\}$  è un diffeomorfismo. Fissiamo un numero reale  $c$ , e definiamo una applicazione continua  $\mu : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}$  nel modo seguente. Sia  $t$  un numero reale tale che  $|t| < \varepsilon$ . Sia  $q(t)$  l'unico punto di  $\sigma$  tale che  $x(q(t)) = t$  e sia  $r(t)$  il punto di intersezione di  $l_{q(t)}$  con il piano  $\{y = c\}$ . Poniamo  $\mu(t) = x(r(t))$ . Dico che l'applicazione  $\mu$  è strettamente crescente. Supponiamo di averlo già dimostrato e vediamo come questo permette di concludere. Dato che il numero  $c$  è del tutto arbitrario, il fatto che  $\mu$  sia crescente implica che, per  $0 < |t| < \varepsilon$ , la retta  $l_{q(t)}$  non taglia il piano  $\{x = 0\}$ . Dunque, se  $q$  varia su un intorno sufficientemente piccolo di  $p$ , la retta  $l_q$  è parallela al piano  $\{x = 0\}$ . Le funzioni  $x$  e  $y$  sono coordinate locali su un intorno di  $p$  in  $M$ ; su questo intorno il campo di vettori

$$X = \frac{\partial/\partial y}{\|\partial/\partial y\|}$$

è liscio. D'altra parte, per ogni  $q$  sufficientemente vicino a  $p$ , il vettore  $X_q$ , visto come elemento di  $\mathbb{R}^3$ , genera  $\lambda(q)$ , dato che questa retta è parallela al piano  $\{x = 0\}$ . Quindi  $\lambda(q)$  è una funzione liscia di  $q$ .

Resta da mostrare che l'applicazione  $\mu$  è strettamente crescente. A questo scopo è sufficiente mostrare che, per ogni  $t_0$  tale che  $|t_0| < \varepsilon$ , se  $t > t_0$  è sufficientemente vicino a  $t_0$  allora  $\mu(t) > \mu(t_0)$ . Poiché  $\Pi_{q(t_0)}$  non è ortogonale a  $\Pi_p$ , se  $U$  è un intorno sufficientemente piccolo del segmento  $\overline{q(t_0)r(t_0)}$  in  $M$ , la proiezione ortogonale su  $\Pi_p$  dà un diffeomorfismo di  $U$  su un intorno della proiezione di  $\overline{q(t_0)r(t_0)}$ . Ne segue che, se  $t$  è sufficientemente vicino a  $t_0$ , allora la proiezione su  $\Pi_p$  del segmento  $\overline{q(t)r(t)}$  non taglia la proiezione della retta  $l_{q(t_0)}$ . Ciò equivale a dire che  $\mu(t) > \mu(t_0)$ . La dimostrazione del teorema (7.11) è (finalmente!) completa.

**Esercizi**

- 7.1) Siano  $X$  e  $\Pi$  una superficie compatta e un piano in  $\mathbb{R}^3$ . Il complementare di  $\Pi$  è unione disgiunta di due semispazi aperti  $A$  e  $B$ . Si mostri che, se  $A \cap X$  non è vuoto, contiene almeno un punto in cui la curvatura di  $X$  è strettamente positiva.
- 7.2) Sia  $M$  una superficie chiusa e connessa in  $\mathbb{R}^3$  con  $K = 0$  e  $H$  costante. Mostrare che  $M$  è un piano o un cilindro circolare retto.
- 7.3) Sia  $M$  una superficie chiusa e connessa in  $\mathbb{R}^3$  con  $K$  e  $H$  costanti, priva di punti ombelicali. Mostrare che  $M$  è un cilindro circolare retto.
- 7.4) Sia  $M$  una superficie chiusa e connessa in  $\mathbb{R}^3$ . Si mostri che la prima e la seconda forma fondamentale di  $M$  sono uguali se e solo se  $M$  è una sfera di raggio 1.
- 7.5) Sia  $M$  una superficie chiusa e connessa in  $\mathbb{R}^3$ . La terza forma fondamentale di  $M$  è  $\langle LX, LX \rangle$ , dove  $L$  è l'applicazione di Weingarten. Si mostri che la prima e la terza forma fondamentale di  $M$  sono uguali se e solo se  $M$  è una sfera di raggio 1.
- 7.6) Sia  $M$  una superficie chiusa e connessa in  $\mathbb{R}^3$ . La terza forma fondamentale di  $M$  è  $\langle LX, LX \rangle$ , dove  $L$  è l'applicazione di Weingarten. Si mostri che, se la seconda e la terza forma fondamentale di  $M$  sono uguali, allora  $M$  è una sfera di raggio 1, un piano o un cilindro circolare retto di raggio 1.
- 7.7) Sia  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$  il disco unitario con la metrica

$$g_{ij} = \frac{3}{2(1 - x^2 - y^2)^2} \delta_{ij}.$$

Mostrare che  $D$  non è isometrico ad alcuna superficie in  $\mathbb{R}^3$ .

- 7.8) Sia  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie e sia  $p$  un suo punto. Supponiamo che in  $p$  vi siano due, e solo due, direzioni asintotiche distinte. Si mostri che vi sono un intorno  $U$  di  $p$  e due campi di vettori  $X$  e  $Y$  su  $U$  tali che, per ogni  $q \in U$ ,  $X_q$  e  $Y_q$  siano indipendenti e asintotici.

## 8. Geodetiche

Sia  $f : N \rightarrow M$  una applicazione  $\mathbf{C}^k$  tra varietà differenziabili di dimensioni  $n$  e  $m$ . Un *campo di vettori tangenti a  $M$  lungo  $f$*  è una applicazione  $V : N \rightarrow TM$  tale che  $\pi \circ V = f$ , dove  $\pi$  è la proiezione naturale di  $TM$  su  $M$ . In parole povere, un campo di vettori tangenti a  $M$  lungo  $f$  è una applicazione che associa a ogni punto  $p$  di  $N$  un vettore tangente a  $M$  in  $f(p)$ . Diremo che il campo di vettori  $V$  è di classe  $\mathbf{C}^h$  se è di classe  $\mathbf{C}^h$  come applicazione da  $N$  a  $TM$ . In generale considereremo applicazioni  $f$  che sono lisce e campi di vettori lisci, ma vi potranno essere eccezioni; di norma sottintenderemo l'aggettivo "liscio" quando non vi è rischio di confusione. Un esempio di campo di vettori tangenti a  $M$  lungo  $f$  può essere costruito a partire da un campo  $X$  di vettori tangenti a  $M$  ponendo  $V_p = X_{f(p)}$ ; indicheremo questo campo con  $f^*(X)$ . In generale però non tutti i campi lungo  $f$  possono essere ottenuti in questo modo. Per mostrarlo consideriamo un altro esempio: sia  $Y$  un campo di vettori tangenti a  $N$  e poniamo  $V_p = df(Y_p)$ . Si vede senza difficoltà che  $V$  è un campo di vettori tangenti a  $M$  lungo  $f$ . Un caso particolare di questo esempio è quello in cui  $N$  è un intervallo in  $\mathbb{R}$ , cioè quello in cui  $f$  è un cammino in  $M$ , e  $Y = \partial/\partial t$ . Allora il campo  $V$  di cui stiamo parlando è il campo  $\dot{f}$  che associa a ogni  $t$  il vettore "velocità" di  $f$  in  $f(t)$ . È chiaro che, se  $f$  non è iniettiva,  $V$  non è in generale della forma  $f^*(X)$ . Infatti, se così fosse, dati due punti  $t_1 \neq t_2$  tali che  $f(t_1) = f(t_2)$ , si dovrebbe avere

$$\dot{f}(t_1) = X_{f(p)} = \dot{f}(t_2),$$

mentre in generale  $\dot{f}(t_1) \neq \dot{f}(t_2)$ .

Sia  $f : N \rightarrow M$  come sopra, e supponiamo in più che  $M$  sia una varietà Riemanniana. Indichiamo con  $D$  la connessione Riemanniana su  $M$ . Vogliamo mostrare che è possibile definire in modo naturale una operazione di derivazione covariante di campi di vettori tangenti a  $M$  lungo  $f$  rispetto a vettori tangenti a  $N$  che si riduce alla derivazione covariante usuale quando  $f$  è l'applicazione identica di  $M$  in sè. Ciò che cerchiamo è una operazione  $D_X V$  che associ a ogni vettore  $X$  tangente a  $N$  in un punto  $p$  e a ogni campo  $V$  di vettori tangenti a  $M$  lungo  $f|_A$ , dove  $A$  è un intorno aperto di  $p$ , un vettore tangente a  $M$  in  $f(p)$  e che goda delle seguenti proprietà formali. Se  $V$  e  $W$  sono campi di vettori tangenti a  $M$  lungo  $f|_A$ ,  $X$  è un vettore tangente a  $N$  in  $p$  e  $\varphi$  una funzione liscia su  $A$ , si deve avere

$$(8.1) \quad \begin{cases} D_X V \text{ è lineare in } X, \\ D_X(V + W) = D_X V + D_X W, \\ D_X(\varphi V) = \varphi(p) D_X V + X(\varphi) V_p. \end{cases}$$

L'operazione in questione deve essere compatibile con le restrizioni nel senso che, se  $B$  è un intorno di  $p$  che sia contenuto in  $A$ , si deve avere  $D_X V = D_X(V|_B)$ . Se  $Y$  è un campo di vettori su  $M$  vogliamo anche si abbia

$$(8.2) \quad D_X(f^*Y) = D_{df(X)}Y.$$



Notiamo che le (8.1) e (8.2), insieme con la proprietà di compatibilità con le restrizioni, caratterizzano l'operazione che cerchiamo. Siano infatti  $y_1, \dots, y_m$  coordinate locali su un intorno di  $f(p)$ . Localmente possiamo scrivere

$$V = \sum a_i \frac{\partial}{\partial y_i},$$

dove le  $a_i$  sono funzioni lisce su un intorno di  $p$  (più esattamente dovremmo scrivere  $f^* \left( \frac{\partial}{\partial y_i} \right)$  invece di  $\frac{\partial}{\partial y_i}$ , ma non saremo così pedanti). Le (8.1) e (8.2) implicano allora che si deve avere

$$(8.3) \quad D_X V = \sum X(a_i) \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum a_i D_{df(X)} \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Viceversa, è facile verificare che se si usa la (8.3) come definizione di  $D_X V$  si ottiene una operazione con le proprietà cercate. La compatibilità della connessione Riemanniana con la metrica implica che, se  $V$  e  $W$  sono campi di vettori lungo  $f$  e  $X$  è un vettore tangente a  $N$ , allora

$$X(\langle V, W \rangle) = \langle D_X V, W \rangle + \langle V, D_X W \rangle.$$

La simmetria della connessione Riemanniana si traduce invece nel fatto che, se  $X$  e  $Y$  sono campi di vettori su  $N$ , allora

$$D_X df(Y) - D_Y df(X) = df([X, Y]).$$

Un caso particolare di questa proprietà che useremo in seguito è il seguente. Consideriamo il caso in cui

$$N = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid a < s < b, \quad c < t < d\},$$

è il prodotto di due intervalli aperti. Allora si ha

$$(8.4) \quad D_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial f}{\partial t} - D_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial f}{\partial s} = 0,$$

dato che  $[\partial/\partial s, \partial/\partial t] = 0$ .

Sia  $f : N \rightarrow M$  come sopra. Un campo  $V$  di vettori tangenti a  $M$  lungo  $f$  si dice *parallelo* se  $D_X V = 0$  per ogni vettore  $X$  tangente a  $N$ . Se  $V$  e  $W$  sono campi paralleli, allora

$$X(\langle V, W \rangle) = \langle D_X V, W \rangle + \langle V, D_X W \rangle = 0$$

per ogni  $X$ ; dunque il prodotto scalare  $\langle V, W \rangle$  è localmente costante su  $N$ .

Sia  $S$  una superficie in  $\mathbb{R}^3$ . Nel capitolo 3 abbiamo definito una geodetica come un cammino  $\gamma(t)$  tracciato su  $S$  con "velocità"  $\dot{\gamma}$  costante in modulo e curvatura geodetica nulla. Questa seconda condizione significa che, se  $s$  indica il parametro naturale per  $\gamma$ , allora  $\frac{d^2 \gamma}{ds^2}$  è ovunque normale a  $S$ . Poiché  $\|\dot{\gamma}\|$  è costante, il vettore "accelerazione"  $\ddot{\gamma}$  è proporzionale a  $\frac{d^2 \gamma}{ds^2}$ , e risulta quindi normale a  $S$ . Viceversa, se  $\gamma$  è un cammino tale che  $\ddot{\gamma}$  sia ovunque normale a  $S$ , allora

$$\frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 2 \langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0.$$

Dunque  $\|\dot{\gamma}\|$  è costante e il vettore  $\frac{d^2\gamma}{ds^2}$  è proporzionale a  $\ddot{\gamma}$ , e quindi normale a  $S$ . In definitiva, un cammino  $\gamma(t)$  tracciato su  $S$  è una geodetica se e solo se la sua accelerazione  $\ddot{\gamma}$  è ovunque normale a  $S$ , o anche, indicando con  $N$  un campo di vettori unitari normali a  $S$ , se e solo se

$$D_{\frac{\partial}{\partial t}} \dot{\gamma} = \ddot{\gamma} - \langle \ddot{\gamma}, N \rangle N = 0.$$

In questa sua ultima forma la nozione di geodetica ha un carattere intrinseco, dipende cioè solo dalla struttura Riemanniana di  $S$ , e non dalla particolare realizzazione di  $S$  come sottovarietà di  $\mathbb{R}^3$ . Possiamo dunque estendere la nozione di geodetica a qualsiasi varietà Riemanniana  $M$ : diremo che un cammino  $\gamma(t)$  tracciato su  $M$  è una *geodetica* se il campo di vettori  $\dot{\gamma}$  è parallelo lungo  $\gamma$ , cioè, in simboli, se

$$(8.5) \quad D_{\frac{\partial}{\partial t}} \dot{\gamma} = 0.$$

Anche in questo contesto più generale  $\|\dot{\gamma}\|$  risulta indipendente da  $t$ , dato che  $\dot{\gamma}$  è parallelo. Spesso useremo il termine “geodetica” anche per indicare, impropriamente, l’immagine di una geodetica.

Riscriviamo la (8.5) in coordinate locali. Scegliamo coordinate  $x_1, \dots, x_n$  su  $M$  e indichiamo con  $\Gamma_{ij}^k$  i corrispondenti simboli di Christoffel. Se poniamo  $y_i(t) = x_i(\gamma(t))$ , si ha

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \sum \frac{dy_i}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ D_{\frac{\partial}{\partial t}} \dot{\gamma} &= \sum_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{i,j,k} \frac{dy_i}{dt} \frac{dy_j}{dt} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

Dunque la (8.5) è equivalente al sistema di equazioni differenziali del second’ordine

$$(8.6) \quad \frac{d^2 y_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dy_i}{dt} \frac{dy_j}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Questo sistema non è integrabile in termini finiti se non in casi molto particolari. La situazione più semplice è quella di  $\mathbb{R}^n$  con la metrica euclidea. Se  $x_1, \dots, x_n$  sono coordinate cartesiane, i corrispondenti simboli di Christoffel sono nulli, e dunque la (8.6) si riduce alla richiesta che le derivate seconde di tutte le  $y_i$  siano nulle. Quindi in questo caso le geodetiche non sono altro che le rette, parametrizzate linearmente. Un altro esempio semplice è quello delle sfere in  $\mathbb{R}^3$ . Sia  $S$  una sfera di raggio  $r$ , che possiamo pensare con centro nell’origine. Dire che una curva  $\gamma(t)$  tracciata su  $S$  è una geodetica equivale a dire che  $\ddot{\gamma}$  è ovunque proporzionale a  $\gamma$ , cioè che

$$\ddot{\gamma} \times \gamma \equiv 0.$$

Questa condizione implica che

$$\frac{d}{dt}(\dot{\gamma} \times \gamma) = \ddot{\gamma} \times \gamma + \dot{\gamma} \times \dot{\gamma} = 0,$$

cioè che  $v = \dot{\gamma} \times \gamma$  è costante. Se  $\dot{\gamma}$  non è nullo, nel qual caso abbiamo a che fare con un cammino costante,  $v$  non è nullo e quindi  $\gamma$  giace nel piano passante per l’origine e ortogonale a  $v$ . Nel caso in questione, dunque, le geodetiche sono i cerchi massimi, percorsi con velocità costante.

ESEMPIO (8.7) (GEODETICHE SULLE SUPERFICIE DI ROTAZIONE). Sia  $S$  una superficie di rotazione in  $\mathbb{R}^3$ , e sia  $\gamma(t)$  una curva tracciata su  $S$ . Se  $f$  è una quantità dipendente da  $t$  indicheremo con  $\dot{f}$ ,  $\ddot{f}$ , e così via, le sue derivate rispetto a  $t$ . Scegliendo opportunamente le coordinate, si può supporre che  $S$  abbia una rappresentazione parametrica della forma

$$\varphi(u, \vartheta) = (a(u) \cos(\vartheta), a(u) \sin(\vartheta), b(u)).$$

Indichiamo con  $X$  il campo di vettori tangenti

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = a(-\sin(\vartheta), \cos(\vartheta), 0)$$

su  $S$ . Osserviamo innanzitutto che

$$(8.8) \quad \langle \dot{\gamma}, \dot{X} \rangle = 0.$$

Infatti si ha che

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= V_1 + V_2, \\ \dot{X} &= W_1 + W_2, \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} V_1 &= (\dot{a} \cos(\vartheta), \dot{a} \sin(\vartheta), \dot{b}), \\ V_2 &= a \dot{\vartheta} (-\sin(\vartheta), \cos(\vartheta), 0), \\ W_1 &= \dot{a} (-\sin(\vartheta), \cos(\vartheta), 0), \\ W_2 &= a \dot{\vartheta} (-\cos(\vartheta), -\sin(\vartheta), 0). \end{aligned}$$

La (8.8) segue dal fatto che

$$\langle V_1, W_1 \rangle = \langle V_2, W_2 \rangle = 0, \quad \langle V_2, W_1 \rangle = a \dot{a} \dot{\vartheta} = -\langle V_1, W_2 \rangle.$$

Supponiamo ora che  $\gamma$  sia una geodetica, cioè che  $\ddot{\gamma}$  sia ovunque normale a  $S$ . Ne segue in particolare che  $\langle \ddot{\gamma}, X \rangle = 0$ , e quindi che

$$(8.9) \quad \frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}, X \rangle = \langle \dot{\gamma}, \dot{X} \rangle + \langle \ddot{\gamma}, X \rangle = 0.$$

Poiché per ogni punto  $p$  di  $S$  il vettore  $X_p$  è diretto lungo il parallelo passante per  $p$  e ha modulo pari al raggio del parallelo stesso, la (8.9) dice che, se indichiamo con  $\alpha(t)$  l'angolo formato, nel punto  $\gamma(t)$ , dalla tangente a  $\gamma$  e dal parallelo passante per  $\gamma(t)$  e con  $r(t)$  il raggio del parallelo, allora la quantità  $r \cos(\alpha)$  è costante lungo  $\gamma$ . Questo enunciato va sotto il nome di *Teorema di Clairaut*.

Cerchiamo ora di determinare in quale misura il teorema di Clairaut caratterizzi le geodetiche. Sia  $\gamma(t)$  un cammino su  $S$  per cui vale la tesi del teorema di Clairaut e supponiamo che  $\|\dot{\gamma}\|$  sia indipendente da  $t$ . Queste due condizioni equivalgono, rispettivamente, a

$$\frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}, X \rangle = 0$$

e a

$$\langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0.$$

Per quanto si è visto, la prima di queste condizioni equivale a

$$\langle \ddot{\gamma}, X \rangle = 0.$$

Quando  $\dot{\gamma}$  è indipendente da  $X$ , cioè non diretto lungo i paralleli, si conclude che  $\ddot{\gamma}$  è ortogonale a  $S$ , e quindi che  $\gamma$  è una geodetica. Questo si applica in particolare ai meridiani di  $S$ , che sono dunque geodetiche. Se invece  $\dot{\gamma}$  è diretto lungo i paralleli non si può concludere che  $\gamma$  è una geodetica. Infatti i paralleli non sono, in generale, geodetiche, anche se per essi vale la tesi del teorema di Clairaut.

Il teorema di Clairaut non fornisce esplicitamente le geodetiche su  $S$ . Permette però di ridurre il problema di determinare una geodetica con dati iniziali assegnati all'integrazione di un campo vettoriale.

Occupiamoci ora del problema dell'esistenza di geodetiche in generale. Il sistema (8.6) è un caso particolare di sistema di equazioni differenziali della forma

$$y^{(k)} = F(y, y', \dots, y^{(k-1)}),$$

dove la funzione incognita  $y(t)$  ha valori in  $\mathbb{R}^n$  e  $F$  è una funzione liscia, definita nell'intorno di un punto  $(\bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{k-1}) \in \mathbb{R}^{kn}$ . Il teorema di esistenza e unicità per sistemi di questa natura è il seguente.

**TEOREMA (8.10).** *Esistono un intorno  $U$  di  $(\bar{y}_0, \dots, \bar{y}_{k-1})$  e un numero  $\varepsilon > 0$  tali che, per ogni  $(y_0, \dots, y_{k-1}) \in U$ , l'equazione*

$$y^{(k)} = F(y, y', \dots, y^{(k-1)})$$

*ha una e una sola soluzione  $y(t)$  definita per  $|t| < \varepsilon$  che soddisfi le condizioni iniziali*

$$y^{(i)}(0) = y_i, \quad i = 0, \dots, k-1.$$

*Inoltre la soluzione dipende in modo liscio dai dati iniziali, nel senso che  $(y_0, \dots, y_{k-1}, t) \mapsto y(t)$  è una applicazione liscia da  $U \times ]-\varepsilon, \varepsilon[$  a  $\mathbb{R}^n$ .*

Per la dimostrazione rimandiamo a ???. Una prima conseguenza del teorema, applicato all'equazione differenziale delle geodetiche su una varietà Riemanniana  $M$ , è che una geodetica è sempre un cammino liscio. Si può però dire molto di più.

**LEMMA (8.11).** *Sia  $p$  un punto della varietà Riemanniana  $M$ . Esistono un intorno  $U$  di  $p$  e un numero reale  $\varepsilon > 0$  tali che, per ogni  $q \in U$  e ogni  $v \in T_q M$  con  $\|v\| < \varepsilon$ , esiste un'unica geodetica  $\gamma_v : ]-2, 2[ \rightarrow M$  tale che*

$$\gamma_v(0) = q, \quad \dot{\gamma}_v(0) = v.$$

*Inoltre  $\gamma_v(t)$  è una funzione liscia di  $v$  e  $t$ .*

Non vi è nulla di magico nel numero 2: come sarà chiaro dalla dimostrazione avremmo potuto scegliere qualsiasi altro numero positivo. Preso alla lettera, il teorema (8.10) afferma qualcosa di più debole dell'enunciato del lemma, e cioè che esistono un intorno  $U$  di  $p$  e due numeri reali positivi  $\eta$  e  $\delta$  tali che esiste una geodetica  $\gamma_v : ]-\delta, \delta[ \rightarrow M$  con le condizioni iniziali richieste quando  $q$  appartiene a  $U$  e  $\|v\| < \eta$ . Per ottenere l'enunciato del lemma si usa una importante proprietà di omogeneità della equazione delle geodetiche, e cioè che, se  $\gamma(t)$  è una geodetica e  $c$  è un numero reale, anche  $\xi(t) = \gamma(ct)$  è una geodetica. Infatti

$$D_{\frac{\partial}{\partial t}} \dot{\xi} = c^2 D_{\frac{\partial}{\partial t}} \dot{\gamma} = 0.$$

Notiamo anche che  $\xi(0) = \gamma(0)$  e che  $\dot{\xi}(0) = c\dot{\gamma}(0)$ . Poniamo  $\varepsilon = \delta\eta/2$ . Se  $q \in U$ ,  $v$  è un elemento di  $T_qM$  tale che  $\|v\| < \varepsilon$  e  $|t| < 2$ , poniamo

$$\gamma_v(t) = \gamma_{\frac{2}{\delta}v} \left( \frac{\delta}{2}t \right).$$

Dato che  $\|\frac{2}{\delta}v\| < \frac{2\varepsilon}{\delta} = \eta$ ,  $\gamma_v$  è una geodetica definita per  $|\frac{\delta}{2}t| < \delta$ , cioè per  $|t| < 2$ . Inoltre  $\gamma_v(0) = q$  e  $\dot{\gamma}_v(0) = v$ . Il lemma è dimostrato.

Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  un cammino di classe  $\mathbf{C}^1$  a tratti. La *lunghezza* di  $\gamma$  è definita come

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}\| dt.$$

Quando si ha a che fare con curve tracciate su una superficie in  $\mathbb{R}^3$ , questa nozione di lunghezza si riduce a quella usuale. Se  $a \leq c \leq d \leq b$  poniamo

$$l_c^d(\gamma) = \int_c^d \|\dot{\gamma}\| dt.$$

Sia ora  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  una geodetica con  $\gamma(0) = q$  e  $\dot{\gamma}(0) = v$ . Definiamo l'*applicazione esponenziale* ponendo  $\exp_q(v) = \gamma(1)$ ; a volte scriveremo semplicemente  $\exp(v)$  al posto di  $\exp_q(v)$ . Osserviamo che, con queste notazioni,  $\gamma(t) = \exp_q(tv)$ . In effetti, il cammino  $\tau \mapsto \gamma(\tau t)$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$ , è una geodetica con  $q$  per estremo iniziale e  $tv$  per velocità iniziale. Notiamo anche che la lunghezza di  $\gamma$  è pari a  $\|v\|$ .

In generale  $\exp_q(v)$  non è definito per ogni  $v$ ; il lemma (8.11) afferma però che è definito se  $v$  è sufficientemente piccolo. Più esattamente, il lemma afferma quanto segue. Indichiamo con  $\Sigma$  la *sezione nulla* di  $TM$ , cioè l'insieme dei vettori tangenti nulli in tutti i punti di  $M$ . Allora vi è un intorno  $A$  di  $\Sigma$  in  $TM$  tale che  $\exp(v)$  è definito per ogni  $v \in A$  e l'applicazione  $\exp : A \rightarrow M$  è liscia. È interessante calcolare il differenziale di  $\exp$  lungo  $\Sigma$ . Sia  $p$  un punto di  $M$  e scegliamo coordinate locali  $x_1, \dots, x_n$  su un intorno di  $p$ . Ogni vettore tangente in un punto di questo intorno si scrive in modo unico sotto la forma  $\sum \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Un sistema di coordinate locali su un intorno di  $0 \in T_pM$  in  $TM$  è  $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ . Dico che in queste coordinate la matrice Jacobiana di  $\exp$  nel punto  $0 \in T_pM$  è

$$(I \quad I).$$

In effetti  $\exp_q(0) = q$  per ogni  $q$  mentre, per ogni  $v \in T_pM$ , si ha

$$\frac{d}{dt} \exp_p(tv)|_{t=0} = v.$$

Consideriamo ora l'applicazione  $F : A \rightarrow M \times M$  che associa a ogni vettore tangente  $v \in T_qM$  la coppia  $(q, \exp_q(v))$ . Per quanto si è appena osservato, la matrice Jacobiana di  $F$  nel punto  $0 \in T_pM$  è, nelle coordinate  $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ , della forma

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix}.$$

Dunque vi è un intorno di  $\Sigma$  su cui  $F$  è un diffeomorfismo locale. Dato che la restrizione di  $F$  a  $\Sigma$  è una immersione, la restrizione di  $F$  a un opportuno intorno  $B$  di  $\Sigma$  è un diffeomorfismo su un aperto di  $M \times M$ . In termini concreti, questo ha le seguenti conseguenze.

LEMMA (8.12). *Per ogni punto  $p$  di  $M$  vi sono un intorno  $U$  e un numero positivo  $\varepsilon$  tali che*

- (1) *Per ogni  $q \in U$  l'applicazione  $\exp_q$  dà un diffeomorfismo dalla palla di raggio  $\varepsilon$  centrata nell'origine di  $T_qM$  su un aperto contenente  $U$ .*
- (2) *Due qualsiasi punti  $q_1$  e  $q_2$  di  $U$  sono congiunti da un'unica geodetica di lunghezza minore di  $\varepsilon$ . Questa geodetica dipende in modo liscio dagli estremi nel senso che, se la scriviamo sotto la forma  $\exp_{q_1}(tv)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , allora  $v$  è una funzione liscia di  $q_1$  e  $q_2$ .*

Il teorema delle funzioni implicite dice che vi è un intorno  $V$  di  $0 \in T_pM$  in  $TM$  tale che la restrizione di  $F$  a  $V$  sia un diffeomorfismo su un aperto in  $M \times M$ . Possiamo supporre che vi siano un intorno  $W$  di  $p$  e un numero reale positivo  $\varepsilon$  tali che  $V$  sia l'insieme dei vettori tangenti  $v \in T_qM$  per cui  $q \in W$  e  $\|v\| < \varepsilon$ . Ora basta scegliere come  $U$  un intorno aperto di  $p$  tale che  $U \times U \subset F(V)$ . In effetti quest'ultima condizione dice che, dati due punti  $q_1$  e  $q_2$  di  $U$ , si può scrivere  $q_2 = \exp_{q_1}(v)$ , dove  $\|v\| < \varepsilon$ . Questo si può fare in modo unico dato che la restrizione di  $F$  a  $V$  è iniettiva. Infine  $v$  dipende in modo liscio da  $q_1$  e  $q_2$  perchè l'inversa di  $F|_V$  è liscia.

Sia  $p$  un punto di  $M$ . Se  $A$  è la palla (aperta o chiusa) in  $T_pM$  di raggio  $r$  centrata nell'origine e l'applicazione  $\exp_p$  dà un diffeomorfismo di un intorno di  $A$  su un aperto di  $M$  diremo che  $B = \exp_p(A)$  è la *palla geodetica (aperta o chiusa)* di centro  $p$  e raggio  $r$ . Chiameremo il bordo di  $B$  *sfera geodetica* di centro  $p$  e raggio  $r$ .

Le geodetiche hanno la proprietà di essere, localmente, curve di lunghezza minima. Più esattamente, vale il seguente risultato.

PROPOSIZIONE (8.13). *Siano  $U$  ed  $\varepsilon$  come nel lemma (8.12). Sia  $\eta : [a, b] \rightarrow M$  un cammino di classe  $\mathbf{C}^1$  a tratti che congiunge due punti di  $U$ , e sia  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  la geodetica di lunghezza minore di  $\varepsilon$  che congiunge i due estremi di  $\eta$ . Allora*

$$l(\gamma) \leq l(\eta).$$

*Si ha uguaglianza se e solo se  $\eta$  è della forma  $\gamma \circ r$ , dove  $r$  è una applicazione suriettiva e non decrescente da  $[a, b]$  a  $[0, 1]$ .*

La chiave della dimostrazione è il seguente lemma.

LEMMA (8.14) (LEMMA DI GAUSS). Sia  $\alpha(t)$  un cammino  $\mathbf{C}^1$  in  $M$ , e sia  $E(t)$  un campo  $\mathbf{C}^1$  di vettori tangenti a  $M$  lungo  $\alpha$  tale che

$$\|E(t)\| = 1, \quad \langle E(t), \dot{\alpha}(t) \rangle = 0$$

per ogni  $t$ . Poniamo  $F(s, t) = \exp_{\alpha(t)}(sE(t))$ . Allora

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle = 0$$

per ogni  $s$  e ogni  $t$ .

Dimostriamo il lemma. Dato che

$$\frac{\partial F}{\partial s}(0, t) = E(t), \quad \frac{\partial F}{\partial t}(0, t) = \dot{\alpha}(t),$$

la tesi è vera per  $s = 0$ . Per concludere basterà mostrare che  $\left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle$  è indipendente da  $s$ . Derivando rispetto a  $s$  e usando il fatto che le curve  $s \mapsto F(s, t)$  sono geodetiche e la formula (8.4) si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle &= \left\langle D_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, D_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, D_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, D_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial F}{\partial s} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial s} \right\rangle. \end{aligned}$$

D'altro canto  $\left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial s} \right\rangle$  è indipendente da  $s$  dato che le curve  $s \mapsto F(s, t)$  sono geodetiche, e si riduce a  $\langle E(t), E(t) \rangle = 1$  per  $s = 0$ . Quindi  $\left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial s} \right\rangle$  vale 1 per ogni  $s$  e ogni  $t$ , e dunque  $\frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle = 0$ , come si doveva dimostrare.

Ora che il lemma (8.14) è dimostrato, passiamo alla dimostrazione della proposizione (8.13). Salvo riparametrizzare  $\eta$ , possiamo supporre che  $a = 0$  e  $b = 1$ . Poniamo  $q = \eta(0)$ , indichiamo con  $B$  la sfera geodetica di centro  $q$  e raggio  $\varepsilon$  e con  $\rho$  la lunghezza di  $\gamma$ . Vi è un numero reale  $t_0 < 1$  tale che  $\eta(t_0) = q$  ma  $\eta(t) \neq q$  se  $t > t_0$ . Per  $t > t_0$ , se  $\eta(t) \in B$  possiamo scrivere, in un unico modo,  $\eta(t) = \exp_q(r(t)v(t))$ , dove  $\|v(t)\| = 1$  e  $r(t)$  e  $v(t)$  sono funzioni  $\mathbf{C}^1$  a tratti di  $t$ . Sia  $t_2$  il minimo tra i valori di  $t$  per cui  $r(t) = \rho$ . Sia  $\delta$  un numero positivo minore di  $\rho$  e sia  $t_1$  il minimo valore di  $t$  per cui  $r(t) = \delta$  e  $t > t_0$ ; è ovvio che  $t_0 < t_1 < t_2$ . Poniamo  $F(s, t) = \exp_q(sv(t))$  e notiamo che a  $F$  si applica il lemma di Gauss (con  $\alpha(t) \equiv q$  ed  $E = v$ ), tranne che nei punti di discontinuità della derivata prima di  $v$ . D'altra parte, se  $t$  è compreso tra  $t_0$  e  $t_2$ ,  $\eta(t) = F(r(t), t)$ , quindi

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial F}{\partial s} \dot{r}(t) + \frac{\partial F}{\partial t},$$

e per il lemma di Gauss

$$\left\| \frac{d\eta}{dt} \right\|^2 = \dot{r}(t)^2 \left\| \frac{\partial F}{\partial s} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial F}{\partial t} \right\|^2.$$

Dato che  $\left\| \frac{\partial F}{\partial s} \right\| = 1$  se ne deduce che

$$\left\| \frac{d\eta}{dt} \right\| \geq |\dot{r}(t)|,$$

e che si ha uguaglianza se e solo se  $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ . Dunque

$$(8.15) \quad l_{t_1}^{t_2}(\eta) = \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{d\eta}{dt} \right\| dt \geq \int_{t_1}^{t_2} |\dot{r}(t)| dt \geq \int_{t_1}^{t_2} \dot{r}(t) dt = \rho - \delta.$$

Passando al limite per  $\delta$  tendente a 0 si conclude che

$$l(\eta) \geq l_0^{t_2}(\eta) \geq \rho = l(\gamma).$$

Ciò dimostra la prima parte di (8.13); questa, applicata al cammino  $\eta|_{[0, t_1]}$ , dice in particolare che  $l_0^{t_1}(\eta) \geq \delta$ . Supponiamo ora che  $l(\eta) = l(\gamma)$ ; ne segue che

$$l_{t_1}^{t_2}(\eta) = l_0^{t_2}(\eta) - l_0^{t_1}(\eta) \leq l(\gamma) - \delta = \rho - \delta.$$

Dunque la (8.15) è una catena di uguaglianze per ogni  $\delta$ , quindi  $r(t)$  è non decrescente e  $v(t)$  costante. Inoltre, passando al limite per  $\delta$  tendente a zero, si trova che  $l(\eta) = l_{t_0}^{t_2}(\eta)$ . Bisogna quindi che  $\eta(t)$  sia costante per  $t \geq t_2$  e per  $t \leq t_0$ . In conclusione si deve avere  $\eta(t) = \gamma(r(t))$ , dove  $r$  è non decrescente. Questo completa la dimostrazione della proposizione (8.13).

La proposizione (8.13) ha varie conseguenze importanti. La prima è la seguente.

**COROLLARIO (8.16).** *Siano  $q_1$  e  $q_2$  due punti di una varietà Riemanniana  $M$ , e supponiamo che tra tutti i cammini di classe  $\mathbf{C}^1$  a tratti che hanno  $q_1$  e  $q_2$  per estremi ve ne sia uno di lunghezza minima. Allora questo cammino è una geodetica (eventualmente riparametrizzata).*

Sia  $\eta : [a, b] \rightarrow M$  il cammino in questione, sia  $p = \eta(t)$  un suo punto, e siano  $U$  ed  $\varepsilon$  l'intorno di  $p$  e il numero positivo la cui esistenza è asserita dal lemma (8.12). Allora se  $t_1 \leq t$  e  $t_2 \geq t$  sono sufficientemente vicini a  $t$ , i punti  $\eta(t_1)$  e  $\eta(t_2)$  appartengono a  $U$ , e quindi sono congiunti da un'unica geodetica  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  di lunghezza minore di  $\varepsilon$ . La proposizione (8.13) dice che la lunghezza di  $\gamma$  non supera quella della restrizione di  $\eta$  a  $[t_1, t_2]$ ; in effetti, per la proprietà di minimalità di  $\eta$ , deve essere

$$l(\gamma) = l_{t_1}^{t_2}(\eta),$$

altrimenti si potrebbe rimpiazzare il tratto di  $\eta$  compreso tra  $\eta(t_1)$  e  $\eta(t_2)$  con  $\gamma$  (opportunosamente riparametrizzata) e ottenere un cammino che congiunge  $q_1$  a  $q_2$  e ha



lunghezza strettamente minore di quella di  $\eta$ . La proposizione (8.13) dice allora che la restrizione di  $\eta$  a  $[t_1, t_2]$  è una riparametrizzazione della geodetica  $\gamma$ . Ciò mostra che nell'intorno di ogni  $t \in [a, b]$  il cammino  $\eta$  è una geodetica riparametrizzata e dimostra il corollario.

Una seconda conseguenza della proposizione (8.13) è la seguente. Dati due punti  $p$  e  $q$  su una varietà Riemanniana connessa  $M$ , poniamo

$$\rho(p, q) = \inf\{l(\eta) \mid \eta \text{ è un cammino } \mathbf{C}^1 \text{ a tratti con estremi } p \text{ e } q\}.$$

Allora  $\rho$  è una distanza su  $M$ . Notiamo innanzitutto che  $\rho(p, q)$  è ben definita per ogni  $p$  e  $q$ . Non è infatti difficile mostrare che l'insieme dei punti di  $M$  che sono congiungibili a  $p$  con un cammino  $\mathbf{C}^1$  a tratti è sia aperto che chiuso, e quindi coincide con  $M$ . Poi osserviamo che tutte le proprietà di una distanza sono ovviamente soddisfatte da  $\rho(p, q)$ , tranne quella di annullarsi solo quando  $p = q$ . Per vedere che  $\rho$  gode anche di questa proprietà ragioniamo così. Se  $p \neq q$  ed  $\varepsilon$  è un numero positivo sufficientemente piccolo, la palla geodetica di centro  $p$  e raggio  $\varepsilon$  non contiene  $q$ ; inoltre ogni suo punto è congiunto a  $p$  da una sola geodetica di lunghezza minore di  $\varepsilon$ . Qualsiasi cammino che congiunga  $p$  a  $q$  deve attraversare la sfera geodetica di centro  $p$  e raggio  $\varepsilon/2$  e deve avere quindi lunghezza almeno  $\varepsilon/2$  (in effetti, con un minimo di cura in più, almeno  $\varepsilon$ ). Dunque  $\rho(p, q) > 0$ . Nel seguito la distanza  $\rho$  sarà chiamata la *distanza geodetica* su  $M$ .

Su  $M$  ci sono ora almeno due topologie naturali: quella originaria di  $M$  e quella indotta dalla metrica. Per fortuna esse coincidono. Nel mostrarlo riserveremo la parola "aperto" agli aperti della topologia originaria di  $M$ . Cominciamo col notare che ogni palla geodetica è un aperto in  $M$ , mentre segue da (8.13) che, per ogni punto  $p$  di  $M$ , se  $\varepsilon$  è sufficientemente piccolo la palla geodetica di centro  $p$  e raggio  $\varepsilon$  è esattamente l'insieme dei punti di  $M$  che distano meno di  $\varepsilon$  da  $p$ . Viceversa, se  $A$  è un aperto di  $M$  e  $p$  un suo punto,  $A$  contiene una palla geodetica di centro  $p$ , dato che l'applicazione esponenziale è continua.

Sia  $M$  una varietà Riemanniana. Diremo che  $M$  è *geodeticamente completa* se ogni geodetica  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  può essere indefinitamente estesa, cioè se esiste una geodetica  $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow M$  la cui restrizione ad  $[a, b]$  sia  $\gamma$ . Non tutte le varietà Riemanniane sono geodeticamente complete. Un esempio è fornito dal "piano bucato"  $P = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  con la metrica euclidea: i segmenti contenuti in rette per l'origine non possono essere indefinitamente estesi. Osserviamo che vi sono punti di  $P$  che non possono essere congiunti tra loro con una geodetica; ciò accade per due punti di  $P$  che siano allineati con l'origine ma da parti opposte rispetto a questa. L'importante risultato che ora dimostreremo dice che questo fenomeno non si può presentare su una varietà geodeticamente completa.

**TEOREMA (8.17) (HOPF-RINOW).** *Sia  $M$  una varietà Riemanniana connessa. Supponiamo che vi sia un punto  $p$  di  $M$  con la proprietà che ogni geodetica avente  $p$  come estremo può essere indefinitamente estesa. Allora per ogni punto  $q$  di  $M$  esiste una geodetica di lunghezza  $\rho(p, q)$  che ha per estremi  $p$  e  $q$ .*

Poniamo  $r = \rho(p, q)$ . Siano  $U$  un intorno di  $p$  ed  $\varepsilon$  un numero reale positivo come in (8.12). Scegliamo una sfera geodetica  $S$  di centro  $p$  e raggio  $\delta < \varepsilon$  che sia contenuta in  $U$ . Dato che  $S$  è compatta, vi è un suo punto  $q_1$  che ha distanza minima da  $q$ .

Possiamo scrivere  $q_1 = \exp(\delta v)$ , dove  $v$  ha norma 1. Mostriamo che  $q = \exp(rv)$ , e quindi che la geodetica  $\gamma(t) = \exp(tv)$ ,  $0 \leq t \leq r$ , ha come estremi  $p$  e  $q$ ; dato che  $\gamma$  ha lunghezza  $r$ , questo dimostra il teorema. Più in generale mostriamo che, per ogni  $t$  tale che  $\delta \leq t \leq r$ , si ha

$$(\mathbf{P}(t)) \quad \rho(\gamma(t), q) = r - t.$$

Osserviamo, per cominciare, che  $\mathbf{P}(\delta)$  è vera. In effetti per ogni  $\xi > 0$  vi è un cammino  $\eta$  di lunghezza minore di  $r + \xi$  con estremi  $p$  e  $q$ . Il cammino  $\eta$  deve tagliare  $S$  in almeno un punto  $q_2$ . Ma allora

$$r + \xi > l(\eta) \geq \delta + \rho(q_2, q),$$

e quindi

$$r - \delta \leq \rho(q_1, q) \leq \rho(q_2, q) < r - \delta + \xi.$$

Per l'arbitrarietà di  $\xi$  si ha che  $\rho(q_1, q) = r - \delta$ , come si voleva.

Indichiamo ora con  $t_0$  l'estremo superiore dei  $t$  per cui  $\mathbf{P}(t)$  è verificata. Per continuità è verificata anche  $\mathbf{P}(t_0)$ . Vogliamo mostrare che  $t_0 = r$ . Se ciò non accade indichiamo con  $p'$  il punto  $\gamma(t_0)$  e scegliamo una piccola sfera geodetica  $S'$  di raggio  $\delta'$  centrata in  $p'$ . Sia  $q_3$  un punto di  $S'$  che ha distanza minima da  $q$ . Ragionando come nella dimostrazione di  $\mathbf{P}(\delta)$  si conclude che

$$\rho(q_3, q) = \rho(p', q) - \delta' = r - t_0 - \delta'.$$

Ora, per la disuguaglianza triangolare,

$$\rho(p, q_3) \geq \rho(p, q) - \rho(q_3, q) = r - (r - t_0 - \delta') = t_0 + \delta'.$$

D'altra parte un cammino di lunghezza  $t_0 + \delta'$  che congiunge  $p$  a  $q_3$  si ottiene seguendo  $\gamma$  fino a  $p'$  e una geodetica di lunghezza  $\delta'$  da  $p'$  a  $q_3$ . Dunque  $\rho(p, q_3) = t_0 + \delta'$  e il cammino appena costruito è una geodetica, per il corollario (8.16): dunque esso deve coincidere con la restrizione di  $\gamma$  a  $[0, t_0 + \delta']$ , e quindi  $q_3 = \gamma(t_0 + \delta')$ . Dato che si è mostrato che  $\rho(q_3, q) = r - t_0 - \delta'$ , ciò contraddice la scelta di  $t_0$ , e dimostra il teorema.

Una geodetica  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  si dice *minimale* se la sua lunghezza è pari alla distanza tra i suoi estremi  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$ . Il lemma (8.12) e la proposizione (8.13) affermano che due punti sufficientemente vicini tra loro su una varietà Riemanniana sono sempre congiunti da una geodetica minimale. Il teorema di Hopf-Rinow afferma che due punti di una varietà connessa e geodeticamente completa sono sempre congiunti da una geodetica minimale. Questa geodetica non è però necessariamente unica. Un esempio è fornito da due punti antipodali su una sfera: tutti i meridiani che li congiungono sono geodetiche minimali. Vogliamo ora mostrare che la nozione di completezza geodetica coincide con quella di completezza metrica.

**PROPOSIZIONE (8.18).** *Sia  $M$  una varietà Riemanniana connessa. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (1)  $M$ , munita della distanza geodetica, è uno spazio metrico completo.
- (2)  $M$  è geodeticamente completa.
- (3) Vi è un punto  $p$  di  $M$  tale che ogni geodetica avente  $p$  come estremo può essere indefinitamente estesa.

È ovvio che (2) implica (3). Supponiamo che valga la (3). Il teorema di Hopf-Rinow implica che  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  è suriettiva. Ne segue che, se  $A$  è un sottinsieme limitato di  $M$  e  $\delta$  indica l'estremo superiore delle distanze di punti di  $A$  da  $p$ , allora  $A \subset \exp_p(B)$ , dove  $B$  è la palla chiusa di centro l'origine e raggio  $\delta$  in  $T_p M$ . Dunque ogni sottinsieme limitato di  $M$  è contenuto in un compatto; ciò vale, in particolare, per le successioni di Cauchy in  $M$ . Quindi ogni successione di Cauchy ammette una sottosuccessione convergente, e dunque è essa stessa convergente. Abbiamo mostrato che (3) implica (1).

Resta da mostrare che (1) implica (2). Sia  $q$  un punto di  $M$  e  $v$  un vettore unitario tangente a  $M$  in  $q$ . Dobbiamo mostrare che  $\exp_q(tv)$  è definita per ogni  $t \geq 0$ . Ragioniamo per assurdo supponendo che, se  $t_0$  è l'estremo superiore dei  $t$  per cui  $\exp_q(tv)$  è definita, si abbia  $t_0 < +\infty$ . Poniamo  $\gamma(t) = \exp_q(tv)$  e osserviamo che, se  $t_1$  e  $t_2$  appartengono a  $[0, t_0[$ , allora

$$\rho(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) \leq |t_1 - t_2|,$$

e quindi  $\gamma$  è una applicazione Lipschitziana. Dato che  $M$  è completa  $\gamma(t)$  converge a un punto  $p \in M$  per  $t \rightarrow t_0$ . Il Lemma (8.12) mostra che vi sono un intorno  $U$  di  $p$  e un numero reale  $\varepsilon > 0$  tali che, per ogni  $x \in U$ , l'applicazione  $\exp_x$  sia definita su tutta la palla di raggio  $\varepsilon$  centrata nell'origine di  $T_x M$ . Scegliamo ora un numero positivo  $t_1$  strettamente compreso tra  $t_0 - \varepsilon$  e  $t_0$  e tale che  $\gamma(t_1) \in U$ , e consideriamo la geodetica  $\eta(t) = \exp_{\gamma(t_1)}((t - t_1)w)$ , dove  $w = \dot{\gamma}(t_1)$ . Per come è stato scelto  $\varepsilon$ ,  $\eta(t)$  è certamente ben definita per  $t$  compreso tra  $t_1 - \varepsilon$  e  $t_1 + \varepsilon$ . D'altra parte  $\eta(t_1) = \gamma(t_1)$  e  $\dot{\eta}(t_1) = \dot{\gamma}(t_1)$ , quindi  $\eta$  e  $\gamma$  coincidono dove sono entrambe definite. In particolare,  $\eta(t) = \gamma(t)$  se  $t_1 \leq t < t_0$ . Il cammino  $\xi : [0, t_1 + \varepsilon] \rightarrow M$  definito da

$$\xi(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } t < t_0 \\ \eta(t) & \text{se } t_0 \leq t \leq t_1 + \varepsilon \end{cases}$$

è dunque una geodetica che estende  $\gamma$ , in contraddizione con la definizione stessa di  $\gamma$ . Questo completa la dimostrazione di (8.18).

Il lemma (8.12) può essere migliorato. Ciò che si può mostrare è che ogni punto di una varietà Riemanniana ha un intorno  $U$  *geodeticamente convesso*. Ciò significa che due punti di  $U$  sono sempre congiunti da una geodetica minimale interamente contenuta in  $U$ . Più esattamente vale il seguente risultato.

**TEOREMA (8.19) (J. C. H. WHITEHEAD).** *Sia  $M$  una varietà Riemanniana. Per ogni punto  $p$  di  $M$  vi è un numero positivo  $\varepsilon$  con le seguenti proprietà:*

- (1) *Due qualsiasi punti della palla geodetica di centro  $p$  e raggio  $\varepsilon$  sono congiunti da una e una sola geodetica minimale.*
- (2) *Per ogni numero positivo  $\delta \leq \varepsilon$ , dati due punti della palla geodetica  $B$  di centro  $p$  e raggio  $\delta$ , la geodetica minimale che li congiunge è interamente contenuta in  $B$ .*

La prima parte del teorema è già contenuta in (8.12). Sia  $A$  una palla geodetica di centro  $p$  e raggio  $\xi$  da determinarsi. Se  $\xi$  è sufficientemente piccolo la proprietà (1) vale

per  $A$ . Poniamo  $\varepsilon = \xi/2$ . Notiamo intanto che la geodetica minimale che congiunge due punti della palla  $B$  di centro  $p$  e raggio  $\varepsilon$  è interamente contenuta in  $A$ . In effetti la distanza tra due punti di  $B$  è sempre minore di  $2\varepsilon$  (due volte la distanza dal bordo di  $B$  a  $p$ ) mentre un cammino che congiunga due punti di  $B$  e esca da  $A$  ha necessariamente lunghezza maggiore di  $2\varepsilon$  (due volte la distanza tra il bordo di  $B$  e quello di  $A$ ). Siano ora  $q_1$  e  $q_2$  due punti di  $B$  e siano  $r_1$  e  $r_2$  le loro distanze da  $p$ ; per fissare le idee supponiamo che  $r_1 \geq r_2$ . Sia  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  la geodetica minimale che congiunge  $q_1$  e  $q_2$ . Se  $\gamma$  passa per  $p$  è ovviamente contenuta in  $B$ . Supponiamo quindi che non passi per  $p$ ; possiamo allora scrivere, in modo unico,  $\gamma(t) = \exp_p(r(t)v(t))$ , dove  $\|v(t)\| \equiv 1$ . Mostriamo che, se  $\xi$  è sufficientemente piccolo (indipendentemente da  $q_1$  e  $q_2$ )  $r(t) \leq r_1$  per ogni  $t \in [0, 1]$ . Questo concluderà la dimostrazione. Per farlo, ragioniamo per assurdo: supponiamo che ciò non sia vero, e sia  $[a, b] \subset [0, 1]$  un intervallo tale che  $r(a) = r(b) = r_1$  e  $r(t) > r_1$  per ogni  $t$  strettamente compreso tra  $a$  e  $b$ . Sia  $\eta$  il cammino ottenuto da  $\gamma$  rimpiazzando il tratto tra  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$  con  $\exp_p(r_1 v(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ . Mostriamo che, se  $\xi$  è sufficientemente piccolo,  $l_a^b(\eta) < l_a^b(\gamma)$ , e quindi  $l(\eta) < l(\gamma)$ , il che contraddice la minimalità di  $\gamma$ . Poniamo  $F(s, t) = \exp_p(sv(t))$ , e ricordiamo (cf. la dimostrazione della proposizione (8.13)) che, per  $t$  tra  $a$  e  $b$ ,

$$\|\dot{\gamma}\| \geq \left\| \frac{\partial F}{\partial t}(r(t), t) \right\|,$$

mentre

$$\|\dot{\eta}\| = \left\| \frac{\partial F}{\partial t}(r_1, t) \right\|.$$

Basterà dunque mostrare che  $\left\| \frac{\partial F}{\partial t}(s, t) \right\|$  è una funzione strettamente crescente di  $s$  per  $0 < s < \xi$ , se  $\xi$  è sufficientemente piccolo. Più in generale, indichiamo con  $S$  la sfera di raggio 1 in  $T_p M$  e con  $\varphi : ]0, \alpha[ \times S \rightarrow M$ , dove  $\alpha$  è un opportuno numero positivo, l'applicazione definita da  $\varphi(s, w) = \exp_p(sw)$ . Ogni vettore  $X$  tangente a  $S$  in un punto  $w$  determina un campo di vettori tangenti a  $]0, \alpha[ \times S$  lungo  $]0, \alpha[ \times \{w\}$ , che indicheremo con  $\bar{X}$ . Allora  $d\varphi(\bar{X})$  è un campo di vettori tangenti a  $M$  lungo la geodetica  $s \mapsto \exp_p(sv)$ : per ogni fissato  $t$ ,  $\frac{\partial F}{\partial t}(s, t)$  è della forma  $d\varphi(\bar{X})$ , dove  $X = \dot{v}(t)$ . Quanto dobbiamo dimostrare è dunque il seguente risultato.

LEMMA (8.20). *Esiste un numero reale positivo  $\xi$  tale che, per ogni vettore  $X$  tangente a  $S$ ,  $\|d\varphi(\bar{X})\|^2$  sia una funzione strettamente crescente di  $s$  sull'intervallo  $]0, \xi[$ .*

Nel dimostrare il lemma non si perde in generalità se si suppone che  $d\varphi(\bar{X})$  sia della forma  $\frac{\partial G}{\partial \vartheta}$ , dove

$$G(s, \vartheta) = \exp_p(s(\cos(\vartheta)v_1 + \sin(\vartheta)v_2))$$

e  $v_1$  e  $v_2$  sono vettori unitari e ortogonali fra loro in  $T_p M$ . Il lemma di Gauss implica

che

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left( \left\| \frac{\partial G}{\partial \vartheta} \right\|^2 \right) &= 2 \left\langle D_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial G}{\partial \vartheta}, \frac{\partial G}{\partial \vartheta} \right\rangle \\ &= 2 \left\langle D_{\frac{\partial}{\partial \vartheta}} \frac{\partial G}{\partial s}, \frac{\partial G}{\partial \vartheta} \right\rangle \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left\langle \frac{\partial G}{\partial s}, \frac{\partial G}{\partial \vartheta} \right\rangle - 2 \left\langle \frac{\partial G}{\partial s}, D_{\frac{\partial}{\partial \vartheta}} \frac{\partial G}{\partial \vartheta} \right\rangle \\ &= -2 \left\langle \frac{\partial G}{\partial s}, D_{\frac{\partial}{\partial \vartheta}} \frac{\partial G}{\partial \vartheta} \right\rangle. \end{aligned}$$

Dobbiamo dunque mostrare che  $\left\langle \frac{\partial G}{\partial s}, D_{\frac{\partial}{\partial \vartheta}} \frac{\partial G}{\partial \vartheta} \right\rangle$  è negativo se  $s$  è sufficientemente piccolo. Per farlo fissiamo una base ortonormale  $e_1, \dots, e_n$  di  $T_p M$  e scriviamo

$$v_i = \sum_j a_{ij} e_j.$$

L'inversa della applicazione  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \exp_p(\sum x_i e_i)$  è una carta locale su un intorno di  $p$ . In queste coordinate si può scrivere

$$\frac{\partial G}{\partial \vartheta} = s \sum_j (-a_{1j} \sin(\vartheta) + a_{2j} \cos(\vartheta)) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

cioè

$$\frac{\partial G}{\partial \vartheta} = s \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

dove le  $b_j$  sono funzioni limitate da costanti indipendenti da  $v_1$  e  $v_2$ . Poi

$$D_{\frac{\partial}{\partial \vartheta}} \frac{\partial G}{\partial \vartheta} = -s \sum_j (a_{1j} \cos(\vartheta) + a_{2j} \sin(\vartheta)) \frac{\partial}{\partial x_j} + s^2 \sum_{i,j,k} b_i b_j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

dove i  $\Gamma_{ij}^k$  sono i simboli di Christoffel nelle coordinate  $x_1, \dots, x_n$ . D'altra parte

$$\frac{\partial G}{\partial s} = \sum_j (a_{1j} \cos(\vartheta) + a_{2j} \sin(\vartheta)) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

e dunque

$$\left\langle \frac{\partial G}{\partial s}, D_{\frac{\partial}{\partial \vartheta}} \frac{\partial G}{\partial \vartheta} \right\rangle = -s \left\| \frac{\partial G}{\partial s} \right\|^2 + s^2 f = -s + s^2 f,$$

dove  $f$  è una funzione limitata da costanti indipendenti da  $v_1$  e  $v_2$  (si può fare di meglio, mostrando che i simboli di Christoffel, e quindi anche  $f$ , si annullano in  $p$ ). Quindi vi è  $\xi > 0$  tale che

$$\left\langle \frac{\partial G}{\partial s}, D_{\frac{\partial}{\partial \vartheta}} \frac{\partial G}{\partial \vartheta} \right\rangle < 0$$

per ogni  $s$  tale che  $0 < s < \xi$ , come si voleva. Questo conclude la dimostrazione del lemma e quindi anche del teorema (8.19).

I due esempi che seguono non sono strettamente legati al tema di questo capitolo, ma ci aiuteranno nello studio delle geodetiche sul disco di Poincaré.

ESEMPIO (8.21) ( $SU(2)$  E  $SO(3, \mathbb{R})$ ). In questo esempio e in quello che segue converrà pensare gli elementi di  $\mathbb{R}^n$ , di  $\mathbb{C}^n$ , ecc., come matrici colonna. Il *gruppo unitario*  $U(n)$  è il sottogruppo del gruppo  $GL(n, \mathbb{C})$  costituito da tutte le matrici unitarie, cioè da tutte le matrici  $A$  tali che  ${}^t A \bar{A} = I$ ; è un sottogruppo di Lie di  $GL(n, \mathbb{C})$ . Il gruppo  $U(n)$  agisce su  $\mathbb{C}^n$  per moltiplicazione a sinistra. Una matrice complessa  $n \times n$   $A$  è unitaria se e solo se l'applicazione da  $\mathbb{C}^n$  in  $\mathbb{C}^n$  data da  $\xi \mapsto A\xi$  è una isometria, cioè ha la proprietà che, per ogni coppia di vettori  $\xi$  ed  $\eta$  si ha

$$\langle A\xi, A\eta \rangle = {}^t \xi {}^t A \bar{A} \bar{\eta} = {}^t \xi \bar{\eta} = \langle \xi, \eta \rangle .$$

Il *gruppo unitario speciale*  $SU(n)$  è costituito da tutte le matrici unitarie  $n \times n$  di determinante 1; è un sottogruppo di Lie di  $U(n)$ .

Se identifichiamo  $\mathbb{R}^3$  con  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ , l'applicazione di Hopf  $h : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è definita da

$$h \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |z|^2 - |w|^2 \\ 2z\bar{w} \end{pmatrix} .$$

Notiamo che

$$\left\| h \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \right\|^2 = |z|^4 + |w|^4 - 2|z|^2|w|^2 + 4|z|^2|w|^2 = \left\| \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \right\|^4 .$$

In particolare

$$\left\| \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \right\| = 1 \iff \left\| h \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \right\| = 1 .$$

Se  $\lambda$  è un numero complesso di modulo 1, allora  $h(\lambda\xi) = h(\xi)$ . Supponiamo viceversa che  $h(\xi') = h(\xi)$ , e siano  $z$  e  $w$ ,  $z'$  e  $w'$  le componenti di  $\xi$  e  $\xi'$ . Se  $z$  e  $w$  non sono nulli, scrivendo  $z' = \alpha z$ ,  $w' = \beta w$  se ne deduce che  $1 = \alpha\bar{\beta}$ . Quindi  $|\alpha|^2|z|^2 - |\alpha|^{-2}|w|^2 = |z|^2 - |w|^2$ . Poiché  $t|z|^2 - t^{-1}|w|^2$  è una funzione strettamente crescente di  $t$  ne segue che  $|\alpha| = 1$  e che  $\beta = \alpha$ . Se  $z = 0$ , o  $z'$  o  $w'$  deve essere nullo; d'altra parte  $|z'|^2 - |w'|^2$  è negativo o nullo, a seconda che  $w$  sia non nullo o nullo, e quindi  $z'$  deve essere nullo e si deve avere  $|w'| = |w|$ . Il caso in cui  $w$  è nullo si tratta allo stesso modo. Dunque in ogni caso si conclude che  $h(\xi') = h(\xi)$  se e solo se vi è un numero complesso  $\lambda$  di modulo 1 tale che  $\xi' = \lambda\xi$ .

Notiamo che  $h$  è suriettiva. Siano infatti dati un numero reale  $x$  e un numero complesso  $y$ . Se  $y$  non è nullo, scelti numeri complessi  $\zeta$  e  $\eta$  tali che  $2\zeta\bar{\eta} = y$ , esiste un numero reale  $\alpha$  tale che  $x = \alpha^2|\zeta|^2 - \alpha^{-2}|\eta|^2$ , dato che  $t \mapsto t|\zeta|^2 - t^{-1}|\eta|^2$  è una funzione suriettiva dai reali positivi in  $\mathbb{R}$ . Ponendo quindi  $z = \alpha\zeta$  e  $w = \alpha^{-1}\eta$  si ha che

$$h \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Se  $y = 0$  e  $x > 0$  si sceglie  $w = 0$  e  $z$  in modo tale che  $|z|^2 = x$ ; il caso in cui  $y = 0$  e  $x < 0$  si tratta in modo analogo. Se  $x = y = 0$  si prende  $z = w = 0$ .

Gli elementi di  $SU(2)$  sono tutte e sole le matrici  $A$  della forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} ,$$

dove  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Dunque  $SU(2)$  è omeomorfo alla sfera unitaria in  $\mathbb{C}^2$ , cioè a  $S^3$ . Definiamo ora una applicazione  $\tilde{A}$  di  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$  in sè ponendo

$$\tilde{A}(h(\xi)) = h(A(\xi)).$$

Questa è una buona definizione perchè, se  $h(\xi') = h(\xi)$ , allora c'è un numero  $\lambda$  di modulo 1 tale che  $\xi' = \lambda\xi$  e dunque

$$h(A(\xi')) = h(A(\lambda\xi)) = h(\lambda A(\xi)) = h(A(\xi)).$$

Notiamo che  $\widetilde{AB} = \tilde{A}\tilde{B}$ ; ne segue che  $\tilde{A}$  è biunivoca per ogni  $A \in SU(2)$  e che  $A \mapsto \tilde{A}$  è un omomorfismo da  $SU(2)$  nel gruppo delle applicazioni biunivoche di  $\mathbb{R}^3$  in sè.

Vogliamo ora mostrare che  $\tilde{A}$  è lineare (su  $\mathbb{R}$ ). Si ha infatti

$$\begin{aligned} |az + bw|^2 - |-\bar{b}z + \bar{a}w|^2 &= (|a|^2 - |b|^2)(|z|^2 - |w|^2) + 2a\bar{b}z\bar{w} + 2b\bar{a}w\bar{z}, \\ 2(az + bw)\overline{-\bar{b}z + \bar{a}w} &= -2ab(|z|^2 - |w|^2) + 2a^2z\bar{w} - 2b^2w\bar{z}, \end{aligned}$$

e dunque

$$(8.22) \quad \tilde{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (|a|^2 - |b|^2)x + a\bar{b}y + \bar{a}b\bar{y} \\ -2abx + a^2y - b^2\bar{y} \end{pmatrix}.$$

In conclusione,  $\tilde{A}$  è una applicazione  $\mathbb{R}$ -lineare di  $\mathbb{R}^3$  in sè; in più, per ogni  $\eta = h(\xi)$ , si ha che

$$\|\tilde{A}(\eta)\| = \|h(A(\xi))\| = \|A(\xi)\|^2 = \|\xi\|^2 = \|h(\xi)\| = \|\eta\|,$$

e quindi  $\tilde{A}$  è una trasformazione ortogonale. Dunque l'applicazione che associa  $\tilde{A}$  ad  $A$  è un omomorfismo  $\varphi : SU(2) \rightarrow O(3, \mathbb{R})$ . Dato che  $SU(2)$  è connesso, in realtà l'immagine di  $\varphi$  è contenuta nella componente connessa dell'identità di  $O(3, \mathbb{R})$ , cioè in  $SO(3, \mathbb{R})$ . Segue da (8.22) che il nucleo di  $\varphi$  è  $\{\pm I\}$ ; dunque, per ogni  $A \in SU(2)$ ,  $\varphi^{-1}(\varphi(A))$  è costituito da  $A$  e  $-A$ . Infine  $\varphi$ , come applicazione da  $SU(2)$  a  $SO(3, \mathbb{R})$ , è suriettiva. Per vederlo ci serviremo di alcune osservazioni di carattere generale. Siano  $G$  e  $H$  due gruppi di Lie, e sia  $\alpha : G \rightarrow H$  un omomorfismo di gruppi di Lie, cioè una applicazione liscia che sia anche un omomorfismo di gruppi. Osserviamo che il rango di  $d\alpha_g$  è indipendente da  $g$ . In effetti, fissato  $g$ , l'applicazione  $\alpha$  è la composizione della moltiplicazione per  $g^{-1}$ , di  $\alpha$  stessa e della moltiplicazione per  $\alpha(g)$ . Dato che la prima e l'ultima di queste applicazioni sono diffeomorfismi, si conclude che il rango di  $d\alpha_g$  è pari a quello di  $d\alpha_1$ , dove 1 sta per l'elemento neutro di  $G$ . Ad  $\alpha$ , visto che ha rango costante, si può applicare la proposizione (4.6) e concludere che, per ogni  $h \in H$ , o  $\alpha^{-1}(h)$  è vuota o è una sottovarietà differenziabile di  $G$  di dimensione pari alla dimensione di  $G$  meno il rango di  $\alpha$ . Se applichiamo queste considerazioni a  $\varphi$ , tenendo conto del fatto che sia  $SU(2)$  che  $SO(3, \mathbb{R})$  hanno dimensione 3 e che, per ogni  $A$ ,  $\varphi^{-1}(A)$  consta di al più due elementi, ne deduciamo che  $\varphi$  è un diffeomorfismo locale, e quindi che  $\varphi(SU(2))$  è aperto. Dato che  $SO(3, \mathbb{R})$  è connesso, per concludere che  $SO(3, \mathbb{R}) = \varphi(SU(2))$  basta ora mostrare che un sottogruppo di un gruppo di Lie che sia aperto è anche chiuso. In effetti, se  $G$  è un gruppo di Lie e  $H$  un suo sottogruppo aperto, il complementare di  $H$  è unione di classi laterali di  $H$  e quindi è aperto.

ESEMPIO (8.23) ( $SU(1,1)$  E  $SO(1,2)$ ). Siano  $p$  e  $q$  interi non negativi e sia  $n$  la loro somma. Dati due vettori complessi

$$\xi = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix},$$

poniamo

$$Q_{p,q}(\xi, \eta) = - \sum_{i=1}^p z_i \bar{w}_i + \sum_{i=p+1}^n z_i \bar{w}_i.$$

Questo definisce una forma hermitiana non degenere su  $\mathbb{C}^n$ . Il gruppo  $U(p, q)$  è il sottogruppo di  $GL(n, \mathbb{C})$  costituito da tutte le applicazioni lineari  $A$  di  $\mathbb{C}^n$  in sè tali che, per ogni coppia di vettori  $\xi$  ed  $\eta$  in  $\mathbb{C}^n$  si abbia

$$Q_{p,q}(A\xi, A\eta) = Q_{p,q}(\xi, \eta).$$

Se identifichiamo le applicazioni lineari di  $\mathbb{C}^n$  in sè con le matrici  $n \times n$ ,  $U(p, q)$  può anche essere descritto come il gruppo di tutte le matrici complesse  $n \times n$   $A$  tali che

$${}^t A M \bar{A} = M,$$

dove  $M$  è la matrice diagonale che ha sulla diagonale  $-1$  ripetuto  $p$  volte, seguito da  $1$  ripetuto  $q$  volte. Naturalmente, con  $SU(p, q)$  indicheremo il sottogruppo di  $U(p, q)$  costituito da tutti gli elementi di determinante 1.

Siano  $p$ ,  $q$  e  $n$  come sopra. Definiremo ora una forma bilineare simmetrica non degenere su  $\mathbb{R}^n$ , che indicheremo con  $P_{p,q}$ . Dati due vettori in  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

poniamo

$$P_{p,q}(\xi, \eta) = - \sum_{i=1}^p x_i y_i + \sum_{i=p+1}^n x_i y_i.$$

Il gruppo  $O(p, q)$  può essere definito come il gruppo di tutte le applicazioni lineari  $A$  di  $\mathbb{R}^n$  in sè tali che

$$P_{p,q}(A\xi, A\eta) = P_{p,q}(\xi, \eta)$$

per ogni coppia  $\xi$ ,  $\eta$  di elementi di  $\mathbb{R}^n$ , oppure, in modo del tutto equivalente, come l'insieme delle matrici reali  $n \times n$   $A$  tali che

$${}^t A M A = M.$$



Le matrici di determinante 1 in  $O(p, q)$  costituiscono un sottogruppo, che si indica con  $SO(p, q)$ .

Se, come nell'esempio (8.21), identifichiamo  $\mathbb{R}^3$  con  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ , possiamo definire una applicazione  $\tilde{k}$  da  $\mathbb{C}^2$  a  $\mathbb{R}^3$  che è un analogo della applicazione di Hopf ponendo

$$\tilde{k} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |z|^2 + |w|^2 \\ 2z\bar{w} \end{pmatrix}.$$

Scriveremo  $P$  per indicare la forma bilineare  $P_{1,2}$  e  $Q$  per indicare la forma hermitiana  $Q_{1,1}$ . In analogia con quanto visto nell'esempio (8.21), si verifica immediatamente che

$$P \left( \tilde{k} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}, \tilde{k} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \right) = |z|^4 + |w|^4 + 2|z|^2|w|^2 - 4|z|^2|w|^2 = -Q \left( \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \right)^2.$$

Segue da ciò e dalla definizione che l'immagine di  $\tilde{k}$  è contenuta nella chiusura del cono aperto  $C_+$  costituito da tutti i vettori

$$\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

dove  $x$  è un numero reale e  $y$  un numero complesso, tali che

$$P(\xi, \xi) < 0, \quad x > 0,$$

cioè tali che

$$|y|^2 - x^2 < 0, \quad x > 0.$$

Inoltre, se  $Q(\zeta, \zeta) \neq 0$ , allora  $\tilde{k}(\zeta)$  è contenuto in  $C_+$ . D'ora in poi useremo la lettera  $k$  per indicare la restrizione di  $\tilde{k}$  al cono  $\Gamma \subset \mathbb{C}^2$  costituito da tutti i vettori

$$\zeta = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$$

tali che

$$Q(\zeta, \zeta) > 0,$$

cioè tali che

$$|w|^2 - |z|^2 > 0,$$

vista come applicazione in  $C_+$ . Ragionando come nell'esempio (8.21), si mostra che  $k(\zeta) = k(\zeta')$  se e solo se vi è un numero complesso  $\lambda$  di modulo 1 tale che  $\zeta' = \lambda\zeta$ , e che inoltre  $k : \Gamma \rightarrow C_+$  è suriettiva.

Sia ora

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

una matrice complessa  $2 \times 2$ . Dire che  $A \in SU(1, 1)$  equivale a dire che

$$\begin{aligned} ad - bc &= 1, \\ \bar{a}b - d\bar{c} &= 0, \\ |a|^2 - |c|^2 &= 1, \\ |d|^2 - |b|^2 &= 1. \end{aligned}$$

Dunque sia  $x = d$ ,  $y = -b$  che  $x = \bar{a}$ ,  $y = -\bar{c}$  sono soluzioni del sistema di equazioni lineari

$$\begin{aligned} ax + cy &= 1 \\ bx + dy &= 0. \end{aligned}$$

Dato che  $A$  è invertibile bisogna che sia  $d = \bar{a}$  e  $c = \bar{b}$ . Dunque gli elementi di  $SU(1, 1)$  sono tutte e sole le matrici della forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

tali che  $|a|^2 - |b|^2 = 1$ . Ne segue in particolare che  $SU(1, 1)$  è connesso (è omeomorfo al prodotto  $\mathbb{R}^2 \times S^1$ ).

Sia ora

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

un elemento di  $SU(1, 1)$ . Definiamo una applicazione  $\tilde{A}$  di  $C_+$  in sè ponendo

$$\tilde{A}(k(\xi)) = k(A(\xi)).$$

Questa è una buona definizione perchè, se  $k(\xi') = k(\xi)$ , allora c'è un numero  $\lambda$  di modulo 1 tale che  $\xi' = \lambda\xi$  e dunque

$$k(A(\xi')) = k(A(\lambda\xi)) = k(\lambda A(\xi)) = k(A(\xi)).$$

Notiamo che  $\widetilde{AB} = \tilde{A}\tilde{B}$ ; ne segue che  $\tilde{A}$  è biunivoca per ogni  $A \in SU(1, 1)$  e che  $A \mapsto \tilde{A}$  è un omomorfismo da  $SU(1, 1)$  nel gruppo delle applicazioni biunivoche di  $C_+$  in sè. Notiamo che

$$\begin{aligned} |az + bw|^2 + |\bar{b}z + \bar{a}w|^2 &= (|a|^2 + |b|^2)(|z|^2 + |w|^2) + 2a\bar{b}z\bar{w} + 2b\bar{a}w\bar{z}, \\ 2(az + bw)\overline{(\bar{b}z + \bar{a}w)} &= 2ab(|z|^2 + |w|^2) + 2a^2z\bar{w} + 2b^2w\bar{z}, \end{aligned}$$

e dunque, se poniamo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix},$$

si ha che

$$(8.24) \quad \tilde{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (|a|^2 + |b|^2)x + a\bar{b}y + \bar{a}b\bar{y} \\ 2abx + a^2y + b^2\bar{y} \end{pmatrix}.$$

In conclusione,  $\tilde{A}$  è la restrizione di una applicazione  $\mathbb{R}$ -lineare di  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$  in sè, che indicheremo con lo stesso simbolo  $\tilde{A}$ ; in più, per ogni  $\eta = k(\xi) \in C_+$ , si ha che

$$P(\tilde{A}(\eta), \tilde{A}(\eta)) = P(k(A\xi), k(A\xi)) = -Q(A\xi, A\xi)^2 = -Q(\xi, \xi)^2 = P(k(\xi), k(\xi)) = P(\eta, \eta).$$

In realtà questa uguaglianza vale per ogni  $\eta$ . Infatti sia  $P(\tilde{A}(\eta), \tilde{A}(\eta))$  che  $P(\eta, \eta)$  sono polinomi omogenei di secondo grado in  $\eta$ . Dato che coincidono sull'aperto  $C_+$ , hanno le stesse derivate su  $C_+$  e, per continuità, anche nell'origine. Quindi sono uguali. Dato che

$$P(\tilde{A}(\eta), \tilde{A}(\eta)) = P(\eta, \eta)$$

per ogni  $\eta$ ,  $\tilde{A}$  appartiene a  $O(1, 2)$ . Dunque l'applicazione che associa  $\tilde{A}$  ad  $A$  è un omomorfismo  $\varphi : SU(1, 1) \rightarrow O(1, 2)$ . Segue dalla (8.24) che  $\varphi^{-1}(I) = \{\pm I\}$  e quindi che  $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = \{\pm A\}$  per ogni  $A \in SU(1, 1)$ .

Il gruppo  $O(1, 2)$  non è connesso, dato che è l'unione del chiuso  $SO(1, 2)$  e del chiuso consistente di tutti gli elementi di  $O(1, 2)$  di determinante  $-1$ . Ma nemmeno  $SO(1, 2)$  è connesso, in quanto è unione del sottogruppo aperto

$$SO_0(1, 2) = \{A \in SO(1, 2) \mid A(C_+) \subset C_+\}$$

e dell'aperto

$$\{A \in SO(1, 2) \mid A(C_+) \subset C_-\},$$

dove  $C_-$  è costituito da tutti i vettori

$$\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

in  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$  tali che

$$P(\xi, \xi) < 0, \quad x < 0.$$

Infatti, dato che  $C = C_+ \cup C_-$  è l'insieme dei vettori  $\xi$  tali che  $P(\xi, \xi) < 0$ ,  $A(C) \subset C$  per ogni  $A \in O(1, 2)$ . Poiché  $SU(1, 1)$  è connesso, l'immagine di  $\varphi$  è contenuta in  $SO_0(1, 2)$ . Se mostriamo che  $SO_0(1, 2)$  è connesso, ragionando esattamente come per l'analogo omomorfismo da  $SU(2)$  in  $SO(3)$  si concluderà che  $\varphi(SU(1, 1)) = SO_0(1, 2)$ . Mostriamo che  $SO_0(1, 2)$  è connesso costruendo una applicazione continua e suriettiva  $\alpha$  da  $M \times S^1$  a  $SO_0(1, 2)$ , dove  $M$  è la pseudosfera

$$\{\xi \in C_+ \mid P(\xi, \xi) = -1\}.$$

Indichiamo con  $e$  il vettore in  $\mathbb{R}^3$  di componenti  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = x_3 = 0$ . Gli elementi  $A$  di  $SO_0(1, 2)$  tali che  $Ae = e$  non sono altro che le rotazioni intorno all'asse delle  $x_1$ , e quindi l'insieme di questi elementi si identifica naturalmente a  $S^1$ . Sia ora  $A$  una matrice reale  $3 \times 3$  e indichiamo con  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$  le sue colonne. Allora  $A$  appartiene a  $SO_0(1, 2)$  se e solo se

$$\begin{aligned} P(\xi_1, \xi_1) &= -1, \\ P(\xi_2, \xi_2) &= P(\xi_3, \xi_3) = 1, \\ P(\xi_i, \xi_j) &= 0 \quad \text{se } i \neq j, \\ \det(A) &= 1, \\ \xi_1 &\in C_+. \end{aligned}$$

Se

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

è un elemento di  $M$ , poniamo

$$B(\xi) = (\xi \ \eta \ \zeta),$$

dove

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 - x_2^2}} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(si noti che  $x_1^2 - x_2^2$  è necessariamente maggiore di 1), e  $\zeta$  è l'unica soluzione del sistema di equazioni lineari in  $X$

$$\begin{aligned} \det(\xi \ \eta \ X) &= 1, \\ P(\xi, X) &= 0, \\ P(\eta, X) &= 0. \end{aligned}$$

Per quanto si è osservato,  $B(\xi)$  appartiene a  $SO_0(1,2)$ . Si noti che, per la regola di Cramer,  $\zeta$  è una funzione razionale di  $\xi$  ed  $\eta$ , e quindi  $B(\xi)$  dipende con continuità da  $\xi$ . Inoltre, per costruzione,

$$B(\xi)e = \xi;$$

Ciò mostra, fra l'altro, che  $SO_0(1,2)$  agisce in modo transitivo su  $M$ .

Se  $\xi \in M$  e  $R$  è una rotazione intorno all'asse delle  $x_1$  poniamo ora

$$\alpha(\xi, R) = B(\xi)R.$$

Si tratta di una applicazione continua da  $M \times S^1$  a  $SO_0(1,2)$ . Dobbiamo vedere che è suriettiva. Sia  $A$  un elemento di  $SO_0(1,2)$  e poniamo  $\xi = Ae$ . Allora  $B(\xi)^{-1}Ae = e$  e quindi  $R = B(\xi)^{-1}A$  è una rotazione intorno all'asse delle  $x_1$ . Dunque  $A = \alpha(\xi, R)$ .

Ci proponiamo ora di approfondire lo studio della geometria del disco di Poincaré. Incominciamo con alcune definizioni. Sia  $f : N \rightarrow M$  una applicazione liscia tra varietà Riemanniane. Diremo che  $f$  è *isometrica* se per ogni punto  $p$  di  $N$  e ogni coppia di vettori  $v, w \in T_p N$  si ha che

$$\langle df(v), df(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Una applicazione isometrica è una immersione locale. Diremo che  $f$  è una *isometria locale* se  $df_p : T_p N \rightarrow T_{f(p)} M$  è una isometria per ogni  $p$ . Una isometria locale è un diffeomorfismo locale. Infine, se  $f$  è sia un diffeomorfismo che una isometria locale, diremo che  $f$  è una *isometria*. Una isometria di  $M$  in sè sarà anche detto un *automorfismo* di  $M$ . Notiamo che la composizione di due isometrie e l'inversa di una isometria sono anch'esse isometrie; ne segue che l'insieme di tutte le isometrie di una varietà Riemanniana in sè è un gruppo.

ESEMPIO (8.25) (GEOMETRIA SUL DISCO DI POINCARÉ). Identifichiamo  $\mathbb{C}$  a  $\mathbb{R}^2$  associando a ogni numero complesso le sue parti reale e immaginaria. Il disco di Poincaré può essere visto come il disco unitario

$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\},$$

in  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ , munito della metrica

$$g_{ij} = \frac{4\delta_{ij}}{(1 - |z|^2)^2}.$$

Indichiamo con  $M$  la pseudosfera bidimensionale. Indicando, come nell'esempio (8.23), con  $P$  la forma  $\mathbb{R}$ -bilinare

$$P\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Re}(yy') - xx',$$

$M$  è l'insieme dei vettori

$$\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$$

tali che  $P(\xi, \xi) = -1$ , con la metrica indotta da  $P$ . Dato che gli elementi del gruppo  $SO_0(1,2)$  rispettano la forma bilinare  $P$ , le loro restrizioni a  $M$  sono automorfismi di  $M$ . Abbiamo già osservato (cf. l'esempio (6.23)) che l'applicazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{y}{1+x}$$

è una isometria di  $M$  su  $B$ . Quindi il gruppo  $SO_0(1,2)$  agisce con isometrie anche su  $B$ . Dato che vi è un omomorfismo  $\varphi$  di  $SU(1,1)$  su  $SO_0(1,2)$ , anche  $SU(1,1)$  agisce su  $B$ ; questa azione è assai più semplice da descrivere di quella di  $SO_0(1,2)$ . Ricordiamo che ogni elemento di  $M$  è della forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\zeta|^2 + |\eta|^2 \\ 2\zeta\bar{\eta} \end{pmatrix},$$

dove

$$\begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix}$$

è un vettore in  $\mathbb{C}^2$  tale che  $|\eta|^2 - |\zeta|^2 = 1$ . La composizione di  $k$  con l'isometria

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{y}{1+x}$$

di  $M$  su  $B$  è data da

$$\begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto \frac{2\zeta\bar{\eta}}{1 + |\zeta|^2 + |\eta|^2} = \frac{2\zeta\bar{\eta}}{2|\eta|^2} = \frac{\zeta}{\eta}.$$

Quindi, se poniamo  $z = \zeta/\eta$ , un elemento

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

di  $SU(1,1)$  agisce su  $z \in B$  secondo la regola

$$z \mapsto \frac{a\zeta + b\eta}{\bar{b}\zeta + \bar{a}\eta} = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}.$$

Abbiamo dunque a che fare con la restrizione a  $B$  di una particolare *trasformazione lineare frazionaria* o *trasformazione di Möbius*, cioè con una trasformazione  $\Psi$  della forma

$$(8.26) \quad \Psi(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

dove

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

è una matrice complessa di determinante 1.

Convieni ora dimostrare alcune proprietà elementari delle trasformazioni di Möbius. Ad ogni elemento di  $SL(2, \mathbb{C})$  è associata una trasformazione di Möbius; a due elementi di  $SL(2, \mathbb{C})$  è associata la stessa trasformazione se e solo se essi differiscono solo per un segno. Inoltre il prodotto di matrici corrisponde alla composizione di trasformazioni di Möbius. Sia ora  $\Psi$  come in (8.26). Osserviamo intanto che  $\Psi$ , come applicazione in  $\mathbb{C}$ , è ben definita per ogni numero complesso  $z$ , tranne che per  $z = -d/c$  quando  $c \neq 0$ . Calcoliamo poi il differenziale di  $\Psi$  in un punto  $z$ . Un vettore tangente a  $\mathbb{C}$  in  $z$  può essere identificato a un numero complesso  $\xi$ ; con questa identificazione

$$d\Psi_z(\xi) = \frac{d\Psi(z + t\xi)}{dt} \Big|_{t=0},$$

dove  $t$  è un parametro reale. Ora

$$\frac{d\Psi(z + t\xi)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{a\xi}{cz + d} - \frac{c\xi(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{(ad - bc)\xi}{(cz + d)^2} = \frac{\xi}{(cz + d)^2},$$

e quindi  $d\Psi_z$  non è altro che la moltiplicazione per il numero complesso  $(cz + d)^{-2}$ . Ne segue in particolare che  $\Psi$  è una trasformazione conforme, nel senso che, per ogni  $z$ ,  $d\Psi_z$  conserva gli angoli formati tra loro (rispetto alla metrica euclidea su  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ) da vettori tangenti. Più esattamente, una applicazione liscia  $\alpha : X \rightarrow Y$  tra varietà Riemanniane si dice *conforme* se esiste una funzione  $f$  su  $X$  a valori reali tale che, per ogni coppia  $v, w$  di vettori tangenti a  $X$  in un suo punto  $x$  si abbia

$$\langle d\alpha(v), d\alpha(w) \rangle = f(x) \langle v, w \rangle.$$

Torniamo a  $\Psi$  e mostriamo che, se  $C \subset \mathbb{C}$  è un cerchio o una retta, allora  $\Psi(C)$  è un cerchio o una retta. La trasformazione di Möbius corrispondente alla matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$$

è l'inversa di  $\Psi$ . Sia

$$r|z|^2 + sz + \overline{s}z + t = 0$$

l'equazione di  $C$ , dove  $r$  e  $t$  sono numeri reali e  $s$  è un numero complesso;  $C$  è una retta se e solo se  $r = 0$ . L'equazione di  $\Psi(C)$  è allora

$$r \left| \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \right|^2 + s \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} + \overline{s} \frac{\overline{\alpha z + \beta}}{\overline{\gamma z + \delta}} + t = 0$$

cioè

$$r|\alpha z + \beta|^2 + s(\alpha z + \beta)(\overline{\gamma z + \delta}) + \overline{s}(\overline{\alpha z + \beta})(\gamma z + \delta) + t|\gamma z + \delta|^2 = 0,$$

che è della forma

$$(r|\alpha|^2 + s\alpha\overline{\gamma} + \overline{s}\alpha\gamma + t|\gamma|^2)|z|^2 + \lambda(z, \overline{z}) = 0,$$

dove  $\lambda$  è un polinomio di primo grado. Questa è l'equazione di una retta se  $r|\alpha|^2 + s\alpha\overline{\gamma} + \overline{s}\alpha\gamma + t|\gamma|^2 = 0$ , altrimenti è l'equazione di un cerchio.

Consideriamo il caso particolare in cui la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

appartiene a  $SU(1,1)$ , cioè il caso in cui  $c = \overline{b}$ ,  $d = \overline{a}$  e  $|a|^2 - |b|^2 = 1$ . Sappiamo già che  $\Psi(B) = B$ . Ciò può essere anche visto direttamente osservando che  $|\Psi(z)| < 1$  se e solo se

$$|az + b|^2 < |\overline{b}z + \overline{a}|^2,$$

cioè se e solo se

$$|a|^2|z|^2 + |b|^2 + a\overline{b}z + b\overline{a}\overline{z} < |b|^2|z|^2 + |a|^2 + a\overline{b}z + b\overline{a}\overline{z},$$

cioè ancora se e solo se

$$(|a|^2 - |b|^2)|z|^2 < |a|^2 - |b|^2.$$

Dato che  $|a|^2 - |b|^2 = 1$  ciò equivale a dire che  $|z| < 1$ . Sappiamo anche che  $\Psi$  è una isometria di  $B$  in sè. Anche questo può essere dimostrato direttamente. Infatti, se  $\xi$  è un vettore tangente a  $B$  in un punto  $z$ , visto come numero complesso, la lunghezza di  $d\Psi_z(\xi)$ , nella metrica di Poincaré, vale

$$\frac{|\xi|}{|\overline{b}z + \overline{a}|^2} \frac{1}{1 - \left| \frac{az+b}{bz+\overline{a}} \right|^2} = \frac{|\xi|}{|\overline{b}z + \overline{a}|^2 - |az + b|^2} = \frac{|\xi|}{(|a|^2 - |b|^2)(1 - |z|^2)} = \frac{|\xi|}{1 - |z|^2},$$

che è la lunghezza di  $\xi$ .

Sappiamo che  $SU(1,1)$  agisce su  $B$  in modo transitivo. Ridimostriamolo direttamente. Basta trovare, per ogni  $z \in B$ , un elemento di  $SU(1,1)$  che trasforma l'origine in  $z$ . Scriviamo  $z = te^{\sqrt{-1}\vartheta}$ , e consideriamo le due matrici, entrambe appartenenti a  $SU(1,1)$ ,

$$A = \begin{pmatrix} e^{\sqrt{-1}\frac{\vartheta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{-1}\frac{\vartheta}{2}} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} & \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \\ \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \end{pmatrix}.$$

Siano  $\Psi$  e  $\Psi'$  le trasformazioni lineari frazionarie corrispondenti ad  $A$  e  $A'$ . Si verifica immediatamente che

$$\Psi'(0) = t, \quad \Psi(t) = z.$$

In effetti  $\Psi$  non è altro che la rotazione di un angolo  $\vartheta$  in verso antiorario intorno all'origine. Dunque la trasformazione di Möbius  $\Psi \circ \Psi'$  porta 0 in  $z$ .

Si può fare di meglio che dimostrare che  $SU(1,1)$  agisce in modo transitivo su  $B$ . Quello che si può mostrare è che, dati due punti  $p$  e  $q$  in  $B$  e vettori tangenti unitari  $v \in T_p B$  e  $w \in T_q B$ , esiste un elemento di  $SU(1,1)$  tale che, se indichiamo con  $\Psi$  la corrispondente trasformazione di Möbius, si abbia

$$\Psi(p) = q, \quad d\Psi(v) = w.$$

Basta farlo quando  $p$  è l'origine. Indichiamo con  $G$  l'insieme di tutte le trasformazioni di Möbius provenienti da elementi di  $SU(1,1)$ . Sappiamo che vi è un elemento  $\Psi'$  di  $G$  che porta l'origine in  $q$ . Sia  $v'$  il vettore tangente a  $B$  in 0 tale che  $d\Psi'(v') = w$ . Dato che  $\Psi'$  è una isometria  $v'$  è un vettore unitario. Sia ora  $\Psi''$  la rotazione di un angolo  $\vartheta$  intorno all'origine, dove  $\vartheta$  è l'angolo formato da  $v$  e  $v'$ . Sappiamo che  $\Psi''$  appartiene a  $G$ , e inoltre è chiaro che  $d\Psi''(v) = v'$ . La trasformazione cercata è dunque  $\Psi = \Psi' \circ \Psi''$ .

Possiamo ora descrivere tutte le geodetiche su  $B$ . Ci baseremo su considerazioni di simmetria. L'osservazione da cui si parte è che, se  $f: X \rightarrow Y$  è una isometria tra varietà Riemanniane, ogni oggetto definito in termini puramente metrici su  $X$  viene trasformato da  $f$  nel corrispondente oggetto su  $Y$ ; in particolare  $f$  trasforma geodetiche in geodetiche. Applicheremo questa osservazione alle isometrie di  $B$  in sè. Tra queste, come abbiamo osservato, vi sono gli elementi del gruppo  $G$  costituito da tutte le trasformazioni di Möbius provenienti da elementi di  $SU(1,1)$ . Vi sono però anche altre isometrie, come ad esempio le simmetrie rispetto a rette per l'origine. Si può in effetti mostrare che il gruppo delle isometrie di  $B$  in sè è generato da  $G$  e da una di queste simmetrie (ad esempio il coniugio  $z \mapsto \bar{z}$ ), ma questo risultato non ci servirà. Dico che i diametri di  $B$  sono geodetiche. In effetti, sia  $r$  uno di essi,  $p$  un suo punto, e  $v$  un vettore non nullo tangente a  $B$  in  $p$  diretto lungo  $r$ . Sia  $\gamma(t)$  la geodetica tale che  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = v$ . Se  $\Phi$  è la simmetria rispetto a  $r$  anche  $\Phi \circ \gamma$  è una geodetica con gli stessi dati iniziali, e quindi coincide con  $\gamma$ . Se ne conclude che  $\gamma$  giace su  $r$ . Dunque  $r$  è una geodetica. Sia ora  $p$  un punto di  $B$  e  $v$  un vettore non nullo tangente a  $B$  in  $p$ . Sia  $\Psi$  un elemento di  $G$  tale che  $\Psi(0) = p$  e sia  $w$  il vettore tangente a  $B$  in 0 tale che  $d\Psi(w) = v$ . Se  $r$  è il diametro diretto lungo  $w$ ,  $\Psi(r)$  è la geodetica passante per  $p$  e tangente a  $v$ . Dato che  $\Psi$  è una trasformazione di Möbius,  $\Psi(r)$  è un segmento o un arco di cerchio. Notiamo che  $r$  taglia ortogonalmente il bordo di  $B$ ; dato che  $\Psi$  è conforme e trasforma in sè



il bordo di  $B$ , lo stesso accade per  $\Psi(r)$ . Se ne deduce che le geodetiche su  $B$  sono i diametri e gli archi di cerchio che tagliano ortogonalmente il bordo di  $B$ .

Mostriamo che  $B$  è completo. Bisogna dimostrare che ogni geodetica è indefinitamente estesa. Dato che tutte le geodetiche si possono ottenere una dall'altra tramite isometrie, basterà vederlo per una sola geodetica, per esempio per una geodetica che parametrizzi l'insieme dei punti di  $B$  con parte immaginaria nulla, cioè l'intervallo  $] -1, 1[$ . Sia  $\gamma(t)$  una tale geodetica; senza perdere in generalità possiamo supporre che  $\gamma(0) = 0$  e che  $\dot{\gamma}(0) = 1$ . La funzione  $\gamma(t)$  è una funzione a valori reali, crescente, e con la proprietà che

$$(8.27) \quad l_0^t(\gamma) = |t|.$$

Osserviamo che la lunghezza del segmento  $[0, a]$  nella metrica di Poincaré vale

$$\int_0^a \frac{2du}{1-u^2} = \int_0^a \frac{du}{1-u} + \int_0^a \frac{du}{1+u} = \log \left( \frac{1+a}{1-a} \right).$$

Dunque la (8.27) dà

$$\gamma(t) = \frac{e^{t/2} - e^{-t/2}}{e^{t/2} + e^{-t/2}}.$$

È chiaro da questa espressione che, perchè  $\gamma(t)$  varii tra  $-1$  e  $1$ , il parametro  $t$  deve variare tra  $-\infty$  e  $+\infty$ . Questo mostra che  $B$  è completo.

Sia  $\Psi$  la trasformazione di Möbius corrispondente alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

La parte immaginaria di  $\Psi(z)$  è

$$\text{Im}(\Psi(z)) = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left( \frac{z + \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}z + 1} - \frac{\bar{z} - \sqrt{-1}}{-\sqrt{-1}\bar{z} + 1} \right) = \frac{1 - |z|^2}{|\sqrt{-1}z + 1|^2}.$$

Dunque l'immagine di  $B$  tramite  $\Psi$  è il semipiano superiore  $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$  e l'immagine del bordo di  $B$  è la retta reale. Definiamo una metrica Riemanniana su  $H$  imponendo che  $\Psi$  sia una isometria, ponendo cioè, per ogni coppia  $v, w$  di vettori tangenti ad  $H$ ,

$$\langle v, w \rangle_H = \langle d\Psi^{-1}(v), d\Psi^{-1}(w) \rangle_B,$$

dove  $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$  indica il prodotto scalare su  $B$ . Diamo una formula esplicita per questa metrica. Sia  $z = \Psi(z')$  un punto di  $H$ , e siano  $v = d\Psi(v')$  e  $w = d\Psi(w')$  vettori tangenti ad  $H$  in  $z$ . Se pensiamo i vettori tangenti a  $\mathbb{C}$  come numeri complessi, si ha

$$v = 2 \frac{v'}{(\sqrt{-1}z' + 1)^2},$$

e analogamente per  $w$ . Dunque

$$\langle v, w \rangle_H = \langle v', w' \rangle_B = \frac{4\operatorname{Re}(v'\overline{w'})}{(1 - |z'|^2)^2} = \frac{4|\sqrt{-1}z' + 1|^4 \operatorname{Re}(v\overline{w})}{(1 - |z'|^2)^2} = \frac{\operatorname{Re}(v\overline{w})}{\operatorname{Im}(z)^2}.$$

In conclusione, nelle coordinate  $x = \operatorname{Re}(z)$  e  $y = \operatorname{Im}(z)$ , la metrica che abbiamo definito su  $H$  è

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{y^2}.$$

Gli automorfismi di  $B$  corrispondono, tramite l'isometria  $\Psi$ , ad automorfismi di  $H$ . Più esattamente, all'automorfismo  $\Phi$  di  $B$  corrisponde  $\Psi \circ \Phi \circ \Psi^{-1}$ . Se  $\Phi$  è la trasformazione di Möbius di matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},$$

dove  $|a|^2 - |b|^2 = 1$ , allora  $\Psi \circ \Phi \circ \Psi^{-1}$  è la trasformazione di Möbius di matrice

$$\begin{aligned} AMA^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \\ \frac{-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(a) + \operatorname{Im}(b) & \operatorname{Re}(b) + \operatorname{Im}(a) \\ \operatorname{Re}(b) - \operatorname{Im}(a) & \operatorname{Re}(a) - \operatorname{Im}(b) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Questa è una matrice reale di determinante 1, cioè un elemento di  $SL(2, \mathbb{R})$ . Viceversa ogni matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

appartenente a  $SL(2, \mathbb{R})$  è della forma  $AMA^{-1}$  con

$$a = \frac{\alpha + \delta}{2} + \sqrt{-1} \frac{\beta - \gamma}{2}, \quad b = \frac{\beta + \gamma}{2} + \sqrt{-1} \frac{\alpha - \delta}{2}.$$

Dunque l'applicazione

$$M \mapsto AMA^{-1}$$

è un isomorfismo di  $SU(1, 1)$  su  $SL(2, \mathbb{R})$ .

Dato che  $\Psi$  è una isometria di  $B$  su  $H$ , le geodetiche su  $H$  sono tutte e sole le curve della forma  $\Psi(\gamma)$ , dove  $\gamma$  è una geodetica su  $B$ . Esse sono dunque archi di cerchio o intervalli su una retta e tagliano ortogonalmente l'asse reale. Le geodetiche su  $H$  sono quindi le rette  $x = \text{costante}$  e i semicerchi con estremi sull'asse reale.

**Esercizi**

- 8.1) Si consideri la metrica Riemanniana sul semipiano  $H = \{y > 0\}$  in  $\mathbb{R}^2$  la cui matrice, rispetto alle coordinate euclidee  $x$  e  $y$ , è data da  $g_{ij} = \delta_{ij}/y^2$ . Si calcolino i simboli di Christoffel e la curvatura Gaussiana di questa metrica. Identificato  $\mathbb{R}^2$  al piano complesso ponendo  $z = x + \sqrt{-1}y$ , si determinino tutte le trasformazioni lineari frazionarie

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

tali che  $T(H) = H$ , e si mostri che sono tutte isometrie per la metrica data sopra. Si trovino poi tutte le geodetiche su  $H$  e si mostri che possono essere indefinitamente estese.

- 8.2) Trovare l'equazione delle geodetiche su una superficie della forma  $z = f(x, y)$ .
- 8.3) Si trovino tutte le geodetiche sulla superficie in  $\mathbb{R}^3$  di equazione  $x^2 + 2y^2 = 2$ .
- 8.4) Si mostri che una superficie in  $\mathbb{R}^3$  ha due famiglie mutuamente ortogonali di geodetiche se e solo se ha curvatura Gaussiana identicamente nulla.
- 8.5) Sia  $M$  una superficie in  $\mathbb{R}^3$ , e sia  $\gamma(t)$ ,  $-\delta < t < \delta$ , un arco di curva regolare tracciato su  $M$ . Sia  $E(t)$  un campo di vettori tangenti unitari normali a  $\gamma$  lungo  $\gamma$ . Si ponga

$$f(x_1, x_2) = \exp_{\gamma(x_2)}(x_1 E(x_2)), \quad |x_1| < \varepsilon, \quad |x_2| < \varepsilon.$$

Si mostri che, se  $\varepsilon$  è sufficientemente piccolo,  $f$  è l'inversa di una carta locale su un intorno di  $\gamma(0)$  e che, nelle coordinate  $x_1$  e  $x_2$ ,  $g_{11} = 1$  e  $g_{12} = 0$ .

- 8.6) Sia  $X$  il cilindro in  $\mathbb{R}^3$  di equazione  $x^2 + y^2 = 1$ . Siano  $A$  e  $B$  i cerchi tagliati su  $X$  dai piani  $z = 0$  e  $z = h$ , dove  $h$  è un numero diverso da zero. Si determinino tutti i numeri reali che sono lunghezze di almeno una geodetica congiungente un punto di  $A$  a uno di  $B$ .
- 8.7) Siano  $u_1$  e  $u_2$  coordinate locali su una superficie  $M$  in  $\mathbb{R}^3$ . Si supponga che, in queste coordinate, la prima forma fondamentale sia data da

$$g_{11} = \lambda^2, \quad g_{22} = \mu^2, \quad g_{12} = 0.$$

Si mostri che la curvatura geodetica di una curva su  $M$  della forma  $u_1 = \text{costante}$  è

$$\frac{1}{\lambda\mu} \frac{\partial\mu}{\partial u_1}.$$

- 8.8) Sia  $M$  una varietà Riemanniana di dimensione 2 e supponiamo che, in coordinate locali  $u_1$  e  $u_2$ , la metrica  $g_{ij}$  di  $M$  sia della forma

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = \lambda^2.$$

Si mostri che le curve  $u_2 = \text{costante}$  sono geodetiche.

- 8.9) Sia  $M$  una varietà Riemanniana. Una geodetica  $\gamma(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , tracciata su  $M$  si dice chiusa se esiste un numero reale positivo  $r$  tale che, per ogni  $t$ ,  $\gamma(t+r) = \gamma(t)$ . Sia ora  $M$  l'iperboloide in  $\mathbb{R}^3$  di equazione

$$x^2 + y^2 = 1 + z^2.$$

Si mostri che su  $M$  la sola geodetica chiusa è il cerchio intersezione di  $M$  con il piano  $z = 0$ . (Suggerimento: usare il teorema di Clairaut)

- 8.10) Sia  $X$  una varietà Riemanniana connessa, e sia  $\pi : Y \rightarrow X$  un suo rivestimento.
- Si mostri che su  $Y$  vi è una e una sola metrica Riemanniana tale che  $\pi$  sia una isometria locale.
  - Si mostri che  $X$  è completa se e solo se lo è  $Y$ .
- Si supponga che  $X$  sia completa. Sia  $p$  un punto di  $X$ .
- Si mostri che, per ogni  $\alpha \in \pi_1(X, p)$ , esiste una geodetica  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  tale che  $\gamma$  rappresenti  $\alpha$ . Si mostri inoltre che vi è tra queste geodetiche una che ha lunghezza minima tra tutti i rappresentanti di  $\alpha$  (suggerimento: usare il teorema di Hopf-Rinow sul rivestimento universale di  $X$ )

- 8.11) Sia  $S$  una superficie e sia  $\alpha(t, s)$  una applicazione  $\mathbf{C}^\infty$  da  $[0, 1] \times [-1, 1]$  a  $S$  tale che, per ogni  $s$  fissato, l'applicazione  $t \rightarrow \alpha(t, s)$  sia una geodetica. Si considerino i campi di vettori  $T = \partial\alpha/\partial t$  e  $J = \partial\alpha/\partial s|_{s=0}$ . Si mostri che  $J$  verifica l'equazione di Jacobi:

$$D_T D_T J = R(T, J)T,$$

dove  $R$  è il tensore di Riemann.

- 8.12) Sia  $M$  una varietà Riemanniana completa, e sia  $p$  un punto di  $M$ . Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  sia  $\gamma_n : [0, 1] \rightarrow M$  una geodetica tale che  $\gamma_n(0) = p$ ; supponiamo che ci sia una costante  $L$  tale che  $l(\gamma_n) \leq L$  per ogni  $n$ , dove  $l(\gamma_n)$  è la lunghezza di  $\gamma_n$ . Si mostri che:
- Esistono una sottosuccessione  $\{\gamma_{n_i}\}$  e una geodetica  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  tali che, per ogni  $t \in [0, 1]$ ,  $\gamma_{n_i}(t)$  converge a  $\gamma(t)$ .
  - Se ogni  $\gamma_n$  è minimale, anche  $\gamma$  è minimale; se  $\gamma$  è minimale, non è invece detto che  $\gamma_{n_i}$  sia minimale per  $i$  sufficientemente grande.

## 9. Partizioni dell'unità

Sia  $X$  uno spazio topologico. Una famiglia  $\{E_i\}_{i \in I}$  di sottinsiemi di  $X$  si dice *localmente finita* se ogni punto di  $X$  ha un intorno  $U$  tale che  $E_i \cap U = \emptyset$  tranne che per un numero finito di indici  $i$ . Notiamo che in questo caso, se  $K$  è un sottinsieme compatto di  $X$ ,  $K$  può essere ricoperto con un numero finito di aperti che intersecano solo un numero finito di  $E_i$ . Dunque  $E_i \cap K = \emptyset$  tranne che per un numero finito di indici  $i$ . Notiamo anche che, se ogni  $E_i$  è chiuso, anche  $\cup E_i$  è chiuso. Infatti, se  $x \notin \cup E_i$  e  $U$  è un intorno di  $x$  che interseca solo un numero finito di  $E_i$ , diciamo  $E_{i_1}, \dots, E_{i_n}$ , allora  $U \setminus (E_{i_1} \cup \dots \cup E_{i_n})$  è un intorno di  $x$  che non interseca  $\cup E_i$ .

Supponiamo ora che  $\{A_i\}_{i \in I}$  sia un ricoprimento aperto di  $X$ ; un *raffinamento* di  $\{A_i\}_{i \in I}$  è il dato di un ricoprimento aperto  $\{B_j\}_{j \in J}$  più una applicazione  $r : J \rightarrow I$  tale che

$$B_j \subset A_{r(j)}$$

per ogni  $j$ . Diremo che  $X$  è *paracompatto* se è di Hausdorff e ogni suo ricoprimento aperto ha un raffinamento localmente finito.

PROPOSIZIONE (9.1). *Ogni varietà differenziabile è paracompatta. Inoltre, se  $M$  è una varietà differenziabile e  $\{A_i\}_{i \in I}$  un suo ricoprimento aperto localmente finito, esiste un ricoprimento aperto  $\{B_i\}_{i \in I}$  tale che  $\overline{B_i} \subset A_i$  per ogni  $i$ .*

Diremo che un ricoprimento  $\{B_i\}_{i \in I}$  come quello fornito da (9.1) è un *restringimento* di  $\{A_i\}_{i \in I}$ . La proposizione (9.1) è un risultato di natura puramente topologica, che vale più in generale per ogni spazio topologico di Hausdorff, a base numerabile e localmente compatto. Ricordiamo a questo proposito che uno spazio topologico si dice *localmente compatto* se ogni suo punto ha un intorno compatto; ogni punto di una varietà differenziabile, o più in generale di una varietà topologica, ha un sistema fondamentale di intorni omeomorfi a dischi chiusi in  $\mathbb{R}^n$ , e quindi compatti. La dimostrazione di (9.1) si basa sui tre lemmi seguenti.

LEMMA (9.2). *Sia  $X$  uno spazio topologico di Hausdorff, localmente compatto e a base numerabile. Allora  $X$  è paracompatto.*

LEMMA (9.3). *Ogni spazio topologico paracompatto è  $T_4$ .*

LEMMA (9.4). *Sia  $X$  uno spazio topologico paracompatto. Allora ogni ricoprimento aperto localmente finito di  $X$  ha un restringimento.*

Cominciamo col dimostrare (9.2). Notiamo che  $X$  ha una base numerabile formata da aperti relativamente compatti. Sia infatti  $\mathcal{A}$  una base numerabile di  $X$ , e indichiamo con  $\mathcal{B}$  l'insieme di tutti gli aperti relativamente compatti appartenenti ad  $\mathcal{A}$ . Vogliamo mostrare che  $\mathcal{B}$  è anch'essa una base di  $X$ . Sia  $A$  un aperto di  $X$ . Se  $x$  è un punto di  $A$  sia  $U$  un suo intorno compatto. Vi è certo un  $B \in \mathcal{A}$  che contiene  $x$  ed è contenuto sia in  $A$  che nella parte interna di  $U$ . Dato che  $\overline{B} \subset U$  e che  $X$  è di Hausdorff,  $B$  è relativamente compatto, e dunque appartiene a  $\mathcal{B}$ . Quindi  $A$  è unione di elementi di  $\mathcal{B}$ .

Sia ora  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  una base numerabile di  $X$  formata da aperti relativamente compatti. Poniamo  $C_1 = U_1$ . Dato che  $\overline{C}_1$  è compatto vi è un intero  $n_1 > 1$  tale che

$$\overline{C}_1 \subset U_1 \cup \dots \cup U_{n_1}.$$

Indichiamo il lato destro dell'inclusione con  $C_2$  e notiamo che è un aperto relativamente compatto. Possiamo dunque trovare un intero  $n_2 > n_1$  tale che

$$\overline{C}_2 \subset U_1 \cup \dots \cup U_{n_2}.$$

Procedendo allo stesso modo possiamo trovare una successione di interi  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$  tale che, se poniamo

$$C_i = U_1 \cup \dots \cup U_{n_{i-1}},$$

si abbia che

$$\overline{C}_i \subset C_{i+1}$$

per ogni  $i \in \mathbb{N}$ . Si noti che ogni  $C_i$  è un aperto relativamente compatto e che  $\bigcup C_i = X$ . Sarà utile anche porre  $C_{-1} = C_0 = \emptyset$ .

Sia ora  $\{A_i\}_{i \in I}$  un ricoprimento aperto di  $X$ . Per ogni  $j \geq 1$  possiamo ricoprire il compatto  $\overline{C}_j \setminus C_{j-2}$  con un numero finito di aperti del ricoprimento, diciamo con  $A_{i(j,1)}, \dots, A_{i(j,m_j)}$ . Poniamo

$$B_{j,l} = A_{i(j,l)} \cap (C_j \setminus \overline{C}_{j-2}), \quad l = 1, \dots, m_j.$$

La famiglia  $\mathcal{B}$  costituita da tutti gli aperti  $B_{j,l}$  è un ricoprimento di  $X$ . Se infatti  $x$  è un punto di  $X$ , scegliamo  $j$  in modo che  $x \in C_j$  ma  $x \notin C_{j-1}$ . Allora  $x$  appartiene a  $C_j \setminus \overline{C}_{j-2}$ , e quindi a  $B_{j,l}$  per qualche  $l$ . La famiglia  $\mathcal{B}$  è un raffinamento di  $\{A_i\}_{i \in I}$  per costruzione, ed è anche localmente finita. Se infatti  $x$  è un punto di  $X$ , e scegliamo  $j$  in modo che  $x \in C_j$ , allora  $C_j$  è un intorno di  $x$  che interseca solo un numero finito di aperti in  $\mathcal{B}$  e precisamente solo quei  $B_{h,l}$  per cui  $h \leq j + 1$ . Questo dimostra (9.2).

OSSERVAZIONE (9.5). È importante notare che il raffinamento costruito nella dimostrazione del Lemma (9.2) è costituito da aperti relativamente compatti. Si può dunque dire che nelle ipotesi di (9.2), e quindi anche in quelle di (9.1), ogni ricoprimento aperto di  $X$  ha un raffinamento localmente finito e *costituito da aperti relativamente compatti*.

OSSERVAZIONE (9.6). Un ricoprimento localmente finito di uno spazio topologico  $X$  a base numerabile è necessariamente numerabile. Siano infatti  $\mathcal{B}$  una base numerabile e  $\mathcal{A}$  un ricoprimento localmente finito di  $X$ . Ogni punto di  $X$  ha un intorno che interseca solo un numero finito di aperti di  $\mathcal{A}$ . Restringendo questo intorno, se necessario, possiamo supporre che appartenga a  $\mathcal{B}$ . Vi è dunque una sottofamiglia di  $\mathcal{B}$  che ricopre  $X$  e ogni cui membro interseca solo un numero finito di aperti di  $\mathcal{A}$ .

Passiamo ora alla dimostrazione di (9.3). Sia  $X$  uno spazio paracompatto. Mostriamo innanzitutto che  $X$  è  $T_3$ . Sia dunque  $F$  un chiuso in  $X$ , e sia  $x$  un punto di  $X$  non appartenente a  $F$ . Per ogni  $y \in F$  vi sono un intorno aperto  $U_y$  di  $x$

e un intorno aperto  $V_y$  di  $y$  che non si intersecano. L'insieme di tutti i  $V_y$ , insieme a  $X \setminus F$ , costituisce un ricoprimento aperto di  $X$ ; ha quindi un raffinamento localmente finito  $\{A_i\}_{i \in I}$ . Sia  $U$  un intorno di  $x$  che interseca solo un numero finito di aperti  $A_i$ ; tra questi, quelli che intersecano  $F$  sono contenuti in un'unione finita di aperti della forma  $V_y$ , diciamo  $V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$ . Allora

$$U \cap U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}, \quad \bigcup_{A_i \cap F \neq \emptyset} A_i$$

sono intorni disgiunti di  $x$  e  $F$ .

La dimostrazione che  $X$  è  $T_4$  non è molto diversa. Siano infatti  $E$  ed  $F$  chiusi disgiunti in  $X$ . Per ogni  $y \in F$  vi sono un intorno aperto  $U_y$  di  $E$  e un intorno aperto  $V_y$  di  $y$  che non si intersecano. L'insieme di tutti i  $V_y$ , insieme a  $X \setminus F$ , costituisce un ricoprimento aperto di  $X$ ; ha quindi un raffinamento localmente finito  $\{A_i\}_{i \in I}$ . Per ogni  $x \in E$  scegliamo un intorno  $B_x$  che interseca solo un numero finito di  $A_i$ ; tra questi, quelli che intersecano  $F$  sono contenuti in un'unione finita di aperti della forma  $V_y$ , diciamo  $V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$ . Poniamo

$$W_x = B_x \cap U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n},$$

e notiamo che

$$W_x \cap \left( \bigcup_{A_i \cap F \neq \emptyset} A_i \right) = \emptyset.$$

Dunque

$$\bigcup_{x \in E} W_x, \quad \bigcup_{A_i \cap F \neq \emptyset} A_i$$

sono intorni disgiunti di  $E$  e  $F$ . Questo dimostra (9.3).

Veniamo al Lemma (9.4). Lo dimostreremo solo per ricoprimenti numerabili; in virtù dell'osservazione (9.6), questo è sufficiente a dimostrare (9.1). Comunque la dimostrazione nel caso generale non è sostanzialmente diversa da quella che daremo, a patto che si sostituisca l'induzione ordinaria con quella transfinita. Sia dunque  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  un ricoprimento aperto di  $X$ . Allora

$$X \setminus \left( \bigcup_{i > 1} A_i \right)$$

è un chiuso contenuto in  $A_1$ . Dato che  $X$  è  $T_4$  vi è un aperto  $B_1$  che lo contiene e la cui chiusura è contenuta in  $A_1$ ; in particolare  $\{B_1, A_2, A_3, \dots\}$  è un ricoprimento aperto di  $X$ . A questo ricoprimento si può applicare lo stesso tipo di ragionamento e trovare un aperto  $B_2$  tale che  $\overline{B_2} \subset A_2$  e che  $\{B_1, B_2, A_3, \dots\}$  sia un ricoprimento aperto di  $X$ , e così via. Si possono dunque costruire aperti  $B_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , tali che per ogni  $i$  si abbia

$$\overline{B_i} \subset A_i,$$

e inoltre

$$(9.7) \quad X = B_1 \cup \dots \cup B_i \cup A_{i+1} \cup \dots$$

Dico che  $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  è il restringimento cercato. Per farlo basta mostrare che l'unione dei  $B_i$  è  $X$ . Se  $x$  è un punto di  $X$ , appartiene a un numero finito di  $A_j$ , dato che abbiamo a che fare con un ricoprimento localmente finito; dunque  $x$  non appartiene ad  $A_j$  se  $j$  è maggiore di un certo  $i$ . Ma allora  $x$  deve appartenere a  $B_1 \cup \dots \cup B_i$ , per (9.7). Questo dimostra il Lemma (9.4).

Sia ora  $X$  uno spazio topologico e  $\{A_i\}_{i \in I}$  un suo ricoprimento aperto. Ricordiamo che il supporto  $\text{supp}(\chi)$  di una funzione  $\chi$  a valori reali definita su  $X$  è la chiusura dell'insieme degli  $x \in X$  tali che  $\chi(x) \neq 0$ . Diremo che una famiglia  $\{\chi_i\}_{i \in I}$  di funzioni continue a valori reali non negativi su  $X$  è una *partizione dell'unità subordinata ad*  $\{A_i\}_{i \in I}$  se

$$\begin{aligned} \text{supp}(\chi_i) &\subset A_i \quad \text{per ogni } i, \\ \{\text{supp}(\chi_i)\}_{i \in I} &\text{ è una famiglia localmente finita,} \\ \sum_{i \in I} \chi_i &\equiv 1. \end{aligned}$$

Segue dalla definizione che ogni  $\chi_i$  assume solo valori compresi tra 0 e 1. Notiamo anche che la somma  $\sum \chi_i$  ha senso perchè, localmente, vi è solo un numero finito di funzioni  $\chi_i$  non nulle. Se  $X$  è una varietà differenziabile diremo che la partizione dell'unità  $\{\chi_i\}_{i \in I}$  è liscia se le funzioni  $\chi_i$  sono tutte lisce. Quando parleremo di partizioni dell'unità su varietà differenziabili considereremo in generale, implicitamente, solo partizioni dell'unità lisce.

**PROPOSIZIONE (9.8).** *Sia  $M$  una varietà differenziabile e sia  $\{A_i\}_{i \in I}$  un suo ricoprimento aperto. Allora esiste una partizione dell'unità liscia subordinata ad  $\{A_i\}_{i \in I}$ .*

La dimostrazione usa il seguente lemma.

**LEMMA (9.9).** *Sia  $K$  un sottinsieme compatto di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $A \subset \mathbb{R}^n$  un aperto contenente  $K$ . Allora vi è una funzione liscia e non negativa su  $\mathbb{R}^n$ , a supporto contenuto in  $A$  e strettamente positiva su  $K$ .*

Per dimostrare il lemma ricordiamo innanzitutto che la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ \exp(-1/t^2) & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

è  $\mathbf{C}^\infty$  su tutto  $\mathbb{R}$ . Per completezza dimostriamolo. Proveremo, induttivamente su  $i$ , che la derivata  $i$ -esima di  $f$  è della forma

$$f^{(i)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ \frac{P(t)}{t^h} \exp(-1/t^2) & \text{se } t > 0 \end{cases}$$



dove  $P$  è un polinomio e  $h$  un intero. Questo è certo vero per  $i = 0$ . Supponiamolo vero per  $f^{(i)}$  e dimostriamolo per  $f^{(i+1)}$ . Non c'è naturalmente problema per  $t < 0$ . Per  $t > 0$  si ha

$$f^{(i+1)}(t) = \frac{t^3 P'(t) - ht^2 P(t) + 2P(t)}{t^{h+3}} \exp(-1/t^2).$$

Resta da esaminare cosa accade per  $t = 0$ . In questo punto la derivata sinistra di  $f^{(i)}$  vale ovviamente zero. Quanto alla derivata destra, è per definizione

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(t)}{t^{h+1}} \exp(-1/t^2) = 0.$$

Se  $x, p \in \mathbb{R}^n$  e  $\varepsilon > 0$  poniamo

$$\chi_{p,\varepsilon}(x) = f \left( 1 - 2 \left\| \frac{x-p}{\varepsilon} \right\|^2 \right).$$

La funzione  $\chi_{p,\varepsilon}$  è liscia, non negativa, e ha per supporto il disco chiuso di raggio  $\varepsilon/2$  centrato in  $p$ . Indichiamo ora con  $\varepsilon$  la distanza tra  $K$  e  $\mathbb{R}^n - A$ , e con  $E$  l'insieme dei punti di  $\mathbb{R}^n$  le cui coordinate sono tutte della forma  $k\varepsilon/2\sqrt{n}$ , con  $k$  intero. Dico che una funzione con le caratteristiche richieste è

$$\chi = \sum_{\substack{d(p,K) < \varepsilon/2 \\ p \in E}} \chi_{p,\varepsilon}.$$

In effetti i punti di  $E$  che distano da  $K$  meno di  $\varepsilon/2$  sono in numero finito, e il supporto di  $\chi$  è l'unione dei dischi chiusi di raggio  $\varepsilon/2$  centrati in questi punti; in particolare il supporto di  $\chi$  è contenuto in  $A$ . Inoltre ogni punto di  $\mathbb{R}^n$  dista meno di  $\varepsilon/2$  da almeno un punto di  $E$ , e quindi  $\chi$  è strettamente positiva su  $K$ . Questo dimostra il lemma.

Possiamo ora dimostrare (9.8). Supponiamo che il teorema sia stato dimostrato per un raffinamento di  $\{A_i\}_{i \in I}$ . Supponiamo cioè che ci siano un ricoprimento aperto  $\{B_j\}_{j \in J}$ , una partizione dell'unità  $\{\chi_j\}$  ad esso subordinata, e una applicazione  $i: J \rightarrow I$  con  $B_j \subset A_{i(j)}$  per ogni  $j \in J$ . Se poniamo

$$\lambda_h = \sum_{i(j)=h} \chi_j,$$

le funzioni  $\lambda_i$  costituiscono una partizione dell'unità subordinata a  $\{A_i\}_{i \in I}$ ; in effetti, dato che la famiglia di chiusi  $\{\text{supp}(\chi_j)\}_{j \in J}$  è localmente finita,

$$\text{supp}(\lambda_h) = \bigcup_{i(j)=h} \text{supp}(\chi_j).$$

Ci siamo dunque ridotti a dimostrare la proposizione per un opportuno raffinamento del ricoprimento dato. Scegliamo dunque un raffinamento  $\{B_j\}_{j \in J}$  che sia localmente finito

e costituito da aperti coordinati relativamente compatti. Sia  $\{C_j\}_{j \in J}$  un restringimento di questo ricoprimento. Ora  $\overline{C_j}$  è un compatto contenuto in  $B_j$ , che è a sua volta diffeomorfo a un aperto in  $\mathbb{R}^n$ . Il Lemma (9.9) ci dice dunque che esiste una funzione liscia su  $B_j$ , nulla fuori da un sottinsieme compatto di  $B_j$  e strettamente positiva su  $C_j$ . Indichiamo con  $\psi_j$  la funzione che si ottiene prolungando questa funzione a zero fuori da  $B_j$ ; si tratta di una funzione  $C^\infty$  a supporto compatto contenuto in  $B_j$  e strettamente positiva in ogni punto di  $C_j$ . La funzione  $\psi = \sum \psi_j$  è ben definita perchè  $\{B_j\}_{j \in J}$  è localmente finito, ed è positiva su tutto  $M$  perchè  $\{C_j\}_{j \in J}$  è un ricoprimento di  $M$ . Se poniamo

$$\chi_j = \frac{\psi_j}{\psi}$$

otteniamo la partizione dell'unità cercata. Questo completa la dimostrazione di (9.8).

Un'utile conseguenza dell'esistenza di partizioni dell'unità è la seguente.

**COROLLARIO (9.10).** *Sia  $M$  una varietà differenziabile. Sia  $K$  un sottinsieme compatto di  $M$  e sia  $A$  un suo intorno aperto. Allora esiste una funzione liscia a valori in  $[0, 1]$  definita su tutta  $M$ , a supporto compatto contenuto in  $A$  e identicamente uguale a 1 su un intorno di  $K$ .*

Mostriamo come (9.10) segue da (9.8). Possiamo trovare un numero finito di sottinsiemi compatti di  $A$  le cui parti interne ricoprono  $K$ . Vi è dunque un intorno  $C$  di  $K$  compatto e contenuto in  $A$ . Vi è una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento aperto di  $M$  costituito dalla parte interna di  $C$  e dal complementare di  $K$ . Ciò significa che vi sono due funzioni non negative lisce  $\lambda$  e  $\mu$  su  $M$  tali che il supporto di  $\lambda$  sia contenuto nella parte interna di  $C$ , che il supporto di  $\mu$  non tocchi  $K$ , e che  $\lambda + \mu \equiv 1$ . Ne segue che la funzione  $\lambda$  vale identicamente 1 su  $M \setminus \text{supp}(\mu)$ , che è un intorno di  $K$ , e quindi ha tutte le caratteristiche richieste.

Le partizioni dell'unità vengono in genere usate per "incollare" soluzioni locali di un problema in modo da ottenerne soluzioni globali. Un esempio di questo tipo di applicazioni è il seguente risultato.

**COROLLARIO (9.11).** *Su ogni varietà differenziabile vi è una metrica Riemanniana.*

Per dimostrare il corollario ragioniamo come segue. Sia  $M$  una varietà differenziabile. Ricopriamo  $M$  con aperti coordinati  $A_i$ . Dato che ogni  $A_i$  è diffeomorfo a un aperto di  $\mathbb{R}^n$ , su  $A_i$  vi è una metrica Riemanniana  $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ . Scegliamo una partizione dell'unità  $\{\chi_i\}$  subordinata al ricoprimento  $\{A_i\}$ . Una metrica Riemanniana su  $M$  è

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \sum \chi_i \langle \cdot, \cdot \rangle_i,$$

dove ogni forma bilineare  $\chi_i \langle \cdot, \cdot \rangle_i$  si intende estesa a tutta  $M$  ponendola uguale alla forma nulla fuori da  $A_i$ . È infatti chiaro che  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  è una forma bilineare simmetrica. Inoltre essa è liscia, dato che è localmente somma di un numero finito di forme  $\chi_i \langle \cdot, \cdot \rangle_i$ , ognuna delle quali è liscia; resta da vedere che è definita positiva. Sia  $v$  un elemento non nullo di  $T_p M$ . Vi è un indice  $i$  tale che  $\chi_i(p) > 0$ . Allora

$$\langle v, v \rangle \geq \chi_i(p) \langle v, v \rangle_i > 0.$$

Questo conclude la dimostrazione del corollario.

## 10. Un po' di algebra lineare

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $K$ . Indicheremo con  $V^*$  lo spazio duale di  $V$ . Una forma bilineare

$$\varphi : V \times V \rightarrow K$$

si dice *alternante* se

$$\varphi(v, v) = 0$$

per ogni  $v$ . Se  $\varphi$  è alternante

$$(10.1) \quad \varphi(v, w) = -\varphi(w, v)$$

per ogni  $v$  e  $w$ . Infatti

$$\varphi(v, w) + \varphi(w, v) = \varphi(v, w) + \varphi(w, v) + \varphi(v, v) + \varphi(w, w) = \varphi(v + w, v + w) = 0.$$

Viceversa se vale la (10.1) allora, per ogni  $v$ ,  $\varphi(v, v) = -\varphi(v, v)$ , cioè  $2\varphi(v, v) = 0$ . Se  $K$  è di caratteristica diversa da 2, ciò implica che  $\varphi(v, v) = 0$ , e dunque che  $\varphi$  è alternante. Più in generale, una forma  $k$ -lineare

$$\varphi : V^k \rightarrow K$$

si dice *alternante* se è alternante in ogni coppia di variabili. Diremo anche che  $\varphi$  è una forma alternante di grado  $k$  su  $V$ . Dato che ogni permutazione è un prodotto di trasposizioni, segue da (10.1) che, se  $\varphi$  è una forma alternante di grado  $k$  su  $V$  e  $\sigma$  è una permutazione degli interi da 1 a  $k$ , allora

$$\varphi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma)\varphi(v_1, \dots, v_k),$$

dove  $\text{sgn}(\sigma)$  indica il segno di  $\sigma$ . Viceversa questa condizione è equivalente al fatto che  $\varphi$  sia alternante se la caratteristica di  $K$  non è 2. Supporremo d'ora in poi che  $V$  sia uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n$ . L'insieme delle forme  $k$ -lineari alternanti su  $V$  è uno spazio vettoriale su  $K$ , che si indica con  $\bigwedge^k V^*$  e si chiama  *$k$ -esima potenza esterna* di  $V^*$ . Se  $k = 0$  si pone  $\bigwedge^k V^* = K$ .

Sia  $\alpha : V^k \rightarrow K$  una forma  $k$ -lineare (non necessariamente alternante). Allora la forma  $k$ -lineare

$$\beta(v_1, \dots, v_k) = \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma)\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}),$$

dove  $S_k$  indica il gruppo delle permutazioni di  $\{1, \dots, k\}$ , è alternante. Supponiamo infatti che vi siano due indici distinti  $i$  e  $j$  tali che  $v_i = v_j$ , e indichiamo con  $\tau$  la trasposizione che scambia  $i$  e  $j$ . Allora

$$\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \alpha(v_{\tau\sigma(1)}, \dots, v_{\tau\sigma(k)}).$$

D'altra parte  $\beta(v_1, \dots, v_k)$  è somma di termini della forma

$$\begin{aligned} & \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) + \operatorname{sgn}(\tau\sigma)\alpha(v_{\tau\sigma(1)}, \dots, v_{\tau\sigma(k)}) \\ & = \operatorname{sgn}(\sigma)[\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) - \alpha(v_{\tau\sigma(1)}, \dots, v_{\tau\sigma(k)})], \end{aligned}$$

e quindi è nullo.

Un caso particolare della costruzione precedente è il seguente. Siano  $\varphi$  e  $\psi$  due forme alternanti di gradi  $p$  e  $q$  su  $V$ . Per quanto si è visto, la formula

$$\varphi \wedge \psi(v_1, \dots, v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \operatorname{sgn}(\sigma)\varphi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)})\psi(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)})$$

definisce una forma  $(p+q)$ -lineare alternante, che si chiama *prodotto esterno* di  $\varphi$  e  $\psi$ . È chiaro dalla definizione che  $\varphi \wedge \psi$  è lineare nei suoi due argomenti. Inoltre

$$\psi \wedge \varphi = (-1)^{pq}\varphi \wedge \psi.$$

Infatti, dato che il segno della permutazione

$$\eta = (q+1, \dots, p+q, 1, \dots, q)$$

vale  $(-1)^{pq}$ , si ha

$$\begin{aligned} \psi \wedge \varphi(v_1, \dots, v_{p+q}) &= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\psi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)})\varphi(v_{\sigma(q+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}) \\ &= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\varphi(v_{\sigma(q+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)})\psi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)}) \\ &= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\varphi(v_{\sigma\eta(1)}, \dots, v_{\sigma\eta(p)})\psi(v_{\sigma\eta(p+1)}, \dots, v_{\sigma\eta(p+q)}) \\ &= (-1)^{pq} \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma\eta)\varphi(v_{\sigma\eta(1)}, \dots, v_{\sigma\eta(p)})\psi(v_{\sigma\eta(p+1)}, \dots, v_{\sigma\eta(p+q)}) \\ &= (-1)^{pq}\varphi \wedge \psi(v_1, \dots, v_{p+q}). \end{aligned}$$

Indicheremo con  $S(p, q)$  l'insieme delle permutazioni  $\sigma \in S_{p+q}$  tali che  $\sigma(1) < \dots < \sigma(p)$  e  $\sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q)$ . Più in generale, se  $m_1, \dots, m_h$  sono interi positivi e  $m = \sum m_i$ , indicheremo con  $S(m_1, \dots, m_h)$  l'insieme delle permutazioni  $\sigma \in S_m$  tali che

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(m_1), \quad \sigma(m_1+1) < \dots < \sigma(m_1+m_2), \quad \dots$$

Notiamo ora che ogni permutazione di  $\{1, \dots, p+q\}$  si scrive in uno e un solo modo sotto la forma

$$(10.2) \quad (\sigma(\alpha(1)), \dots, \sigma(\alpha(p)), \sigma(p+\beta(1)), \dots, \sigma(p+\beta(q))),$$

dove  $\alpha \in S_p$ ,  $\beta \in S_q$  e  $\sigma \in S(p, q)$ ; inoltre il segno della permutazione (10.2) vale

$$\text{sgn}(\sigma)\text{sgn}(\alpha)\text{sgn}(\beta).$$

Quindi, dato che  $\varphi$  e  $\psi$  sono alternanti, vale la formula

$$(10.3) \quad \varphi \wedge \psi(v_1, \dots, v_{p+q}) = \sum_{\sigma \in S(p, q)} \text{sgn}(\sigma) \varphi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \psi(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}).$$

Il prodotto esterno è associativo. Se  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  sono forme alternanti di gradi  $p$ ,  $q$  ed  $r$  si ha infatti

$$\begin{aligned} & (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma(v_1, \dots, v_{p+q+r}) \\ &= \sum_{\sigma \in S(p+q, r)} \text{sgn}(\sigma) (\alpha \wedge \beta)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}) \gamma(v_{\sigma(p+q+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q+r)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S(p+q, r)} \text{sgn}(\sigma) \sum_{\rho \in S(p, q)} \text{sgn}(\rho) \alpha(v_{\sigma\rho(1)}, \dots, v_{\sigma\rho(p)}) \beta(v_{\sigma\rho(p+1)}, \dots, v_{\sigma\rho(p+q)}) \\ & \quad \times \gamma(v_{\sigma(p+q+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q+r)}) \\ &= \sum_{\tau \in S(p, q, r)} \text{sgn}(\tau) \alpha(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(p)}) \beta(v_{\tau(p+1)}, \dots, v_{\tau(p+q)}) \gamma(v_{\tau(p+q+1)}, \dots, v_{\tau(p+q+r)}). \end{aligned}$$

Nello stesso modo si mostra anche che

$$\begin{aligned} & \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma(v_1, \dots, v_{p+q+r})) \\ &= \sum_{\tau \in S(p, q, r)} \text{sgn}(\tau) \alpha(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(p)}) \beta(v_{\tau(p+1)}, \dots, v_{\tau(p+q)}) \gamma(v_{\tau(p+q+1)}, \dots, v_{\tau(p+q+r)}). \end{aligned}$$

Il prodotto esterno rende

$$\bigwedge V^* = \bigoplus_{k \geq 0} \bigwedge^k V^*$$

un'algebra associativa, che si chiama *algebra esterna* su  $V^*$ .

PROPOSIZIONE (10.4). Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  su  $K$ , e sia  $v_1, \dots, v_n$  una sua base. Sia  $w_1, \dots, w_n$  la base duale di  $V^*$ . Allora una base di  $\bigwedge^k V^*$  è costituita da tutti i prodotti

$$w_{i_1} \wedge \dots \wedge w_{i_k}$$

con  $i_1 < \dots < i_k$ . Dunque la dimensione di  $\bigwedge^k V^*$  è

$$\dim \bigwedge^k V^* = \binom{n}{k}.$$

In particolare  $\bigwedge^k V^* = \{0\}$  quando  $k > n$ .

Chiamiamo crescenti i multiindici  $(i_1, \dots, i_k)$  tali che  $i_1 < \dots < i_k$ . Iniziamo la dimostrazione osservando che, se  $\varphi$  è una forma  $k$ -lineare alternante tale che  $\varphi(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) = 0$  per ogni multiindice crescente  $(i_1, \dots, i_k)$ , allora  $\varphi$  è la forma nulla. Infatti, dato che  $\varphi$  è alternante, in questo caso  $\varphi(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) = 0$  per qualsiasi multiindice  $(j_1, \dots, j_k)$ . D'altra parte, se  $u_1, \dots, u_k$  sono elementi di  $V$  e scriviamo

$$u_i = \sum_j a_{ij} v_j,$$

allora per linearità

$$\varphi(u_1, \dots, u_k) = \sum_{j_1, \dots, j_k} a_{1j_1} \dots a_{kj_k} \varphi(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) = 0.$$

Una seconda osservazione è che, se  $(i_1, \dots, i_k)$  e  $(j_1, \dots, j_k)$  sono multiindici crescenti, allora

$$w_{i_1} \wedge \dots \wedge w_{i_k}(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) = \prod_{l=1}^k \delta_{i_l j_l}.$$

Dimostriamolo per induzione su  $k$ . Il caso  $k = 1$  non è altro che la definizione di base duale. Per  $k > 1$  la formula (10.3) dà

$$w_{i_1} \wedge \dots \wedge w_{i_k}(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) = \sum_l (-1)^{l-1} w_{i_1}(v_{j_l}) w_{i_2} \wedge \dots \wedge w_{i_k}(v_{j_1}, \dots, \widehat{v}_{j_l}, \dots, v_{j_k}),$$

dove il cappuccio sopra la variabile  $v_{j_l}$  indica che questa viene omessa. L'ipotesi induttiva dice che in questa somma vi è al più un termine non nullo, e precisamente quello (se c'è) per cui  $i_1 = j_l$  e  $(i_2, \dots, i_k) = (j_1, \dots, \widehat{j}_l, \dots, j_k)$ . Dato che  $(i_1, \dots, i_k)$  e  $(j_1, \dots, j_k)$  sono multiindici crescenti, questo accade solo se essi sono uguali e  $l = 1$ . In questo caso dunque

$$w_{i_1} \wedge \dots \wedge w_{i_k}(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) = w_{i_1}(v_{i_1}) w_{i_2} \wedge \dots \wedge w_{i_k}(v_{i_2}, \dots, v_{i_k}) = 1.$$

Sia ora  $\varphi$  una forma alternante di grado  $k$ . Per ogni multiindice  $(i_1, \dots, i_k)$  poniamo

$$a_{i_1, \dots, i_k} = \varphi(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}).$$

Dico che

$$(10.5) \quad \varphi = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k} w_{i_1} \wedge \dots \wedge w_{i_k}.$$

Infatti

$$\sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k} w_{i_1} \wedge \dots \wedge w_{i_k}(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) = \sum_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1, \dots, i_k} \prod_{l=1}^k \delta_{i_l j_l} = a_{j_1, \dots, j_k} = \varphi(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}).$$

Per quanto si è osservato all'inizio della dimostrazione, questo prova la (10.5). Notiamo che la (10.5) mostra che i prodotti  $w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_k}$  con  $i_1 < \cdots < i_k$  generano  $\bigwedge^k V^*$ . D'altra parte essi sono indipendenti perchè, se

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k} w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_k} = 0$$

allora

$$a_{j_1, \dots, j_k} = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k} w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_k}(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) = 0$$

per ogni multiindice crescente  $(j_1, \dots, j_k)$ . Questo dimostra la proposizione (10.4).

## Esercizi

- 10.1) Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n$ . Sia  $S^h V^*$  lo spazio dei tensori contravarianti simmetrici di grado  $h$  su  $V$ , cioè lo spazio dei tensori  $T$  tali che

$$T(x_1, \dots, x_h) = T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(h)})$$

per ogni permutazione  $\sigma$  di  $1, \dots, h$ . Si calcolino la dimensione e una base di  $S^h V^*$

- 10.2) Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  su un campo  $K$ . Dimostrare che l'algebra tensoriale  $\bigoplus_{i=0}^{\infty} T^i(V)$  è una  $K$ -algebra associativa.

- 10.3) Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  su un campo  $K$ . Sia  $\varphi$  una forma  $h$ -lineare alternante su  $V$ . Si mostri che, se  $v_1, \dots, v_h$  sono linearmente dipendenti, allora  $\varphi(v_1, \dots, v_h) = 0$ . Dedurne che  $\bigwedge^h(V^*) = 0$  se  $h > n$ .

- 10.4) Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  su un campo  $K$ . Sia  $v$  un elemento di  $V$ . Si mostri che esistono applicazioni lineari  $\iota_v : \bigwedge^h(V^*) \rightarrow \bigwedge^{h-1}(V^*)$  tali che:

i) Se  $w \in V^*$ ,  $\iota_v(w) = w(v)$ .

ii) Se  $\varphi \in \bigwedge^h(V^*)$ ,  $\iota_v(\varphi \wedge \psi) = \iota_v(\varphi) \wedge \psi + (-1)^h \varphi \wedge \iota_v(\psi)$ .

Mostrare che i) e ii) caratterizzano  $\iota_v$  e che  $\iota_v(\varphi)$  dipende linearmente da  $v$ .

- 10.5) Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita, e ne siano  $U$  e  $W$  due sottospazi con basi  $u_1, \dots, u_n$  e  $w_1, \dots, w_m$ . Poniamo  $u = u_1 \wedge \cdots \wedge u_n$ ,  $w = w_1 \wedge \cdots \wedge w_m$ .

a) Mostrare che  $U \subset W$  se e solo se vi sono elementi  $s_1, \dots, s_{m-n}$  di  $W$  tali che  $w = s_1 \wedge \cdots \wedge s_{m-n} \wedge u$ .

b) Mostrare che  $U \cap W = \{0\}$  se e solo se  $u \wedge w \neq 0$ .

## 11. Forme differenziali

Sia  $M$  una varietà differenziabile. Una *forma differenziale di grado  $k$*  (o  *$k$ -forma*) su  $M$  è una applicazione che ad ogni punto  $p$  di  $M$  associa una forma  $k$ -lineare alternante su  $T_pM$ . Se  $\varphi$  è una forma di grado  $k$  porremo  $\deg(\varphi) = k$ . Spiegheremo ora cosa significa dire che una  $k$ -forma è continua, o liscia, e così via. Avvertiamo comunque fin d'ora il lettore che, nell'uso pratico, "forma differenziale" significherà per noi "forma differenziale liscia", a meno che non sia esplicitamente specificato altrimenti.

Se  $f$  è una funzione liscia su un intorno di un punto  $p$  di  $M$ , possiamo interpretare il differenziale di  $f$  in  $p$  come una forma lineare su  $T_pM$  ponendo

$$(11.1) \quad df_p(X) = X(f)$$

per ogni vettore  $X \in T_pM$ . Infatti, se  $x_1, \dots, x_n$  sono coordinate locali su un intorno di  $p$  e scriviamo  $X = \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , allora  $X(f)$  vale

$$\sum b_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

e dipende quindi solo da  $X$  e da  $df_p$ . Mostriamo che la (11.1) dà una identificazione canonica tra il duale di  $T_pM$  e lo spazio dei differenziali nel punto  $p$  di funzioni lisce. Per ogni funzione  $f$ , il differenziale  $df_p$  si scrive in modo unico come combinazione lineare a coefficienti reali di  $dx_1, \dots, dx_n$ , e viceversa ogni combinazione lineare a coefficienti reali  $\sum a_i dx_i$  è della forma  $df$ , dove  $f = \sum a_i x_i$ . Basterà quindi mostrare che ai  $dx_i$  corrispondono funzionali lineari indipendenti su  $T_pM$ . Si può in effetti fare di meglio: la (11.1) dice in particolare che

$$dx_i \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \delta_{ij},$$

cioè che  $dx_1, \dots, dx_n$  è la base duale di  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ . Sia ora  $\varphi$  una forma differenziale su  $M$ . Per quanto si è detto e per la proposizione (10.4),  $\varphi$  si scrive, localmente,

$$\varphi = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

dove le  $a_{i_1, \dots, i_k}$  sono funzioni. Diremo che  $\varphi$  è di classe  $\mathbf{C}^h$  in un punto  $p$  se tali sono le funzioni  $a_{i_1, \dots, i_k}$ . Bisogna mostrare che questa nozione è indipendente dalla scelta delle coordinate. Lo faremo mostrando che  $\varphi$  è di classe  $\mathbf{C}^h$  in  $p$  se e solo se, per ogni scelta di campi di vettori lisci  $v_1, \dots, v_k$  su un intorno di  $p$ , la funzione  $\varphi(v_1, \dots, v_k)$  è  $\mathbf{C}^h$  in  $p$ . Supponiamo infatti che quest'ultima condizione sia verificata. Segue dalla dimostrazione di (10.4) che

$$a_{i_1, \dots, i_k} = \varphi \left( \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \right),$$



e quindi le funzioni  $a_{i_1, \dots, i_k}$  sono di classe  $\mathbf{C}^h$ , cioè  $\varphi$  è  $\mathbf{C}^h$ , in  $p$ . Dimostriamo ora il viceversa; mostreremo anzi di più, e precisamente che, se  $\varphi$  è  $\mathbf{C}^h$  in  $p$ ,  $v_1, \dots, v_k$  sono campi di vettori lisci lungo una applicazione liscia  $\alpha: N \rightarrow M$  e  $q$  è un punto di  $N$  tale che  $\alpha(q) = p$ , allora  $\varphi(v_1, \dots, v_k)$ , vista come funzione su  $N$ , è  $\mathbf{C}^h$  in  $q$ . Scriviamo

$$v_i = \sum b_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

dove le  $b_{ij}$  sono funzioni lisce su  $N$ . Allora

$$\varphi(v_1, \dots, v_k) = \sum_{j_1, \dots, j_k} b_{1j_1} \dots b_{kj_k} \varphi \left( \frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \right).$$

Osserviamo che  $\varphi \left( \frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \right)$  è nullo se il multiindice  $(j_1, \dots, j_k)$  contiene ripetizioni; se invece non vi sono ripetizioni  $(j_1, \dots, j_k)$  si può scrivere in modo unico sotto la forma  $(i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(k)})$ , dove  $\sigma \in S_k$  e  $i_1 < \dots < i_k$ , e quindi

$$\varphi \left( \frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \right) = \text{sgn}(\sigma) \varphi \left( \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \right) = \text{sgn}(\sigma) a_{i_1, \dots, i_k}.$$

Si conclude che  $\varphi(v_1, \dots, v_k)$  è combinazione lineare a coefficienti lisci delle funzioni  $a_{i_1, \dots, i_k}$ . Dunque  $\varphi(v_1, \dots, v_k)$  è di classe  $\mathbf{C}^h$  in  $q$ . Questo termina la dimostrazione del fatto che, per le forme differenziali, la proprietà di essere  $\mathbf{C}^h$  in un punto è intrinseca. Diremo che una forma differenziale su  $M$  è di classe  $\mathbf{C}^h$  se è tale in ogni punto di  $M$ .

Date due forme differenziali  $\varphi$  e  $\psi$ , queste si possono sommare, se hanno lo stesso grado, o se ne può fare il prodotto esterno; il risultato è un'altra forma differenziale, che è di classe  $\mathbf{C}^h$  se lo sono  $\varphi$  e  $\psi$ . Sia  $f: N \rightarrow M$  una applicazione liscia tra varietà differenziabili. Data una  $k$ -forma  $\varphi$  su  $M$  definiamo una  $k$ -forma  $f^*(\varphi)$  su  $N$  ponendo, per ogni  $k$ -upla di vettori tangenti a  $N$  in un suo punto  $q$ ,

$$f^*(\varphi)(v_1, \dots, v_k) = \varphi(df_q(v_1), \dots, df_q(v_k)).$$

È chiaro che, se  $\varphi$  è di classe  $\mathbf{C}^h$ , lo è anche  $f^*(\varphi)$ . In italiano manca, almeno a conoscenza dell'autore, una parola adeguata per designare  $f^*(\varphi)$ ; la chiameremo quindi, all'inglese, il *pullback* di  $\varphi$ . L'applicazione  $f^*$  è compatibile con la somma e il prodotto esterno; in altre parole, se  $\varphi$  e  $\psi$  sono due forme differenziali, si ha che

$$f^*(\varphi + \psi) = f^*(\varphi) + f^*(\psi), \quad f^*(\varphi \wedge \psi) = f^*(\varphi) \wedge f^*(\psi).$$

Se  $g: L \rightarrow N$  è un'altra applicazione liscia tra varietà differenziabili, segue immediatamente dalla definizione di pullback che

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*.$$

In effetti, se  $u_1, \dots, u_k$  sono vettori tangenti a  $L$  in uno stesso punto si ha che

$$\begin{aligned} (f \circ g)^*(\varphi)(u_1, \dots, u_k) &= \varphi(d(f \circ g)(u_1), \dots, d(f \circ g)(u_k)) \\ &= \varphi(df(dg(u_1)), \dots, df(dg(u_k))) \\ &= f^*\varphi(dg(u_1), \dots, dg(u_k)) \\ &= g^*f^*\varphi(u_1, \dots, u_k). \end{aligned}$$

Ci occuperemo ora dell'operazione di differenziazione esterna. Questa, applicata a una forma di grado  $k$  e di classe  $\mathbf{C}^h$ , con  $h \geq 1$ , produce una forma di grado  $k+1$  e classe  $\mathbf{C}^{h-1}$ . Quando abbiamo a che fare con una forma di grado zero, cioè con una funzione  $\varphi$ , la derivata esterna di  $\varphi$  non è altro che il differenziale  $d\varphi$ . In gradi maggiori di 1 daremo la definizione in un sistema di coordinate fissato, dimostreremo alcune proprietà formali della differenziazione esterna, e infine usando queste mostreremo che la definizione data è indipendente dal sistema di coordinate scelto. Sia dunque  $m$  un punto della varietà differenziabile  $M$ , e sia  $x_1, \dots, x_n$  un sistema di coordinate su un intorno di  $m$ . Se  $I = (i_1, \dots, i_k)$  è un multiindice, scriveremo a volte  $dx^I$  come abbreviazione per  $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ . Sia  $\varphi$  una  $k$ -forma differenziale su un intorno di  $m$ . Possiamo scrivere, in un unico modo,

$$\varphi = \sum a_I dx^I,$$

dove  $I$  varia tra tutti i multiindici crescenti di lunghezza  $k$ . La *derivata esterna* di  $\varphi$  è definita come

$$d\varphi = \sum da_I \wedge dx^I.$$

Una prima proprietà della differenziazione esterna che segue immediatamente dalla definizione è che, se  $\varphi$  e  $\psi$  sono forme differenziali dello stesso grado, allora

$$(11.2) \quad d(\varphi + \psi) = d\varphi + d\psi.$$

Sia  $J = (j_1, \dots, j_k)$  un multiindice. Come si è osservato, se  $J$  non contiene ripetizioni può essere scritto in modo unico sotto la forma  $(i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(k)})$ , dove  $\sigma \in S_k$  e  $I = (i_1, \dots, i_k)$  è un multiindice crescente. Allora, se  $a$  è una funzione,

$$d(adx^J) = d(\text{sgn}(\sigma)adx^I) = \text{sgn}(\sigma)da \wedge dx^I = da \wedge dx^J.$$

Se invece  $J$  contiene ripetizioni sia  $d(adx^J)$  che  $da \wedge dx^J$  sono nulli. In ogni caso, quindi,

$$d(adx^J) = da \wedge dx^J,$$

che  $J$  sia crescente o no. Siano ora

$$\varphi = \sum_{\substack{I \text{ crescente} \\ \text{di lunghezza } p}} a_I dx^I, \quad \psi = \sum_{\substack{J \text{ crescente} \\ \text{di lunghezza } q}} b_J dx^J$$

forme differenziali di gradi  $p$  e  $q$  su un intorno di  $m$ . Vale la seguente proprietà:

$$(11.3) \quad d(\varphi \wedge \psi) = d\varphi \wedge \psi + (-1)^p \varphi \wedge d\psi.$$

Se  $\varphi$  e  $\psi$  sono funzioni, questa è la regola di Leibniz. Altrimenti, usando le due proprietà della differenziazione esterna che abbiamo dimostrato, si ottiene

$$\begin{aligned} d(\varphi \wedge \psi) &= \sum d(a_I b_J dx^I \wedge dx^J) \\ &= \sum d(a_I b_J) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= \sum (b_J da_I + a_I db_J) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= \sum da_I \wedge dx^I \wedge b_J dx^J + (-1)^p \sum a_I dx^I \wedge db_J \wedge dx^J \\ &= d\varphi \wedge \psi + (-1)^p \varphi \wedge d\psi. \end{aligned}$$

Mostriamo ora che per ogni forma differenziale  $\varphi$  si ha

$$(11.4) \quad d(d\varphi) = 0.$$

Per la (11.2), basta farlo quando  $\varphi$  è della forma

$$\varphi = a dx^I.$$

In questo caso

$$\begin{aligned} d(d\varphi) &= d(da \wedge dx^I) \\ &= d\left(\sum_j \frac{\partial a}{\partial x_j} dx_j \wedge dx^I\right) \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j \wedge dx^I \\ &= \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 a}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx_i \wedge dx_j \wedge dx^I \\ &= 0. \end{aligned}$$

Siamo ora in grado di dimostrare che la definizione di differenziazione esterna che abbiamo dato è indipendente dal sistema di coordinate scelto. Cominciamo coll'osservare che, se  $y_1, \dots, y_k$  sono funzioni su un intorno di  $m$ ,

$$d(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k) = 0.$$

Questo si può dimostrare per induzione, a partire dal caso  $k = 1$ , che è un caso particolare della (11.4). Se  $k > 1$ , usando l'ipotesi induttiva possiamo scrivere

$$\begin{aligned} d(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k) &= d(dy_1 \wedge (dy_2 \wedge \dots \wedge dy_k)) \\ &= d(dy_1) \wedge (dy_2 \wedge \dots \wedge dy_k) - dy_1 \wedge d(dy_2 \wedge \dots \wedge dy_k) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Consideriamo ora una forma differenziale

$$\varphi = \sum_{i_1 < \dots < i_k} b_{i_1, \dots, i_k} dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k},$$

dove  $y_1, \dots, y_n$  sono funzioni su un intorno di  $m$ . Usando quanto si è appena osservato e le proprietà (11.2), (11.3) e (11.4) si ottiene

$$\begin{aligned} d\varphi &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} d(b_{i_1, \dots, i_k} dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} d(b_{i_1, \dots, i_k}) \wedge dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k} + b_{i_1, \dots, i_k} d(dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} d(b_{i_1, \dots, i_k}) \wedge dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}. \end{aligned}$$

Quando  $y_1, \dots, y_n$  sono coordinate locali su un intorno di  $m$  questa formula è l'esatto analogo di quella usata per definire la derivata esterna nelle coordinate  $x_1, \dots, x_n$ . Ciò mostra che la derivata esterna è indipendente dalla scelta delle coordinate.

L'operazione di derivata esterna è compatibile con il pullback, nel senso che, se  $f: N \rightarrow M$  è una applicazione liscia tra varietà differenziabili e  $\varphi$  è una forma su  $M$ , allora

$$d(f^*\varphi) = f^*(d\varphi).$$

Se  $\varphi$  è una funzione ciò equivale a dire che, per ogni vettore  $v$  tangente a  $N$ , si ha

$$d(\varphi \circ f)(v) = d\varphi(df(v)).$$

In effetti

$$d(\varphi \circ f)(v) = v(\varphi \circ f) = df(v)(\varphi) = d\varphi(df(v)).$$

Se  $\varphi$  ha grado  $k > 1$  e la sua espressione in coordinate locali è

$$\varphi = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

si ha

$$f^*(\varphi) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} (a_{i_1, \dots, i_k} \circ f) d(x_{i_1} \circ f) \wedge \dots \wedge d(x_{i_k} \circ f),$$

e quindi

$$\begin{aligned} d(f^*\varphi) &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} d(a_{i_1, \dots, i_k} \circ f) \wedge d(x_{i_1} \circ f) \wedge \dots \wedge d(x_{i_k} \circ f) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} f^*(da_{i_1, \dots, i_k}) \wedge f^*dx_{i_1} \wedge \dots \wedge f^*dx_{i_k} \\ &= f^*(d\varphi). \end{aligned}$$

ESEMPIO (11.5) (LE EQUAZIONI STRUTTURALI DI CARTAN). Le equazioni strutturali di Cartan danno un formalismo, basato sull'uso di forme differenziali, per descrivere le

connessioni e le quantità da esse derivabili, come il tensore di curvatura, che è spesso assai più maneggevole e trasparente di quello basato sull'uso dei simboli di Christoffel.

Cominciamo con una osservazione di carattere generale. Siano  $\alpha$  e  $\beta$  due 1-forme su una varietà  $M$  di dimensione  $n$ . Dato un punto  $p$  di  $M$ , le 2-forme  $\alpha \wedge \beta$  e  $d\alpha$  corrispondono, nel punto  $p$ , a forme bilineari alternanti su  $T_pM$ , che si possono calcolare esplicitamente. Se  $X$  e  $Y$  sono vettori tangenti a  $M$  in  $p$ , allora

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \beta(X, Y) &= \alpha(X)\beta(Y) - \alpha(Y)\beta(X), \\ d\alpha(X, Y) &= X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]).\end{aligned}$$

La prima di queste uguaglianze non è altro che un caso particolare della definizione di prodotto esterno. Quanto alla seconda, la dimostreremo con dei conti espliciti e pedestri in coordinate locali. Siano dunque  $x_1, \dots, x_n$  coordinate e scriviamo

$$\alpha = \sum_i a_i dx_i, \quad X = \sum u_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Allora

$$\begin{aligned}d\alpha(X, Y) &= \sum u_h v_k \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i \left( \frac{\partial}{\partial x_h}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \\ &= \sum u_h v_k \frac{\partial a_i}{\partial x_j} (\delta_{jh} \delta_{ik} - \delta_{ih} \delta_{jk}) \\ &= \sum (u_j v_i - u_i v_j) \frac{\partial a_i}{\partial x_j}.\end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}X(\alpha(Y)) &= X \left( \sum a_i v_i \right) \\ &= \sum u_j v_i \frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \sum a_i u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j},\end{aligned}$$

e analogamente per  $Y(\alpha(X))$ , mentre

$$\alpha([X, Y]) = \sum a_i \left( u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right).$$

Combinando queste identità si ottiene

$$X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]) = \sum (u_j v_i - u_i v_j) \frac{\partial a_i}{\partial x_j},$$

come si voleva.

Sia ora  $M$  una varietà Riemanniana di dimensione  $n$  e siano  $e_1, \dots, e_n$  campi di vettori indipendenti su un aperto  $A$  di  $M$ . Diremo che  $e_1, \dots, e_n$  è un *riferimento mobile* su  $A$ . Un esempio di riferimento mobile è fornito dai campi  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ , dove  $x_1, \dots, x_n$  sono coordinate locali su un aperto di  $M$ ; è comunque tecnicamente utile avere la libertà

di usare riferimenti che non siano necessariamente di questo tipo. Siano  $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$  le 1-forme differenziali su  $A$  definite dalla condizione

$$\vartheta_i(e_j) = \delta_{ij}.$$

In altre parole  $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$  è, in ogni punto di  $A$ , la base duale di  $e_1, \dots, e_n$ . In particolare, se  $X$  è un vettore tangente a  $M$  in un punto di  $A$ , allora

$$X = \sum_i \vartheta_i(X) e_i.$$

Se  $X$  è come sopra, scriviamo

$$D_X e_i = \sum_j \vartheta_{ij}(X) e_j.$$

Dato che  $D_X e_i$  è lineare in  $X$ , lo stesso è vero per  $\vartheta_{ij}(X)$ : dunque  $\vartheta_{ij}$  è una 1-forma su  $A$ . La prima equazione strutturale di Cartan è, nella nostra situazione,

$$(11.6) \quad d\vartheta_i = \sum_l \vartheta_l \wedge \vartheta_{li}.$$

Per dimostrarla cominciamo col ricordare che la connessione metrica è simmetrica, e cioè che, dati comunque campi di vettori  $X$  e  $Y$ , si ha

$$D_X Y - D_Y X - [X, Y] = 0,$$

o anche, con le nostre notazioni,

$$\begin{aligned} 0 &= D_X \left( \sum \vartheta_i(Y) e_i \right) - D_Y \left( \sum \vartheta_i(X) e_i \right) - \sum \vartheta_i([X, Y]) e_i \\ &= \sum (X(\vartheta_i(Y)) - Y(\vartheta_i(X)) - \vartheta_i([X, Y])) e_i + \sum (\vartheta_l(Y) \vartheta_{li}(X) - \vartheta_l(X) \vartheta_{li}(Y)) e_i. \end{aligned}$$

In altri termini, per ogni  $i$  si ha

$$d\vartheta_i(X, Y) - \sum_l \vartheta_l \wedge \vartheta_{li}(X, Y) = 0.$$

Per l'arbitrarietà di  $X$  e  $Y$ , questo dà la (11.6).

Passiamo alla seconda equazione strutturale di Cartan. Scriviamo

$$R(X, Y) e_i = \sum_j \Omega_{ij}(X, Y) e_j,$$

dove  $R$  è il tensore di Riemann. Dato che  $R$  è bilineare e antisimmetrico in  $X$  e  $Y$ , le  $\Omega_{ij}$  sono 2-forme su  $A$ . La seconda equazione strutturale dice che

$$(11.7) \quad \Omega_{ij} = d\vartheta_{ij} - \sum_l \vartheta_{il} \wedge \vartheta_{lj}.$$

La dimostrazione è sostanzialmente identica a quella della prima equazione strutturale: si nota che

$$\begin{aligned}
 R(X, Y)e_i &= D_X D_Y e_i - D_Y D_X e_i - D_{[X, Y]} e_i \\
 &= D_X \left( \sum \vartheta_{ij}(Y) e_j \right) - D_Y \left( \sum \vartheta_{ij}(X) e_j \right) - \sum \vartheta_{ij}([X, Y]) e_j \\
 &= \sum (X(\vartheta_{ij}(Y)) - Y(\vartheta_{ij}(X)) - \vartheta_{ij}([X, Y])) e_j \\
 &\quad - \sum (\vartheta_{il}(X) \vartheta_{lj}(Y) - \vartheta_{il}(Y) \vartheta_{lj}(X)) e_j \\
 &= \sum d\vartheta_{ij}(X, Y) e_j - \sum \vartheta_{il} \wedge \vartheta_{lj}(X, Y) e_j,
 \end{aligned}$$

cioè che, per ogni  $i$  e  $j$ ,

$$\Omega_{ij}(X, Y) = d\vartheta_{ij}(X, Y) - \sum_l \vartheta_{il} \wedge \vartheta_{lj}(X, Y).$$

Per l'arbitrarietà di  $X$  e  $Y$  questo implica la (11.7).

Le forme differenziali si possono integrare. Per spiegare come questo avviene è necessaria una digressione sulla nozione di orientabilità per le varietà differenziabili. Ricordiamo innanzitutto (cf. Cap. 1) che una orientazione su uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione finita non è altro che una classe di equivalenza di basi ordinate di  $V$  modulo la seguente relazione: due basi si dicono equivalenti se la matrice del cambiamento di base dall'una all'altra ha determinante positivo. Sia ora  $M$  una varietà differenziabile. Una *orientazione* su  $M$  è il dato di una orientazione  $e_p$  su ogni spazio tangente  $T_p M$ ,  $p \in M$ , con la proprietà che per ogni punto  $p$  di  $M$  esiste un sistema di coordinate  $x_1, \dots, x_n$  su un intorno  $A$  di  $p$  tale che, per ogni  $q \in A$ , l'orientazione  $e_q$  coincida con quella determinata su  $T_q M$  dalla base  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ . Una varietà  $M$  si dice *orientabile* se ammette una orientazione. Una *varietà differenziabile orientata* è il dato di una varietà differenziabile orientabile più una scelta di orientazione.

LEMMA (11.8). *Su una varietà differenziabile orientabile connessa vi sono esattamente due orientazioni.*

Sia  $M$  la varietà in questione e sia  $e = \{e_p\}$  una orientazione su  $M$ . Osserviamo intanto che, se indichiamo con  $g_p$  l'orientazione su  $T_p M$  opposta a  $e_p$ , allora  $g = \{g_p\}$  è una orientazione su  $M$ . Se infatti  $x_1, \dots, x_n$  è un sistema di coordinate su un aperto  $A$  di  $M$  tale che in ogni punto di  $A$  l'orientazione  $e_p$  sia quella determinata da  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ , è chiaro che, per ogni  $p \in A$ ,  $g_p$  è l'orientazione corrispondente a  $\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}$ , dove  $y_1 = -x_1$  e  $y_i = x_i$  per  $i > 1$ . Vi sono dunque su  $M$  almeno due orientazioni. Supponiamo che  $f = \{f_p\}$  sia una terza orientazione e poniamo

$$A = \{p \in M \mid f_p = e_p\}, \quad B = \{p \in M \mid f_p = g_p\}.$$

Gli insiemi  $A$  e  $B$  sono disgiunti e hanno per unione  $M$ ; dato che  $M$  è connessa, per concludere la dimostrazione del lemma basterà mostrare che sono aperti. Sia  $p$  un punto di  $A$ . Vi sono sistemi di coordinate  $x_1, \dots, x_n$  e  $y_1, \dots, y_n$  su un intorno connesso  $V$  di  $p$

tali che in ogni punto  $q$  di  $V$  le orientazioni  $e_q$  ed  $f_q$  siano determinate da  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$  e da  $\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}$ . La matrice Jacobiana

$$J = \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

è non singolare in ogni punto di  $V$ ; dato che  $V$  è connesso,  $\det(J)$  non può cambiare segno su  $V$ . D'altra parte  $J$  è la matrice del cambiamento di base da  $\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}$  a  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ ; dato che  $f_p = e_p$ , il determinante di  $J$  è positivo in  $p$ , e quindi su tutto  $V$ . Ciò significa che le basi  $\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}$  e  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$  sono concordemente orientate in ogni punto di  $V$ , e dunque che  $V \subset A$ . Ciò mostra che  $A$  è aperto. Allo stesso modo si procede per  $B$ . Il lemma è dimostrato.

Sia  $M$  una varietà differenziabile orientata. Una carta locale  $x_1, \dots, x_n$  su  $M$  si dice *orientata* se in ogni punto l'orientazione corrispondente a  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$  è quella di  $M$ . Un *atlante orientato* su  $M$  è un atlante costituito da carte orientate. È chiaro che, se  $\Psi$  e  $\Phi$  sono carte appartenenti a un atlante orientato, allora il determinante della matrice Jacobiana  $J(\Phi \circ \Psi^{-1})$  è positivo. Viceversa, sia  $\mathcal{A}$  un atlante su una varietà differenziabile  $M$  con la proprietà che, per ogni coppia  $\Psi, \Phi$  di carte di  $\mathcal{A}$ , la matrice  $J(\Phi \circ \Psi^{-1})$  ha ovunque determinante positivo. Allora vi è su  $M$  una (e una sola) orientazione per cui  $\mathcal{A}$  sia un atlante orientato. Se  $p$  è un punto di  $M$ , basta porre su  $T_p M$  l'orientazione determinata da  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ , dove  $x_1, \dots, x_n$  è una carta locale appartenente ad  $\mathcal{A}$ ; chiaramente questa non dipende dalla particolare carta scelta.

ESEMPIO (11.9). Sia  $S$  una superficie in  $\mathbb{R}^3$ . Di solito si dice che  $S$  è orientabile se “ha due facce”. Vogliamo mostrare che questa nozione di orientabilità coincide con la nostra, e più esattamente che  $S$  è orientabile se e solo se vi è su di essa un campo continuo (in effetti liscio) di vettori unitari normali. Poniamo su  $\mathbb{R}^3$  l'orientazione standard e consideriamo i vettori tangenti a  $S$  come elementi di  $\mathbb{R}^3$ . Supponiamo dapprima che  $S$  sia orientabile e fissiamo una orientazione su  $S$ . Se  $p$  è un punto di  $S$ , definiamo  $N_p$  come il vettore unitario normale a  $S$  tale che

$$\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}, N_p$$

sia una base positivamente orientata di  $\mathbb{R}^3$ , dove  $u_1, u_2$  è un sistema di coordinate orientato su un intorno di  $p$ . Se  $v_1, v_2$  è un altro sistema di coordinate orientato, la matrice del cambiamento di base da  $\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}, N_p$  a  $\frac{\partial}{\partial v_1}, \frac{\partial}{\partial v_2}, N_p$  è

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(v_1, v_2)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

il cui determinante è  $\det \left( \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(v_1, v_2)} \right)$ , che è positivo. È chiaro quindi che  $N_p$  non dipende dalla scelta delle coordinate, purché queste siano orientate. Localmente si ha

$$N = \frac{\frac{\partial}{\partial u_1} \times \frac{\partial}{\partial u_2}}{\left\| \frac{\partial}{\partial u_1} \times \frac{\partial}{\partial u_2} \right\|}.$$



Ciò mostra che  $N$  è un campo liscio di vettori unitari normali a  $S$ . Rovesciamo questo ragionamento e mostriamo viceversa che, se un campo  $N$  con queste caratteristiche esiste, allora  $S$  è orientabile. Dobbiamo trovare un atlante orientato per  $S$ . Se  $p$  è un punto di  $S$ , scegliamo un sistema di coordinate  $u_1, u_2$  su un intorno di  $p$ . Possiamo supporre che  $\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}, N_p$  sia una base positivamente orientata di  $\mathbb{R}^3$ ; se questo non accade, infatti, basta rimpiazzare  $u_1, u_2$  con  $-u_1, u_2$ . La collezione di tutte le carte locali così ottenute è un atlante orientato  $\mathcal{A}$  per  $S$ . Infatti, se  $v_1, v_2$  è un'altra carta in  $\mathcal{A}$ , il determinante della matrice cambiamento di base da  $\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}, N_p$  a  $\frac{\partial}{\partial v_1}, \frac{\partial}{\partial v_2}, N_p$ , che è positivo, vale  $\det \left( \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(v_1, v_2)} \right)$ .

LEMMA (11.10). *Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $n$ . Allora  $M$  è orientabile se e solo se vi è su  $M$  una  $n$ -forma ovunque non nulla.*

Nel dimostrare il lemma supponiamo dapprima che una  $n$ -forma  $\varphi$  mai nulla esista. Sia  $x_1, \dots, x_n$  un sistema di coordinate locali su  $M$ . In queste coordinate si può scrivere, localmente,

$$\varphi = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

dove  $f$  è una funzione mai nulla. Nell'intorno di ogni punto di  $M$  si può scegliere un sistema di coordinate in modo che  $f$  sia positiva. La collezione di questi sistemi di coordinate è un atlante  $\mathcal{A}$ ; vediamo che è orientato. Se  $x_1, \dots, x_n$  è come sopra e  $y_1, \dots, y_n$  è un altro sistema di coordinate in  $\mathcal{A}$ , possiamo scrivere

$$\varphi = g dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n,$$

dove  $g$  è positiva. D'altra parte

$$\begin{aligned} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n &= \sum_{j_1, \dots, j_n} \frac{\partial y_1}{\partial x_{j_1}} \dots \frac{\partial y_n}{\partial x_{j_n}} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \frac{\partial y_1}{\partial x_{\sigma(1)}} \dots \frac{\partial y_n}{\partial x_{\sigma(n)}} dx_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\sigma(n)} \\ &= \det \left( \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, \end{aligned}$$

e quindi

$$(11.11) \quad \det \left( \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right) = \frac{f}{g}$$

è positivo, come si doveva dimostrare.

Supponiamo ora che  $M$  sia orientabile, e costruiamo una  $n$ -forma  $\varphi$  mai nulla su  $M$ . Scegliamo una orientazione su  $M$  e un atlante orientato  $\{(U_i, \Phi_i)\}$  per  $M$ . Se  $x_1, \dots, x_n$  sono le componenti di  $\Phi_i$  poniamo

$$\varphi_i = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Scegliamo poi una partizione dell'unità  $\{\chi_i\}$  subordinata al ricoprimento  $\{U_i\}$ , e poniamo

$$\varphi = \sum_i \chi_i \varphi_i,$$

dove  $\chi_i \varphi_i$  è posto uguale a zero fuori da  $U_i$ . La  $n$ -forma  $\varphi$  è liscia su tutta  $M$ ; resta da vedere che non si annulla in alcun punto. Se  $p$  appartiene a  $M$  le funzioni  $\chi_i$  il cui supporto contiene  $p$  sono in numero finito; indichiamole con  $\chi_{i_1}, \dots, \chi_{i_h}$ . Se  $x_1, \dots, x_n$  è una carta orientata su un intorno di  $p$ , si può scrivere, localmente,

$$\varphi_{i_j} = f_j dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

dove le  $f_j$  sono funzioni positive. Dunque, nel punto  $p$ ,

$$\varphi = \sum_{j=1}^h \chi_{i_j} f_j dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Ne segue che  $\varphi$  non si annulla in  $p$ , perchè in questo punto la funzione  $\sum \chi_{i_j} f_j$  è positiva, in quanto somma di funzioni non negative almeno una delle quali strettamente positiva in  $p$ . Questo completa la dimostrazione del lemma.

Sia  $M$  una varietà differenziabile orientata di dimensione  $n$ , e sia  $\varphi$  una  $n$ -forma su  $M$ . Diremo che  $\varphi$  è *positiva* (risp. *non negativa*) se, dato comunque un sistema di coordinate positivamente orientato  $x_1, \dots, x_n$  su  $M$ , la forma  $\varphi$  si scrive localmente  $f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ , dove  $f$  è una funzione positiva (risp. non negativa). Il lemma che abbiamo appena dimostrato mostra tra l'altro che su  $M$  vi sono  $n$ -forme positive.

Possiamo ora spiegare cosa significa integrare una forma. Sia dunque  $\varphi$  una  $n$ -forma su una varietà differenziabile orientata (come vedremo questo è essenziale)  $M$  di dimensione  $n$ . Vogliamo dare un senso a

$$\int_M \varphi.$$

Lo faremo dapprima quando  $\varphi$  è continua e a supporto compatto. Iniziamo dal caso in cui  $\text{supp}(\varphi)$  è contenuto nel dominio  $U$  di un sistema orientato di coordinate  $\Phi = (x_1, \dots, x_n)$ . Su  $U$  possiamo scrivere

$$\varphi = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Poniamo

$$\int_M \varphi = \int_{\Phi(U)} f \circ \Phi^{-1} d\mu,$$

dove  $d\mu$  è la misura di Lebesgue su  $\mathbb{R}^n$ . È chiaro che questo integrale è additivo, cioè che, se  $\psi$  è un'altra  $n$ -forma, si ha

$$\int_M (\varphi + \psi) = \int_M \varphi + \int_M \psi.$$

Mostriamo che l'integrale di  $\varphi$  non dipende dalla scelta delle coordinate. Sia  $\Psi = (y_1, \dots, y_n)$  un'altra carta locale orientata su un intorno di  $\text{supp}(\varphi)$ ; in queste coordinate possiamo scrivere

$$\varphi = g dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n,$$

dove

$$g = f \det \left( \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right)$$

(cf. (11.11)). Dato che i sistemi di coordinate in gioco sono orientati, il determinante

$$\det \left( \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right) = \det(J(\Phi \circ \Psi^{-1}))$$

è positivo. Si ha dunque

$$\begin{aligned} \int_{\Psi(\text{supp } \varphi)} g \circ \Psi^{-1} d\mu &= \int_{\Psi \circ \Phi^{-1}(\Phi(\text{supp } \varphi))} (f \circ \Phi^{-1}) \circ (\Phi \circ \Psi^{-1}) \det(J(\Phi \circ \Psi^{-1})) d\mu \\ &= \int_{\Psi \circ \Phi^{-1}(\Phi(\text{supp } \varphi))} (f \circ \Phi^{-1}) \circ (\Phi \circ \Psi^{-1}) |\det(J(\Phi \circ \Psi^{-1}))| d\mu \\ &= \int_{\Phi(\text{supp } \varphi)} f \circ \Phi^{-1} d\mu, \end{aligned}$$

per il teorema di cambiamento di variabile negli integrali multipli.

Per definire l'integrale di  $\varphi$  anche quando  $\text{supp } \varphi$  non è contenuto in un aperto coordinato ci serviremo di una partizione dell'unità  $\{\chi_i\}$  subordinata a un ricoprimento  $\{A_i\}$  di  $M$  con aperti coordinati, ponendo

$$(11.12) \quad \int_M \varphi = \sum_i \int_M \chi_i \varphi.$$

Mostriamo che questa definizione ha senso. In primo luogo, per ogni  $i$ ,  $\text{supp}(\chi_i)$  è un compatto contenuto nell'aperto coordinato  $A_i$ , e quindi gli addendi del membro di destra di (11.12) sono ben definiti. In secondo luogo, dato che la famiglia dei supporti delle  $\chi_i$  è localmente finita, vi è solo un numero finito di indici  $i$  per cui  $\text{supp}(\varphi) \cap \text{supp}(\chi_i)$  non è vuoto, e quindi la somma in (11.12) è in realtà una somma finita. Dobbiamo ora dimostrare che la definizione (11.12) è indipendente dalla scelta del ricoprimento e della partizione dell'unità. Sia dunque  $\{B_j\}$  un altro ricoprimento di  $M$  con aperti coordinati e sia  $\{\lambda_j\}$  una partizione dell'unità ad esso subordinata. Usando l'additività

dell'integrale si ottiene

$$\begin{aligned}
 \int_M \varphi &= \sum_i \int_{A_i} \chi_i \varphi \\
 &= \sum_i \int_{A_i} \left( \sum_j \lambda_j \right) \chi_i \varphi \\
 &= \sum_{i,j} \int_{A_i \cap B_j} \lambda_j \chi_i \varphi \\
 &= \sum_j \int_{B_j} \left( \sum_i \chi_i \right) \lambda_j \varphi \\
 &= \sum_j \int_{B_j} \lambda_j \varphi,
 \end{aligned}$$

come si doveva dimostrare.

Ad ogni  $n$ -forma continua  $\Phi$  su  $M$  si può associare una misura  $d\mu_\Phi$  ponendo, per ogni funzione  $f$  continua e a supporto compatto,

$$\int_M f d\mu_\Phi = \int_M f \Phi.$$

Possiamo dunque parlare di funzioni misurabili o integrabili, nonché di integrale di una funzione, rispetto a questa misura. Scegliamo ora una  $\Phi$  che sia liscia e positiva. Ogni  $n$ -forma  $\varphi$  si può scrivere come  $f\Phi$ , dove  $f$  è una funzione. Diremo che  $\varphi$  è misurabile o integrabile se lo è  $f$ , e in quest'ultimo caso porremo

$$\int_M \varphi = \int_M f d\mu_\Phi.$$

Mostriamo che queste nozioni sono indipendenti dalla scelta di  $\Phi$ . Se  $\Psi$  è un'altra  $n$ -forma liscia e positiva, possiamo scrivere  $\Phi = g\Psi$ , dove  $g$  è una funzione liscia e positiva, e dunque  $\varphi = fg\Psi$ . È chiaro che  $d\mu_\Phi = g d\mu_\Psi$ . Dunque  $f$  è misurabile rispetto a  $d\mu_\Phi$  se e solo se lo è rispetto a  $d\mu_\Psi$ , e questo avviene se e solo se è misurabile  $fg$ . Quanto all'integrale, si ha ovviamente

$$\int_M \varphi = \int_M f d\mu_\Phi = \int_M fg d\mu_\Psi.$$

L'integrale di forme ora definito si riduce, quando l'integrando è continuo e a supporto compatto, a quello definito in precedenza. Va anche osservato che, se  $\varphi$  è una  $n$ -forma integrabile e  $\{\chi_i\}$  è una partizione dell'unità si ha, come nel caso in cui l'integrando è continuo a supporto compatto,

$$(11.13) \quad \int_M \varphi = \sum_i \int_M \chi_i \varphi.$$

Che ciò sia vero segue dal teorema di convergenza dominata; la serie che compare in questa identità converge assolutamente.

Se  $\varphi$  è una  $n$ -forma su  $M$  e  $K$  un sottoinsieme di  $M$  porremo

$$\int_K \varphi = \int_M \chi_K \varphi,$$

dove  $\chi_K$  è la funzione caratteristica di  $K$ . È utile osservare che, se  $K$  è contenuto in una sottovarietà propria  $N \subset M$ , allora l'integrale di  $\varphi$  su  $K$  è nullo. In virtù della (11.13) la questione è locale. Ci si può dunque limitare a trattare il caso in cui  $M$  sia un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e  $N$  una sua sottovarietà lineare; ma allora quanto affermato segue dal fatto che  $N$  ha misura di Lebesgue nulla.

Una proprietà formale ovvia dell'integrale di forme è la linearità: se  $\varphi$  e  $\psi$  sono due  $n$ -forme differenziali su  $M$ , e  $a$  e  $b$  due numeri reali, allora

$$\int_M (a\varphi + b\psi) = a \int_M \varphi + b \int_M \psi.$$

Un'altra proprietà importante dell'integrale ha a che fare con l'integrazione di pullback di forme. Sia  $f: M \rightarrow N$  un diffeomorfismo tra varietà differenziabili orientate di dimensione  $n$ . Supponiamo che  $f$  sia *orientata*, cioè che il determinante della sua matrice Jacobiana, calcolata rispetto a coordinate orientate sia su  $M$  che su  $N$ , sia ovunque positivo. Allora, se  $\varphi$  è una  $n$ -forma integrabile su  $N$ , anche  $f^*(\varphi)$  è integrabile e vale l'uguaglianza

$$\int_M f^*(\varphi) = \int_N \varphi.$$

Usando opportune partizioni dell'unità, nel dimostrarlo si può supporre che i supporti di  $\varphi$  e  $f^*(\varphi)$  siano contenuti in aperti coordinati, e quindi in definitiva che  $M$  e  $N$  siano aperti in  $\mathbb{R}^n$ ; in questo caso il risultato che dobbiamo dimostrare è una conseguenza immediata della formula di cambiamento di variabile negli integrali multipli. Se infatti  $x_1, \dots, x_n$  e  $y_1, \dots, y_n$  sono coordinate su  $M$  e su  $N$ , possiamo scrivere, localmente,

$$\varphi = g dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n,$$

e dunque

$$f^*(\varphi) = g \circ f \det \left( \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Dato che  $f$  è orientata ne segue che

$$\begin{aligned} \int_M f^*(\varphi) &= \int_M g \circ f \det \left( \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right) dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_M g \circ f \left| \det \left( \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right) \right| dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_N g dy_1 \dots dy_n. \end{aligned}$$

Siano ora  $M$  e  $N$  varietà differenziabili, e si supponga  $N$  orientata e di dimensione  $k$ . Sia  $\varphi$  una forma differenziale di grado  $k$  su  $M$ , e sia  $K$  un sottoinsieme di  $N$ .

Sia  $\alpha : K \rightarrow M$  una applicazione liscia; ciò significa che  $\alpha$  è la restrizione a  $K$  di una applicazione liscia da un intorno di  $K$  a  $M$ . L'integrale di  $\varphi$  lungo  $\alpha$  è

$$\int_{\alpha} \varphi = \int_K \alpha^*(\varphi).$$

Più in generale, se  $c = \sum r_i \alpha_i$  è una combinazione lineare formale finita a coefficienti reali di applicazioni lisce  $\alpha_i : K_i \rightarrow M$ , dove i  $K_i$  sono sottinsiemi di varietà orientate  $k$ -dimensionali, porremo

$$\int_c \varphi = \sum_i r_i \int_{\alpha_i} \varphi.$$

Un risultato fondamentale della teoria dell'integrazione di forme differenziali è la formula di Stokes. Per enunciarla ci serve un po' di nomenclatura. Scriveremo  $I$  per indicare l'intervallo  $[0, 1]$ . Sia  $X$  uno spazio topologico. Quello che viene chiamato pomposamente *k-cubo singolare* in  $X$  non è altro che una applicazione continua

$$\gamma : I^k \rightarrow X.$$

Se  $F$  è un anello commutativo, una *k-catena (cubica) singolare in  $X$  con coefficienti in  $F$*  è una combinazione lineare formale finita  $\sum r_i \gamma_i$ , dove gli  $r_i$  sono elementi di  $F$  e i  $\gamma_i$  sono  $k$ -cubi singolari in  $X$ . L'insieme delle  $k$ -catene singolari in  $X$  a coefficienti in  $F$  è un modulo su  $F$ , che indicheremo con  $C_k(X, F)$ . Se  $X$  è una varietà differenziabile una catena singolare si dirà liscia se è composta da cubi singolari lisci. Definiamo "operatori di faccia"  $\varepsilon_{i,\alpha} : I^{k-1} \rightarrow I^k$ , per  $i = 1, \dots, k$  e  $\alpha = 0, 1$  ponendo

$$\varepsilon_{i,\alpha}(x_1, \dots, x_{k-1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha, x_i, \dots, x_{k-1}).$$

Se  $\gamma$  è un  $k$ -cubo singolare il *bordo* di  $\gamma$  è la  $(k-1)$ -catena singolare

$$(11.14) \quad \partial\gamma = \sum_{i,\alpha} (-1)^{i+\alpha} \gamma \varepsilon_{i,\alpha}.$$

Per illustrare il significato di questa definizione conviene soffermarsi sul caso in cui  $X$  è una varietà differenziabile di dimensione  $k$  e  $\gamma$  è la restrizione a  $I^k$  di un diffeomorfismo orientato da un intorno di  $I^k$  su un aperto di  $X$ . Possiamo allora pensare  $x_1, \dots, x_k$  come coordinate locali orientate su un intorno di  $K = \gamma(I^k)$  e il bordo topologico di  $K$  è l'unione dei sottinsiemi  $K_{i,\alpha} = \gamma \varepsilon_{i,\alpha}(I^{k-1})$ . Pensiamo  $K_{i,\alpha}$  come sottinsieme della sottovarietà  $X_{i,\alpha} = \{x_i = \alpha\}$ , orientata in modo che, se  $p$  è un suo punto,  $v_1, \dots, v_{k-1}$  è una base orientata di  $T_p X_{i,\alpha}$  e  $N$  è un vettore normale a  $X_{i,\alpha}$  e diretto verso l'esterno di  $K$ , la base  $N, v_1, \dots, v_{k-1}$  di  $T_p X$  sia positivamente orientata. È immediato verificare che, se  $\varphi$  è una  $(k-1)$ -forma su  $X$ , si ha

$$\int_{K_{i,\alpha}} \varphi = (-1)^{i+\alpha} \int_{\gamma \varepsilon_{i,\alpha}} \varphi.$$

Quindi, in modo un po' impreciso ma sostanzialmente corretto, si può dire che l'integrale

$$\int_{\partial\gamma} \varphi$$

è pari all'integrale di  $\varphi$  sul bordo di  $K$ , quando su questo, nei punti lisci, si scelga l'orientazione che, aggiunta a un vettore che punta verso l'esterno di  $K$ , dà l'orientazione di  $X$ . Possiamo dunque concludere che i segni nella (11.14) non sono altro che un modo di tenere conto dell'orientazione "corretta" delle varie facce di  $\gamma$ .

Abbiamo definito l'operatore bordo per  $k$ -cubi singolari. Più in generale, il bordo di una  $k$ -catena singolare  $c = \sum r_i \gamma_i$  è definito per linearità come

$$\partial c = \sum_i r_i \partial \gamma_i.$$

Una proprietà importante dell'operatore bordo è che  $\partial^2 = 0$ . Per vederlo basta mostrare che  $\partial^2 \gamma = 0$  per ogni  $k$ -cubo singolare  $\gamma$ . È immediato verificare che gli operatori di faccia soddisfano le relazioni di commutazione

$$\begin{aligned} \varepsilon_{j,\beta} \varepsilon_{i,\alpha} &= \varepsilon_{i+1,\alpha} \varepsilon_{j,\beta} & \text{se } i \geq j, \\ \varepsilon_{j,\beta} \varepsilon_{i,\alpha} &= \varepsilon_{i,\alpha} \varepsilon_{j-1,\beta} & \text{se } i < j. \end{aligned}$$

Usando queste relazioni possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \partial(\partial\gamma) &= \partial \left( \sum (-1)^{\beta+j} \gamma \varepsilon_{j,\beta} \right) \\ &= \sum (-1)^{\alpha+\beta+i+j} \gamma \varepsilon_{j,\beta} \varepsilon_{i,\alpha} \\ &= \sum_{i < j} (-1)^{\alpha+\beta+i+j} \gamma \varepsilon_{j,\beta} \varepsilon_{i,\alpha} + \sum_{i \geq j} (-1)^{\alpha+\beta+i+j} \gamma \varepsilon_{i+1,\alpha} \varepsilon_{j,\beta} \\ &= \sum_{i < j} (-1)^{\alpha+\beta+i+j} \gamma \varepsilon_{j,\beta} \varepsilon_{i,\alpha} + \sum_{i < j} (-1)^{\alpha+\beta+i+j-1} \gamma \varepsilon_{j,\beta} \varepsilon_{i,\alpha} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sia  $f : X \rightarrow Y$  una applicazione continua tra spazi topologici. Se  $\gamma$  è un  $k$ -cubo singolare in  $X$ , indicheremo con  $f_*(\gamma)$  il  $k$ -cubo singolare  $f \circ \gamma$ . Più in generale, se  $c = \sum r_i \gamma_i$  è una  $k$ -catena in  $X$  a coefficienti in  $F$ , poniamo

$$f_*(c) = \sum r_i f_*(\gamma_i).$$

Ciò definisce un omomorfismo

$$f_* : C_k(X, F) \rightarrow C_k(Y, F).$$

Segue immediatamente dalle definizioni che  $f_*$  commuta con  $\partial$ , cioè che per ogni catena  $c$  si ha

$$(11.15) \quad \partial(f_*c) = f_*(\partial c),$$

e inoltre che, se  $g : Y \rightarrow Z$  è una applicazione continua,

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_* .$$

Sia  $f : X \rightarrow Y$  una applicazione liscia tra varietà differenziabili, e sia  $c$  una  $k$ -catena liscia a coefficienti reali su  $X$ ; allora anche  $f_*(c)$  è liscia, e inoltre per ogni  $k$ -forma  $\varphi$  su  $Y$  si ha che

$$(11.16) \quad \int_c f^*(\varphi) = \int_{f_*(c)} \varphi .$$

Siamo ora in grado di enunciare e dimostrare una versione abbastanza generale della formula di Stokes.

**TEOREMA (11.17) (FORMULA DI STOKES; PRIMA VERSIONE).** *Sia  $\varphi$  una  $(k-1)$ -forma liscia su una varietà differenziabile  $M$ , e sia  $c$  una  $k$ -catena singolare liscia a coefficienti reali in  $M$ . Allora*

$$\int_c d\varphi = \int_{\partial c} \varphi .$$

Poiché i due lati dipendono linearmente da  $c$ , basta fare la dimostrazione quando  $c$  è un  $k$ -cubo singolare  $\gamma$ . Anzi, in virtù delle (11.15) e (11.16), basterà fare la dimostrazione nel caso in cui  $M$  è un aperto  $A \subset \mathbb{R}^k$  contenente  $I^k$  e il  $k$ -cubo in questione è l'inclusione  $\iota$  di  $I^k$  in  $A$ . Infatti, se  $\tilde{\gamma}$  è una estensione liscia di  $\gamma$  a un intorno di  $I^k$ , allora  $\gamma = \tilde{\gamma}_*(\iota)$ , e quindi

$$\begin{aligned} \int_\gamma d\varphi &= \int_\iota \tilde{\gamma}^*(d\varphi) = \int_\iota d(\tilde{\gamma}^*(\varphi)) , \\ \int_{\partial\gamma} \varphi &= \int_{\tilde{\gamma}_*(\partial\iota)} \varphi = \int_{\partial\iota} \tilde{\gamma}^*(\varphi) . \end{aligned}$$

Quanto va dimostrato è dunque che, se  $\varphi$  è una  $(k-1)$ -forma su un intorno di  $I^k$  in  $\mathbb{R}^k$ , allora

$$(11.18) \quad \int_{I^k} d\varphi = \sum (-1)^{i+\alpha} \int_{I^{k-1}} \varepsilon_{i,\alpha}^*(\varphi) .$$

Se  $x_1, \dots, x_k$  sono le coordinate euclidee in  $\mathbb{R}^k$ , possiamo scrivere

$$\varphi = \sum_i f_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_k .$$

Dato che i due lati di (11.18) sono  $\mathbb{R}$ -lineari in  $\varphi$ , basterà dimostrare la (11.18) stessa quando

$$\varphi = f dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_h \wedge \dots \wedge dx_k .$$

In questo caso

$$d\varphi = (-1)^{h-1} \frac{\partial f}{\partial x_h} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k ,$$



e quindi

$$\begin{aligned} \int_{I^k} d\varphi &= (-1)^{h-1} \int_{I^k} \frac{\partial f}{\partial x_h} dx_1 \dots dx_k \\ &= (-1)^{h-1} \int_{I^{k-1}} \left( \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_h} dx_h \right) dx_1 \dots \widehat{dx_h} \dots dx_k \\ &= (-1)^{h-1} \int_{I^{k-1}} f(x_1, \dots, x_{h-1}, 1, x_{h+1}, \dots, x_k) dx_1 \dots \widehat{dx_h} \dots dx_k \\ &\quad - (-1)^{h-1} \int_{I^{k-1}} f(x_1, \dots, x_{h-1}, 0, x_{h+1}, \dots, x_k) dx_1 \dots \widehat{dx_h} \dots dx_k. \end{aligned}$$

D'altra parte, se indichiamo con  $y_1, \dots, y_{k-1}$  le coordinate euclidee in  $\mathbb{R}^{k-1}$ , abbiamo che

$$\epsilon_{i,\alpha}^*(\varphi) = \begin{cases} f(y_1, \dots, y_{h-1}, \alpha, y_h, \dots, y_{k-1}) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{k-1} & \text{se } i = h, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e dunque

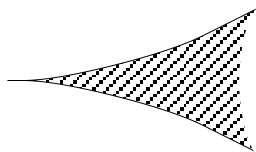
$$\begin{aligned} \sum (-1)^{i+\alpha} \int_{I^{k-1}} \epsilon_{i,\alpha}^*(\varphi) &= (-1)^{h+1} \int_{I^{k-1}} \epsilon_{h,1}^*(\varphi) + (-1)^h \int_{I^{k-1}} \epsilon_{h,0}^*(\varphi) \\ &= (-1)^{h-1} \int_{I^{k-1}} f(y_1, \dots, y_{h-1}, 1, y_h, \dots, y_{k-1}) dy_1 \dots dy_{k-1} \\ &\quad - (-1)^{h-1} \int_{I^{k-1}} f(y_1, \dots, y_{h-1}, 0, y_h, \dots, y_{k-1}) dy_1 \dots dy_{k-1} \\ &= \int_{I^k} d\varphi. \end{aligned}$$

Questo conclude la dimostrazione della formula di Stokes nella sua prima versione.

Osserviamo che la formula di Stokes è una generalizzazione multidimensionale del teorema fondamentale del calcolo integrale; in effetti proprio a questo teorema si riduce la formula quando  $k = 1$  e la catena  $c$  è l'1-cubo banale in  $\mathbb{R}$ . Va tra l'altro osservato che, a parte l'uso di una notazione intelligente e una certa astuzia combinatoria, i soli ingredienti della dimostrazione sono il teorema fondamentale del calcolo integrale e il teorema di Fubini.

Daremo ora una seconda versione della formula di Stokes che ha carattere leggermente più geometrico. Sia  $A$  un aperto di una varietà differenziabile  $M$  di dimensione  $n$ . Diremo che il bordo di  $A$  è *liscio a tratti* se per ogni punto  $p$  di  $\partial A$  vi è una carta locale  $(U, \Phi)$  su un intorno di  $p$  tale che  $U \cap A$  sia connesso e che  $\Phi(U \cap \bar{A})$  sia l'intersezione di  $\Phi(U)$  con una unione finita di intersezioni finite di semispazi chiusi i cui bordi contengono  $\Phi(p)$ .

Nel caso in cui la dimensione di  $M$  sia 2 questo equivale a dire che il bordo di  $A$  è unione disgiunta di curve  $\mathbf{C}^\infty$  a tratti che soddisfano la seguente condizione: se  $\gamma(t)$  è una parametrizzazione di una di queste curve tramite la lunghezza d'arco, allora  $\dot{\gamma}(t^-)$  è diverso da  $-\dot{\gamma}(t^+)$  per ogni  $t$ . In altri termini, il bordo di  $A$  non deve contenere "spine" del tipo di quella disegnata qui sotto.



In effetti in dimensione 2 una intersezione finita di semispazi i cui bordi passano per un punto  $p$  non è altro che una regione delimitata da due semirette uscenti da  $p$  e formanti tra loro un angolo di non più di  $\pi$ , mentre una unione finita di regioni di questo tipo la cui parte interna sia connessa non è altro che una regione delimitata da due semirette uscenti da  $p$  o l'intero piano.

Se  $A$  ha bordo liscio a tratti l'insieme dei punti di  $\partial A$  nell'intorno dei quali  $\bar{A}$  appare, in coordinate opportune, come un semispazio, è una sottovarietà differenziabile di  $M$  di dimensione  $n-1$ , che chiameremo la *parte liscia* di  $\partial A$ . Quando  $M$  è orientata, orienteremo la parte liscia del bordo di  $A$  in base alla seguente convenzione. Se  $p$  è un punto della parte liscia di  $\partial A$  una base  $v_1, \dots, v_{n-1}$  di  $T_p(\partial A)$  sarà positivamente orientata se è positivamente orientata, come base di  $T_p M$ , la  $n$ -upla di vettori  $N, v_1, \dots, v_{n-1}$ , dove  $N$  è un vettore normale a  $\partial A$  che punta verso l'esterno di  $A$ . Se  $M$  è orientata e  $\varphi$  è una forma differenziale di grado  $n-1$  su  $M$  l'integrale di  $\varphi$  su  $\partial A$  è definito come l'integrale di  $\varphi$  sulla parte liscia di  $\partial A$ . Possiamo ora enunciare la formula di Stokes sotto una nuova forma.

**TEOREMA (11.19) (FORMULA DI STOKES; SECONDA VERSIONE).** *Sia  $M$  una varietà differenziabile orientata di dimensione  $n$ , e sia  $\varphi$  una  $(n-1)$ -forma liscia a supporto compatto su  $M$ . Sia  $A$  un aperto di  $M$  con bordo liscio a tratti. Allora*

$$\int_A d\varphi = \int_{\partial A} \varphi.$$

In pratica si userà quasi sempre la seguente conseguenza di (11.19).

**COROLLARIO (11.20).** *Sia  $M$  una varietà differenziabile orientata di dimensione  $n$ , e sia  $\varphi$  una  $(n-1)$ -forma liscia su  $M$ . Sia  $A$  un aperto di  $M$ , relativamente compatto e con bordo liscio a tratti. Allora*

$$\int_A d\varphi = \int_{\partial A} \varphi.$$

Per dedurre il corollario dal teorema si sceglie una funzione  $\eta$  liscia a supporto compatto che valga 1 su un intorno di  $\bar{A}$ , e si applica (11.19) a  $\eta\varphi$  ottenendo

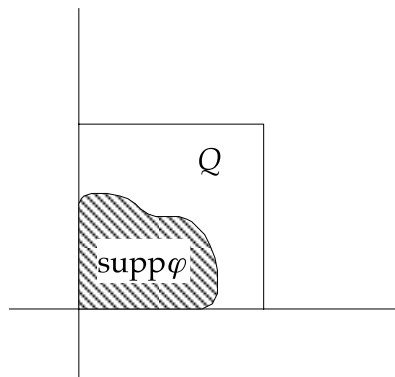
$$\int_A d\varphi = \int_A d(\eta\varphi) = \int_{\partial A} \eta\varphi = \int_{\partial A} \varphi.$$

Veniamo ora alla dimostrazione di (11.19). Il primo passo consiste nel ridursi ad un enunciato di natura locale. Possiamo trovare un numero finito di carte locali  $(U_i, \Phi_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , tali che  $\text{supp } \varphi \cap \bar{A}$  sia ricoperto dagli  $U_i$ . Possiamo inoltre supporre che per ognuna di queste carte o  $U_i$  sia interamente contenuto in  $A$  oppure  $U_i \cap A$  sia connesso e  $\Phi_i(U_i \cap \bar{A})$  sia l'intersezione di  $\Phi_i(U_i)$  con una unione finita di intersezioni

finite di semispazi chiusi i cui bordi contengono uno stesso punto, che si può supporre essere l'origine in  $\mathbb{R}^n$ . Scegliamo poi una partizione dell'unità  $\chi_1, \dots, \chi_k, \chi$  subordinata al ricoprimento di  $M$  dato da  $U_1, \dots, U_k, U$ , dove si è posto  $U = M \setminus (\text{supp } \varphi \cap \bar{A})$ . Dato che

$$\varphi|_{\bar{A}} = \sum_{i=1}^k (\chi_i \varphi)|_{\bar{A}},$$

basterà dimostrare (11.19) sotto l'ipotesi aggiuntiva che  $\text{supp } \varphi$  sia contenuto in uno degli  $U_i$ , cioè, in definitiva, sotto l'ipotesi che  $M = \mathbb{R}^n$ , che  $A$  sia connesso e che  $\bar{A}$  sia una unione finita di intersezioni finite di semispazi chiusi i cui bordi contengono l'origine. La situazione è particolarmente semplice per  $n = 2$ ; inizieremo dunque col discutere questo caso. Per quanto si è osservato,  $A$  è tutto  $\mathbb{R}^2$  oppure è una regione limitata da due semirette uscenti dall'origine; in questo secondo caso, con un cambiamento lineare orientato di coordinate possiamo supporre che  $A$  sia l'interno del primo quadrante, l'interno dell'unione del primo e secondo quadrante, oppure l'interno dell'unione dei primi tre quadranti. Indichiamo le parti interne dei quattro quadranti con  $A_1, \dots, A_4$ . Valutiamo l'integrale di  $d\varphi$  su  $A_1$ . Dato che  $\varphi$  ha supporto compatto si può trovare un quadrato  $Q$  con due lati sul bordo di  $A_1$  e tale che  $\text{supp } \varphi \cap A_1$  sia contenuto nella parte interna di  $Q$ .



Si può applicare a  $Q$  e  $\varphi$  la formula di Stokes nella sua prima versione ottenendo

$$\int_{A_1} d\varphi = \int_Q d\varphi = \int_{\partial Q} \varphi = \int_{\partial A_1} \varphi,$$

dove  $\partial Q$  e  $\partial A_1$  sono orientati in modo che “percorrendoli nel verso positivo ci si trovi a sinistra” l'interno di  $Q$  o di  $A_1$ . Se  $A = A_1$  questo conclude la dimostrazione. Se invece, ad esempio,  $\bar{A} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2$ , allora

$$\int_A d\varphi = \int_{A_1} d\varphi + \int_{A_2} d\varphi = \int_{\partial A_1} \varphi + \int_{\partial A_2} \varphi = \int_{\partial A} \varphi,$$

dato che la semiretta che separa primo e secondo quadrante va orientata in versi opposti a seconda che la si consideri come parte del bordo di  $A_1$  o di  $A_2$ , e quindi i suoi contributi agli integrali di  $\varphi$  su  $\partial A_1$  e su  $\partial A_2$  si elidono. Allo stesso modo si trattano i casi in cui  $\bar{A}$  sia l'unione dei primi tre quadranti o tutto  $\mathbb{R}^2$ . La dimostrazione della formula di Stokes, nella sua seconda versione, è dunque completa per  $n = 2$ .

## Esercizi

- 11.1) Sia  $x$  un punto su una varietà differenziabile  $M$  di dimensione  $n$ . Siano  $f_1, \dots, f_n$  funzioni differenziabili su un intorno di  $x$ . Mostrare che queste funzioni sono un sistema di coordinate locali su un intorno opportuno di  $x$  se e solo se  $df_1 \wedge \dots \wedge df_n \neq 0$  in  $x$ .
- 11.2) Mostrare che il fibrato tangente di una varietà differenziabile è sempre orientabile.
- 11.3) Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $n$ , e sia  $f$  una funzione  $\mathbf{C}^\infty$  su  $M$ . Poniamo  $N = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$ , e supponiamo che  $df$  non si annulli mai lungo  $N$ , cosicché  $N$  è una sottovarietà di  $M$  di dimensione  $n - 1$ . Consideriamo lo spazio vettoriale  $A$  delle  $n$ -forme su  $M - N$  della forma  $(1/f)\varphi$ , dove  $\varphi$  è una forma  $\mathbf{C}^\infty$  su tutto  $M$ , e indichiamo con  $B$  lo spazio vettoriale delle  $n - 1$ -forme su  $N$ .
- Mostrare che, lungo  $N$ , ogni elemento di  $A$  si scrive localmente sotto la forma  $(df/f) \wedge \alpha$ , dove  $\alpha$  è una  $n - 1$ -forma  $\mathbf{C}^\infty$ .
  - Mostrare che

$$(df/f) \wedge \alpha \rightarrow \alpha|_N$$

definisce una applicazione lineare

$$res : A \rightarrow B.$$

- Mostrare che  $A$  e  $res$  non dipendono dalla scelta di  $f$  ma solo da  $N$ .
- Mostrare che  $res$  è  $\mathbf{C}^\infty$ -lineare, nel senso che, se  $g$  è una funzione  $\mathbf{C}^\infty$  su  $M$ , allora  $res(g\varphi) = g|_N res(\varphi)$ .

## 12. I teoremi di Gauss-Bonnet e dell'indice

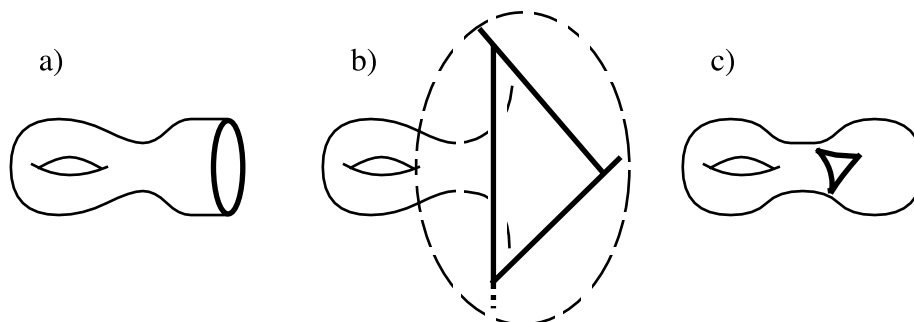
### Esercizi

- 12.1) Sia  $M$  una superficie compatta, connessa e orientabile in  $\mathbb{R}^3$ . Si mostri che, se  $M$  non è omeomorfa a  $S^2$ , allora vi è almeno un punto in cui la curvatura Gaussiana di  $M$  è negativa.
- 12.2) Calcolare direttamente (cioè senza usare il teorema di Gauss-Bonnet) la curvatura totale di un toro di rotazione in  $\mathbb{R}^3$ .
- 12.3) Sia  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ , e sia  $B$  un sottinsieme compatto di  $D$  il cui bordo è costituito da tre archi di cerchio  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$  con centro sulla retta  $y = 0$ . Mostrare che

$$\int_B \frac{dx \wedge dy}{y^2} = \pi - \alpha - \beta - \gamma,$$

dove  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  sono gli angoli interni del triangolo  $ABC$ .

- 12.4) Calcolare la curvatura totale delle regioni di superficie disegnate qui sotto (il bordo delle regioni è indicato con un tratto più pesante):



Nella figura a) il bordo è una geodetica, in b) il triangolo giace in un aperto della superficie che è contenuto in un piano, in c) il bordo è un triangolo geodetico con angoli esterni  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$ .

- 12.5) Sia  $M$  una superficie compatta e connessa in  $\mathbb{R}^3$ . Supponiamo che la curvatura Gaussiana di  $M$  sia ovunque strettamente positiva. Si mostri che  $M$  è omeomorfa a  $S^2$ .
- 12.6) Sia  $D$  il disco di Poincaré, cioè il disco unitario in  $\mathbb{R}^2$  centrato nell'origine e dotato della metrica

$$g_{ij} = \frac{4\delta_{ij}}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^2}.$$

Sia  $C$  un cerchio di raggio  $r < 1$  centrato nell'origine. Si calcoli la curvatura geodetica di  $C$  rispetto alla metrica di Poincaré.

12.7) Calcolare la curvatura totale della superficie in  $\mathbb{R}^3$ :

$$\varphi(u, \theta) = \left( au \cos \theta, bu \sin \theta, \frac{1}{1+u^2} \right),$$

dove  $a$  e  $b$  sono costanti positive.

12.8) Sia  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^{10} + z^6 = 1\}$ . Si calcolino

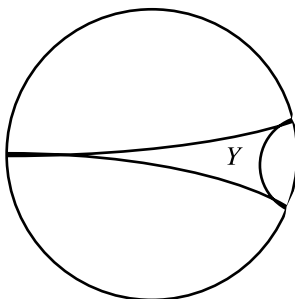
$$\int_S K dV, \quad K(p),$$

dove  $K$  è la curvatura Gaussiana di  $S$  e  $p = (0, 0, 1)$ .

12.9) Sia  $X$  il disco unitario di centro l'origine in  $\mathbb{R}^2$ , dotato della metrica di Poincaré

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{(1-x^2-y^2)^2}.$$

Siano  $A$ ,  $B$  e  $C$  tre punti distinti sul bordo di  $X$ , e si indichi con  $Y$  la regione delimitata dai tre archi di cerchio in  $X$  che congiungono  $A$  con  $B$ ,  $B$  con  $C$  e  $C$  con  $A$  e sono ortogonali al bordo di  $X$  (vedi figura qui sotto). Si trovi l'area di  $Y$ , calcolata rispetto alla metrica di Poincaré.



12.10) Siano  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  geodetiche su una superficie di curvatura negativa. Vero o falso:  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  non possono incontrarsi in più di un punto.

12.11) Si consideri il semipiano di Poincaré

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}, \quad ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$$

Si mostri che:

- le geodetiche in  $H$  hanno lunghezza infinita;
- l'area di  $H$  è infinita;
- i triangoli geodetici in  $H$  hanno area finita e limitata (uniformemente).

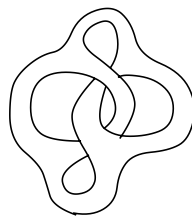
Se  $T$  è un triangolo rettangolo geodetico, è vero che l'area di  $T$  è data dalla formula  $1/2(\text{cateto} \times \text{cateto})$  ?

- 12.12) Si dimostri che per una superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  orientata, compatta, connessa e semplicemente connessa, con curvatura media  $H$ , si ha

$$\int H^2 dA \geq 16\pi$$

( $dA$  è l'elemento di volume su  $S$ ) e l'uguaglianza vale se e solo se  $S$  è una sfera (suggerimento: si consideri l'equazione caratteristica delle curvature principali).

- 12.13) Sia  $U$  un aperto omeomorfo a un disco su una superficie di curvatura negativa. Mostrare che  $U$  non può contenere geodetiche  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  tali che  $\gamma(0) = \gamma(1)$ . Mostrare che la conclusione è falsa se non si richiede che  $U$  sia omeomorfo a un disco.
- 12.14) Sia  $X$  una superficie compatta connessa orientabile in  $\mathbb{R}^3$  di curvatura ovunque positiva. Una geodetica chiusa su  $X$  è un arco di geodetica  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  tale che  $\gamma(a) = \gamma(b)$ ,  $\gamma'(a) = \gamma'(b)$  e inoltre, se  $t \leq t'$ ,  $\gamma(t) = \gamma(t')$  se e solo se  $t = t'$  oppure  $t = a$ ,  $t' = b$ . Si mostri che due geodetiche chiuse su  $X$  devono necessariamente incontrarsi.
- 12.15) Sia  $S$  una superficie in  $\mathbb{R}^3$ . Sia  $p$  un punto di  $S$ . Si mostri che, se  $U$  è un intorno sufficientemente piccolo di  $p$ , allora  $U$  non contiene geodetiche chiuse (ricordiamo che una geodetica chiusa è una geodetica  $\gamma : [a, b] \rightarrow S$  tale che  $\gamma(a) = \gamma(b)$ ,  $\gamma'(a) = \gamma'(b)$ ).
- 12.16) Sia  $U$  una regione semplicemente connessa in una superficie. Si supponga che il bordo di  $U$  sia costituito da due archi di geodetica toccantisi negli estremi. Si mostri che vi deve essere un punto interno a  $U$  in cui la curvatura Gaussiana della superficie è strettamente positiva.
- 12.17) Calcolare la curvatura totale della superficie:



- 12.18) Usare il teorema di Gauss-Bonnet per mostrare che, per un poliedro convesso, vale la relazione  $V - L + F = 2$ , dove  $V$  indica il numero dei vertici,  $L$  quello dei lati,  $F$  quello delle facce (teorema di Eulero).
- 12.19) Si mostri che sull'iperboloide in  $\mathbb{R}^3$  di equazione  $x^2 + y^2 = z^2 + 1$  vi è una e una sola geodetica chiusa (cioè una geodetica  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  tale che  $\gamma(0) = \gamma(1)$  e  $\gamma'(0) = \gamma'(1)$ ).
- 12.20) Calcolare la curvatura totale di un semicono circolare retto il cui vertice sia stato "smussato" (cioè rimpiazzato con un pezzo di superficie liscia omeomorfo a un disco).
- 12.21) Calcolare la curvatura totale di un paraboloido di rotazione.

12.22) Calcolare la curvatura totale di una falda di un iperboloide di rotazione a due falde.

12.23) Si calcoli la curvatura totale della superficie in  $\mathbb{R}^3$  di equazione

$$2x^2 + y^6 + z^2 + 2xz = 1$$

12.24) Si calcoli la curvatura totale della superficie in  $\mathbb{R}^3$  di equazione

$$x^2 + y^2 = 1 + z^2.$$

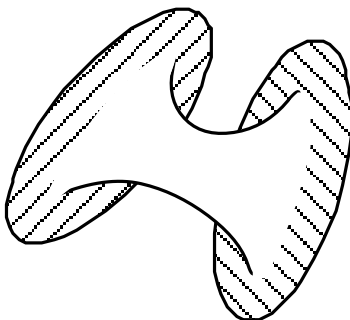
12.25) Sia  $S \subset \mathbb{R}^3$  la superficie di rotazione ottenuta facendo ruotare intorno all'asse  $z$  la curva

$$\gamma(t) = \left( 0, t, \frac{t^2 - 3}{\sqrt{3}(t + 1)} \right), \quad t > 0.$$

Si calcoli la curvatura totale di  $S$ .

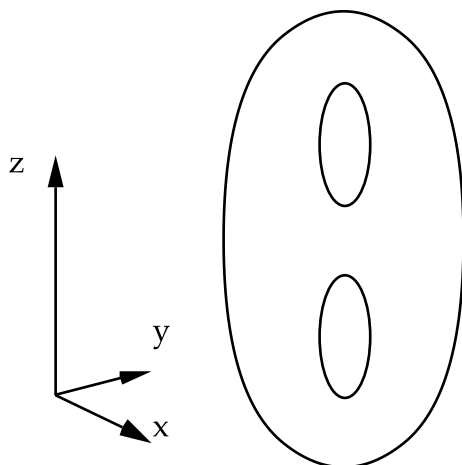
12.26) Mostrare che, se su una superficie  $S$  vi sono due famiglie di geodetiche che formano tra loro un angolo costante, allora  $S$  ha curvatura nulla.

12.27) Si calcoli la curvatura totale ( $= \int_S K dv$ ) della superficie  $S$  in  $\mathbb{R}^3$  disegnata qui sotto.



(ognuna delle due regioni tratteggiate giace su un piano).

12.28) Sia  $S$  una superficie, e sia  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $C^\infty$ . Mostrare che esiste un unico campo  $C^\infty$  di vettori  $\text{grad}(f)$  su  $S$  tale che per ogni vettore  $X$  tangente a  $S$  si abbia  $\langle \text{grad}(f), X \rangle = X(f)$ . Si consideri ora la superficie  $S$ :





in  $\mathbb{R}^3$ , e sia  $f$  la restrizione della coordinata  $z$  a  $S$ . Verificare il teorema dell'indice per il campo di vettori  $\text{grad}(f)$ .

- 12.29) Sia  $M$  una superficie compatta e connessa in  $\mathbb{R}^3$ .
- Supponiamo che  $M$  sia omeomorfa a  $S^2$ . Si mostri che su  $M$  vi è almeno un punto ombelicale (suggerimento: se non vi sono punti ombelicali, si costruisca su  $M$  un campo di vettori mai nullo).
  - Si mostri invece che, se  $M$  è omeomorfa a un toro, su  $M$  possono non esistere punti ombelicali.
- 12.30) Sia  $M$  una superficie compatta connessa in  $\mathbb{R}^3$ , e sia  $X$  un campo di vettori tangenti a  $M$  con punti singolari isolati  $p_1, \dots, p_h$  di indici  $I_1, \dots, I_h$ . Si mostri che vi è su  $M$  un campo di vettori tangenti  $Y$  con punti singolari isolati  $p, p_3, \dots, p_h$  di indici  $I, I_3, \dots, I_h$ , dove  $I = I_1 + I_2$ .
- 12.31) Costruire un campo di vettori  $C^\infty$  su  $S^2$  con una sola singolarità. Verificare esplicitamente il teorema dell'indice di Hopf per questo campo.
- 12.32) Sia  $S$  il piano proiettivo reale.
- Trovare un campo di vettori su  $S$  con un solo zero, di indice 1.
  - Verificare il teorema dell'indice per  $S$ .
- 12.33) Sia  $TS^2$  il fibrato tangente di  $S^2$ , e sia  $\eta : TS^2 \rightarrow S^2$  la proiezione naturale. Si mostri che non esistono diffeomorfismi  $\beta : S^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow TS^2$  tali che  $\eta\beta$  sia la proiezione di  $S^2 \times \mathbb{R}^2$  su  $S^2$ .

## Esercizi di riepilogo

- 1) a) Sia  $\gamma$  una curva  $\mathbf{C}^\infty$  chiusa regolare in  $\mathbb{R}^3$ , cioè una applicazione  $\mathbf{C}^\infty \gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con differenziale ovunque non nullo. Si supponga che l'immagine di  $\gamma$  sia contenuta nella palla di centro l'origine e raggio  $r$ . Si mostri che esiste almeno in punto in cui  $\gamma$  ha curvatura almeno  $1/r$ .
- b) Sia  $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva  $\mathbf{C}^\infty$ . Si supponga che la curvatura di  $\eta$  sia ovunque almeno  $1/r$ . È vero o falso che l'immagine di  $\eta$  è contenuta in una palla di raggio  $r$ ?
- 2) Sia  $\gamma$  una curva differenziabile piana chiusa che sia bordo di un aperto  $U \subset \mathbb{R}^2$  connesso e convesso. Sia  $s$  un parametro naturale su  $\gamma$ , e sia  $\kappa(s)$  la funzione curvatura di  $\gamma$ . Mostrare che

$$\int_{\gamma} \kappa(s) ds = 2\pi .$$

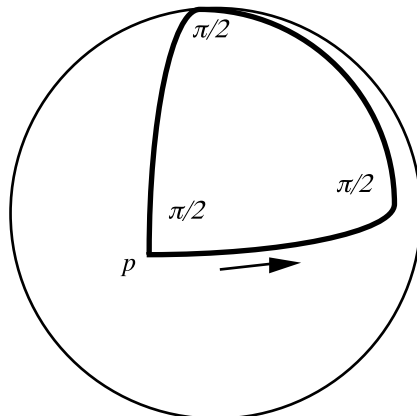
- 3) Si calcolino la curvatura Gaussiana e la curvatura totale della superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  di equazione

$$x^2 + y^2 = (\cosh z)^2 .$$

- 4) Sia  $S$  una superficie orientabile in  $\mathbb{R}^3$  e sia  $N$  un campo di vettori normali unitario lungo  $S$ . Si consideri l'applicazione  $F : S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da

$$F(x, t) = x + tN_x .$$

- a) Si mostri che  $F$  è differenziabile.
- b) Si mostri che il differenziale  $dF$  è singolare precisamente in quei punti  $(x, t)$  tali che  $-1/t$  è una delle curvatures principali di  $S$  in  $x$ .
- 5) Si consideri, sulla sfera  $S^2$ , un triangolo geodetico delimitato da tre quarti di cerchio massimo (vedi disegno qui sotto).



Qual'è l'applicazione lineare  $T_p S^2 \rightarrow T_p S^2$  determinata dal trasporto parallelo lungo il bordo del triangolo nel verso indicato dalla freccia ?

- 6) Sia  $\mathbf{y}(s)$  una curva piana, dove  $s$  è il parametro naturale, sia  $\mathbf{n}(s)$  il vettore unitario normale di  $\mathbf{y}$ , e sia  $\mathbf{e}$  il vettore normale al piano su cui giace  $\mathbf{y}$ . Si determinino prima e seconda forma fondamentale, linee di curvatura, curvatura Gaussiana della superficie  $S$  di equazione parametrica

$$\mathbf{x}(s, \varphi) = \mathbf{y}(s) + a \cos(\varphi)\mathbf{n}(s) + a \sin(\varphi)\mathbf{e} ,$$

dove  $a$  è una costante positiva sufficientemente piccola. Se  $\mathbf{y}$  è chiusa si determini la curvatura totale di  $S$ .

- 7) Sia  $M$  una superficie orientabile compatta connessa in  $\mathbb{R}^3$ , e sia  $F : M \rightarrow S^2$  l'applicazione 'normale' che associa a ogni  $p \in M$  la normale unitaria a  $M$  in  $p$ . Indicate con  $\omega$ ,  $\tilde{\omega}$  e  $K$  la forma di volume su  $M$ , la forma di volume su  $S^2$  e la curvatura Gaussiana di  $M$  rispettivamente, mostrare che:
- $F^*(\tilde{\omega}) = K\omega$ .
  - $2 \deg(F) = \chi(M)$  se  $F$  è suriettiva.
- 8) Sia  $X$  lo spazio proiettivo reale tridimensionale, cioè il quoziente di  $S^3$  per l'azione del gruppo  $\{\pm 1\}$ . Si calcolino i gruppi di omologia (coefficienti reali o interi, a scelta) di  $X$ . (Suggerimento: se si scelgono coefficienti reali, si possono paragonare i gruppi di (co)omologia di  $X$  e di  $S^3$  e usare il teorema di deRham).
- 9) Sia  $E^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ . Dimostrare il seguente teorema di punto fisso (Brouwer): ogni applicazione differenziabile  $f : E^n \rightarrow E^n$  ha almeno un punto fisso (Suggerimento: si ragioni per assurdo, usando i gruppi di coomologia di deRham).
- 10) Si consideri  $\mathbb{R}^2$  con coordinate cartesiane ortogonali  $x$  e  $y$ , e sia  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la funzione definita da  $F(x, y) = (-x, -y)$ . Si ponga  $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ .
- Si mostri che  $F$  induce una applicazione  $\mathbf{C}^\infty \tilde{F} : T \rightarrow T$ .
  - Si calcoli il numero di Lefschetz di  $\tilde{F}$ .
  - Si calcoli il numero di punti fissi di  $\tilde{F}$ .
- 11) Sia  $P(x)$  un polinomio a coefficienti complessi di grado  $2k+1$  e con radici semplici. Sia

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = P(x)\}$$

e sia  $\overline{X}$  una superficie differenziabile compatta tale che  $\overline{X} \setminus p$  sia diffeomorfa ad  $X$  per un certo punto  $p \in \overline{X}$  ( $\overline{X}$  è la compattificazione di Alexandroff di  $X$ ). Mostrare che

- $\overline{X}$  è connessa e orientabile;
  - l'applicazione  $\sigma : X \rightarrow X$  definita da  $\sigma(x, y) = (x, -y)$  induce una mappa differenziabile  $\bar{\sigma} : \overline{X} \rightarrow \overline{X}$  con  $\bar{\sigma}^2$  uguale all'identità; inoltre  $\sigma$  ha  $2k+2$  punti fissi ciascuno di indice 1;
  - il genere di  $\overline{X}$  è  $k$  (si applichi il teorema del punto fisso di Lefschetz).
- 12) Sia  $X$  il luogo in  $\mathbb{R}^3$  di equazione  $4(x^2 + y^2) + z^2 = 4$ .
- Si mostri che  $X$  è una superficie connessa e compatta, e se ne calcoli la curvatura gaussiana.

- b) Se  $S$  è una superficie in  $\mathbb{R}^3$ , una isometria di  $S$  è un diffeomorfismo  $f$  di  $S$  in sè tale che, per ogni  $p$  in  $S$ , il differenziale  $df_p : T_p(S) \rightarrow T_{f(p)}(S)$  sia una isometria di spazi vettoriali. Si mostri che ciò equivale a dire che  $f$  è una isometria di spazi metrici nel senso usuale del termine, se si prende come distanza su  $S$  la funzione:  $d(p, q) =$  estremo inferiore delle lunghezze di tutti i cammini da  $p$  a  $q$ .
- c) Si determinino tutte le isometrie di  $X$ .
- 13) Sia  $S$  una superficie differenziabile connessa compatta e orientabile in  $\mathbb{R}^3$ .  $\mathbb{R}^3 \setminus S$  è l'unione di due componenti connesse, di cui una  $U$  limitata (interna a  $S$ ) e una illimitata. Si consideri l'applicazione  $F : S \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da:

$$F(p, t) = p + tN_p,$$

dove  $N_p$  è il vettore normale unitario interno a  $S$  in  $p$ .

- a) Si mostri che, se  $\varepsilon$  è sufficientemente piccolo,  $dF$  è ovunque non singolare.
- b) Si mostri che, se  $\varepsilon$  è sufficientemente piccolo,  $F$  è un diffeomorfismo da  $S \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  a  $F(S \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ .
- c) Si mostri che  $U$  e  $U \cup S$  hanno lo stesso tipo di omotopia.