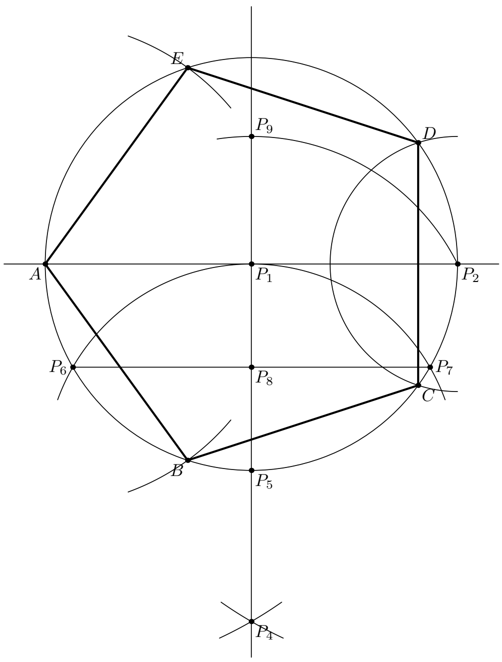
Costruzione di poligoni regolari

Ricordiamo l'usuale costruzione con riga e compasso del pentagono regolare, quale viene usualmente insegnata nelle scuole medie.



Facendo riferimento al disegno qui a fianco, partiamo dal segmento P_1P_2 che diventa il raggio del cerchio di centro P_1 e determina così il punto $P_3 = A$, che sarà uno dei vertici del pentagono. Puntando il compasso ai due estremi del diametro P_2A, con apertura uguale al diametro stesso, si trova il punto P_4 e quindi il punto P_5, di intersezione tra la circonferenza ed il segmento P_1P_4.

Puntando il compasso in P_5 con ampiezza uguale al raggio del cerchio, si determinano i punti P_6 e P_7 e quindi il punto P_8, ovvero il punto medio del segmento P_1P_5.

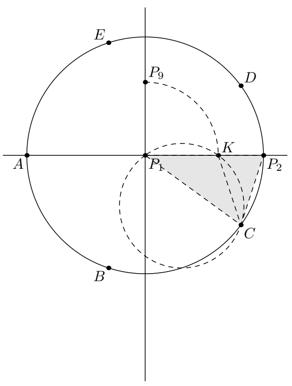
Considerando l'arco di circonferenza con centro in P_8 e passante per P_2, si determina il punto P_9 e puntando il compasso in P_2, con apertura uguale a P_1P_9, si determinano i punti C e D e quindi un lato del pentagono. La figura è completa puntando in A il compasso, con apertura CD e determinando i punti B ed E.

Come si vede, i vari passaggi sono elementari e l'unico punto importante della costruzione è la determinazione del punto P_9 o, meglio, del segmento P_1P_9. Questo segmento ha la stessa lunghezza dei segmenti P_2C e P_2D, e quindi, abbiamo veramente disegnato un pentagono regolare se, e solo se, la lunghezza di P_1P_9 è uguale alla lunghezza del lato del decagono regolare. Vediamo quindi di determinare la lunghezza y del segmento P_1P_9 in funzione della lunghezza x del raggio P_1P_2.

Ricordando che la lunghezza del segmento P_8P_9 è $\frac{x}{2} + y$ ed è uguale, per costruzione, alla lunghezza dell'ipotenusa del triangolo $P_1P_2P_8$, si trova la relazione

$$x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{2} + y\right)^2, \qquad \text{ovvero} \qquad y^2 + xy - x^2 = 0,$$

da cui si deduce che $y^2 = x(x - y)$ e quindi che y è uguale alla *sezione aurea* del raggio della circonferenza, ovvero che $\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.



Per concludere la dimostrazione, è sufficiente mostrare che *il triangolo isoscele P_1P_2C ha gli angoli alla base uguali al doppio dell'angolo al vertice*, ovvero che l'angolo al vertice è uguale a $\frac{\pi}{5}$ e quindi che P_2C è proprio il lato del decagono regolare.

Facciamo riferimento al disegno qui a fianco, che riporta tutti i punti costruiti in precedenza e, inoltre, riporta la lunghezza del segmento P_1P_9 sul raggio P_1P_2, determinando così il punto K.

Osserviamo ora che i due triangoli P_1P_2C e CKP_2 sono simili, perchè, per costruzione, i lati P_1P_2 e P_2C del primo triangolo sono proporzionali ai lati P_2C e KP_2 del secondo e l'angolo compreso tra i due è lo stesso. Dunque il triangolo CKP_2 è isoscele e quindi, per costruzione lo è anche il triangolo P_1KC. Si conclude che l'angolo esterno $C\hat{K}P_2$ è il doppio dell'angolo $C\hat{P}_1K$, che è quanto volevamo verificare.

Osservazioni Possiamo raccogliere qualche sottoprodotto di questa dimostrazione. Per prima cosa possiamo osservare che il prodotto $x \cos \frac{\pi}{5}$ coincide con la differenza tra la misura del raggio P_1P_2 e la misura della metà del lato P_2K, perchè in un triangolo isoscele l'altezza è anche mediana. Quindi

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{x}{x} - \frac{x-y}{2x} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \qquad \text{e} \qquad \sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$

Con facili calcoli sugli angoli, si vede che anche il triangolo isoscele ACD ha l'angolo al vertice uguale a $\frac{\pi}{5}$, e quindi è simile al triangolo P_1P_2C. Dunque il rapporto tra il lato del pentagono regolare, CD, e la diagonale, AD, è uguale al rapporto tra il lato P_2C ed il raggio P_1P_2 ovvero alla *sezione aurea* $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

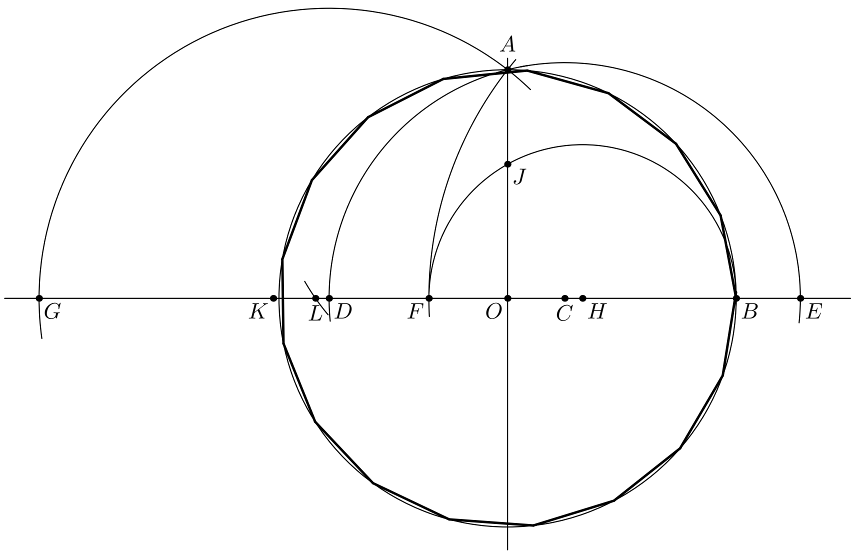
La dimostrazione originale di Euclide fa discendere il fatto che il triangolo isoscele P_1P_2C in figura ha l'angolo al vertice uguale alla metà dell'angolo alla base da considerazioni sugli angoli. Essendo P_2C medio proporzionale tra P_2K e P_1P_2, deduce che il lato P_2C è tangente alla circonferenza tratteggiata in figura [Euclide III 36-37]. Quindi $K\hat{C}P_2 = K\hat{P}_1C$ perché sono due angoli alla circonferenza che insistono sul medesimo arco; perciò l'angolo esterno $P_2\hat{K}C$ è uguale a $K\hat{P}_1C + P_1\hat{C}K = K\hat{C}P_2 + P_1\hat{C}K = C\hat{P}_2K$ e quindi il triangolo CP_2K è isoscele, che è quanto serve per concludere.

Abbiamo quindi visto che la costruzione del pentagono regolare è stata ottenuta come conseguenza della costruzione con riga e compasso del numero complesso $\xi = \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$, ovvero del punto D nella figura iniziale. Questo numero complesso, essendo il vertice del poligono regolare con 10 lati inscritto nella circonferenza unitaria soddisfa all'equazione $z^{10} - 1 = 0$ inoltre, essendo un generatore del gruppo delle radici 10-me dell'unità, è una radice del polinomio ciclotomico di ordine 10, $\Phi_{10}(z) = z^4 - z^3 + z^2 - z + 1$.

In generale, la costruibilità con riga e compasso di un poligono regolare, si riduce alla costruibilità di radici dell'unità nel corpo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi.

Le classiche costruzioni di Euclide indicano come costruire poligoni regolari con 3, 4, 5, 6 e 15 lati. Se si è in grado di costruire un poligono regolare con n lati, bisecando gli angoli al centro, se ne ottiene uno con il doppio dei lati e quindi con le costruzioni di Euclide si possono ottenere poligoni regolari con $2^k n$ lati, ove $n = 3, 4, 5, 6, 15$. Per circa 2000 anni queste sono state le sole costruzioni note di poligoni regolari. Nel 1796, a 19 anni, Carl Friedrich Gauß mostrò che il poligono regolare con 17 lati è costruibile con riga e compasso.

Illustriamo dapprima una costruzione grafica e poi proviamo a spiegare quale fu l'idea di Gauss e perchè la costruzione proposta è corretta.



Costruzione Si parte dal cerchio di centro O, che taglia i punti A e B su due diametri ortogonali. Si prende $OC = \frac{1}{4}OB$ e la circonferenza di centro C e raggio CA taglia i punti D ed E sul diametro OB. Un arco di circonferenza di centro E, e raggio EA, taglia il punto F sul diametro OB ed un arco di centro D e raggio DA taglia il punto G sullo stesso diametro. Sia H il punto medio tra B ed F e la semicirconferenza di centro H e raggio HB taglia il punto J sul diametro OA. Detto K il punto medio tra O e G, si considera un arco di cerchio di centro J e raggio OK che taglia il punto L sul diametro OB. Il segmento KL ha la lunghezza del lato di un poligono di 34 lati e si tratta quindi di riportare il doppio di questa lunghezza sulla circonferenza, a partire dal punto B.

I vertici del poligono regolare con 17 lati, inscritto nella circonferenza unitaria del piano di Gauss sono le radici 17^{me} dell'unità. Quindi si tratta delle potenze del numero complesso $\zeta = \cos\frac{2\pi}{17} + i\sin\frac{2\pi}{17}$ ed è sufficiente mostrare che si può costruire con riga e compasso il numero $\zeta + \zeta^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{17}$. Poniamo

$$\begin{aligned}
&\alpha = \zeta + \zeta^{-1}, && & &\alpha' = \zeta^4 + \zeta^{-4},\\
&\beta = \zeta + \zeta^4 + \zeta^{-1} + \zeta^{-4}, && \text{e} & &\beta' = \zeta^2 + \zeta^8 + \zeta^{-2} + \zeta^{-8},\\
&\gamma = \zeta + \zeta^2 + \zeta^4 + \zeta^8 + \zeta^{-1} + \zeta^{-2} + \zeta^{-4} + \zeta^{-8}; && & &\gamma' = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^6 + \zeta^7 + \zeta^{-3} + \zeta^{-5} + \zeta^{-6} + \zeta^{-7}.
\end{aligned}$$

Mostriamo che

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\gamma) \subset \mathbb{Q}(\beta) \subset \mathbb{Q}(\alpha)$$

è una sequenza di estensioni, ciascuna di grado 2 sulla precedente, e ciò significa esattamente che α è costruibile con riga e compasso e quindi che lo è il poligono regolare con 17 lati.

Osserviamo che $\gamma + \gamma' + 1 = \sum_{j=0}^{16} \zeta^j = 0$ e quindi $\gamma + \gamma' = -1$. Inoltre, con un calcolo diretto, si vede che $\gamma\gamma' = 4\sum_{j=1}^{16} \zeta^j = -4$. Dunque γ e γ' sono le radici del polinomio $x^2 - (\gamma + \gamma')x + \gamma\gamma' = x^2 + x - 4$ e si conclude che $\mathbb{Q}(\gamma)$ è un'estensione quadratica di $\mathbb{Q}$. In particolare, si ha

$$\gamma = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2},$$

perché γ è la radice positiva dell'equazione e $\mathbb{Q}(\gamma) = \mathbb{Q}(\sqrt{17})$.

Osserviamo, sempre con una verifica diretta, che $\beta + \beta' = \gamma$ e $\beta\beta' = -1$; quindi β è una radice del polinomio di secondo grado (a coefficienti in $\mathbb{Q}(\gamma)$) $x^2 - \gamma x - 1$. Come nel caso precedente, β è la radice positiva del polinomio e si ha

$$\beta = \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}.$$

Vogliamo mostrare che $\mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}(\sqrt{34 - 2\sqrt{17}})$. Per prima cosa osserviamo che $\mathbb{Q}(\beta) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{34 - 2\sqrt{17}})$, e $\mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}(u)$, ove $u = \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$. Si ha $u^2 - 51 = 2\sqrt{17}(\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 1)$ ed elevando al quadrato i due membri, si ottiene $u^4 - 6 \cdot 17u^2 + 8 \cdot 17u + 17 \cdot 13 = 0$, che è un polinomio irriducibile (Criterio di Eisenstein); quindi $\mathbb{Q}(u)$ ha grado 4 ed è perciò uguale a $\mathbb{Q}(\sqrt{34 - 2\sqrt{17}})$, che ha grado al più 4 su $\mathbb{Q}$.

Osserviamo infine che $\alpha + \alpha' = \beta$ e che $\alpha\alpha' = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^{-3} + \zeta^{-5}$. Ora $\alpha\alpha' + (\zeta^6 + \zeta^7 + \zeta^{-6} + \zeta^{-7}) = \gamma'$ e $\alpha\alpha'(\zeta^6 + \zeta^7 + \zeta^{-6} + \zeta^{-7}) = \sum_{j=1}^{16} \zeta^j = -1$, e quindi $\alpha\alpha'$ è una radice del polinomio $x^2 - \gamma' x - 1$ e si ha

$$\alpha\alpha' = \frac{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4} \in \mathbb{Q}(\beta)$$

per cui α appartiene ad un'estensione quadratica di $\mathbb{Q}(\beta)$. A conclusione della verifica della costruibilità di α, osserviamo che si ha

$$\alpha = 2\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} + \sqrt{170 - 26\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}}{8}.$$

Torniamo alla figura tracciata a pagina 2 e vediamo che relazioni ci sono tra la costruzione ivi descritta e le grandezze incontrate nel corso della dimostrazione. Supponiamo che il cerchio da cui è iniziata la costruzione sia unitario, ovvero che $OB = OA = 1$. Per prima cosa, osserviamo che $OD = CD - OC$ e che $CD = CA = \sqrt{OA^2 + OC^2}$; dunque

$$OD = \sqrt{1 + \frac{1}{16}} - \frac{1}{4} = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} = \frac{\gamma}{2}.$$

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo ODA, si ricava che $DA^2 = OD^2 + OA^2$. Per costruzione $GD = DA$ e quindi

$$OG = OD + DA = \frac{\gamma}{2} + \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}} = \frac{\gamma + \sqrt{4 + \gamma^2}}{2} = \beta.$$

Per costruzione $EF = EA$ ed $OE = DE - OD = 2CA - OD = \frac{\sqrt{17}}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{17}+1}{4}$. Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo OEA, si ricava che $EA^2 = OE^2 + OA^2$ e quindi

$$OF = EA - OE = \sqrt{1 + \frac{18 + 2\sqrt{17}}{16}} - \frac{\sqrt{17} + 1}{4} = \frac{\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} - \sqrt{17} - 1}{4} = \alpha\alpha'.$$

Per costruzione $LJ = OK = \frac{OG}{2} = \frac{\beta}{2}$ e, applicando il Teorema di Pitagora al triangolo OJL, si ricava che $OL^2 = LJ^2 - OJ^2$. Ricordando che l'altezza, OJ, del triangolo rettangolo BJF è medio proporzionale tra le proiezioni dei cateti, si vede che $OJ^2 = OF \cdot OB = \alpha\alpha'$. Quindi

$$OL = \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha\alpha'} \qquad \text{e} \qquad KL = OK - OL = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\alpha'}}{2}$$

e dunque KL è una radice del polinomio $x^2 - \beta x - \alpha\alpha'$ ed è esattamente $KL = \alpha' = \zeta^4 + \zeta^{-4} = 2\cos\frac{8\pi}{17}$. Osserviamo infine che questa è proprio la lunghezza del lato del poligono regolare con 34 lati, che è uguale a

$$\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{17} + \left(1 - \cos\frac{\pi}{17}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{1 - \cos\frac{\pi}{17}}{2}} = 2\sin\frac{\pi}{34} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{34}\right) = 2\cos\frac{8\pi}{17}.$$