UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Fondamenti di Geometria

Cenni Storici

Francesco Bottacin

Anno Accademico 2005–2006

1 Periodo Pre-Euclideo

In origine, la geometria non doveva essere altro che una raccolta di regole per calcolare lunghezze, angoli, aree e volumi. Naturalmente molte di queste regole erano in realtà solo delle rozze approssimazioni, sviluppate per tentativi e correzioni successive. Questa raccolta di conoscenze era stata in larga parte sviluppata dai Sumeri, dai Babilonesi e dagli Egizi (ma conoscenze analoghe si svilupparono in India e in Cina) e usata per problemi pratici, nelle costruzioni, nella navigazione, nell'astronomia. In questa fase iniziale non esisteva ancora l'idea dello studio della geometria fine a sé stessa.

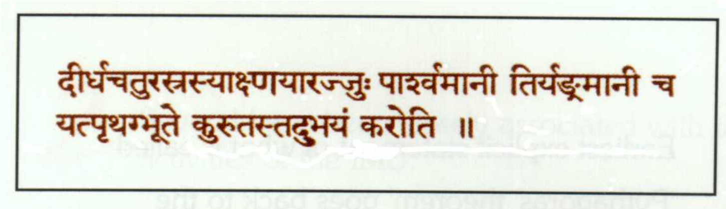
Le testimonianze relative a questo periodo sono piuttosto scarse. Tavolette di creta risalenti alla cultura Sumera ($\sim$ 2100 A.C.) e alla cultura Babilonese ($\sim$1600 A.C.) comprendono tavole per calcolare prodotti, inversi, quadrati, radici quadrate e altre funzioni matematiche utili in calcoli finanziari. Sappiamo, ad esempio, che i Babilonesi erano in grado di calcolare le aree dei rettangoli, dei triangoli rettangoli, dei triangoli isosceli e dei trapezi. L'area di un cerchio veniva calcolata (in modo approssimato) come il quadrato della circonferenza diviso per 12, il che equivale a considerare $\pi = 3$. Infatti, coerentemente, i Babilonesi ritenevano che la circonferenza di un cerchio fosse tre volte il suo diametro). Furono sempre i Babilonesi i primi a dividere la circonferenza di un cerchio in 360 parti uguali. Sembra inoltre che i Babilonesi conoscessero anche il teorema di Pitagora, almeno in alcuni casi particolari, e sapessero usare le proporzioni.

Lo stesso discorso vale per gli Egizi, anche se, presumibilmente, le loro conoscenze geometriche erano più accurate. Ad esempio, dal papiro di Rhind, risulta che attorno al 1800 A.C. gli Egizi ritenessero $\pi = (16/9)^2 \approx 3.16$ (si compari tale valore, ad esempio, con il valore di $\pi = 3$ usato dall'architetto romano Vitruvio molti secoli dopo). Gli Egizi, inoltre, conoscevano e usavano il teorema di Pitagora e, tra le altre cose, sapevano calcolare i volumi di piramidi e cilindri.

Nella civiltà indiana, il primo enunciato esplicito del teorema di Pitagora si trova nel *Baudhayana Sulvasutra* (vedi figura 1), che risale al 800 A.C. (notiamo che *Sulvasutra* significa "regole di misurazione," il che chiarisce bene lo scopo della geometria!).

Nel *Sulvasutra* sono inoltre enunciati vari principi geometrici da cui derivano poi delle regole per la costruzione degli altari. Per quanto riguarda l'algebra, citiamo solo l'introduzione dello 'zero' e l'uso, per la scrittura dei numeri, del sistema posizionale decimale a noi familiare (vedi figura 2).

Anche gli indiani, come vari altri popoli, conoscevano delle regole per il calcolo della lunghezza di una circonferenza e dell'area di un cerchio (cioè conoscevano il valore approssimato di π). Nel *Aryabhata* (476–550 D.C.) si



दीर्घचतुरस्रस्याक्ष्णयारज्जुः पार्श्वमानी तिर्यङ्मानी च
यत्पृथग्भूते कुरुतस्तदुभयं करोति ॥

Figura 1: Il teorema di Pitagora nel *Baudhayana Sulvasutra*

La diagonale di un rettangolo produce da sola entrambe le aree che i due lati del rettangolo producono separatamente (in altre parole, il quadrato della diagonale è uguale alla somma dei quadrati dei due lati).

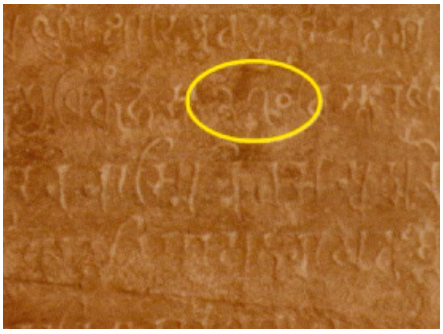
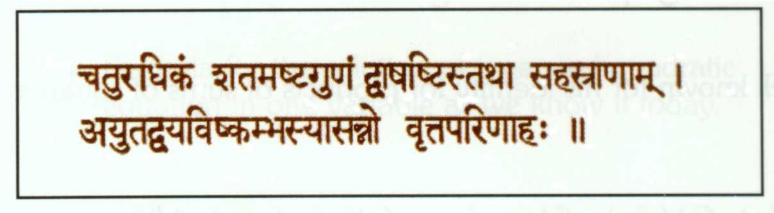


Figura 2: Rappresentazione decimale dei numeri

Una iscrizione del nono secolo, in un tempio a Gwalior, in cui compare il numero 270. Questa è una delle prime testimonianze del modo di rappresentare i numeri che ci è ora familiare.

trova la descrizione di una formula per calcolare la lunghezza della circonferenza di un cerchio che fornisce un valore approssimato di π alla quarta cifra decimale (vedi figura 3).

Tutta la mole di conoscenze sviluppata presso i Babilonesi e gli Egizi venne poi sicuramente trasmessa ai Greci, come testimonia lo storico greco Erodoto (5^{o} secolo A.C.), il quale attribuisce proprio agli Egizi l'origine della Geometria. E fu proprio in Grecia ove la Geometria conobbe il suo maggior sviluppo. Lo studio della Geometria presso i Greci si inserì infatti nella corrente di pensiero filosofico già sviluppata, perdendo così gradualmente il suo carattere di scienza sperimentale e acquistando sempre più il carattere di scienza speculativa. I Greci insistevano nel fatto che le asserzioni geometriche dovevano essere stabilite attraverso ragionamenti deduttivi, e non attraverso metodi sperimentali (prove ed errori). In questo fatto noi possia-



चतुरधिकं शतमष्टगुणं द्वाषष्टिस्तथा सहस्राणाम् ।
अयुतद्वयविष्कम्भस्यासन्नो वृत्तपरिणाहः ॥

Figura 3: Formula per la misura della circonferenza

"100 più 4, moltiplicato per 8 e sommato a 62000: questa è approssimatamente la misura della circonferenza di un cerchio di diametro 20000." Questo fornisce come valore di π

$$\pi = \frac{62832}{20000} = 3.1416.$$

mo riconoscere i primi indizi della differenziazione tra matematica (scienza pura) e fisica (scienza sperimentale) che, tuttavia, continueranno a rimanere indissolubilmente legate per moltissimi secoli ancora.

Contrariamente a ciò che spesso si crede, la Geometria presso i Greci non era una geometria "pura", nel senso di una geometria in cui i calcoli sono stati eliminati. In realtà i Greci non potevano nemmeno dissociare l'algebra dalla geometria, dato che per loro l'algebra era essenzialmente geometrica. Infatti non bisogna dimenticare che i Greci non calcolavano con dei numeri ma con delle grandezze e con i loro rapporti e che, per esempio, quando moltiplicavano due lunghezze ottenevano una grandezza di un'altra specie (un'area, in questo caso). Ovviamente questo punto di vista, unito all'assenza di una pratica notazione algebrica, condannò l'algebra dei Greci a non superare mai uno stadio embrionale. Ad esempio, il concetto di polinomio è inconcepibile all'interno della matematica greca.

D'altra parte, questo stretto legame tra algebra e geometria porta i Greci a mescolare continuamente ragionamenti che noi consideriamo geometrici a ragionamenti algebrici, analoghi ai nostri calcoli con le coordinate cartesiane. Ad esempio Apollonio utilizza spesso, nello studio delle coniche, un sistema di riferimento costituito da una retta tangente alla conica e dal diametro corrispondente.

Viceversa, il metodo preferito dai Greci per la risoluzione di problemi algebrici consisteva nell'ottenere la soluzione attraverso l'intersezione di opportune curve. Un esempio tipico è la soluzione del celebre problema della "duplicazione del cubo." Più in generale, si trattava di trovare, date due lunghezze a e b, una lunghezza x tale che $x^3/a^3 = b/a$. Ippocrate di Chio (verso il 420 A.C.) aveva trasformato questo problema nella "doppia proporzione"

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b},$$

dove x e y sono due lunghezze incognite. Un allievo di Eudosso, Menecme (verso il 350 A.C.), ebbe l'idea di considerare le curve descritte dalle equazioni $ay = x^2$ e $xy = ab$, rispetto a due assi di coordinate: le coordinate (x, y) del punto di intersezione delle due curve fornivano la soluzione del problema. In seguito lo stesso Menecme scoprì che queste curve si potevano ottenere come intersezione di un cono con un piano, il che condusse poi alla scoperta delle coniche.

L'idea di utilizzare questo tipo di costruzioni geometriche per risolvere problemi di tipo algebrico sembra risalire all'ultimo terzo del 5^o secolo A.C. Essa condusse i matematici greci a inventare varie curve (algebriche o trascendenti), quali la quadratrice di Hippias (verso la fine del 5^o secolo) di equazione polare $\rho = c\phi/\sin\phi$, che era utilizzata par la quadratura del cerchio e per la trisezione dell'angolo, la concoide di Nicomede (verso il 250 A.C.), curva di equazione polare $\rho = a + b/\cos\phi$, e la cissoide di Diocle (verso il 150 A.C.), cubica di equazione polare $\rho = 2a\sin^2\phi/\cos\phi$, solo per citarne alcune. Ci si può rendere conto della forza di questa tradizione se pensiamo che, nel 17^o secolo, Cartesio e Newton proclamavano ancora che l'interesse principale delle curve algebriche era quello di fornire delle soluzioni geometriche a delle equazioni algebriche tramite intersezione di curve di grado più basso possibile.

Presso i matematici greci, tuttavia, incontriamo anche delle curve introdotte come "luoghi geometrici" nel contesto di problemi di origine puramente geometrica. Il più bel esempio di ciò è, senza alcun dubbio, la parte più profonda dell'opera di Apollonio sulle coniche, lo studio delle normali a tali curve, ove sono studiate e caratterizzate le sviluppanti delle coniche. I teoremi dimostrati da Apollonio si traducono immediatamente, nelle nostre notazioni, nell'equazione della sviluppante, che solo l'insufficienza dell'algebra greca gli ha impedito di scrivere.

Ricordiamo comunque che la grande maggioranza delle opere originali dei matematici greci è andata perduta. Di conseguenza è per noi molto difficile avere una nozione esatta dell'estensione delle loro conoscenze.

Tra i numerosi matematici grechi possimo citare Talete di Mileto (a cui si attribuiscono le dimostrazioni dei seguenti risultati: ogni diametro divide un cerchio in due parti uguali, gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali, gli angoli opposti determinati da due rette che si intersecano sono uguali, due triangoli sono congruenti se hanno due angoli e un lato uguali, un angolo inscritto in un semicerchio è retto), Pitagora (o meglio, la scuola Pitagorica), Ippocrate, etc. In particolare Ippocrate scrisse una prima versione degli "Elementi" di Geometria, che si ritiene corrispondessero grossomodo ai primi quattro libri degli Elementi di Euclide, verso il 400 A.C. Il trattato di Ippocrate, tuttavia, è andato perduto.

2 Gli Elementi di Euclide

L'apice della matematica greca viene raggiunto con la stesura degli "Elementi" di Euclide. In quest'opera, apparsa verso il 300 A.C., viene condensato e esposto in maniera rigorosa tutto il sapere geometrico noto a quell'epoca. Gli Elementi di Euclide costituiscono la vera e propria fondazione della geometria (euclidea), così come noi la intendiamo oggi.

Anche se la maggior parte dei risultati contenuti negli Elementi non sono dovuti propriamente a Euclide, esso riuscì però a organizzare le conoscenze matematiche dell'epoca in un sistema formale e, da questo punto di vista, estremamente moderno: gli Elementi cominciano infatti con una enunciazione esplicita degli assiomi e postulati che verranno usati in seguito nelle dimostrazioni dei teoremi. In effetti la sistemazione della geometria fornita da Euclide è stata così perfetta da rimanere essenzialmente inalterata per oltre 2000 anni. Inoltre il metodo assiomatico usato da Euclide è il prototipo di tutto ciò che noi chiamiamo matematica pura.

Naturalmente l'opera non è esente da difetti. Come vedremo in seguito Euclide utilizza a volte, nelle dimostrazioni dei teoremi, dei risultati (ritenuti del tutto ovvi) che non sono stati precedentemente dimostrati e che non compaiono neppure nella lista degli assiomi. Ciò tuttavia è perfettamente comprensibile, vista la mole dell'opera e il periodo in cui è stata scritta.

Come per la maggior parte delle opere dei matematici greci, anche gli Elementi ci sono noti attraverso molteplici traduzioni. Presentiamo ora l'elenco delle definizioni, degli assiomi e dei postulati, come appaiono nella versione degli Elementi di Euclide del 1565, scritta da Niccolò Tartaglia (vedi figura 4), basandosi su una precedente versione in latino.

Definizioni

Definizione 1. Il punto è quello che non ha parte (vedi figura 5).

Definizione 2. La linea è una lunghezza senza larghezza: i termini della quale sono due punti.

Definizione 3. La linea retta è la brevissima estensione da un punto ad un'altro, che riceve l'uno e l'altro di quelli nelle sue estremità.

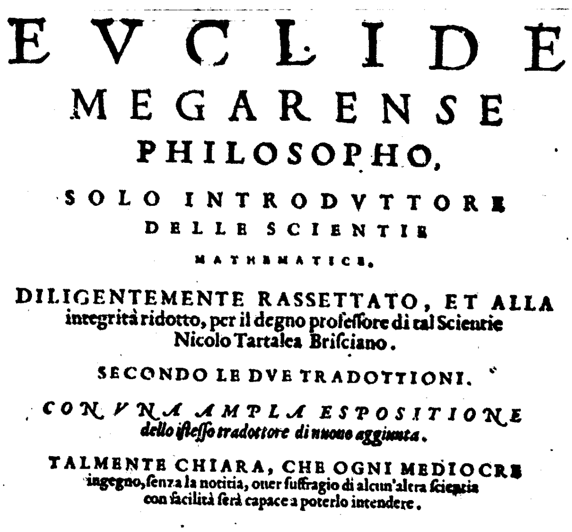

EVCLIDE
MEGARENSE
PHILOSOPHO,
SOLO INTRODVTTORE
DELLE SCIENTIE
MATHEMATICE,
DILIGENTEMENTE RASSETTATO, ET ALLA
integrità ridotto, per il degno professore di tal Scientie
Nicolo Tartalea Brisciano.
SECONDO LE DVE TRADOTTIONI.
CON VNA AMPLA ESPOSITIONE
dello istesso tradottore di nuovo aggiunta.
TALMENTE CHIARA, CHE OGNI MEDIOCRE
ingegno, senza la notitia, over suffragio di alcun'altra scientia
con facilità serà capace a poterlo intendere.

Figura 4: Gli Elementi di Euclide, nella versione del Tartaglia

Definizione 4. La superficie è quella che ha solamente lunghezza e larghezza: i termini della quale sono linee.

Definizione 5. La superficie piana è la brevissima estensione da una linea ad un'altra, che riceve nelle sue estremità l'una e l'altra di quelle.

Definizione 6. L'angolo piano è il toccamento e la applicazione non diretta, di due linee insieme alla espansione della quale è sopra la superficie.

Definizione 7. Ma quando due linee rette contengono un angolo, quell'angolo è detto rettilineo.

Definizione 8. Quando una linea retta starà sopra una linea retta, e che i due angoli contenuti dall'una e l'altra parte siano uguali: l'uno e l'altro di quelli sarà retto.

Definizione 9. E la linea soprastante è detta perpendicolare sopra a quella, dove sopra sta.

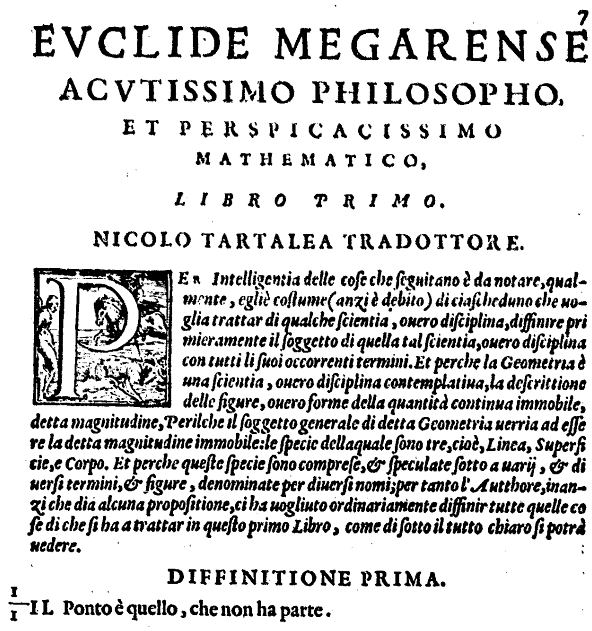
Definizione 10. E l'angolo che è maggiore del retto, si dice ottuso.

Definizione 11. E l'angolo che è minore del retto, è detto acuto.

Definizione 12. Il termine è quello che è fine della cosa.

Definizione 13. La figura è quella che è contenuta sotto uno, ovvero più termini.

Definizione 14. Il cerchio è una figura piana contenuta da una sola linea, la quale è chiamata circonferenza, in mezzo della quale figura c'è un punto,



7

EVCLIDE MEGARENSE
ACVTISSIMO PHILOSOPHO,
ET PERSPICACISSIMO
MATHEMATICO,
LIBRO PRIMO.
NICOLO TARTALEA TRADOTTORE.

PER Intelligentia delle cose che seguitano è da notare, qualmente, egliè costume (anzi è debito) di ciascheduno che uoglia trattar di qualche scientia, ouero disciplina, diffinire primieramente il soggetto di quella tal scientia, ouero disciplina con tutti li suoi occorrenti termini. Et perche la Geometria è una scientia, ouero disciplina contemplatiua, la descrittione delle figure, ouero forme della quantità continua immobile, detta magnitudine, Perilche il soggetto generale di detta Geometria uerria ad essere la detta magnitudine immobile: le specie dellaquale sono tre, cioè, Linea, Superficie, e Corpo. Et perche queste specie sono comprese, & speculate sotto a uarij, & diuersi termini, & figure, denominate per diuersi nomi; per tanto l'Autthore, inanzi che dia alcuna propositione, ci ha uogliuto ordinariamente diffinir tutte quelle cose di che si ha a trattar in questo primo Libro, come di sotto il tutto chiaro si potrà uedere.

DIFFINITIONE PRIMA.

$\frac{I}{I}$ IL Ponto è quello, che non ha parte.

Figura 5: Definizione 1

dal quale tutte le linee rette, che escono e vanno alla circonferenza sono fra loro uguali: e quel tale punto è detto centro del cerchio.

Definizione 15. Il diametro del cerchio è una linea retta, la quale passa sopra il centro di quello e applica le sue estremità alla circonferenza, e divide il cerchio in parti uguali.

Definizione 16. Il mezzo cerchio è una figura piana contenuta dal diametro del cerchio e dalla metà della circonferenza.

Definizione 17. Porzione di cerchio è una figura piana contenuta da una linea retta e da una parte della circonferenza maggiore o minore del mezzo cerchio.

Definizione 18. Le figure rettilinee sono quelle che sono contenute da linee rette, delle quali alcune sono trilatere, le quali sono contenute da tre linee rette, alcune quadrilatere, le quali sono contenute da quattro linee rette, alcune multilatere, le quali sono contenute da più di quattro linee rette.

Definizione 19. Delle figure di tre lati una è detta triangolo equilatero, e questo è quello che è contenuto sotto di tre lati uguali: l'altra è detta triangolo isoscele, è quello che è contenuto solamente sotto di due lati uguali: l'altra è detto triangolo scaleno, e questo è quello che è contenuto sotto di tre lati disuguali.

Definizione 20. Ancora di queste figure di tre lati una è detta triangolo ortogonio, e questo è quello che ha un'angolo retto: l'altra è detta triangolo ambligonio, e è quello che ha un'angolo ottuso, l'altra è detta triangolo oxigonio, e questo è quello che ha tutti i suoi tre angoli acuti.

Definizione 21. Ma delle figure di quattro lati una è detta quadrato, il quale quadrato è di lati uguali e di angoli retti; l'altra è detta tetragono lungo, e questa è una figura rettangola ma non è equilatera; l'altra è detta helmuaym, ovvero rombo, la quale è equilatera ma non è rettangola; l'altra è detta simile helmuaym, ovvero romboide, la quale ha i lati opposti uguali e similmente gli angoli opposti uguali, ma non è contenuta da lati uguali né da angoli retti; e tutte le altre figure quadrilatere, eccetto queste, sono chiamate helmuariphe, ovvero trapezi.

Definizione 22. Le linee equidistanti, ovvero parallele, sono quelle che sono collocate in una medesima superficie e che protratte dall'una e l'altra parte non concorrono, anche se fossero protratte all'infinito.

Osserviamo che queste che Euclide chiama "Definizioni" non sono altro, in effetti, che delle descrizioni degli oggetti di studio della geometria usando parole del linguaggio comune. Il concetto di *punto*, ad esempio, essendo il primo concetto introdotto, è un concetto primitivo che non può essere *definito*, ma deve essere noto a priori.

A tal proposito è interessante notare ciò che lo stesso Tartaglia scrive nella prefazione dell'opera:

> *Punctus est cuius pars non est.* Cioè il punto è quello, la parte del quale non è, cioè che non si trova parte di quello, che in sostanza non vuole inferire altro, salvo che il punto è quello che non ha parte alcuna, cioè che di quello non si potrebbe togliere né dare né trovare e neanche immaginare la metà, cioè che non si potrebbe togliere né dare né trovare né immaginare un mezzo punto, e non potendo togliere né dare un mezzo punto, meno ancora potremmo togliere né dare un mezzo terzo, né un mezzo quarto, né alcuna altra parte simile a quello, per la quale definizione ne consegue che il punto è indivisibile e, di conseguenza, non è quantità, perché ogni quantità continua è divisibile all'infinito.

E continua dicendo:

> Qualcuno potrebbe dire, per tutto quello che tu mi hai detto finora, io non so né intendo che cosa sia questo punto. E io rispondo che ciascuno di noi, per istinto naturale, sa che cosa egli

> è, e che ciò sia vero lo farò confessare a voi stessi. Per esempio. Se io domando a chiunque tra voi come si chiama l'estremità di questo ago, senza dubbio ciascuno di voi dirà che si chiama punta, se poi vi domanderò per quale ragione si chiama così punta, voi mi risponderete, perché è così sottilmente appuntita e che va così a terminare in niente: se dunque tale termine sarà niente esso non riceverà divisione, cioè quello non si potrà dividere in due né in più parti, e perciò non avrà parte alcuna, e non avendo parte, per la definizione del nostro Euclide, sarà un punto, e questa è la ragione per cui noi la chiamiamo punta. Or dunque egli è tempo assai che voi sappiate che cosa è il punto.

Possiamo ancora osservare che, sebbene Euclide abbia molta cura a definire i vari oggetti geometrici, non dice assolutamente nulla sulla questione relativa alla "misura" delle grandezze geometriche. Ad esempio, nella Definizione 3, dicendo che "la linea retta è la brevissima estensione da un punto ad un'altro," è sottinteso che la lunghezza di una linea si possa misurare e che esista una e una sola linea di lunghezza minima che congiunge due punti dati. Una tale questione, agli occhi di un matematico greco, doveva risultare talmente ovvia da non meritare alcun tipo di commento (in fondo la Geometria nasce proprio come scienza della misura della terra).

Assiomi (o Postulati)

Veniamo ora all'elenco degli *assiomi*, cioè di quelle affermazioni, di natura geometrica, che non possono essere dimostrate ma vengono considerare "vere" in quanto percepite come tali dalla nostra mente.

A questo proposito il Tartaglia dice:

> "Innanzi che procediamo più oltre, bisogna notare, che i primi principi di ciascuna scienza non si conoscono per dimostrazione: né alcuna scienza è tenuta a provare i suoi primi principi, perché bisognerebbe procedere all'infinito, ma quei tali principi si conoscono per intelletto, mediante il senso, ..."

Assioma 1. Domandiamo che ci sia concesso che da qualunque punto a qualunque punto si possa condurre una linea retta.

Assioma 2. Ancora domandiamo che ci sia concesso che si possa prolungare una retta terminata direttamente in continuo quanto ci pare.

Assioma 3. Ancora domandiamo che ci sia concesso che sopra a qualunque centro si voglia possiamo disegnare un cerchio di che grandezza ci pare.

Assioma 4. Similmente domandiamo che ci sia concesso che tutti gli angoli retti siano fra loro uguali.

Assioma 5. Domandiamo anche che ci sia concesso che, se una linea retta cadrà sopra due linee rette e che due angoli da una stessa parte siano minori di due angoli retti, quelle due linee senza dubbio, protratte in quella medesima parte, sia necessario che si incontrino.

Assioma 6. Similmente domandiamo che ci sia concesso che due linee rette non racchiudano alcuna superficie.

Il quinto assioma non è altro che il famoso "quinto postulato di Euclide." Una sua formulazione equivalente (e, senza dubbio, più familiare) è la seguente: *data una retta, per ogni punto esterno a essa passa una e una sola retta parallela alla retta data.*

Nella formulazione originale si nota una netta differenza fra il quinto assioma e tutti gli altri, sia a livello di evidenza intuitiva che a livello di semplicità dell'enunciato. A causa di ciò, durante più di duemila anni, moltissimi matematici hanno ritenuto che il quinto postulato dovesse in realtà essere un teorema e andasse quindi dimostrato. Nelle parole di Girolamo Saccheri, ammettere questo fatto tra gli assiomi era un "neo", una imperfezione, da cui doveva essere liberata la Geometria Euclidea. Furono proprio i tentativi sempre falliti di far derivare il quinto postulato dagli altri assiomi che dovevano alla fine condurre alla scoperta dell'esistenza di possibili geometrie non-euclidee, cioè di geometrie in cui sono soddisfatti tutti gli assiomi di Euclide tranne precisamente il quinto, dimostrando così finalmente l'indipendenza del quinto postulato dagli altri assiomi.

Comuni Sentenze (o Assiomi)

Segue ora l'elenco delle *comuni sentenze*, cioè di quelle affermazioni di senso comune, che potremmo definire di natura algebrica, per comparazione con i precedenti assiomi di natura geometrica. Il Tartaglia le chiama "le nove concezioni dell'animo, ovvero le comuni sentenze."

Prima. Quelle cose che a una medesima cosa sono uguali, fra loro sono uguali.

Seconda. E se a cose uguali sono aggiunte cose uguali, tutte le somme saranno uguali.

Terza. E se da cose uguali saranno tolte cose uguali, quelle cose che resteranno saranno uguali.

Quarta. E se da cose non uguali tu toglierai cose uguali, i rimanenti saranno disuguali.

Quinta. E se a cose disuguali tu aggiungerai cose uguali, i risultanti saranno disuguali.

Sesta. Se due cose sono doppie di una medesima cosa, quelle medesime sono tra loro uguali.

Settima. Se due cose sono la metà di una medesima cosa, quelle medesime sono tra loro uguali.

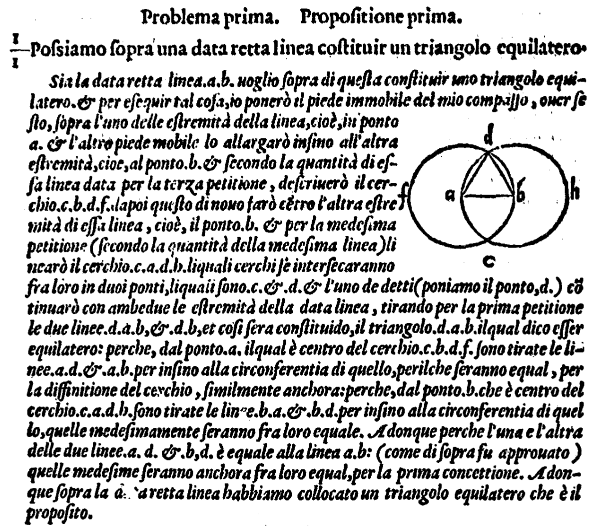
Ottava. Se alcuna cosa è posta sopra a un'altra in modo che l'una non ecceda l'altra, quelle saranno tra loro uguali.

Nona. Ogni tutto è maggiore della sua parte.

Problemi e Teoremi

Una volta terminato l'elenco delle definizioni, dei postulati e degli assiomi, Euclide inizia l'esposizione dei teoremi, con le relative dimostrazioni. Molti teoremi vengono enunciati sotto la forma di "problemi," la cui soluzione illustra molte importanti costruzioni geometriche. Il primo di questi problemi è il seguente:

Problema primo – Proposizione prima. Sopra una data linea retta (cioè segmento) è possibile costruire un triangolo equilatero (vedi figura 6).



Problema prima. Propoſitione prima.

1/1 Poſsiamo ſopra una data retta linea coſtituir un triangolo equilatero.

Sia la data retta linea.a.b. uoglio ſopra di queſta conſtituir uno triangolo equilatero.& per eſequir tal coſa,io ponerò il piede immobile del mio compaſſo, ouer ſeſto, ſopra l'uno delle eſtremità della linea,cioè,in ponto a. & l'altro piede mobile lo allargarò inſino all'altra eſtremità,cioe,al ponto.b.& ſecondo la quantità di eſſa linea data per la terza petitione, deſcriuerò il cerchio.c.b.d.f.dapoi queſto di nouo farò cētro l'altra eſtremità di eſſa linea, cioè, il ponto.b. & per la medeſima petitione (ſecondo la quantità della medeſima linea)li ncarò il cerchio.c.a.d.b.liquali cerchi ſe interſecaranno fra loro in duoi ponti,liquali ſono.c.& .d.& l'uno de detti(poniamo il ponto,d.) cōtinuarò con ambedue le eſtremità della data linea, tirando per la prima petitione le due linee.d.a.b,& .d.b,et coſi ſera conſtituido,il triangolo.d.a.b.ilqual dico eſſer equilatero: perche, dal ponto.a. ilqual è centro del cerchio.c.b.d.f. ſono tirate le linee.a.d.& .a.b.per inſino alla circonferentia di quello,perilche ſeranno equal, per la diffinitione del cerchio, ſimilmente anchora:perche,dal ponto.b.che è centro del cerchio.c.a.d.b.ſono tirate le linee.b.a.& .b.d.per inſino alla circonferentia di quello,quelle medeſimamente ſeranno fra loro equale. Adonque perche l'una e l'altra delle due linee.a. d. & .b,d. è equale alla linea a.b: (come di ſopra fu approuato) quelle medeſime ſeranno anchora fra loro equal,per la prima concettione. Adonque ſopra la data retta linea habbiamo collocato un triangolo equilatero che è il propoſito.

Figura 6: Problema primo

La costruzione geometrica che permette di risolvere questo problema è ben nota. Con centro in ciascuno dei due estremi del segmento si traccia un cerchio avente come raggio il segmento stesso (questo è possibile in base all'assioma 3). Si consideri ora uno dei due punti di intersezione dei due cerchi così ottenuti e si costruiscano due segmenti aventi come estremi il punto in questione e uno dei due estremi del segmento dato (qui si usa l'assioma 1). Ricordando la definizione di cerchio (Definizione 14) e la proprietà transitiva dell'uguaglianza (la prima delle Comuni Sentenze), si conclude che il triangolo così ottenuto è equilatero.

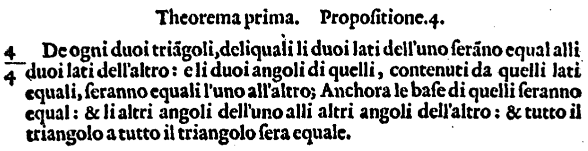
Come si vede, in questa costruzione Euclide è attento a usare solo proprietà già enunciate in precedenza (sotto forma di definizioni, assiomi o postulati). Tuttavia, da un punto di vista formale, la dimostrazione fornita non è soddisfacente. Infatti si dà per scontato che i due cerchi costruiti si intersechino in due punti (fatto del tutto intuitivo). Questo fatto però avrebbe dovuto essere dimostrato in precedenza, oppure incluso tra gli assiomi!

Diamo ora, a titolo di esempio, solo l'enunciato di alcuni dei teoremi successivi (il lettore interessato è invitato a consultare l'opera originale del Tartaglia).

Problema 2 – Proposizione 2. Da un dato punto possiamo condurre una linea retta (i.e., segmento) uguale a qualunque linea retta (i.e., segmento) data.

Problema 3 – Proposizione 3. Date due linee rette disuguali, dalla più lunga di quelle possiamo tagliare una parte uguale alla minore.

Teorema primo – Proposizione 4. Dati due triangoli, dei quali i due lati dell'uno sono uguali ai due lati dell'altro, e i due angoli di quelli contenuti da quei lati uguali sono uguali tra loro, allora anche le basi di quelli saranno uguali e gli altri angoli dell'uno saranno uguali agli angoli dell'altro, e tutto il triangolo a tutto il triangolo sarà uguale (*in altre parole: due triangoli sono uguali se hanno uguali due lati e l'angolo tra essi compreso*).

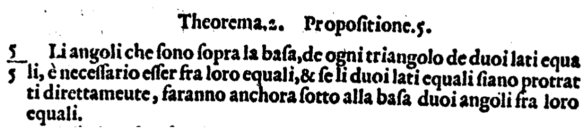


Theorema prima. Propositione.4.

4/4 De ogni duoi triãgoli, deliquali li duoi lati dell'uno ferãno equal alli duoi lati dell'altro: e li duoi angoli di quelli, contenuti da quelli lati equali, feranno equali l'uno all'altro; Anchora le bafe di quelli feranno equal: & li altri angoli dell'uno alli altri angoli dell'altro: & tutto il triangolo a tutto il triangolo fera equale.

Figura 7: Teorema primo

Teorema 2 – Proposizione 5. Gli angoli che sono sopra la base di ogni triangolo con due lati uguali devono essere tra di loro uguali, e se i due lati sono protratti direttamente, formeranno ancora sotto alla base due angoli fra loro uguali.



Theorema.2. Propositione.5.

5 Li angoli che sono sopra la basa, de ogni triangolo de duoi lati equali, è necessario esser fra loro equali, & se li duoi lati equali siano protratti direttameute, faranno anchora sotto alla basa duoi angoli fra loro equali.

Figura 8: Teorema 2

Teorema 3 – Proposizione 6. Se due angoli di un triangolo sono uguali, anche i due lati opposti a quegli angoli saranno uguali.

3 Da Euclide a Hilbert

L'esposizione della Geometria fornita negli Elementi di Euclide è così perfetta che, per oltre 2000 anni, i geometri si sono essenzialmente limitati a esplorare l'edificio ammirabilmente costruito da Euclide, senza apportare delle sostanziali modifiche alle sue fondazioni. L'unica ragione di insoddisfazione era rappresentata da quel quinto postulato, poco intuitivo, che sarebbe figurato meglio nell'elenco dei teoremi piuttosto che in quello dei postulati. I tentativi di dimostrazione del postulato delle parallele non sono certo mancati e sono stati proprio questi tentativi, sempre falliti, che alla fine porteranno alla scoperta delle geometrie non-euclidee.

Ma descriviamo ora brevemente alcune tappe fondamentali che hanno segnato lo sviluppo della geometria nel mondo occidentale.

Una prima grande rivoluzione ha un'origine precisa; l'invenzione delle coordinate cartesiane (dovuta a Fermat e Cartesio, indipendentemente, attorno al 1630). Attraverso l'uso sistematico delle coordinate, ogni relazione geometrica tra i punti del piano o dello spazio può essere ora tradotta in una relazione tra le coordinate di quei punti. I problemi geometrici possono così essere tradotti in problemi algebrici o analitici, e affrontati con i metodi dell'algebra o del calcolo infinitesimale, il cui sviluppo è essenzialmente contemporaneo. Quest'epoca può dunque essere considerata come la data di nascita della geometria algebrica e della geometria differenziale.

In particolare, Cartesio, avendo ben chiaro il concetto di "polinomio di grado qualunque," è in grado di definire la nozione di curva algebrica nel piano, che si generalizzerà poi senza difficoltà a quella di superficie nello spazio. Inizia così lo studio algebrico e analitico delle curve e delle superficie. Fermat scopre, ad esempio, che le curve di secondo grado non sono altro che le coniche, già studiate dai greci, e mostra come queste si possano classificare in base alla loro equazione (più tardi, nel 18º secolo, Eulero fornirà una simile classificazione delle quadriche). Newton affronterà invece il problema della classificazione delle cubiche piane, riconoscendone 72 "tipi" non riconducibili l'uno all'altro attraverso una trasformazione delle coordinate (altri 6 tipi, che Newton non aveva scovato, saranno poi aggiunti dai suoi continuatori). Accanto a questi risultati particolari c'è poi una gran quantità di risultati di tipo generale, riguardanti l'invarianza del grado, lo studio delle tangenti, i punti singolari, il numero di punti di intersezione di due curve, etc.

La seconda rivoluzione che vogliamo segnalare coincide con l'introduzione della Geometria Proiettiva, verso la fine del 18º secolo. Questa rivoluzione inizia nel 1795, anno di pubblicazione della "Geometria" di Monge, e ha uno sviluppo estremamente rapito. In meno di 25 anni, grazie ai lavori della sua scuola e soprattutto di Poncelet, si assiste a un allargamento considerevole di tutte le nozioni geometriche, dovuto a un uso sistematico dei punti all'infinito e dei punti a coordinate immaginarie. Questo cambiamento di punto di vista sarà caratterizzato da un tale successo che, durante più di un secolo, con il termine "Geometria" si intenderà esclusivamente la geometria proiettiva.

In realtà, l'origine della geometria proiettiva (reale) può essere fatta risalire a Desargues (attorno alla metà del 17º secolo), il quale cercando di fornire un fondamento matematico ai metodi della prospettiva utilizzati dai pittori e dagli architetti dell'epoca, era giunto a una chiara concezione dell'aggiunta al piano usuale di una "retta all'infinito." Il metodo usato era in effetti quello della proiezione centrale, di modo che l'idea di Desargues del piano proiettivo reale coincide essenzialmente con la definizione moderna. Purtroppo, il linguaggio utilizzato da Desargues, assai diverso da quello dei matematici del suo tempo, e la scarsa diffusione della sua opera (che per un certo periodo durante il 19º secolo fu addirittura ritenuta persa) fecero sì che le sue idee rimanessero ignorate per molto tempo.

Il successo delle idee della geometria proiettiva, che aumenta costantemente a partire dal 1820, è dovuto soprattutto alle notevoli semplificazioni che esse apportano, permettendo così di enunciare dei teoremi in tutta generalità, senza doversi occupare di molti "casi eccezionali." Per esempio, mentre l'intersezione di due cerchi nel piano sembrava costituire una eccezione al teorema di Bezout (secondo il quale due cerchi si dovrebbero intersecare in 4 punti, essendo entrambi delle curve di grado 2), il numero dei punti di intersezione diventa effettivamente pari a 4 quando si considerano i cerchi nel piano proiettivo complesso; tutti i cerchi passano infatti per due punti fissi immaginari e all'infinito (i cosiddetti "punti ciclici"). Tutte le coniche non degeneri del piano proiettivo complesso sono proiettivamente equivalenti, così come tutte le quadriche non degeneri dello spazio proiettivo complesso. Anche nel caso delle cubiche la loro classificazione si semplifica notevolmente: i "tipi" di cubiche piane si riducono a 3, le cubiche non singolari, quelle con un nodo e quelle con una cuspide. Si assiste così a un rinnovato interesse nello studio di tutti i problemi della geometria algebrica, affrontati ora nell'ambito della geometria proiettiva.

Possiamo notare che, sebbene nel piano proiettivo non esistano rette parallele, questo fatto non venne ritenuto dagli studiosi dell'epoca come un indizio della possibile esistenza di geometrie in cui non fosse verificato il quinto postulato di Euclide. Per assistere alla nascita delle geometrie non-euclidee bisognerà attendere ancora, fino alla metà del 19^o secolo circa.

Come abbiamo già detto, la nascita delle geometrie non-euclidee si deve al tentativo, sempre fallito, di dimostrare il quinto postulato di Euclide. In effetti, il quinto postulato di Euclide è sempre sembrato a tutti (e probabilmente anche allo stesso Euclide) meno evidente degli altri e si è pertanto cercato di dimostrare che, in realtà, tale postulato è una conseguenza degli altri. Nonostante il fatto che tutti i tentativi di dimostrazione siano sempre andati a vuoto, fino alla metà del 19^o secolo circa, a nessuno venne l'idea che potesse esistere una geometria in cui tale postulato non fosse soddisfatto. La cosa non deve sorprendere: non esistendo in passato una netta distinzione tra matematica e fisica, l'unica geometria immaginabile era quella che corrispondeva all'esperienza fisica (Kant arriverà addirittura a affermare che la mente umana è essenziamente euclidea e pertanto incapace di immaginare altre geometrie). In effetti l'universo, almeno alle scale di cui abbiamo esperienza diretta attraverso i nostri sensi, è euclideo, quindi anche oggi, per la maggior parte delle applicazioni pratiche, si usa la geometria euclidea (e, corrispondentemente, la meccanica newtoniana).

Tra i tentativi di dimostrazione del quinto postulato di Euclide merita particolare attenzione quello di Girolamo Saccheri, un padre gesuita vissuto tra il 1667 e il 1733. Prima della sua morte egli pubblicò un libro dal titolo *Euclides ab omni nævo vindicatus*, un'opera che rimase praticamente sconosciuta per oltre un secolo e mezzo, fino alla sua riscoperta ad opera del matematico Beltrami.

Saccheri si proponeva di dimostrare il quinto postulato di Euclide, facendolo derivare dagli assiomi rimanenti. La strategia era quella di assumere tutti i postulati della geometria euclidea tranne il quinto, e quindi anche tutti i teoremi la cui dimostrazione non dipendesse da tale postulato, di negare il quinto postulato e di cercare quindi di arrivare a una contraddizione.

Per fare ciò egli studiò una famiglia di quadrilateri, noti ora col nome di quadrilateri di Saccheri, costruiti nel modo seguente: dalle estremità di un lato (la *base*) si innalzano due lati uguali e perpendicolari alla base (chiamati appunti *lati*) e si considera infine il lato congiungente le due estremità superiori di tali lati (detto *sommità*). Gli angoli compresi tra la sommità e i lati sono detti *angoli di sommità*. Si può dimostrare che, per ragioni di simmetria, i due angoli di sommità devono essere uguali. Saccheri considera allora tre casi, che chiama rispettivamente *ipotesi dell'angolo acuto* (gli angoli di sommità sono acuti), *ipotesi dell'angolo retto* (gli angoli di sommità sono retti) e *ipotesi dell'angolo ottuso* (gli angoli di sommità sono ottusi).

Nel caso dell'ipotesi dell'angolo retto il quadrilatero di Saccheri è un rettangolo e siamo così nell'ambito della geometria euclidea. Per quanto riguarda l'ipotesi dell'angolo ottuso, Saccheri ottiene effettivamente una contraddizione, ma non riesce in alcun modo a eliminare l'ipotesi dell'angolo acuto (che corrisponde alla geometria iperbolica). La convinzione della impossibilità di ammettere la falsità del quinto postulato era però così forte che Saccheri preferisce rinunciare piuttosto che ammettere la possibile esistenza di un altro tipo di geometria. Se egli fosse stato coerente fino in fondo, sarebbe probabilmente arrivato alla scoperta della geometria iperbolica oltre un secolo prima di Bolyai e Lobacevkij.

Bisognerà attendere ancora fino a circa la metà del 19º per la comparsa, ad opera di Gauss, Bolyai, Lobacevskij e Riemann, dei primi modelli di geometrie in cui non vale il quinto postulato di Euclide, le cosiddette geometrie non-euclidee. Si ha così la geometria iperbolica, dovuta a Gauss, Bolyai e Lobacevskij, in cui si ammette l'esistenza di più di una parallela a una retta data passante per un punto esterno a essa, e la geometria ellittica, dovuta a Riemann, nella quale, al contrario, non esistono rette parallele.

4 I Principi Fondamentali della Geometria, di Hilbert

Nei primi anni del 1900 (attorno al 1920) David Hilbert avanzò una nuova proposta per una rifondazione di tutta la matematica classica, che divenne nota con nome di "Programma di Hilbert" (il programma, in forma definitiva, fu proposto nel 1921, ma molte parti di esso risalgono a lavori di fondazione dello stesso Hilbert svolti attorno al 1900). Tale programma prevede una formalizzazione di tutta la matematica in forma assiomatica, assieme ovviamente alla dimostrazione che un tale sistema assiomatico è consistente. Inoltre la dimostrazione della consistenza doveva essere realizzata usando solo quelli che Hilbert chiama *metodi finitari*.

Ci furono molti progressi significativi in questo programma negli anni '20, con contributi di logici quali Paul Bernays, Wilhelm Ackermann, John von Neumann e Jacques Herbrand. Il programma di Hilbert ebbe una grande influenza anche sul lavoro di Kurt Gödel, e fu proprio Gödel a dare il colpo di grazia a tale programma con i suoi famosi teoremi di incompletezza (che risalgono al 1930). In ogni caso, anche dopo l'opera di Gödel, il programma di Hilbert ha continuato a esercitare una profonda influenza nella filosofia della matematica e, a partire dai lavori di Gerhard Gentzen negli anni '30, ha giocato un ruolo centrale nello sviluppo della teoria della dimostrazione.

Il lavoro di Hilbert sulla fondazione della matematica ha le sue radici nei suoi lavori di geometria del 1890, che culminano nella stesura del lavoro "I Fondamenti della Geometria" del 1899. Hilbert credeva fermamente che il modo corretto di sviluppare rigorosamente ogni teoria scientifica richiedesse un approccio assiomatico. Fornendo una trattazione assiomatica la teoria verrebbe sviluppata in modo indipendente dall'intuizione e ciò avrebbe facilitato l'analisi delle relazioni logiche tra i concetti basilari e gli assiomi. Un'importanza fondamentale in un approccio assiomatico riveste lo studio dell'indipendenza e, soprattutto, della consistenza degli assiomi. Per quanto riguarda gli assiomi della geometria, la loro consistenza può essere dimostrata fornendo un modello della geometria costituito dal piano affine reale. In questo modo la consistenza della geometria è ricondotta alla consistenza dell'algebra (o dell'analisi). I fondamenti dell'analisi richiedono anch'essi, naturalmente, una assiomatizzazione e una dimostrazione di consistenza. Il loro trattamento assiomatico venne sviluppato dallo stesso Hilbert attorno al 1900, ma ben presto ci si rese conto che la dimostrazione della consistenza incontrava notevoli difficoltà, dovute in particolare al fatto che i fondamenti dell'analisi, nel lavoro di Dedekind, si basavano su assunzioni alquanto dubbie, simili a quelle che avevano portato ai paradossi della teoria degli insiemi e al paradosso di Russel nel lavoro di Frege sui fondamenti dell'aritmetica. Il problema della non-contraddizione degli assiomi dell'aritmetica venne così proposto da Hilbert come il secondo dei suoi famosi 23 problemi futuri della matematica, presentati al Congresso Internazionale di Matematica, che si tenne a Parigi dal 6 al 12 agosto del 1900. Nel testo della conferenza di Hilbert, a proposito di tale problema, si legge:

> Lorsqu'il s'agit de poser les principes fondamentaux d'une science, l'on doit établir un système d'axiomes renfermant une description complète et exacte des relations entre les concepts élémentaires de cette science. Ces axiomes sont en même temps les définitions de ces concepts élémentaires ; aucune affirmation relative à la science dont nous examinons les principes fondamentaux ne sera admise comme exacte, à moins qu'on ne puisse la tirer des axiomes au moyen d'un nombre fini de déductions. Si l'on considère les choses plus exactement, la question suivante se pose : *Certaines affirmations contenues dans des axiomes ne sont-*

elles pas dépendantes les unes des autres, et, par suite, ces axiomes ne renferment-ils pas des parties communes superflues que l'on doit supprimer si l'on veut obtenir un système d'axiomes complètement indépendants?

Mais avant tout, parmi tant de questions soulevées par l'examen des axiomes, je regarde comme la plus importante celle-ci : *Démontrer que les axiomes ne sont pas contradictoires ; c'est-à-dire démontrer qu'en se basant sur les axiomes l'on ne pourra jamais arriver à des résultats contradictoires au moyen d'un nombre fini de déductions logiques.*

I Principi Fondamentali della Geometria

Presentiamo ora, molto brevemente, la formalizzazione della geometria proposta da David Hilbert nella sua opera "I Principi Fondamentali della Geometria."

Iniziamo con i concetti primitivi (non definibili). Essi sono: *punti* (indicati con A, B, C, ...), *rette* (indicate con a, b, c, ...) e *piani* (indicati con α, β, γ, ...), assieme a certe relazioni tra di essi, quali "essere situato", "tra", "parallele", etc.

Gli assiomi sono poi divisi in cinque gruppi.

I. Assiomi di associazione

I.1. Due punti distinti, A, B, determinano sempre una retta a; porremo $AB = a$ o $BA = a$.

I.2. Due punti distinti qualunque di una retta determinano quella retta, e su ogni retta ci sono almeno due punti; cioè se $AB = a$ e $AC = a$ e $B \neq C$, allora si ha anche $BC = a$.

I.3. Tre punti A, B, C, non sulla stessa retta, determinano sempre un piano α; porremo $ABC = \alpha$.

I.4. Tre punti qualsiasi A, B, C, di un piano α, non situati su una stessa retta, determinano questo piano α.

I.5. Quando due punti A e B di una retta a sono situati su un piano α, lo stesso vale per ogni punto di a.

I.6. Quando due piani α, β hanno un punto A in comune, hanno ancora almeno un altro punto B in comune.

I.7. Su ogni piano ci sono almeno tre punti non situati sulla stessa retta e, nello spazio, ci sono almeno quattro punti non situati sullo stesso piano.

II. Assiomi di distribuzione

Convenzione: i punti di una retta hanno tra loro una relazione che si esprime mediante la parola "tra."

II.1. A, B, C indichino tre punti di una retta. Se B è situato tra A e C allora è anche situato tra C e A.

II.2. Se A e C indicano due punti di una retta, c'è almeno un punto B situato tra A e C e almeno un punto D tale che C sia situato tra A e D.

II.3. Dati tre punti di una retta, ce n'è sempre uno e uno solo situato tra gli altri due.

II.4. Quattro punti qualunque A, B, C, D di una retta possono sempre essere distribuiti in modo tale che B sia situato tra A e C e anche tra A e D, e che C sia situato tra A e D e anche tra B e D.

Definizione. Il sistema formato da due punti A e B situati su una retta è detto un *segmento*, e lo indicheremo con AB o BA. I punti situati tra A e B sono detti i punti del segmento AB, tutti gli altri punti della retta a sono detti all'esterno del segmento AB. I punti A e B sono detti gli estremi del segmento AB.

II.5. Siano A, B, C, tre punti non in linea retta e a una retta nel piano ABC che non passa per alcuno dei punti A, B, C : se la retta a passa per un punto del segmento AB, allora passerà sempre o per un punto del segmento BC oppure per un punto del segmento AC.

Seguono poi le definizioni dei vari poligoni e iniziano a essere dimostrati alcuni teoremi.

III. Assioma delle parallele (Postulato di Euclide)

III. In un piano α, per un punto A preso fuori da una retta a, si può sempre tracciare una e una sola retta che non interseca la retta a ; questa retta è detta la *parallela* ad a, tracciata dal punto A.

IV. Assiomi di congruenza

Convenzione: i segmenti hanno tra loro una relazione che si esprime mediante la parola "congruenti."

IV.1. Se indichiamo con A e B due punti di una retta a, e con A' un punto di questa stessa retta oppure di un'altra retta a', potremo sempre trovare, sulla retta a', da una data parte del punto A', uno e un solo punto B' tale che il segmento AB sia congruente al segmento $A'B'$, e scriveremo allora $AB \equiv A'B'$. Ogni segmento è congruente a sé stesso, $AB \equiv AB$. Il segmento AB è sempre congruente al segmento BA, $AB \equiv BA$.

IV.2. Se $AB \equiv A'B'$ e $AB \equiv A''B''$, allora $A'B' \equiv A''B''$.

IV.3. Sulla retta a, siano AB e BC due segmenti senza punti comuni, e siano poi $A'B'$ e $B'C'$ due segmenti situati sulla stessa retta oppure su un'altra retta a', ugualmente senza punti comuni. Se $AB \equiv A'B'$ e $BC \equiv B'C'$ allora anche $AC \equiv A'C'$.

Dopo aver definito i segmenti e fornito gli assiomi relativi alla loro congruenza, Hilbert fa lo stesso per gli angoli. Un angolo viene definito come il sistema di due semirette di un piano uscenti da uno stesso punto. Gli assioni IV.4 e IV.5 sono l'analogo degli assiomi IV.1 e IV.2 per gli angoli.

IV.6. In due triangoli ABC e $A'B'C'$, se le congruenze $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ sono verificate, allora anche le congruenze $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ e $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$ lo sono.

A questo punto Hilbert enuncia e dimostra vari teoremi in cui vengono usati gli assiomi enunciati finora. Fra questi ci sono i tre teoremi di congruenza dei triangoli. Hilbert dimostra, in particolare, il seguente teorema che, negli Elementi di Euclide, compariva invece tra gli assiomi:

Teorema XV. Tutti gli angoli retti sono congruenti tra loro.

Per terminare questa sezione, vengono definite le figure e la congruenza tra figure e viene definita la circonferenza (nel modo ovvio).

V. Assioma della continuità (Assioma di Archimede)

V. Sia A_1 un punto qualunque situato su una retta tra due punti dati qualsiasi A e B. Costruiamo allora i punti A_2, A_3, A_4, $\ldots$, tali che A_1 sia situato tra A e A_2, che A_2 sia situato tra A_1 e A_3, che A_3 sia situato tra A_2 e A_4,$\ldots$, e così di seguito, e tali inoltre che i segmenti AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4,$\ldots$, siano uguali tra loro. Allora nella serie di punti A_2, A_3, A_4,$\ldots$, esisterà sempre un certo punto A_n tale che B sia situato tra A e A_n.

Termina qui l'elenco dei cinque gruppi di assiomi. A questi se ne può aggiungere un'altro, che non è di natura puramente geometrica:

Assioma di integrità. Al sistema di punti, rette e piani, è impossibile aggiungere altri enti in modo che il sistema così generalizzato formi una nuova geometria dove gli assiomi dei cinque gruppi I-V siano tutti verificati. In altri termini, gli elementi della geometria formano un sistema di enti che, se si conservano tutti gli assiomi, non è suscettibile di alcuna estensione.

Hilbert si propone poi di dimostrare la non contraddizione di questi assiomi (in termini moderni, la consistenza della teoria, cioè il fatto che dagli assiomi dati non derivi l'assurdo) e la loro indipendenza (cioè il fatto che nessuno di questi assiomi sia dimostrabile usando gli altri).

Per dimostrare la non contraddizione degli assiomi dati è sufficiente fornire un modello di geometria in cui tutti gli assiomi siano soddisfatti. Tale modello è il piano affine reale usuale (in realtà Hilbert usa il piano affine su un corpo Ω ottenuto partendo da $\mathbb{Q}$ e aggiungendo le radici quadrate degli elementi di Ω costruiti in precedenza. L'unico vantaggio è che Ω è numerabile, al contrario di $\mathbb{R}$). In questo modo la non contraddizione degli assiomi della geometria è ricondotta alla non contraddizione (consistenza) dell'aritmetica, che è data per scontata (ma non è dimostrata!). Ovviamente nel caso della geometria dello spazio basterà usare come modello lo spazio affine tridimensionale reale (o definito sul corpo Ω).

Rimane infine il problema dell'indipendenza degli assiomi. Questo viene risolto fornendo un modello di geometria che soddisfi tutti gli assiomi tranne uno, quello di cui si vuole dimostrare l'indipendenza. Ad esempio, per dimostrare l'indipendenza dell'assioma della continuità V, è sufficiente costruire un modello di geometria che soddisfi tutti gli altri assiomi, tranne quello in questione (in questo caso si ottengono le "geometrie non archimedee").

5 I Teoremi di Incompletezza di Gödel

Come più sopra ricordato, le idee sviluppate da Hilbert nel suo programma furono anche responsabili di grandi sviluppi nel campo della logica matematica. In particolare esse influenzarono certamente l'opera di Kurt Gödel, che culminò con la dimostrazione dei famosi teoremi di incompletezza, i quali assestarono un duro colpo al programma di assiomatizzazione proposto da Hilbert.

Prima di enunciare i teoremi di Gödel richiamiamo brevemente alcune nozioni elementari di logica matematica.

Definizione 1. Una teoria formale è *inconsistente* quando in essa si può dimostrare qualsiasi formula (equivalentemente, quando si può dimostrare "l'assurdo" $\perp$).

Definizione 2. Una teoria formale è *corretta* quando tutte le proposizioni dimostrabili sono vere (in termini tecnici, quando, per ogni proposizione P, si ha che $\vdash P$ implica $\models P$).

Definizione 3. Una teoria formale è *completa* quando tutte le proposizioni vere sono dimostrabili (in termini tecnici, quando, per ogni proposizione P, si ha che $\models P$ implica $\vdash P$).

Osservazione. Non si può risolvere banalmente il problema della correttezza e completezza di una teoria semplicemente definendo "verità = dimostrabilità." Infatti, data una proposizione P sicuramente possiamo affermare che o è vera P oppure è vera la sua negazione $\neg P$ (tertium non datur), tuttavia non è affatto detto che in ogni caso si possa fornire una dimostrazione di P oppure di $\neg P$. Identificando verità con dimostrabilità si sarebbe poi costretti a rinunciare al principio del terzo escluso.

Nei casi più semplici si può effettivamente dimostrare che una teoria formale è corretta e completa. Questo vale, ad esempio, per il calcolo proposizionale e per il calcolo del primo ordine. I teoremi di Gödel affermano invece che questo non è più possibile per teorie formali più complicate (basta, in effetti, che siano sufficientemente espressive da contenere l'aritmetica).

Teorema (Primo Teorema di Incompletezza). Sia $\mathcal{T}$ una qualunque teoria assiomatizzabile e sufficientemente espressiva da contenere al suo interno l'aritmetica. Allora esiste una sentenza ϕ (cioè una formula chiusa) tale che, sotto opportune ipotesi di consistenza di $\mathcal{T}$, né ϕ né $\neg\phi$ è dimostrabile in $\mathcal{T}$.

Il primo teorema di incompletezza afferma dunque che nessuna teoria matematica (sufficientemente interessante) del tipo immaginato da Hilbert, cioè basata su un sistema di assiomi, potrà mai sperare di poter dimostrare, al suo interno, tutte le proposizioni vere; esisteranno sempre delle proposizioni vere ma non dimostrabili. Noi potremmo certamente, in presenza di una siffatta proposizione, decidere di aggiungerla al sistema di assiomi della nostra teoria; visto che tale proposizione è vera si otterrà così una nuova teoria che sarà consistente e, all'interno della quale, la proposizione in questione diventerà dimostrabile. Ciò tuttavia non risolve il problema, perché il teorema di Gödel assicura che, nella nuova teoria così ottenuta, continueranno ad esistere delle proposizioni vere ma non dimostrabili!

Veniamo ora al secondo teorema di Gödel:

Teorema (Secondo Teorema di Incompletezza). Sia $\mathcal{T}$ una qualunque teoria assiomatizzabile e sufficientemente espressiva da contenere al suo interno l'aritmetica. Sia $\mathrm{Cons}_{\mathcal{T}}$ una sentenza che asserisce la consistenza di $\mathcal{T}$. Allora, se $\mathcal{T}$ è consistente, $\mathrm{Cons}_{\mathcal{T}}$ non è dimostrabile in $\mathcal{T}$.

Questo secondo teorema è, se possibile, ancora più drammatico del primo. Esso infatti afferma che, all'interno di una teoria consistente, l'affermazione "io sono consistente" è proprio una di quelle proposizioni vere ma non dimostrabili. In altre parole, nessuna teoria consistente potrà mai sapere di esserlo!