Primo foglio di esercizi (•=consigliati) - Matematica 2(Fisica) - gennaio 2007

•1. Nel piano $\mathbb{R}^2$ consideriamo i vettori $v = \binom{1}{2}$ e $w = \binom{-1}{1}$.

(a) mostrare che ogni vettore $x = \binom{x_1}{x_2}$ del piano si scrive in modo unico come combinazione lineare $x = \alpha v + \beta w$ (determinare α e β in funzione di x_1 ed x_2);

(b) disegnare e caratterizzare (tramite equazioni o disequazioni) i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ formati dagli estremi finali dei vettori del tipo $\alpha v + \beta w$ ove α e β sono numeri reali soggetti alle seguenti condizioni:

(C) $\alpha, \beta \in [0, \infty)$
(R) $\alpha + \beta = 1$
(S) $\alpha + \beta = 1$ con $\alpha, \beta \in [0, 1]$
(P) $\alpha, \beta \in [0, 1]$
(T) $\alpha + \beta \leqslant 1$ con $\alpha, \beta \in [0, 1]$
(X) $\alpha + \beta \leqslant 1$.

(c) specificare le relazioni di inclusione tra gli insiemi precedenti.

•2. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ consideriamo i vettori $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) mostrare che un vettore $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ appartiene al piano generato da v e w se e solo se vale la relazione $4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$;

(b) descrivere i sottoinsiemi analoghi a quelli dell'esercizio precedente.

•3. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ consideriamo i vettori $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) verificare che sono linearmente indipendenti e risolvere in α, β, γ la relazione $x = \alpha u + \beta v + \gamma w$ per un vettore $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ generico;

(b) disegnare e caratterizzare (tramite equazioni o disequazioni) i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ formati dagli estremi finali dei vettori del tipo $\alpha u + \beta v + \gamma w$ ove α, β e γ sono numeri reali soggetti alle seguenti condizioni:

(C) $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \infty)$
(Pi) $\alpha + \beta + \gamma = 1$
(Tr) $\alpha + \beta + \gamma = 1$ con $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$
(Pa) $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$
(Te) $\alpha + \beta + \gamma \leqslant 1$ con $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$
(X) $\alpha + \beta + \gamma \leqslant 1$.

(c) specificare le relazioni di inclusione tra gli insiemi precedenti.

4. Verificare che l'insieme dei vettori $u = \binom{1}{2}$, $v = \binom{1}{-1}$, $w = \binom{0}{-1}$ e $z = \binom{-2}{2}$ di $\mathbb{R}^2$ è generatore, ed estrarne tutte le basi possibili di $\mathbb{R}^2$.

5. Verificare che l'insieme dei vettori $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e $z = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$ è generatore, ed estrarne tutte le basi possibili di $\mathbb{R}^3$.

•6. Descrivere tramite equazioni il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (sono linearmente indipendenti?), e poi completare quest'insieme ad una base di $\mathbb{R}^4$.

•7. Verificare che i sottinsiemi di $\mathbb{R}^4$ formati dai vettori $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ soddisfacenti alle condizioni $x_1 - x_4 = 0 = x_1 + x_2$ (sia U) e $x_3 - x_4 = 0 = x_2 + x_3$ (sia V) sono sottospazi vettoriali, trovarne la dimensione evidenziando delle basi; calcolare poi l'intersezione trovandone una base. Trovare le equazioni del più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ contenente sia U che V.

•8. Si determini se i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ formati dai vettori $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ soddisfacenti alle condizioni seguenti siano o meno sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

(a) $x_1^2 + x_2^2 = x_3$
(b) $|x_1| = |x_2|$
(c) $x_1 + x_2 = x_3$
(d) $x_1 x_2 + x_2 x_3 = 0$

(e) $x_1 + x_2 - x_3 + 1 = 0$
(f) $x_1 - x_2^2 = 0$ e $x_1 = 0$
(g) $x_1 - x_2x_3 = 0$ e $x_1 = 0$
In ciascuno dei casi, cercare di disegnare l'insieme in questione.

•9. Consideriamo i quattro punti

$$P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e le quattro rette

$r_0 : X-Y = 0 = Z-1$, $\quad r_1 : X+Y-Z = 0 = 2Z-1$, $\quad r_2 : X-Y = 0 = Z-2$, $\quad r_3 : X+Y = 0 = Z$.

Dire quali rette attraversano il tetraedro formato dai quattro punti, eventualmente specificando le facce o gli spigoli che esse toccano.

•10. Calcolare somma, intersezione (evidenziando basi e dimensioni) per i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:
(a) $V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ e $W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$.
(b) $V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ e $W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

11. Si considerino i seguenti sottoinsiemi dell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$:

$$W_1 = \{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : 2a + 3b - c = 0 \}, \qquad W_2 = \{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : a + 2b - c = 0 \}.$$

(a) Si mostri che W_1 e W_2 sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$;
(b) si trovi un vettore $v \in W_1 \cap W_2$, $v \neq 0$;
(c) si mostri che $W_1 \cap W_2 = \{\alpha v : \alpha \in \mathbb{R}\}$;
(d) si mostri che $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$.

12. Si considerino i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$:

$Z_1 = \{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : a = 2s+t, b = s-t, c = s+t; s,t \in \mathbb{R} \}$ $\quad Z_2 = \{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : a = s+2t, b = 2s-t, c = s-t; s,t \in \mathbb{R} \}$.

(a) Si mostri che Z_1 e Z_2 sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$;
(b) si trovino $(A,B,C), (A',B',C') \in \mathbb{R}^3$ tali che

$$Z_1 \cap Z_2 = \{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : Aa + Bb + Cc = 0, \quad A'a + B'b + C'c = 0 \};$$

(d) si mostri che $Z_1 + Z_2 = \mathbb{R}^3$.

13. Si trovino delle basi degli spazi vettoriali $W_1, W_2, Z_1, Z_2, W_1 \cap W_2, Z_1 \cap Z_2$, descritti negli esercizi precedenti.

14. Si consideri il seguente sottospazio dell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$: $W = \{ \begin{pmatrix} 2s+t \\ s-t \\ s+t \\ s+2t \end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{R} \}$
(a) Si trovi una base $\mathscr{B}$ di W;
(b) si estenda $\mathscr{B}$ ad una base $\mathscr{B}'$ di $\mathbb{R}^4$;
(c) si trovi il sottospazio Z generato da $\mathscr{B}' \setminus \mathscr{B}$;
(d) si mostri che $W \oplus Z = \mathbb{R}^4$.

15. In ciascuno dei seguenti casi determinare un'equazione cartesiana della retta di $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ contenente i punti:
(a) $(-1,-1)$, $(3,2i)$,
(b) $(-1,i)$, $(-i,-i)$,
(c) $(1,2i)$, $(1,-2i)$.

•16. Verificare se le seguenti rette di $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ sono in un fascio: $r : 3i + iX_1 - X_2 = 0$, $s : 5 + X_1 + 3iX_2 = 0$, $t : 1 + X_1 - iX_2 = 0$.

•17. Verificare se le rette $r : \begin{cases} 1 - X_1 + X_2 = 0 \\ X_1 - 2X_2 + X_3 = 0 \end{cases}$, $\quad s : \begin{cases} 1 + X_2 - 3X_3 = 0 \\ 1 - 2X_1 - 2X_2 = 0 \end{cases}$ di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ sono sghembe oppure incidenti.

•18. Si scriva l'equazione del piano di $\mathbb{A}^3(C)$ passate per il punto $P = (1,0,-2)^t$ e parallelo alle rette r,s di equazioni rispettive $X = Y = Z$ e $X + 3Y = 0 = X - Y + Z - 1$.

•19. Si scriva l'equazione della retta t di $\mathbb{A}^3(C)$ passate per il punto $P = (1,0,-2)^t$ e complanare alle rette r,s di equazioni rispettive $X = Y = Z$ e $X + 3Y = 0 = X - Y + Z - 1$. Si verifichi poi se t è incidente o parallela a r ed s.