Secondo foglio di esercizi (•=consigliati) - Matematica 2(Fisica) - gennaio 2007

•1. Sia $V = V_n(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale standard di dimensione n su $\mathbb{R}$, dotato del prodotto scalare. Indichiamo con u, v, w elementi di $V_n(\mathbb{R})$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, fornendo dimostrazioni o controesempi:
(a) se u è non nullo e $u \cdot v = u \cdot w$ per allora $v = w$;
(b) se $v \cdot w = 0$ per ogni $w \in V$ allora $v = 0$;
(b') se $v \cdot w = 0$ per ogni vettore w di una base di V allora $v = 0$;
(c) se $u \cdot v = u \cdot w$ per ogni $u \in V$ allora $v = w$;
(c') se $u \cdot v = u \cdot w$ per ogni vettore u di una base di V allora $v = w$.

2. Sia $V = V_n(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale standard di dimensione n su $\mathbb{R}$, dotato del prodotto scalare. Indichiamo con u, v, w elementi di $V_n(\mathbb{R})$ Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, fornendo dimostrazioni o controesempi:
(a) $\|v + w\| = \|v - w\|$ se e solo se $v \cdot w = 0$;
(b) $\|v + tw\| \geqslant \|v\|$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ se e solo se $v \cdot w = 0$;
(c) $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$ (interpretazione geometrica?);
(d) $\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 = 4v \cdot w$

3. Siano u_1 e u_2 due vettori linearmente indipendenti dello spazio vettoriale standard di dimensione n su $\mathbb{R}$, dotato del prodotto scalare. Sia $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$. Poniamo v_1 la proiezione ortogonale di v lungo u_1 e v_2 la proiezione ortogonale di v lungo u_2. Che relazioni vi sono tra α_1, α_2, v_1 e v_2?

•4. Siano v e w due vettori linearmente indipendenti e sia $u = v - w$. Mostrare che i tre parallelogrammi definiti dalle coppie di vettori v e w, v e u, u e w hanno uguali superfici.

5. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori $v = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$.
(a) Si decomponga il vettore v come somma $v_1 + v_2$ ove v_1 sia ortogonale a w, e v_2 parallelo a w.
(b) Si determinino le superfici dei due parallelogrammi aventi come lati i vettori v,v_1 (primo parallelogramma) e v,v_2 (secondo parallelogramma)
(c) Le due superfici del punto precedente risultano uguali: dire se si tratta di un risultato generale (indipendente dai vettori v e w scelti), ed eventualmente giustificarlo e darne una interpretazione in termini di geometria (piana) elementare.

•6. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori $v_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$.
(a) determinare il sottospazio ortogonale a $\langle v_1, v_2\rangle$;
(b) decomporre il vettore $w = {}^t(1, -1, -9)$ come somma $w = w_1 + w_2 + w_3$ ove w_1 sia parallelo a v_1, w_2 sia parallelo a v_2 e w_3 sia ortogonale sia a v_1 che a v_2.
(c) mostrare che i volumi dei tre tetraedri formati rispettivamente da

$$w, w_1, w_2 \qquad , \qquad w, w_1, w_3 \qquad \text{e} \qquad w, w_2, w_3$$

sono uguali tra loro (possibilmente senza calcolarli).

7. Siano dati quattro punti A, B, C e D del piano (o dello spazio) euclideo. Mostrare che vale l'identità $(A-B) \cdot (C-D) - (A-C) \cdot (B-D) + (A-D) \cdot (B-C) = 0$. Dedurne che le tre altezze di un triangolo si incontrano tutte nello stesso punto.

•8. Nel piano euclideo $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ si considerino le tre rette r, s, t di equazioni rispettive

$$X + Y - 4 = 0, \qquad X + 5Y - 26 = 0, \qquad 15X - 27Y - 424 = 0.$$

(i) Si scrivano le equazioni delle rette n_r, n_s, n_t passanti per l'origine e normali a r, s, t, rispettivamente;
(ii) Si verifichi che i tre punti $r \cap n_r$, $s \cap n_s$, $t \cap n_t$ sono allineati.

9. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ si considerino la retta r ed il piano α di equazioni rispettive

$$\frac{X-1}{2} = \frac{Y+1}{3} = \frac{Z-1}{4}, \qquad X + Y + Z - 1 = 0.$$

Si trovino delle equazioni cartesiane della proiezione ortogonale di r su α.

•10. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ si considerino le rette r ed s di equazioni rispettive

$$X - 1 = Y, X + Y = Z; \qquad X = Z, X - Y = 2.$$

(i) Trovare la retta n normale ad r ed s ed incidente sia r che s;
(ii) Trovare la distanza tra r ed s;
(iii) Sia P_z il punto di s la cui terza coordinata è z. Calcolare la distanza di P_z da r, in funzione di z.

•11. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ si considerino le rette r ed s di equazioni rispettive

$$r : \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - y + z = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases} .$$

(i) Trovare la retta n normale ad r ed s ed incidente sia r che s;
(ii) Trovare la distanza tra r ed s;
(iii) Sia P_t il punto di r la cui prima coordinata è t. Calcolare la distanza di P_t da s, in funzione di t;
(iv) Si scrivano le equazioni delle proiezioni ortogonali di r, s ed n sul piano passsante per l'origine, parallelo ad r e s.

12. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$, si considerino le rette r, s di equazioni parametriche :

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases} , \qquad s : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + t \end{cases} .$$

(a) Si mostri che r, s sono incidenti e si trovi un'equazione del piano che le contiene.
(b) Si trovino delle equazioni cartesiane delle rette passanti per $r \cap s$, parallele al piano di equazione $x + y + z = 0$, e formanti angoli uguali con r ed s.

13. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ con riferimento canonico, si considerino le rette r, s di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - 2z = 1 \end{cases} , \qquad s : \begin{cases} x - y = -1 \\ x - z = 1 \end{cases} .$$

(a) Si trovino delle equazioni cartesiane di tutte le rette complanari con r ed s ed incidenti l'asse z;
(b) Si indichi con r_k la retta della famiglia di cui al punto (a) che passa per il punto di coordinate $(0, 0, k)$; si chiede se esistono dei k per i quali r_k sia ortogonale ad uno degli assi coordinati.

•14. Nello spazio euclideo tridimensionale si consideri la retta r per $P = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ e direzione $v = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$.
(a) Scrivere l'equazione cartesiana del cono $\mathscr{C}$, di asse r, vertice P e semiapertura $\frac{\pi}{3}$.
(b) Trovare i punti di intersezione, Q_1 e Q_2, tra $\mathscr{C}$ e la retta s per $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ e direzione $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)$.
(c) trovare l'equazione del piano π contenente s e perpendicolare ad r; sia $R = \pi \cap r$.
(d) Si calcoli il volume del tetraedro di vertici P, Q_1, Q_2, R.

•15. Nello spazio euclideo tridimensionale si consideri la retta r per $P = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$, e direzione $v = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$.
(a) Si scriva l'equazione cartesiana del cilindro $\mathscr{C}$ formato dai punti che distano 1 da r.
(b) Si determinino i punti di intersezione di $\mathscr{C}$ con i tre assi coordinati.
(c) Si calcoli il volume del tetraedro definito dai punti trovati in (b).

16. Nello spazio euclideo tridimensionale, si trovi l'equazione del cono che proietta dal punto $P = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ la circonferenza sul piano (x, y) centrata nel punto $C = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ e raggio 2.

***17.** Il nuovo appartamento (F. Baldassarri). Un Tizio compra un nuovo appartamento, sottinsieme dello spazio euclideo reale 4-dimensionale, della forma:

$$A = \left\{ x = \left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{E}^4(\mathbb{R}) \text{ tali che } x_i \in [0,1] \text{ per ogni } i \text{ e } x_i \in \{0,1\} \text{ per almeno un } i \right\}$$

(si tratta della "buccia tridimensionale" dell'ipercubo unitario $[0,1]^4$ di $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$).

Diciamo che una stanza sia un insieme in biiezione con $[0,1]^3$, e una parete sia un insieme in biiezione con $[0,1]^2$.

17.1. Quante stanze vi sono nell'appartamento A? Per ciascuna stanza trovare una biiezione con $[0,1]^3$ che rispetti le strutture metriche (distanze ed angoli).

17.2. Se ogni parete (compresi soffitti e pavimenti) di ogni stanza dell'appartamento ha una porta, quante porte ci sono? Quante porte di ingresso?

17.3. Tizio vuole dipingere le stanze, in modo che stanze adiacenti abbiano colori diversi, usando il minimo numero possibile di colori. Quanti ne occorrono?

17.4. Fare un disegno dell'appartamento in cui si possano controllare i risultati precedenti.