Terzo foglio di esercizi (•=consigliati) - Matematica 2(Fisica) - gennaio 2007

•1. Siano v e w due vettori non nulli di uno spazio vettoriale V. Sotto quali condizioni i vettori v e $\alpha v + \beta w$ sono linearmente indipendenti?

•2. Consideriamo lo spazio vettoriale reale delle applicazioni continue di $\mathbb{R}$ in sè.
(a) vero che l'insieme formato dalle tre funzioni 1 (funzione costante), $\sin^2$ e $\cos^2$ è linearmente dipendente?
(b) si consideri l'insieme $\{\sin(nx) : n \in \mathbb{N},\ n \neq 0\} \cup \{\cos(nx) : n \in \mathbb{N}\}$ e si dimostri che è un insieme linearmente indipendente;
(c) cosa dire dell'insieme $\{\sin(\alpha + nx) : n \in \mathbb{N},\ n \neq 0,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$?

•3. Sia $V = K[X]_{\leqslant 4}$ lo spazio vettoriale su K dei polinomi di grado minore o uguale a 4.
(a) qual è la dimensione di V su K?
(b) esistono basi di V i cui elementi siano polinomi di grado 4?
(c) esistono basi di V i cui elementi siano polinomi di grado minore o uguale a 3?
(d) esistono basi di V i cui elementi siano polinomi privi di termine noto?

•4. Sia $V = K[X]_{\leqslant 4}$ lo spazio vettoriale su K dei polinomi di grado minore o uguale a 4. Consideriamo i seguenti sottinsiemi:

$$V_s = \{f \in V : f(X) = f(-X)\} \qquad \text{e} \qquad V_a = \{f \in V : f(X) = -f(-X)\}\ .$$

(a) mostrare che V_s e V_a sono sottospazi, trovarne delle basi e le dimensioni;
(b) è vero che $V = V_s \oplus V_a$?
(c) generalizzare sostituendo 4 con n generico.

•5. Come l'esercizio precedente usando i sottoinsiemi $U = \{f \in V : f(X) = f(1 - X)\}$ e $W = \{f \in V : f(X) = -f(1 - X)\}$.

6. Qual è la minima dimensione di uno spazio vettoriale V tale che due suoi sottospazi di dimensione m_1 ed m_2 si intersecano solo nel vettore nullo? Dare degli esempi per $m_1, m_2 = 1, 2, 3, 4$.

7. Qual è la massima dimensione di uno spazio vettoriale V tale che due suoi sottospazi di dimensione m_1 ed m_2 hanno intersezione sempre non banale? Dare degli esempi per $m_1, m_2 = 1, 2, 3, 4$.

8. Due sottospazi vettoriali U e W di V sono complementari, cioè $V = U \oplus W$; sia v un vettore non appartenente a $U \cup W$ (cioè non appartenente né a U né a W). Calcolare la dimensione dei sottospazi $U + \langle v \rangle$, $W + \langle v \rangle$ e della loro intersezione.

•9. Sia $Q(X) = c(X - \alpha_1)^{m_1} \cdots (X - \alpha_r)^{m_r}$ un polinomio di grado $n = \sum_{i=1}^{r} m_i$ in $V = K[X]$ e consideriamo l'insieme

$$V_Q = \left\{ \frac{P(X)}{Q(X)} : P(X) \in V \text{ con } \deg P(X) < n \right\}$$

(a) mostrare che V_Q è spazio vettoriale su K di dimensione n;
(b) mostrare che l'insieme $\{\frac{1}{(X-\alpha_i)^{j_i}} : j_i = 1, \ldots, m_i \text{ e } i = 1, \ldots, r\}$ è una base di V_Q su K.

•10. Si consideri l'insieme $\mathbb{R}_{>0}$ dei numeri reali strettamente positivi, dotato delle seguenti operazioni: la "somma" di due numeri sia il loro prodotto, il prodotto scalare del reale $\alpha \in \mathbb{R}$ per l'elemento $r \in \mathbb{R}_{>0}$ sia r^α. Dimostrare che $\mathbb{R}_{>0}$ con queste operazioni è uno spazio vettoriale reale il cui vettore nullo è 1. Ha dimensione finita?

11. Siano V lo spazio vettoriale dei polinomi reali di grado $\leqslant 3$. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi sono basi, sistemi di generatori, insiemi linearmente indipendenti
(a) $\{1, x, x^3\}$.
(b) $\{3, 1 + x, x + x^2, 2x^3, 3x + 2\}$.
(c) $\{18 + x, 19 + x^2, 20 + x^3, 21\}$.
(d) $\{x + x^3, x^2 + 1, x^2 - 1, x - x^3\}$.

12. Su $\mathbb{R}^2$ poniamo $\binom{x_1}{x_2} + \binom{y_1}{y_2} = \binom{x_1+y_1}{x_2+y_2}$, $\lambda\binom{x_1}{x_2} = \binom{\lambda x_1}{0}$ per ogni $x_1, x_2, y_1, y_2, \lambda \in \mathbb{R}$. Con queste operazioni, $\mathbb{R}^2$ diventa spazio vettoriale su $\mathbb{R}$?

13. Sia P_n lo spazio vettoriale dei polinomi reali di grado $\leqslant n$, e sia $D : P_n \to P_n$ l'usuale derivazione. Se $p \in P_n$ è di grado n, verificare che $\{p, Dp, D^2p, \ldots, D^np\}$ è base di P_n.

14. Sia V uno spazio vettoriale. Verificare che
(a) se $\alpha : V \to V$ è una applicazione lineare, allora $\{v \in V : \alpha(v) = v\}$ è un sottospazio di V;

(b) se $W \leqslant V$, allora esiste una applicazione lineare $\beta : V \to V$ tale che $\{v \in V : \beta(v) = v\} = W$.

15. Si consideri l'applicazione f di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^4$ definita da $f(s,t) = (2s+t, s-t, s+t, s+2t)$.
(a) Si mostri che f è lineare;
(b) si determini $\ker(f)$;
(c) si trovi una base di $\operatorname{im}(f)$.

16. Si consideri l'omomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$ definito da $f(r,s,t) = (r+s+t, 2r-s)$.
(a) Si mostri che f è suriettivo;
(b) si determini $\ker(f)$;
(c) trovare $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $f^{-1}((1,2)) = v + \ker(f)$;
(d) mostrare che per ogni $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, esiste $v \in \mathbb{R}^3$, tale che $f^{-1}((a,b)) = v + \ker(f)$.

•17. Siano U, V spazi vettoriali sul campo C. Siano W, Z sottospazi di U tali che $W \cap Z = 0$. Dimostrare che se $f : W \to V$ e $g : U \to V$ sono applicazioni lineari, esiste una applicazione lineare $h : U \to V$ tale che $h_{|W} = f$ e $h_{|Z} = g$. Quando h è unica?

•18. Per ognuna delle seguenti condizioni, definire se possibile un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ (non nullo e) che la verifichi:
(a) nucleo e immagine coincidano;
(b) il nucleo contenga l'immagine;
(c) il nucleo sia non nullo e contenuto nell'immagine;
(d) nucleo e immagine siano complementari;
(e) il nucleo sia diverso dall'immagine e la somma dei due non dia diretta.
Stesso problema nel caso di endomorfismi di $\mathbb{R}^4$.

••19. Proiezioni. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione n sul corpo C ed f un endomorfismo di V tale che $f^2 = f$.
(a) Si mostri che $V = \operatorname{im} f \oplus \ker f$.
(b) Si mostri che esistono una base $(v_1, \dots, v_n)$ di V ed un intero i, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, tali che $f(v_j) = v_j$, se $j < i$, e $f(v_j) = 0$, se $j \geqslant i$.
(c) Ogni applicazione lineare con la proprietà detta (il quadrato coincide con l'applicazione stessa) si dice una proiezione sullo schermo $\operatorname{im} f$ dalla direzione $\ker f$. Si verifichi che si tratta in effetti dell'unica applicazione lineare di V in sè che manda un vettore $x = v + w$ con $v \in \operatorname{im} f$ e $w \in \ker f$ nel vettore v.

••20. Simmetrie. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione n su un corpo C di caratteristica zero ed f un endomorfismo di V tale che $f^2 = \mathrm{id}_V$.
(a) Si calcolino $\operatorname{im} f$ e $\ker f$; si deduca che f è necessariamente un isomorfismo.
(b) Siano ora $V_+ = \{v \in V | f(v) = v\}$ e $V_- = \{v \in V | f(v) = -v\}$. Mostrare che allora $V = V_+ \oplus V_-$.
(c) Mostrare che esistono una base $(v_1, \dots, v_n)$ di V ed un intero i, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, tali che $f(v_j) = v_j$, se $j < i$, e $f(v_j) = -v_j$, se $j \geqslant i$.
(d) Ogni applicazione lineare con la proprietà detta (il quadrato coincide con l'applicazione identica) si dice una simmetria di asse (o specchio) V_+ e di direzione V_-. Si verifichi che si tratta in effetti dell'unica applicazione lineare di V in sè che manda un vettore $x = v + w$ con $v \in V_+$ e $w \in V_-$ nel vettore $v - w$.

•21. Relazioni tra Simmetrie e Proiezioni. Dati due sottospazi complementari di uno spazio vettoriale V, si scrivano le relazioni tra le due proiezioni e le due simmetrie che da quegli spazi sono definite.

•22. Scrivere le proiezioni su U nella direzione di W, e di W nella direzione di U per i seguenti due sottospazi di $\mathbb{R}^3$: $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, e per i seguenti due sottospazi di $\mathbb{R}^4$: $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, e $W : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$. Idem per le simmetrie.

•23. Sia P_n lo spazio vettoriale dei polinomi reali di grado $\leqslant n$, e sia $D : P_n \to P_n$ l'usuale derivazione, $D(f) = f'$. Si consideri l'applicazione $f : P_n \to P_n$, $f \mapsto f + xf'$.
(a) Verificare che effettivamente $f + xf' \in P_n$ se $f \in P_n$.
(b) Dimostrare che f è lineare.
(c) Dimostrare che f è un isomorfismo.