Quarto foglio di esercizi (•=consigliati) - Matematica 2(Fisica) - febbraio 2007

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ z+x \end{pmatrix}$

(a) Scriverne la matrice in base canonica;
(b) scriverne la matrice nella base v_1, v_2, v_3 ove v_j è il vettore di coordinate tutte uguali a 1 tranne la j-esima uguale a 0;
(c) scrivere la matrice di cambiamento di base e verificare la relazione tra le due matrici di f;
(d) discutere iniettività e suriettività di f.

•2. Sia $D : C[X]_{\leqslant 4} \to C[X]_{\leqslant 4}$ l'usuale derivazione tra polinomi;
(a) scrivere la matrice associata a D nella base canonica $1, X, X^2, X^3, X^4$;
(b) trovare una base di $C[X]_{\leqslant 4}$ fatta di polinomi di grado 4 e scrivere la matrice associata a D in questa base;
(c) scrivere la matrice di cambiamento di base tra le due basi precedenti, e verificare la relazione di cambiamento di base per le due matrici associate a D;
(d) esistono mappe inverse a destra o a sinistra per D? in caso affermativo, scriverne le matrici nelle due basi date e verificare la relazione con le matrice di D;
(e) ripetere tutto usando $D : C[X]_{\leqslant 4} \to C[X]_{\leqslant 3}$.

•3. Consideriamo la proiezione p su V nella direzione di W e la proiezione q su W nella direzione di V ove $V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ e $W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ sono sottospazi di $\mathbb{R}^4$.
(a) verificare che $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$ e scrivere le matrici di p e q nella base di $\mathbb{R}^4$ formata giustapponendo le basi di V e di W;
(b) si scrivano le matrici A e B di p e q nella base canonica di $\mathbb{R}^4$;
(c) esplicitare le matrici di cambiamento di base e verificare le relazioni tra le matrici precedentemente trovate;
(d) vero che $AB = BA = 0$?

Consideriamo ora la simmetria s di centro V e asse W e la simmetria t di centro W e asse V.
(a') scrivere le matrici di s e t nella base di $\mathbb{R}^4$ formata giustapponendo le basi di V e di W;
(b') si scrivano le matrici A e B di s e t nella base canonica di $\mathbb{R}^4$;
(c') esplicitare le matrici di cambiamento di base e verificare le relazioni tra le matrici precedentemente trovate;
(d') vero che $AB = BA$? vero che $A^2 = B^2 = \mathbb{I}_4$?

•4. Descrivere la proiezione ortogonale e la simmetria ortogonale di direzione il vettore $v = (1, 0, 1)^t$ (in $\mathbb{R}^3$) e $v = (1, 0, 1, 1)^t$ (in $\mathbb{R}^4$).

5. Sia $v \in \mathbb{R}^3$ e consideriamo l'applicazione $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che manda w in $v \times w$. Mostrare che φ è lineare, $\operatorname{im}\varphi = \langle v\rangle^\perp$, $\ker\varphi = \langle v\rangle$, che $w \perp \varphi w$ per ogni w. Verificare che la matrice di φ è antisimmetrica; è vero che ogni matrice antisimmetrica 3×3 si ottiene in questo modo?

•6. Sia $L : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ l'applicazione definita da $L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
(a) Verificare che si tratta di una applicazione lineare e scriverne la matrice nella base canonica;
(b) trovare una base del nucleo di L;
(c) L è suriettiva? Trovare la dimensione e una base dell'immagine di L.

•7. Sia $\varphi : C[X]_{\leqslant 4} \to C[X]_{\leqslant 4}$ la funzione definita da $\varphi(P) = P + XD(P)$ ove D è l'usuale derivazione tra polinomi;
(a) scrivere la matrice associata a φ nella base canonica $1, X, X^2, X^3, X^4$;
(b) scrivere la matrice associata a φ nella base $X^4, D(X^4), D^2(X^4), D^3(X^4), D^4(X^4)$;
(c) scrivere la matrice di cambiamento di base tra le due basi precedenti, e verificare la relazione di cambiamento di base per le due matrici associate a φ;
(d) esistono mappe inverse a destra o a sinistra per φ? in caso affermativo, scriverne le matrici nelle due basi date e verificare la relazione con le matrice di φ.

8. Siano $A \in M_2(\mathbb{Q})$ e $B \in M_3(\mathbb{Q})$; si consideri l'applicazione $\tau : M_{2\times 3}(\mathbb{Q}) \to M_{2\times 3}(\mathbb{Q})$ definita da $\tau(X) = AXB$.
(a) Si mostri che τ è lineare;
(b) si mostri che τ è invertibile se e solo se A e B sono invertibili;
(c) si scriva una matrice di τ nella base canonica con l'ordine lessicografico;

(d) stimare le dimensioni di nucleo e immagine di τ in funzione dei ranghi di A e B.

•9. Si considerino gli spazi vettoriali V e W su $\mathbb{R}$ con le rispettive basi $\mathscr{V} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ e $\mathscr{W} = (w_1, w_2, w_3)$.

(a) Si dica se esiste un'applicazione lineare $\varphi : V \to W$ che soddisfa alle seguenti condizioni

$$\varphi(v_1 + v_2) = 2w_1 + w_2 + 3w_3, \qquad \varphi(v_2 + v_3) = 2w_1 + 2w_2 + 5w_3,$$
$$\varphi(v_1 + v_2 + v_3) = 4w_1 + 2w_2 + 6w_3, \qquad \varphi(v_2 + v_3 + v_4) = 4w_1 + w_2 + 4w_3;$$

e se ne scriva la matrice rispetto alle basi date.

(b) Si mostri che il sottoinsieme $A = \{\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) : \varphi \circ \psi = 0\}$ è un sottospazio dello spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ e se ne calcoli la dimensione. Sia $\alpha_{\mathscr{V},\mathscr{V}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) \to M_4(\mathbb{R})$ l'applicazione che ad ogni endomorfismo di V associa la sua matrice, rispetto alla base $\mathscr{V}$. Si determini una base per il sottospazio immagine di A.

(c) Si mostri che il sottoinsieme $B = \{\vartheta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, W) : \vartheta \circ \varphi = 0\}$ è un sottospazio dello spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, W)$ e se ne calcoli la dimensione. Sia $\alpha_{\mathscr{W},\mathscr{W}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, W) \to M_3(\mathbb{R})$ l'applicazione che ad ogni endomorfismo di W associa la sua matrice, rispetto alla base $\mathscr{W}$. Si determini una base per il sottospazio immagine di B.

(d) Si consideri il sottinsieme $C = \{(\psi, \vartheta) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, W) : \vartheta \circ \varphi \circ \psi = 0\}$ del prodotto cartesiano $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, W)$, e si mostri che $A \times B$ è contenuto in C. È vero o falso che $A \times B = C$? È vero o falso che C sia un sottospazio di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, W)$?

•10. Si considerino gli spazi vettoriali V e W su $\mathbb{R}$ con le rispettive basi $\mathscr{V} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ e $\mathscr{W} = (w_1, w_2, w_3)$.

(a) Si dica se esistono applicazioni lineari $\varphi : V \to W$ che soddisfano alle seguenti condizioni

$$\varphi(v_1 + v_2 + v_3) = 2w_1 + 4w_2 + 2w_3, \qquad \varphi(v_1 + v_3) = 2w_1 + 3w_2 + w_3,$$
$$\varphi(v_1 + v_2) = w_1 + 2w_2 + w_3, \qquad \varphi(v_2 + v_3) = w_1 + 3w_2 + 2w_3;$$

ed eventualmente si decriva questo insieme come sottoinsieme dello spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$.

(b) Sia $\alpha_{\mathscr{V},\mathscr{W}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \to M_{4\times 3}(\mathbb{R})$ l'applicazione che ad ogni morfismo di V in W associa la sua matrice, rispetto alle basi $\mathscr{V}$ e $\mathscr{W}$. Si descriva l'insieme precedente in termini dello spazio vettoriale $M_{4\times 3}(\mathbb{R})$.

11. Si considerino gli spazi vettoriali V e W su $\mathbb{R}$ con le rispettive basi $\mathscr{V} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ e $\mathscr{W} = (w_1, w_2, w_3)$.

(a) Si dica se esiste un'applicazione lineare $\varphi : V \to W$ che soddisfa alle seguenti condizioni

$$\varphi(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = w_1 + w_2 + w_3, \qquad \varphi(v_1 + v_2) = w_1 - 2w_2,$$
$$\varphi(v_1 + v_2 + v_3) = 2w_1 + 2w_2 + 2w_3, \qquad \varphi(v_1 - v_2) = w_1 - 2w_2;$$

e se ne scriva la matrice rispetto alle basi date.

(b) Si dica se il sottoinsieme $A = \{\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) : \varphi \circ \psi = \varphi\}$ è un sottospazio dello spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$, e in ogni caso se ne dia una descrizione esplicita.

(c) Sia $\alpha_{\mathscr{V},\mathscr{V}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) \to M_4(\mathbb{R})$ l'applicazione che ad ogni endomorfismo di V associa la sua matrice, rispetto alla base $\mathscr{V}$. Si descriva l'immagine di A in termini dello spazio vettoriale $M_4(\mathbb{R})$.

12. Si diano degli esempi di matrici quadrate dello stesso ordine, non nulle, A e B tali che $AB = 0$. È vero che allora necessariamente si ha $BA = 0$ (giustificare o dare controesempi)? Interpretare gli esempi in termini di applicazioni lineari rappresentate da quelle matrici.

13. Dire se è possibile che il prodotto di tre matrici A, B, C, quadrate dello stesso ordine e non nulle, si annulli ($ABC = 0$) nei seguenti casi: (a) A sia invertibile; (b) B sia invertibile; (c) C sia invertibile (giustificare la risposta o dare dei controesempi).

14. Siano A e B due matrici quadrate dello stesso ordine. Dire che rapporti vi sono tra il fatto che A e B siano invertibili e il fatto che $A + B$ sia invertibile. Spiegare con degli esempi.

•15. Siano A e B due matrici quadrate di ordine m ed n rispettivamente a coefficienti in C; consideriamo i seguenti insiemi:

$$\mathscr{A} = \{X \in M_{m\times n}(C) : AX = 0\}\,, \quad \mathscr{B} = \{X \in M_{m\times n}(C) : XB = 0\}\,, \quad \mathscr{C} = \{X \in M_{m\times n}(C) : AXB = 0\}\,.$$

(a) Verificare che sono tre sottospazi di $M_{m\times n}(C)$ e stabilire le ovvie relazioni di inclusione;

(b) calcolare le dimensioni dei tre sottospazi in funzione dei ranghi di A e B;

(c) studiare $\mathscr{A} \cap \mathscr{B}$;

(d) è vero che $\mathscr{A} + \mathscr{B} = \mathscr{C}$?