Quinto foglio di esercizi (•=consigliati) - Matematica 2(Fisica) - febbraio 2007

1. Risolvere il sistema lineare $Ax = b$ di matrice completa $\begin{pmatrix} 10 & 23 & 17 & 44 & 25 \\ 15 & 35 & 26 & 69 & 40 \\ 25 & 57 & 42 & 108 & 65 \\ 30 & 69 & 51 & 133 & 95 \end{pmatrix}$.

•2. Al variare di $\ell \in \mathbb{R}$, risolvere i sistemi lineari $A_\ell x = b_\ell$ di matrice completa

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \ell \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 14 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & -3 & 3 & \ell & 7 \end{pmatrix}.$$

•3. Al variare di $\ell \in \mathbb{R}$ risolvere l'equazione $XA_\ell = 0$, dove $A_\ell = \left(\begin{smallmatrix} \ell & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. In questo problema l'incognita è la matrice $X = \left(\begin{smallmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{smallmatrix}\right)$, quindi l'equazione $XA_\ell = 0$ diventa un sistema lineare omogeneo in $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$.

4. Sia $\Sigma : Ax = b$ un sistema lineare con $A \in M_{m\times n}(K)$. Sia $H \in M_m(K)$ e $\Pi : HAx = Hb$. Se Σ ha soluzioni, Π ha soluzioni? In generale che relazione c'è tra i due insiemi di soluzioni? La stessa domanda con H invertibile.

•5. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi

$$U = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle, \quad V = \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle.$$

Determinare tre sistemi lineari tali che U, V e $U \cap V$ ne siano rispettivamente gli insiemi delle soluzioni. Risolvere lo stesso problema trovando però sistemi minimali di equazioni per ciascuno dei sottospazi U, V e $U \cap V$.

•6. Sia S l'insieme $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 2\lambda-1 \\ \mu+3 \\ 3\lambda+1 \\ -\lambda+\mu \end{smallmatrix}\right) \text{ tali che } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$. Determinare un sistema lineare il cui insieme delle soluzioni coincide con S.

•7. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Dimostrare che l'insieme delle matrici che commutano con A (cioè l'insieme delle matrici $B \in M_2(\mathbb{R})$ tali che $AB = BA$) è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ e calcolarne la dimensione. Per ogni intero n calcolare A^n. Determinare, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, la dimensione dello spazio delle matrici di $M_2(\mathbb{R})$ che commutano con A^n.

•8. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ si consideri il sistema lineare

$$\Sigma_t : \begin{cases} -tx + (t-1)y + z = -1 \\ (t-1)y + tz = 1 \\ 2x + z = 5 \ . \end{cases}$$

Sia S_t l'insieme delle soluzioni di Σ_t.
(a) Per quali valori di t S_t è costituito da un solo punto?
(b) Per quali valori di t S_t è vuoto?
(c) Per quali valori di t S_t è una sottovarietà lineare affine di dimensione 1?
(d) Per i valori di t di cui al punto (c), esibire equazioni parametriche di S_t.

•9. Consideriamo il sistema lineare reale Σ_k: $A_k x = b_k$ di matrice completa

$$C_k = \begin{pmatrix} 0 & 2k & k^2-1 & 0 \\ k & -1 & -k & -1 \\ 1 & -k & 1 & k \end{pmatrix}.$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$. Determinare per quali valori di k Σ_k ammette un'unica soluzione e, in questi casi, determinare la soluzione di Σ_k. Risolvere lo stesso problema su $\mathbb{C}$.

10. Consideriamo il sistema lineare reale

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = \lambda \\ (2-\lambda)x + y + z = 1 \end{cases}$$

al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Discutere i ranghi delle matrici completa e incompleta al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
(b) Determinare per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni S_λ.
(c) Descrivere l'insieme S unione di tutti gli S_λ.
(d) È vero che S è una sottovarietà affine lineare? Eventualmente qual'è la minima sottovarietà affine lineare contenente S?

11. Come l'esercizio precedente, usando il sistema

$$\begin{cases} x + (1-\lambda)y + z = 1 + \lambda \\ (2-\lambda)x + (\lambda-1)^2 y + \lambda z = 3 - \lambda^2 \\ x + (\lambda - 1)z = 2 + \lambda \end{cases}$$

12. Sia $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Si discuta il sistema $AX = b$ al variare di b in $\mathbb{R}^4$; in particolare si mostri che i b per i quali il sistema ammette soluzione, sono tutte e sole le soluzioni di un'equazione lineare omogenea.

13. Si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} lx & + & my & - & mz & = & m \\ mx & - & ly & & & = & l \\ x & - & y & - & z & = & 0 \end{cases}$$

Si dica per quali coppie $(l, m) \in \mathbb{R}^2$ il sistema ammette soluzioni, e per quali la soluzione è unica.

14. Calcolare il rango della matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & t & 0 & 1 \\ t & t & 2t+t^2 & t^2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ al variare di t in $\mathbb{R}$.

•15. Si calcolino le inverse delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Si indichino con A e B gli spazi delle soluzioni dei seguenti sistemi lineari omogenei:

$$\begin{cases} 2x_1 & -3x_2 & & -x_4 & = 0 \\ & 3x_2 & -2x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & & & +x_4 & = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_1 & +2x_2 & -3\lambda x_3 & & = 0 \\ (\lambda+1)x_1 & +2x_2 & -3\lambda x_3 & +x_4 & = 0 \\ & 2\lambda x_2 & -3x_3 & +2\lambda x_4 & = 0 \end{cases}$$

Si determini la funzione d definita su $\mathbb{R}$ da $d(\lambda) = \dim(A \cap B)$.

•17. Un quadrato magico è una matrice quadrata, con termini interi positivi o nulli, tale che le somme dei termini su ogni riga, su ogni colonna e sulle due diagonali coincidano tutte. Determinare tutti i quadrati magici d'ordine 2 (sono solo quelli banali, con tutte le entrate uguali) e 3 (mostrare in particolare che il termine centrale della matrice è necessariamente un terzo della somma).

***18.** Nidi di vespe. Le vespe di una specie costruiscono un nido della forma $\{x \in \mathbb{R}^3 | \|x\| \leqslant 1\}$ (una sfera unitaria) diviso in un certo numero di celle dai piani coordinati di $\mathbb{R}^3$.

18.1. Quante celle vi sono? Quante pareti? Quante pareti ha ogni cella? Quante interne e quante esterne?

18.2. Con quante altre celle comunica ogni cella? Ogni parete è in comune a quante celle?

18.3. Quanti colori bisogna usare per colorare le celle in modo che ogni cella abbia un colore diverso da tutte quelle adiacenti?

Ora una vespa progetta un iper-nido della forma seguente:

$$\{x \in \mathbb{R}^4 | \|x\| \leqslant 1 \text{ ed esiste un indice } i \text{ con } x_i = 0\ \}$$

(intersezione della palla unitaria di $\mathbb{R}^4$ con gli iperpiani coordinati), e si chiede:

18.4. quanti nidi del tipo precedente vi sono nell'iper-nido?

18.5. quante celle vi sono? quante pareti? quante pareti ha ogni cella? Quante interne e quante esterne?

18.6. con quante altre celle comunica ogni cella? ogni parete è in comune a quante celle?

18.7. quanti colori bisogna usare per colorare le celle in modo che ogni cella abbia un colore diverso da tutte quelle adiacenti?

18.8. vero che ogni cella ha la sua uscita verso l'esterno?