Sesto foglio di esercizi (•=consigliati) - Matematica 2(Fisica) - Febbraio 2007

1. Verificare che $\det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 42$.

•2. Procedendo per induzione sull'ordine della matrice, ed usando operazioni elementari sulle righe nel passo induttivo, calcolare il determinante di Vandermonde: $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_k \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^k & x_1^k & \cdots & x_k^k \end{pmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$ (quindi la matrice è degenere se e solo se due colonne coincidono). Provare a calcolare l'inversa di questa matrice, se essa è invertibile (suggerimento: pensare ai polinomi simmetrici).

•3. Sia $X = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ una matrice a blocchi, ove $A \in M_{r\times r}(\mathbb{R})$ e $C \in M_{s\times s}(\mathbb{R})$. Si mostri che $\det X = \det A \det C$, usando sia la definizione, sia la tecnica di riduzione di Gauss.

•4. Sia $A \in M_{(2n+1)\times(2n+1)}(\mathbb{R})$ tale che $A = -{}^tA$. Mostrare che $\det A = 0$. Mostrare che

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = (af + be - cd)^2 \ .$$

•5. Calcolare il detrminante delle matrici elementari invertibili che si usano nel metodo di riduzione di Gauss. Dimostrare poi che la funzione determinante $\det : M_n(C) \to C$ è l'unica funzione moltiplicativa ($\det(AB) = \det(A)\det(B)$) tale che $\det(\mathbb{I}_n - (1-a)e_{i,i}) = a$ per ogni $a \in C$ e ogni $i = 1, \ldots, n$ (ma sarebbe sufficiente per $i = 1$). *Suggerimento: osservare per prima cosa che la funzione determinante è nota una volta che si conosca il suo valore sulle matrici diagonali e sulle matrici elementari che servono nella riduzione di Gauss...*

6. Calcolare i determinanti delle seguenti matrici $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & c & 1 \\ 0 & 0 & 1 & d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e \end{pmatrix}$.

7. Calcolare i determinanti delle seguenti matrici $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ b & 1 & b \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ c & 1 & b & 0 \\ 0 & b & 1 & c \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ d & 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & c & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$.

•8. PIANO AFFINE Siano $P_i = (x_i, y_i)^t \in \mathbb{A}^2(C)$ punti del piano affine e $v_i = (l_i, m_i)^t \in V_2(C)$ vettori.

8.1. CONDIZIONE DI ALLINEAMENTO DI TRE PUNTI: Tre punti P_0, P_1, P_2 sono allineati se e solo se $\begin{vmatrix} x_1-x_0 & x_2-x_0 \\ y_1-y_0 & y_2-y_0 \end{vmatrix} = 0$ ovvero $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0$.

8.2. RETTA PER DUE PUNTI: $P_0 + \langle P_1 - P_0 \rangle$; ha equazione cartesiana data da: $\begin{vmatrix} X-x_0 & x_1-x_0 \\ Y-y_0 & y_1-y_0 \end{vmatrix} = 0$ ovvero $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X & x_0 & x_1 \\ Y & y_0 & y_1 \end{vmatrix} = 0$.

8.3. RETTA PER UN PUNTO E DIREZIONE UN VETTORE: $P_0 + \langle v_0 \rangle$; ha equazione cartesiana: $\begin{vmatrix} X-x_0 & l_0 \\ Y-y_0 & m_0 \end{vmatrix} = 0$ ovvero $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ X & x_0 & l_0 \\ Y & y_0 & m_0 \end{vmatrix} = 0$.

8.4. Date le equazioni cartesiane di tre rette, scrivere una condizione matriciale per riconoscere se o no stanno in un fascio.

•9. SPAZIO AFFINE. Siano $P_i = (x_i, y_i, z_i)^t \in \mathbb{A}^3(C)$ punti dello spazio e $v_i = (l_i, m_i, n_i)^t \in V_3(C)$ vettori.

9.1. CONDIZIONE DI COMPLANARITÀ DI QUATTRO PUNTI: quattro punti P_0, P_1, P_2, P_3 sono complanari se e solo se $\begin{vmatrix} x_1-x_0 & x_2-x_0 & x_3-x_0 \\ y_1-y_0 & y_2-y_0 & y_3-y_0 \\ z_1-z_0 & z_2-z_0 & z_3-z_0 \end{vmatrix} = 0$ ovvero $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$.

9.2. CONDIZIONE DI ALLINEAMENTO DI TRE PUNTI: $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x_1-x_0 & x_2-x_0 \\ y_1-y_0 & y_2-y_0 \\ z_1-z_0 & z_2-z_0 \end{pmatrix} = 1$ ovvero $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{pmatrix} = 2$.

9.3. PIANO PER TRE PUNTI NON ALLINEATI: $P_0 + \langle P_1 - P_0, P_2 - P_0 \rangle$; ha equazione cartesiana: $\begin{vmatrix} X-x_0 & x_1-x_0 & x_2-x_0 \\ Y-y_0 & y_1-y_0 & y_2-y_0 \\ Z-z_0 & z_1-z_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0$, ovvero $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ X & x_0 & x_1 & x_2 \\ Y & y_0 & y_1 & y_2 \\ Z & z_0 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0$.

9.4. PIANO PER UN PUNTO E DIREZIONE DUE VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI: $P_0+\langle v_0, v_1\rangle$; ha equazione cartesiana: $\begin{vmatrix} X-x_0 & l_0 & l_1 \\ Y-y_0 & m_0 & m_1 \\ Z-z_0 & n_0 & n_1 \end{vmatrix}=0$ ovvero $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ X & x_0 & l_0 & l_1 \\ Y & y_0 & m_0 & m_1 \\ Z & z_0 & n_0 & n_1 \end{vmatrix}=0.$

9.5. RETTA PER DUE PUNTI DISTINTI: $P_0+\langle P_1-P_0\rangle$; ha equazioni cartesiane date dalla condizione: $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} X-x_0 & x_1-x_0 \\ Y-y_0 & y_1-y_0 \\ Z-z_0 & z_1-z_0 \end{pmatrix}=1$, ovvero $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X & x_0 & x_1 \\ Y & y_0 & y_1 \\ Z & z_0 & z_1 \end{pmatrix}=2.$

9.6. RETTA PER UN PUNTO E DI DIREZIONE UN VETTORE: $P_0+\langle v_0\rangle$; ha equazioni cartesiane date da: $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} X-x_0 & l_0 \\ Y-y_0 & m_0 \\ Z-z_0 & n_0 \end{pmatrix}=1$ ovvero $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ X & x_0 & l_0 \\ Y & y_0 & m_0 \\ Z & z_0 & n_0 \end{pmatrix}=2.$

9.7. Date le equazioni cartesiane di tre (risp. quattro) piani, scrivere una condizione matriciale per riconoscere se o no stanno in un fascio (risp. in una stella).

•10. PRINCIPIO DEI MINORI ORLATI ED EQUAZIONI DI SOTTOSPAZI. Mostrare che il sottospazio W di $V_n(C)$ generato dai vettori linearmente indipendenti $v_1, v_2, \dots, v_m$ ha equazioni cartesiane ottenute annullando i minori d'orine $m+1$ della matrice

$$A = \begin{pmatrix} X_1 & & & \\ \vdots & v_1 & \cdots & v_m \\ X_n & & & \end{pmatrix}$$

in $M_{n,m+1}(C[X_1, \dots, X_n])$. Si mostri inoltre che, detta B la matrice in $M_{n,m}(C)$ le cui colonne siano i vettori dati e scelto un minore non nullo d'ordine m di B, per descrivere W è sufficiente (e necessario) annullare i minori d'ordine $m+1$ di A che contengono la sottomatrice di B relativa al minore scelto (principio dei minori orlati).

Usando il principio di cui sopra, si diano equazioni cartesiane per i seguenti sottospazi di $V_3(C)$ o $V_4(C)$: $\langle\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix}\right)\rangle$, $\langle\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\1\end{smallmatrix}\right)\rangle$, $\langle\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}\right)\rangle$, $\langle\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\\2\end{smallmatrix}\right)\rangle$, $\langle\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\\2\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\1\\2\end{smallmatrix}\right)\rangle$, $\langle\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\\2\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\1\\2\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)\rangle$.

•11. Verificare che 0, 1 e -1 sono autovalori della matrice reale $A=\left(\begin{smallmatrix}-3 & 5 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 3 & 2 & -1\\ -3 & 6 & 1 & 1\end{smallmatrix}\right)$. Determinare gli autospazi relativi. La matrice A è simile ad una matrice diagonale?

•12. Sia A una matrice quadrata $n \times n$. Verificare che A è non singolare (cioè invertibile) se e solo se 0 non è un autovalore di A.

A si dice nilpotente se e solo se esiste k tale che $A^k = 0$. Verificare che A è nilpotente se e solo se il polinomio caratteristico di A è X^n (sugg.: come risulta il polinomio minimo?).

•13. Sia A una matrice quadrata in $M_n(C)$ e α un autovalore di A. Se $f(x)$ è un polinomio in $C[x]$, allora $f(\alpha)$ è un autovalore di $f(A)$.
Se A è invertibile, allora α^{-1} è un autovalore di A^{-1}.

14. Studiare per quali valori dei parametri le seguenti matrici sono diagonalizzabili:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ a & 0 & 1-a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & a & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a^2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}.$$

•15. Studiare per quali valori del parametro la matrice $\left(\begin{smallmatrix}1 & 2 & a^2-a & a\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{smallmatrix}\right)$ è diagonalizzabile.

16. Calcolare il polinomio caratteristico delle seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & a_0 \\ & a_1 \\ \mathbb{I}_{n-1} & \vdots \\ & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Dedurne che ogni polinomio è polinomio caratteristico di qualche matrice.