Settimo Foglio di Esercizi (•=consigliati) - Matematica 2(Fisica) - febbraio 2007

•1. Calcolare autovalori, molteplicità e nullità, autospazi per le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quali sono diagonalizzabili? Trovare eventualmente la forma di Jordan.

•2. Sia A una matrice quadrata tale che $A^2 = A$. Dimostrare che A è diagonalizzabile e che i suoi autovalori sono solo 0 oppure 1. Se B è una matrice quadrata della stessa dimensione di A e se $B^2 = B$, allora A e B sono simili se e solo se hanno lo stesso rango.

•3. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ di matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica. Determinare il sottospazio massimo X di $\mathbb{R}^4$ ove f coincide con l'applicazione identica. Il sottospazio X ha un complemento f-invariante?

•4. Sia A una matrice quadrata tale che $A^3 = A$.

(a) Dimostrare che A è diagonalizzabile e che i suoi autovalori sono solo 0, 1 oppure -1.

(b) Sia B una matrice quadrata della stessa dimensione di A e $B^3 = B$; scrivere e dimostrare un criterio, basato sul rango e sulle molteplicità degli autovalori, affinché A e B siano simili.

(c) Dire quante matrici diagonali non equivalenti tra loro esistono per le matrici $n \times n$ soddisfacenti all'ipotesi dell'esercizio.

(d) Per i casi $n = 2, 3$ controllare il risultato precedente elencando tutte le possibili matrici in questione.

•5. Sia A una matrice reale quadrata $n \times n$ tale che $A^3 = \mathbb{I}_n$ (matrice identica d'ordine n).

(a) Dire se A è necessariamente diagonalizzabile nel corpo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi;

(b) Dire se A è necessariamente diagonalizzabile nel corpo $\mathbb{R}$ dei numeri reali; è vero che ha 1 come unico autovalore reale?

(c) Dire se A ammette necessariamente una forma canonica di Jordan su $\mathbb{R}$;

(d) Discutere il caso della matrice reale $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$? Lo è su $\mathbb{R}$? Ammette forma canonica di Jordan su $\mathbb{R}$?

6. Sia A una matrice quadrata a coefficienti nel campo $\mathbb{C}$ tale che $A^3 = -A$.

(a) Dire se A è necessariamente diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.

(b) Elencare tutti i possibili autovalori di A in $\mathbb{R}$, il campo dei numeri reali.

(c) Se A è a coefficienti in $\mathbb{R}$, essa è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ se e solo se è la matrice nulla.

(d) Dire quante forme di Jordan non equivalenti esistono per le matrici 2×2 soddisfacenti all'ipotesi dell'esercizio; elencarle tutte.

7. Sia A una matrice quadrata reale tale che $A^3 = A^2$.

(a) Dire se A è necessariamente diagonalizzabile; se no, dare un esempio di matrice non diagonalizzabile soddisfacente all'ipotesi detta.

(b) In ogni caso dimostrare che gli autovalori di A sono solo 0 oppure 1.

(c) È vero o falso che A è diagonalizzabile se e solo se il suo rango coincide con la molteplicità geometrica dell'autovalore 1? Sia B una matrice quadrata della stessa dimensione di A e $B^3 = B^2$; scrivere e dimostrare un criterio, basato sul rango e sulle molteplicità degli autovalori, affinché A e B siano simili.

(d) Dire quante forme di Jordan non equivalenti esistono per le matrici 3×3 e 4×4 soddisfacenti all'ipotesi dell'esercizio; elencarle tutte.

•8. Se A e B sono matrici quadrate dello stesso ordine, e $B = H^{-1}AH$ (con H invertibile), allora si ha che $B^n = H^{-1}A^nH$. Questo può essere utile per semplificare il calcolo delle potenze di una matrice: studiare il caso di matrice diagonalizzabile.

9. La successione di Fibonacci è definita da $x_0 = 1$, $x_1 = 1$ e poi ricorsivamente da $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ (si tratta della crescita di una popolazione di conigli immortali, che ogni anno cresce di un numero di individui pari al numero di individui della popolazione dell'anno precedente). Scrivere i primi numeri della successione. Determinare una formula chiusa, cioè non ricorsiva, che dia x_n in funzione di n.

Suggerimento: il processo di generazione dei numeri si può rappresentare tramite la trasformazione lineare $\left(\begin{smallmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{smallmatrix}\right)$ e iterando il procedimento: $\left(\begin{smallmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^n \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_0 \end{smallmatrix}\right)$ per cui si tratta di calcolare la potenza n-sima di una matrice, che risulta diagonalizzabile (ma $\sqrt{5}$ deve sparire dalle formule).

Più in generale, discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{R}$ della matrice della forma $\left(\begin{smallmatrix} b & a \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, e la sua relazione con formule esplicite per un problema analogo a quello di Fibonacci.

•10. Rotazioni del Piano. Una matrice reale quadrata invertibile A si dice ortogonale se l'inversa coincide con la trasposta, cioè se $A^t A = \mathbb{I}_n$. Mostrare che A è ortogonale se e solo se le sue colonne sono vettori di $\mathbb{R}^n$ a due a due ortogonali e tutti di lunghezza 1 (cioè una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$). Mostrare che $\det A = \pm 1$.

Sia ora A una matrice d'ordine 2 ortogonale e di determinante 1. Mostrare che essa rappresenta una rotazione del piano euclideo in sè. Mostrare inoltre che A non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$, ma lo è su $\mathbb{C}$ (trovandone autovalori ed autovettori complessi). Cosa dire se B è ortogonale d'ordine 2 e di determinante -1?

•11. Traccia. Definiamo la traccia $\mathrm{tr}\,(A)$ di una matrice quadrata A come la somma degli elementi nella diagonale principale. Mostrare che per ogni matrice invertibile P si ha $\mathrm{tr}\,(A) = \mathrm{tr}\,(P^{-1}AP)$ (suggerimento: pensare al polinomio caratteristico di A e guardare il coefficiente del termine di grado $n-1$). Dedurre che allora possiamo definire la traccia per una applicazione lineare (come la traccia di una qualunque matrice che la rappresenti scelta una base dello spazio: la definizione non dipende dalla base). Mostrare che $\mathrm{tr}\,(A+B) = \mathrm{tr}\,(A) + \mathrm{tr}\,(B)$ e $\mathrm{tr}\,(\alpha A) = \alpha \mathrm{tr}\,(A)$ per $\alpha \in \mathbb{R}$, ma in generale $\mathrm{tr}\,(AB) \neq \mathrm{tr}\,(A)\mathrm{tr}\,(B)$.

•12. Rotazioni dello Spazio. Sia ora A una matrice d'ordine 3 ortogonale.

Mostrare che essa ha necessariamente 1 oppure -1 come autovalore (suggerimenti: o si pensa che la matrice rappresenta una isometria dello spazio euclideo, cioè una applicazione lineare che rispetta il prodotto scalare e quindi le lunghezze; oppure ci si accorge che $\det(A - \mathbb{I}_3)\det(A^t + \mathbb{I}_3) = 0$, ragionando sulle matrici antisimmetriche d'ordine dispari).

Mostrare allora che essa è simile ad una matrice a blocchi $\left(\begin{smallmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ con B matrice ortogonale d'ordine 2.

Supponiamo inoltra che $\det(A) = 1$. Allora A è simile ad una matrice della forma $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ con B matrice ortogonale d'ordine 2 e determinante 1. La direzione dell'autovettore di autovalore 1 si dice asse, e sullo spazio ortogonale all'asse viene indotta una rotazione; come calcolare l'angolo di rotazione a partire dalla traccia della matrice?

Cosa dire se B è ortogonale d'ordine 3 e di determinante -1?

13. Problema: diagonalizzazione simultanea. Due matrici quadrate dello stesso ordine n, siano A e B, sono simultaneamente diagonalizzabili (i.e. esiste $P \in \mathrm{GL}(n, C)$ tale che $P^{-1}AP$ e $P^{-1}BP$ sono entrambe diagonali) se e solo se sono (separatamente) diagonalizzabili e commutano tra loro (i.e. $AB = BA$, nel qual caso ciascuna delle due matrici è stabile sugli autospazi dell'altra).

Generalizzare ad un numero finito di matrici.

13.1. Diagonalizzare simultaneamente, se possibile, le due matrici $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ e $B = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ e trovare una trasformazione lineare che le diagonalizza (simultaneamente).

•14. Per ognuna delle seguenti matrici, sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ che, con riferimento alla base canonica (e_1, e_2, e_3, e_4), ha quella matrice:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 & 12 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 15 \\ -2 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -4 & -3 \\ 4 & 0 & 5 & 3 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di f.
(b) Determinare una matrice di Jordan J per f.
(c) Trovare una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto cui f è rappresentata da J.