Ottavo foglio di esercizi (•=consigliati) - Matematica 2(Fisica) - febbraio 2007

•1. Siano A, B matrici quadrate di ordine n su un campo C. Dimostrare che se ${}^tXAY = {}^tXBY$ per ogni X, Y in C^n, allora $A = B$.

•2. Sia P_n lo spazio vettoriale reale delle funzioni polinomiali di grado $\leqslant n$. Su P_n consideriamo la forma bilineare simmetrica

$$(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Verificare che tale forma è definita positiva, e trovare una base ortonormale di P_n nei casi $n = 1, 2, 3$.

•3. Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ con l'usuale prodotto scalare, contenente il vettore $v = (e_1 + e_2 + e_3)/\sqrt{3}$.

•4. Si considerino le seguenti forme quadratiche rispettivamente su $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$ definite da

(a) $Q({}^t(x_1,x_2)) = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2$,
(b) $Q({}^t(x_1,x_2,x_3)) = 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_3$,
(c) $Q({}^t(x_1,x_2,x_3)) = x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2^2 - 18x_2x_3 + 6x_3^2$.

In ciascun caso
(i) scrivere la matrice di Q,
(ii) determinare una forma canonica per Q, calcolare rango e segnatura di Q.
In quali casi l'equazione $Q(v) = 0$ ha soluzioni non nulle?

•5. Sia $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare la cui matrice nella base canonica è $G = \begin{pmatrix} 1&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&2\\0&0&2&1 \end{pmatrix}$

(i) Si mostri che esiste una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la matrice di g è $\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1 \end{pmatrix}$;
(ii) Si mostri che $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2$, ove $V_1 = V_1^{\perp}$, $V_2 = V_2^{\perp}$, e $g_{|V_1\times V_2}$ è non degenere.

•6. Studiare le forme bilineari di $\mathbb{R}^4$ che nella base canonica hanno matrici

$$(a)\begin{pmatrix} 4&2&2&4\\2&10&4&8\\2&4&1&4\\4&8&4&8 \end{pmatrix} \quad (b)\begin{pmatrix} 16&12&8&4\\12&10&7&6\\8&7&1&3\\4&6&3&0 \end{pmatrix} \quad (c)\begin{pmatrix} 25&10&5&10\\10&4&2&4\\5&2&10&14\\10&4&14&18 \end{pmatrix} \quad (d)\begin{pmatrix} 9&9&3&0\\9&9&3&0\\3&3&-3&-2\\0&0&-2&-1 \end{pmatrix};$$

in particolare:
(1) determinare se sono o meno degeneri, se sono o no definite (positive o negative) su $\mathbb{R}$;
(2) determinare se la forma quadratica associata ha vettori isotropi, ed eventualmente identificare i sottospazi isotropi massimali;
(3) trovare una base che diagonalizzi la forma quadratica, determinare rango e indice.

7. Completamento dei quadrati. Il completamento dei quadrati è il metodo che si utilizza per trovare la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado. Più in generale, una forma quadratica $\sum_{i\leqslant j} a_{i,j}X_iX_j$ si può diagonalizare tramite il procedimento di completamento dei quadrati; da questo si può vedere subito la segnatura e il rango. Si procede per ricorrenza (discendente) sul numero di variabili tramite:

(i) se c'è un termine quadratico, supponiamo $a = a_{00} \neq 0$; poniamo

$$aX_0^2+2\lambda X_0+\psi = a(X_0+a^{-1}\lambda)^2+(\psi-a^{-1}\lambda^2)$$

ove $\lambda = \lambda(X_1,\dots,X_n)$ è lineare, $\psi = \psi(X_1,\dots,X_n)$ è quadratico e l'ultima parentesi non dipende da X_0, quindi si procede su di essa per induzione;

(ii) se tutti i termini quadratici sono nulli, possiamo supporre $b = a_{01} \neq 0$ e poniamo

$$bX_0X_1+\lambda X_0+\mu X_1+\psi = b(X_0+b^{-1}\mu)(X_1+b^{-1}\lambda)+(\psi - b^{-1}\lambda\mu)$$

ove $\lambda = \lambda(X_2,\dots,X_n)$ e $\mu = \mu(X_2,\dots,X_n)$ sono lineari, $\psi = \psi(X_2,\dots,X_n)$ è quadratico e l'ultima parentesi non dipende da X_0 e X_1; possiamo allora usare l'identità $4pq = (p+q)^2-(p-q)^2$ al primo termine del lato destro dell'uguaglianza, ottenendo una differenza di due quadrati, e procedere per induzione sulla parte rimanente (che dipende da due variabili in meno).

Alla fine del procedimento, la forma iniziale è stata riscritta come somma (o differenza) di quadrati, in numero inferiore o uguale al numero di variabili della forma quadratica iniziale; l'ovvio cambiamento di coordinate (via via costruito: nel passo (i) avremo $Z_0 = \sqrt{|a|}(X_0+a^{-1}\lambda)$, mentre nel passo ($ii$) avremo $Z_0 = \frac{\sqrt{|b|}}{2}(X_0+X_1+b^{-1}(\mu+\lambda))$ e $Z_1 = \frac{\sqrt{|b|}}{2}(X_0-X_1+b^{-1}(\mu-\lambda)\,)$ permette allora la diagonalizzazione.

8. Scrivere la matrice associata, e calcolare segnatura e rango per le forme quadratiche reali

$$Q(X_0,X_1,X_2,X_3) = X_0^2 + 2X_1^2 + 2X_0X_1 - 2X_0X_3 - 2X_1X_2 - 2X_1X_3 + 2X_2X_3$$
$$Q(X_0,X_1,X_2,X_3) = 11X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + 2X_0X_1 - 2X_1X_2 - 6X_1X_3$$
$$Q(X_0,X_1,X_2,X_3) = X_0^2 - X_1^2 - X_0X_3 - X_1X_2 - X_1X_3 - X_2X_3$$
$$Q(X_0,X_1,X_2,X_3) = 2X_1^2 + X_2^2 + X_0X_1 + X_0X_2 + 2X_1X_2 + 2X_2X_3$$

Per ciascuna evidenziare la trasformazione di coordinate che la porta in forma canonica, e un sottospazio isotropo massimale.

9. Diagonalizzare le forme quadratiche dell'esercizio precedente costruendo se possibile una base ortogonale v_1, v_2, v_3, v_4 tale che i primi r vettori generino lo stesso sottospazio vettoriale generato dai primi r vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$ per ogni $r = 1, \ldots, 4$.

•10. Il piano iperbolico reale. Un piano iperbolico reale è uno spazio vettoriale reale di dimensione 2 dotato di una forma bilineare h non degenere e non definita (né positiva, né negativa).

(1) Mostrare che esiste una base (u_1, u_2) in cui la matrice di h è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
(2) Mostrare che esiste una base (v_1, v_2) in cui la matrice di h è $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
(3) Dedurne rango e segnatura di h.
(4) Descrivere i vettori isotropi in ciascuno dei due riferimenti.
(5) Descrivere i vettori w tali che $h(w,w) = 1$ (e $h(w,w) = -1$) in ciascuno dei due riferimenti.
(6) Usando la parametrizzazione dell'iperbole equilatera tramite le funzioni trigonometriche iperboliche, caratterizzare le coppie di vettori ortogonali per h.
(7) Descrivere le isometrie del piano iperbolico, cioè le trasformazioni lineari che rispettano la forma h. Conviene mettersi nel riferimento diagonalizzante, e caratterizzare le matrici delle isometrie in termini delle funzioni trigonometriche iperboliche.

•11. Mostrare che le matrici in $M_n(\mathbb{R})$ che sono contemporaneamente ortogonali ed ortogonalmente diagonalizzabili sono tutte e sole le matrici di simmetrie ortogonali (nel senso che asse e direzione della simmetria sono ortogonali tra loro). Per ogni n, dare esempi di matrici ortogonali ma non ortogonalmente diagonalizzabili, e di matrici ortogonalmente diagonalizzabili, ma non ortogonali.

12. Classificazione euclidea delle coniche. Una conica del piano euclideo reale è data da una equazione di secondo grado:

$$a_{00}+2a_{01}X+2a_{02}Y+2a_{12}XY+a_{11}X^2+a_{22}Y^2 = 0, \text{ ovvero } \begin{pmatrix} 1 & X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ Y \end{pmatrix} = 0$$

Mostrare che si tratta delle unione di due rette se e solo se il determinante della matrice simmetrica sopra scritta è zero (si dicono allora coniche degeneri o riducibili: determinare in tal caso le rette). In caso contrario, sappiamo che esistono essenzialmente tre tipi di coniche (irriducibili): ellissi (che si distinguono in due classi, a seconda che abbiano o meno punti reali), iperboli e parabole, le cui matrici in un opportuno riferimento ortonormale si scrivono rispettivamente

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -b^2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & p & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(scrivere per esteso le equazioni e riconoscere le coniche in questione; di solito si richiede $a^2 \leqslant b^2$ nel caso di ellissi). Quindi per ogni conica data di matrice simmetrica A, esiste un cambiamento di coordinate $P = \begin{pmatrix} 1 & 0\ 0 \\ x_0 & \\ y_0 & Q \end{pmatrix}$ con Q matrice di rotazione tale che P^tAP sia un multiplo scalare di una delle forme canoniche. Detta $A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, mostrare che:

(1) la conica è una parabola se e solo se $\det A' = 0$; in tal caso l'asse della parabola ha la direzione dell'autovettore di A' di autovalore nullo; come calcolare il vertice della parabola? Come calcolare il parametro $p > 0$?
(2) la conica è una ellisse se e solo se $\det A' > 0$ (ovvero se e solo se gli autovalori di A' hanno lo stesso segno); in tal caso gli assi dell'ellisse hanno le direzioni degli autovettori di A'; come riconoscere l'asse focale? Come calcolare il centro dell'ellisse? Come riconoscere se l'ellisse possiede o meno punti reali? Come calcolare la misura dei semiassi?
(3) la conica è una iperbole se e solo se $\det A' < 0$ (ovvero se e solo se gli autovalori di A' hanno segni opposti); in tal caso gli assi dell'iperbole hanno le direzioni degli autovettori di A'; come riconoscere l'asse focale? Come calcolare il centro dell'iperbole?
(4) Mostrare che $\det A$, $\det A'$ e $\operatorname{tr} A'$ sono invarianti per trasformazioni del tipo usato, e dedurre la forma canonica della conica di matrice A usando solo questi tre numeri (detti gli invarianti ortogonali della conica).