Esame di Geometria (laurea in Fisica)

prova di accertamento del 13 marzo 2009

ESERCIZIO 1. [10 punti] *Nello spazio euclideo, E^5, si considerino i punti, P, Q, R, di coordinate*

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si diano una rappresentazione parametrica ed una rappresentazione cartesiana della sottovarietà lineare $\pi = P \vee Q \vee R$. Che dimensione ha π?*
(b) *Si determini l'area del triangolo di vertici P, Q, R.*
(c) *Si descriva e si applichi un procedimento per calcolare la distanza di π dall'origine di E^5.*

Svolgimento. (a) $\pi = Q + \langle P - Q, R - Q \rangle$ ed ha dimensione 2. Inoltre,

$$\pi : \begin{cases} X_1 = t + 2s \\ X_2 = 1 - t - s \\ X_3 = 2t + s \\ X_4 = 1 - t - s \\ X_5 = t + 2s \end{cases} \qquad \text{da cui si deduce} \qquad \pi : \begin{cases} X_2 - X_4 = 0 \\ X_1 - X_5 = 0 \\ X_1 + 3X_2 + X_3 = 3 \end{cases}.$$

(b) Indicata con T la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori $P - Q$ ed $R - Q$, che formano i lati del triangolo, l'area cercata è uguale ad $A = \frac{1}{2}\sqrt{\det({}^tTT)} = \sqrt{6}$.

(c) La distanza cercata è l'altezza del parallelepipedo, avente $P - O$, $Q - O$, $R - O$, come spigoli, e relativa alla faccia di spigoli $P - Q$ ed $R - Q$. Ovvero il rapporto tra il volume del parallelepipedo e l'area della faccia. L'area è uguale a $2A$, e, indicata con Y la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori $P - O$, $Q - O$, $R - O$, il volume cercato è uguale a $V = \sqrt{\det({}^tYY)} = 6$. Dunque la distanza cercata è $d = V/2A = \sqrt{6}/2$. □

ESERCIZIO 2. [8 punti] *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, di $\mathbb{R}^4$.

(a) *Si determini il polinomio caratteristico di ϕ e si dica se ϕ è invertibile.*
(b) *Si determinino gli autovalori, i relativi spazi di autovettori per ϕ e si dica se ϕ è diagonalizzabile. In caso affermativo si determinino una matrice diagonale, D, ed una matrice invertibile, P, tali che $P^{-1}AP = D$.*

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}) = (x-1)(x+1)(x-2)^2$ ed ha il termine di grado 0 uguale a -4; quindi $\det A = -4$ e ϕ è invertibile.

(b) Le caratteristiche salienti di ϕ sono

Autovalori	1	-1	2
molteplicità algebrica	1	1	2
molteplicità geometrica	1	1	2
Autospazi	$\langle e_1 - e_3 \rangle$	$\langle 5e_1 + 2e_2 - 9e_3 + 8e_4 \rangle$	$\langle 4e_1 - 3e_3, e_2 + e_4 \rangle$

Quindi ϕ è diagonalizzabile e, indicata con $\mathcal{V}$ la base formata dagli autovettori scritti sopra, le matrici cercate sono

$$D = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -9 & -3 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fine della discussione. □

ESERCIZIO 3. [12 punti] *Si consideri lo spazio vettoriale reale V ed una sua base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$. Sia $q : V \to \mathbb{R}$ la forma quadratica definita ponendo*

$$q(x_1v_1 + \cdots + x_4v_4) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 - 4x_2x_4 - 2x_3x_4 + x_4^2.$$

(a) *Si scriva la matrice, G, rispetto alla base data, dell'applicazione bilineare $g : V \times V \to \mathbb{R}$ tale che $q(v) = g(v, v)$ per ogni $v \in V$. Si classifichi l'applicazione g, determinandone l'eventuale nucleo e la segnatura.*

(b) *Si determinino (se esistono) una matrice invertibile, P, ed una matrice diagonale, D, tali che ${}^tPGP = D$.*

(c) *Si dica se esistono due sottospazi (isotropi), $H_1 = \langle u_1, u_2\rangle$ ed $H_0 = \langle u_3, u_4\rangle$, tali che $V = H_1 \oplus H_0$ e la matrice di g, relativa alla base $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$, sia $\left(\begin{smallmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \end{smallmatrix}\right)$. Fissato il sottospazio isotropo, H_1, determinare tutti i possibili sottospazi isotropi, H_0, soddisfacenti alle condizioni precedenti.*

Svolgimento. (a) Si ha

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e $\det G = 8$; quindi g è non-degenere ed il nucleo è uguale a $\langle 0\rangle$. Per determinare la segnatura di g, cerchiamo una base ortogonale. I vettori $w_1 = v_1$ e $w_2 = v_4$, sono ortogonali tra loro e $g(w_1, w_1) = 1$, $g(w_2, w_2) = 1$. Il vettore $w_3 = v_1 - v_3 - v_4$ appartiene al sottospazio $\langle w_1, w_2\rangle^\perp$ e $g(w_3, w_3) = -2$. Infine, $w_4 = 3v_1 + v_2 - v_3 + v_4$ appartiene al sottospazio $\langle w_1, w_2, w_3\rangle^\perp$ e $g(w_4, w_4) = -6$. Quindi $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$ è una base ortogonale di V e la segnatura di g è $(2, 2)$.

(b) Presa la matrice di cambiamento di base, $P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(1)$, si ha ${}^tPGP = D$, ove

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) I due sottospazi devono essere isotropi e due sottospazi isotropi massimali sono, ad esempio,

$$H_1 = \left\langle \sqrt{2}w_1 + w_3, \sqrt{6}w_2 + w_4 \right\rangle \qquad \text{ed} \qquad H_0 = \left\langle \sqrt{2}w_1 - w_3, \sqrt{6}w_2 - w_4 \right\rangle.$$

Chiaramente si ha $V = H_1 \oplus H_2$ e, posto $u_1 = \sqrt{2}w_1 + w_3$, $u_2 = \sqrt{6}w_2 + w_4$, $u_3 = \frac{1}{12}(\sqrt{6}w_2 - w_4)$ ed $u_4 = \frac{1}{4}(\sqrt{2}w_1 - w_3)$, la matrice di g rispetto alla base $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$ è quella cercata.

Ogni sottospazio complementare di $H_1 = \langle u_1, u_2\rangle$, è generato da due vettori del tipo $u_3 + au_1 + bu_2$ ed $u_4 + cu_1 + du_2$ (perché?), ed è un sottospazio isotropo se, e solo se,

$$g(u_3 + au_1 + bu_2, u_3 + au_1 + bu_2) = 2b = 0, \qquad g(u_3 + au_1 + bu_2, u_4 + cu_1 + du_2) = d + a = 0,$$
$$g(u_4 + cu_1 + du_2, u_4 + cu_1 + du_2) = 2c = 0.$$

Quindi i complementari isotropi di H_1 sono i sottospazi $H_a = \langle u_3 + au_1, u_4 - au_2\rangle$, al variare di a in $\mathbb{R}$ e non cambia la matrice di g nella base $u_1, u_2, u_3 + au_1, u_4 - au_2$. □