Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova di accertamento del 13 febbraio 2006

Notazione: Nel seguito si indicheranno con $n_1, n_2, \dots, n_6$ le cifre del numero di matricola (ad esempio, se il proprio numero di matricola è 510243, $n_1 = 5$, $n_2 = 1$, $n_3 = 0$, $n_4 = 2$, $n_5 = 4$, $n_6 = 3$). Chi sia sprovvisto di numero di matricola, ponga $n_1n_2 = 52$, $n_3n_4 =$ mese di nascita, $n_5n_6 =$ giorno di nascita.

ESERCIZIO 1. *Si determinino $n, m \in \{1, 2, 3, 4\}$ in modo che $n_6 - n$ ed $n_5 - m$ siano multipli interi di 4. Nello spazio euclideo, E^4, si considerino i punti*

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ R_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 0 \\ n \end{pmatrix},\ R_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -m \\ 0 \\ -n \end{pmatrix}, \qquad S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ S_2 = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ n \\ 1 \end{pmatrix},\ S_3 = \begin{pmatrix} -m \\ 1 \\ -n \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} m \\ -m \\ -n \\ n \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ m \\ 0 \\ -n \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} -m \\ 0 \\ n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si determinino le dimensioni e le equazioni cartesiane delle sottovarietà lineari $p = P_1 \vee P_2 \vee P_3$, $r = R_1 \vee R_2 \vee R_3$, $s = S_1 \vee S_2 \vee S_3$.*

(b) *Si confrontino a due a due le sottovarietà lineari p, r ed s, e si dica se sono incidenti, parallele, o sghembe. Si calcolino le distanze di p da r e da s.*

(c) *Si consideri l'applicazione f, definita da $X \mapsto (X \vee p) \cap s$, al variare di X di r. Si dica se f è ben definita e si scrivano esplicitamente le coordinate del punto $f(X)$ in funzione di X. È vero che f è un'applicazione affine?*

Svolgimento. (a) I vettori $\overrightarrow{R_1R_2}$ ed $\overrightarrow{R_1R_3}$ sono linearmente dipendenti e quindi $r = R_1 + \left\langle \overrightarrow{R_1R_2} \right\rangle$ è una retta. Analogamente, i vettori $\overrightarrow{S_1S_2}$ ed $\overrightarrow{S_1S_3}$ sono linearmente dipendenti e quindi anche $s = S_1 + \left\langle \overrightarrow{S_1S_2} \right\rangle$ è una retta. Infine, $p = P_1 + \left\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3} \right\rangle = O + \left\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3} \right\rangle$ è un piano. Le equazioni cartesiane delle tre sottovarietà sono

$$r : \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_3 = 0 \\ nx_2 - mx_4 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_4 = 1 \\ nx_1 - mx_3 = 0 \end{cases} \qquad p : \begin{cases} nx_2 + mx_4 = 0 \\ nx_1 + mx_3 = 0 \end{cases}.$$

(b) Le tre sottovarietà lineari sono, a due a due, sghembe. Infatti, l'intersezione tra p ed r è determinata dal sistema lineare di matrice completa

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & -m & 0 \\ 0 & n & 0 & m & 0 \\ n & 0 & m & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} \\ \frac{1}{2n}(III + IV) \\ II \\ \frac{1}{2m}(IV - III) \\ V - nI - mII \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n \end{array}\right).$$

Il sistema non ha soluzione e quindi $p \cap r = \varnothing$; il sistema omogeneo associato ammette solo la soluzione banale e quindi le due sottovarietà sono sghembe. Analogamente si ragiona negli altri casi. Per calcolare la distanza tra p ed r abbiamo bisogno di un vettore ortogonale alle due sottovarietà, ad esempio $n_1 = \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ m \\ 0 \end{pmatrix}$ e si ha

$$d(r, p) = \frac{|n_1 \cdot \overrightarrow{OR_1}|}{\|n_1\|} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + m^2}}.$$

Analogamente, per calcolare la distanza tra p ed s abbiamo bisogno di un vettore ortogonale alle due sottovarietà, ad esempio $n_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ n \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$ e si ha

$$d(s,p) = \frac{|n_2 \cdot \overrightarrow{OS_1}|}{\|n_2\|} = \frac{n+m}{\sqrt{n^2+m^2}}.$$

(c) Sia $X_t = \begin{pmatrix} 1 \\ tm \\ 0 \\ tn \end{pmatrix}$ un generico punto della retta r ($t \in \mathbb{R}$). La sottovarietà lineare $X_t \vee p$ ha equazione cartesiana $2tmnx_1 - nx_2 + 2tm^2x_3 - mx_4 = 0$ ed interseca s nel punto

$$f(X_t) = \begin{pmatrix} \frac{n+m}{4tmn} \\ 1 \\ \frac{n+m}{4tm^2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{n+m}{4tm^2n} \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ n \\ 0 \end{pmatrix},$$

se $t \neq 0$. Dunque f è definita per tutti i punti di r, eccetto R_1 (per cui $R_1 \vee p$ è parallela ad s) e quindi non può essere un'applicazione affine. □

ESERCIZIO 2. *Si determinino $n, m \in \{1,2,3,4\}$ in modo che $n_5 - n$ ed $n_4 - m$ siano multipli interi di 4. In $\mathbb{R}^4$, si considerino i vettori*

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ n \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 2n \\ 2 \\ 0 \\ -n \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} n \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_1 = \begin{pmatrix} n \\ m \\ -1 \\ -m \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} 3n \\ m \\ -1 \\ -m \end{pmatrix},\ w_3 = \begin{pmatrix} n \\ -m \\ 1 \\ m \end{pmatrix}.$$

(a) *Posto $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ e $W = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$, si determinino le dimensioni e dei sistemi di equazioni cartesiane per i due sottospazi. È vero che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$?*

(b) *Detta $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proiezione su U parallelamente a W, si scriva la matrice $A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi)$, ove $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.*

(c) *Si determinino delle matrici invertibili P e Q tali che $PAQ = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ove $r = \mathrm{rk} A$. È vero che esiste una matrice invertibile S tale che $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?*

Svolgimento. (a) Si ha $u_1 + u_2 - 2u_3 = 0$ e quindi i tre vettori sono linearmente dipendenti, per cui $\dim U = 2$. Analogamente, $2w_1 - w_2 + w_3 = 0$ per cui $\dim W = 2$. Dei sistemi di equazioni cartesiane che definiscano i due sottospazi sono

$$U : \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 - nx_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad W : \begin{cases} x_2 + x_4 = 0 \\ mx_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

Infine osserviamo che $U \cap W = \langle 0 \rangle$ e quindi $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(b) Dato un vettore $x \in \mathbb{R}^4$, la proiezione, $\pi(x) = \alpha u_1 + \beta u_3$, è determinata dalla condizione che la differenza $x - \pi(x)$ appartenga a W. Deve quindi aversi

$$\begin{pmatrix} x_1 - n\beta \\ x_2 - \beta \\ x_3 \\ x_4 - n\alpha \end{pmatrix} \in W \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} (x_2 - \beta) + (x_4 - n\alpha) = 0 \\ mx_3 - (x_4 - n\alpha) = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \alpha = -\frac{m}{n}x_3 + \frac{1}{n}x_4 \\ \beta = x_2 + mx_3 \end{cases}.$$

La matrice cercata è quindi

$$A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & n & nm & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Indichiamo con $\mathcal{U}$ la base $\mathcal{U} = \{u_1, u_3, w_1, w_3\}$ di $\mathbb{R}^4$ ed osserviamo che $u_1, u_3 \in U = \operatorname{im}\pi$ e $w_1, w_3 \in W = \ker\pi$. Quindi $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\pi) = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$. Possiamo quindi prendere $Q = S = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{E}}(1)$ e $P = S^{-1} = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{U}}(1)$ e concludere che $PAQ = S^{-1}AS = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{U}}(1)\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi)\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{E}}(1) = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\pi)$, che è quanto volevamo. In particolare

$$\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 0 & n & n & n \\ 0 & 1 & m & -m \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ n & 0 & -m & m \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{U}}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{m}{n} & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 & m & 0 \\ \frac{1}{2n} & -\frac{1}{2} & -\frac{m+1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2n} & -\frac{1}{2} & \frac{1-m}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 3. *Si determinino $n, m \in \{1,2,3,4\}$ in modo che $n_4 - n$ ed $n_3 - m$ siano multipli interi di 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^7$, si considerino i vettori*

$$u_1 = e_1 + e_4 - (m-1)e_5 + (m-2)e_6 - e_7, \qquad u_2 = e_2 + e_3 + 2e_5 + ne_6 + (n+2)e_7,$$
$$u_3 = e_2 - e_3 - 2e_5 + ne_6 + (n-2)e_7, \qquad u_4 = e_1 - e_4 + (m+1)e_5 - (m+2)e_6 - e_7,$$

ove $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_7\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^7$. Si considerino i sottospazi $C = \langle e_5, e_6, e_7\rangle$, $D = \langle e_1, e_2, e_3, e_4\rangle$ ed $U = \langle u_1, u_2, u_3, u_4\rangle$.

(a) Si verifichi che $U \cap C = \langle 0\rangle$ e $\dim U = 4$ e si concluda che U è il grafico di un'applicazione lineare $\phi : D \to C$.

(b) Si scriva la matrice di ϕ rispetto alle basi $\mathcal{C} = \{e_5, e_6, e_7\}$ di C e $\mathcal{D} = \{e_1, \dots, e_4\}$ di D.

(c) Si determinino dimensioni e basi per $\operatorname{im}\phi$ e $\ker\phi$.

(d) Si mostri che il sottoinsieme $W = \{\, \psi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(D, D) \mid \phi \circ \psi = 0 \,\}$ è un sottospazio dello spazio vettoriale $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(D, D)$ e se ne calcoli la dimensione. Sia $\alpha_{\mathcal{D},\mathcal{D}} : \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(D, D) \to M_4(\mathbb{R})$ l'applicazione che ad ogni endomorfismo di D associa la sua matrice, rispetto alla base $\mathcal{D}$. Si determini una base del sottospazio $\alpha_{\mathcal{D},\mathcal{D}}(W)$ di $M_4(\mathbb{R})$.

Svolgimento. (a) Un vettore $a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + a_4u_4$ appartiene ad $U \cap C$ se, e solo se, scritto rispetto alla base canonica, i coefficienti di $e_1, \dots, e_4$ sono uguali a zero. Si han quindi le condizioni

$$\begin{cases} a_1 + a_4 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \\ a_2 - a_3 = 0 \\ a_1 - a_4 = 0 \end{cases} \quad \text{da cui si deduce} \quad \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_4 = 0 \end{cases}.$$

Da questo calcolo si deduce che $U \cap C = \langle 0\rangle$ e che i vettori $u_1, \dots, u_4$ sono linearmente indipendenti e quindi $\dim U = 4$. Ciò significa che la proiezione su D parallelamente a C induce un isomorfismo tra D ed U e quindi l'applicazione $\phi : D \to C$, avente U come grafico, è quella che al vettore $x \in D$ associa l'unico vettore $\phi(x) \in C$ tale che $x + \phi(x) \in U$. Il fatto che U sia un sottospazio ci dice che ϕ è un'applicazione lineare, ovvero, presi comunque $x + \phi(x)$, $y + \phi(y)$ in U e due scalari α e β, $\alpha(x + \phi(x)) + \beta(y + \phi(y)) = (\alpha x + \beta y) + (\alpha x\phi(x) + \beta\phi(y))$ appartiene ad U e quindi $\phi(\alpha x + \beta y) = \alpha x\phi(x) + \beta\phi(y)$.

(b) Guardando alla base data di U, si deduce che

$$\begin{aligned} \phi(e_1 + e_4) &= (1-m)e_5 + (m-2)e_6 - e_7 \\ \phi(e_2 + e_3) &= 2e_5 + ne_6 + (n+2)e_7 \\ \phi(e_2 - e_3) &= -2e_5 + ne_6 + (n-2)e_7 \\ \phi(e_1 - e_4) &= (m+1)e_5 - (m+2)e_6 - e_7 \end{aligned} \quad \text{e quindi} \quad \begin{aligned} \phi(e_1) &= e_5 - 2e_6 - e_7 \\ \phi(e_2) &= ne_6 + ne_7 \\ \phi(e_3) &= 2e_5 + 2e_7 \\ \phi(e_4) &= -me_5 + me_6 \end{aligned}.$$

Si conclude così che la matrice di ϕ rispetto alle basi date è

$$A = \alpha_{\mathcal{D},\mathcal{C}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -m \\ -2 & n & 0 & m \\ -1 & n & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) La matrice A ha rango 2 e l'immagine di ϕ è il sottospazio vettoriale di C generato dalla prima e dalla terza colonna di A. Dunque $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{im}\phi = 2$, ed $\operatorname{im}\phi = \langle e_5 - 2e_6 - e_7, e_5 + e_7\rangle$. Per la formula delle dimensioni abbiamo che $\dim_{\mathbb{R}} \ker\phi = 4 - 2 = 2$, e, risolvendo il sistema $AX = 0$, troviamo che $\ker\phi = \langle 2ne_1 + 4e_2 - ne_3, 2me_1 + me_3 + 4e_4\rangle$.

(d) L'insieme W è formato da tutte le applicazioni lineari $\psi : D \to D$, per cui $\operatorname{im}\psi \subseteq \ker\phi$, ovvero sono tutte e sole le applicazioni lineari di $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(D, \ker\phi)$ composte con l'inclusione $\ker\phi \to D$. Dunque W è un sottospazio di $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(D, D)$ di dimensione $(\dim_{\mathbb{R}} D)(\dim_{\mathbb{R}} \ker\phi) = 4 \cdot 2 = 8$. Una base di $\alpha_{\mathcal{D},\mathcal{D}}(W)$ è costituita dalle seguenti matrici in $M_4(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 2n & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ -n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2n & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2n & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ciò conclude la discussione. $\square$

Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova di accertamento del 17 marzo 2006

ESERCIZIO 1. *Si determinino $n, m \in \{1, 2, 3, 4\}$ in modo che $n_6 - n$ ed $n_5 - m$ siano multipli interi di 4. Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} n-m & 0 & 2n-m & 0 \\ -1 & n-m-1 & m-2n-1 & -1 \\ 0 & 0 & n-m & 0 \\ n-2m+1 & 1 & n-2m+1 & n-m+1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, di $\mathbb{R}^4$.

(a) Si determini il polinomio caratteristico di ϕ e si dica se ϕ è invertibile o nilpotente.

(b) Si determinino gli autovalori, i relativi spazi di autovettori per ϕ ed il polinomio minimo e si dica se ϕ è, o meno, diagonalizzabile.

(c) Si determinino una matrice di Jordan, J, di ϕ, ed una matrice invertibile, P, tali che $P^{-1}AP = J$.

(d) È vero che ϕ è somma di un endomorfismo diagonalizzabile, δ, e di un endomorfismo nilpotente, ν, tali che $\delta\nu = \nu\delta$? In caso affermativo, determinare le matrici di ν e δ rispetto alla base canonica.

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}) = (x - n + m)^4$, che ha termine noto diverso da zero se $n \neq m$; quindi ϕ è invertibile in tal caso, mentre è nilpotente se $n = m$.

(b) L'endomorfismo ϕ ha un unico autovalore, $n - m$, di molteplicità 4 e quindi, non essendo A una matrice scalare, non può essere diagonalizzabile. Posto $B = A - (n - m)\mathbf{1}$, si ha

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2n-m & 0 \\ -1 & -1 & m-2n-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ n-2m+1 & 1 & n-2m+1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^2 = (2m-n)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & m-2n-1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^3 = (2m-n)(2n-m)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B^4 = \mathbf{0}.$$

Se ne deduce che

- se $\boxed{n = 2m}$ $\lambda_\phi(x) = (x - n + m)^2$ e B ha rango 2; lo spazio di autovettori è $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$.
- se $\boxed{m = 2n}$ $\lambda_\phi(x) = (x - n + m)^3$ e B ha rango 2; lo spazio di autovettori è $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$.
- negli altri casi, $\lambda_\phi(x) = (x - n + m)^4$ e B ha rango 3; lo spazio di autovettori è $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(c) Come nel punto precedente, dobbiamo distinguere i vari casi.

- se $\boxed{n = 2m}$ la matrice di Jordan ha due blocchi di ordine 2 e due autovettori generalizzati di periodo 2 che generino un complementare di $\ker(\phi - n + m)$ sono e_3 ed e_4. Quindi una base, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, rispetto a cui ϕ ha forma di Jordan è costituita dai vettori $v_1 = (\phi - n + m)(e_3)$, $v_2 = e_3$, $v_3 = (\phi - n + m)(e_4)$, $v_2 = e_4$; perciò possiamo scrivere

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \quad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 3m & 0 & 0 & 0 \\ -3m-1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- se $\boxed{m = 2n}$ la matrice di Jordan ha due blocchi, uno di ordine 3 ed uno di ordine 1. Un autovettore generalizzato di periodo 3 che generi un complementare di $\ker(\phi - n + m)^2$ è e_1. Una base, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, rispetto a cui ϕ ha forma di Jordan è costituita dai vettori $v_1 = (\phi - n + m)^2(e_1)$, $v_2 = (\phi - n + m)e_1$, $v_3 = e_1$, $v_4 = e_1 - e_3$; perciò possiamo scrivere

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} -n & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n \end{pmatrix}, \quad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3n & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -3n & 1-3n & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- negli altri casi, la matrice di Jordan ha un solo blocco, di ordine 4. Un autovettore generalizzato di periodo 4 è e_3 ed una base, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, rispetto a cui ϕ ha forma di Jordan è costituita dai vettori $v_1 = (\phi - n + m)^3(e_3)$, $v_2 = (\phi - n + m)^2(e_3)$, $v_3 = (\phi - n + m)e_3$, $v_4 = e_3$; perciò possiamo scrivere

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} n-m & 1 & 0 & 0 \\ 0 & n-m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & n-m & 1 \\ 0 & 0 & 0 & n-m \end{pmatrix},$$

$$P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2n-m & 0 \\ (2m-n)(2n-m) & 2m-n & m-2n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(2m-n)(2n-m) & (2m-n)(m-2n-1) & n-2m+1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) In ciascuno dei casi precedenti, la matrice $N = J - (n-m)\mathbf{1}$ è una matrice nilpotente ($N^4 = 0$) e quindi preso come δ l'endomorfismo di moltiplicazione per $(n-m)$ e come ν l'endomorfismo che ha matrice N rispetto alla base $\mathcal{V}$, si ha $\phi = \delta + \nu$ e $\delta\nu = \nu\delta$(†). Poiché δ ha matrice scalare rispetto alla base $\mathcal{V}$, la sua matrice è la stessa anche rispetto alla base canonica (e ad ogni altra base). La matrice di ν rispetto alla base canonica sarà dunque la differenza $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\nu) = B = A - (n-m)\mathbf{1}$. □

ESERCIZIO 2. *Si determinino $n, m \in \{1, 2, 3, 4\}$ in modo che $n_4 - n$ ed $n_3 - m$ siano multipli interi di 4. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato dell'applicazione bilineare, g, di matrice*

$$G = \begin{pmatrix} n & -2n & n & -3n \\ -2n & 1+4n & -2n & 6n \\ n & -2n & 2m+2n & 2m-2n \\ -3n & 6n & 2m-2n & 2m+9n \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$.

(a) *Si dica se g è non-degenere e si determini (se esiste) una base ortogonale, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, di $\mathbb{R}^4$ tale che $\langle v_1, \dots, v_i\rangle = \langle e_1, \dots, e_i\rangle$, per $i = 1, \dots, 4$.*
(b) *Si determini la segnatura (indice di inerzia) di g e si scrivano una matrice invertibile, Q, ed una matrice diagonale, Δ, tali che ${}^tQGQ = \Delta$.*
(c) *Si dica qual è la dimensione di un sottospazio isotropo massimale di $\mathbb{R}^4$ e si determini un tale sottospazio.*
(d) *Sia H il sottospazio isotropo del punto precedente. Si determini un sottospazio T tale che $H^\perp = H \oplus T$ e si mostri che la restrizione di g a $T \times T$ è non degenere. Detto T' un altro sottospazio tale che $H^\perp = H \oplus T'$ si mostri che l'applicazione, $\phi : T \to T'$, che a $t \in T$ associa l'unico vettore, $\phi(t) \in T'$, tale che $t - \phi(t) \in H$ è un'isometria.*

Svolgimento. (a) Con un calcolo diretto si verifica che $\det G = -n^2(2m+n)$ e quindi g è non-degenere. Possiamo prendere $v_1 = e_1$, essendo $g(e_1, e_1) = n$. Il vettore v_2 deve appartenere al sottospazio $\langle e_1\rangle^\perp \cap \langle e_1, e_2\rangle = \langle 2e_1 + e_2\rangle$ e $g(2e_1 + e_2, 2e_1 + e_2) = 1$; quindi possiamo porre $v_2 = 2e_1 + e_2$. Analogamente, v_3

(†) Si osservi che, per $n = m$, si ha $\delta = 0$, ma le considerazioni fatte restano valide.

deve appartenere al sottospazio $\langle e_1, e_2\rangle^\perp \cap \langle e_1, e_2, e_3\rangle = \langle e_1 - e_3\rangle$ e $g(e_1 - e_3, e_1 - e_3) = 2n + m$; quindi possiamo porre $v_3 = e_1 - e_3$. Infine, v_4 deve appartenere al sottospazio $\langle e_1, e_2, e_3\rangle^\perp = \langle 4e_1 - e_3 + e_4\rangle$ e $g(4e_1 - e_3 + e_4, 4e_1 - e_3 + e_4) = -n$; quindi posto $v_4 = 4e_1 - e_3 + e_4$, si ottiene la base ortogonale, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, che soddisfa alle condizioni richieste.

(b) Dunque la segnatura di g è $(3, 1)$, ovvero $i(g) = 2$ e due matrici del tipo cercato sono

$$\Delta = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2m+n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) La segnatura di g è $(3, 1)$ e quindi i sottospazi isotropi hanno dimensione al più 1. Guardando alla matrice Δ, si conclude facilmente che un tale spazio è $H = \langle v_1 + v_4\rangle = \langle 5e_1 - e_3 + e_4\rangle$.

(d) Sia $v = v_1 + v_4 = 5e_1 - e_3 + e_4$. Il sottospazio $\langle v\rangle^\perp$ ha dimensione 3 e contiene $\langle v\rangle$, quindi esiste un sottospazio T, di dimensione 2, tale che $\langle v\rangle^\perp = T \oplus \langle v\rangle$ e possiamo prendere, ad esempio, $T = \langle v_2, v_3\rangle$. La restrizione di g a T è definita (positiva) e quindi non degenere, perché, se vi fosse un vettore isotropo $w \neq 0$ in T, il sottospazio $\langle v, w\rangle$ sarebbe isotropo (perché?) contro la massimalità di $H = \langle v\rangle$. Infine, dato $t \in T$, si ha $\phi(t) = t - av$, per un'opportuno valore di $a \in \mathbb{R}$, e quindi $g(\phi(t), \phi(t)) = g(t - av, t - av) = g(t, t)$, perché $T \subset \langle v\rangle^\perp$ e v è un vettore isotropo. $\square$

Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova scritta del 21 marzo 2006

ESERCIZIO 1. *Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino i punti*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad R_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ R_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) *Determinare le equazioni cartesiane delle rette $p = P_1 \vee P_2$, $q = Q_1 \vee Q_2$, $r = R_1 \vee R_2$, e verificare che le rette sono a due a due sghembe.*
(b) *Determinare l'equazione cartesiana del piano $\pi_2 = P_2 \vee Q_2 \vee R_2$ e le equazioni cartesiane delle rette, p', q', r', proiezione ortogonale delle rette p, q, r, sul piano π_2.*
(c) *Detti $P' = q' \cap r'$, $Q' = p' \cap r'$,$R' = q' \cap p'$, i vertici del triangolo di lati p', q', r', si determini il baricentro, G', di tale triangolo. È vero che G' è la proiezione ortogonale del baricentro, G, dei sei punti $P_1, P_2, Q_1, Q_2, R_1, R_2$? Si otterrebbe la stessa cosa considerando il piano $\pi_1 = P_1 \vee Q_1 \vee R_1$ in luogo di π_2?*

Svolgimento. (a) Le equazioni richieste sono

$$p : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}, \qquad q : \begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases}, \qquad r : \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

I sistemi che si ottengono dalle intersezioni, a due a due, delle rette date hanno tutti la matrice incompleta di rango 3 e la matrice completa di rango 4. Quindi le rette sono a due a due sghembe.

(*b*) L'equazione cartesiana è $\pi_2 : x + y + z = 1$ e sia $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vettore normale al piano. La retta p' è l'intersezione tra π_2 ed il piano del fascio di asse p, parallelo ad n, ovvero il piano $\sigma_p : x - y = 1$. Analogamente si determinano le altre rette e si ha

$$p' : \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}, \qquad q' : \begin{cases} x - z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}, \qquad r' : \begin{cases} y - z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}.$$

(*c*) I vertici del triangolo ed il suo baricentro, $G' = \frac{1}{3}(P' + Q' + R')$, han quindi coordinate

$$P' = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 4/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \quad Q' = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \quad R' = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}, \qquad G' = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Il baricentro dei sei punti dati è $G = \frac{1}{6}(P_1 + P_2 + Q_1 + Q_2 + R_1 + R_2) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ e quindi G' è la sua proiezione ortogonale su π_2, perché il vettore $\overrightarrow{G'G}$ è parallelo ad n.

Il piano π_1 ha equazione $x + y + z = 2$ ed è quindi parallelo a π_2 quindi la costruzione analoga si ottiene proiettando su π_1 il triangolo $P'Q'R'$, parallelamente ad n e quindi il baricentro del triangolo proiettato è la proiezione di G', e quindi di G, su π_1. □

ESERCIZIO 2. *Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare standard, si consideri il sottospazio*

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(a) *Determinare le equazioni cartesiane ed una base di U e del sottospazio $U^\perp$.*

(b) Sia $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proiezione ortogonale sul sottospazio $U^\perp$. Si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi)$ e si determinino $\ker\pi$ ed $\mathrm{im}\,\pi$.

(c) Si determinino tutte le applicazioni lineari, $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, tali che $\phi = \pi \circ \phi$, scrivendone la matrice $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi)$.

Svolgimento. (a) I tre generatori di U sono linearmente dipendenti. Infatti, se li indichiamo ordinatamente con u_1, u_2, u_3, si ha $3u_1+u_2+2u_3 = 0$. Una base di U è quindi data dai vettori u_1 ed u_3, che sono linearmente indipendenti. Le equazioni cartesiane di U e di $U^\perp$ sono

$$U : \begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad U^\perp : \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ 3x_2 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

(b) Dato $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, la proiezione $\pi(x) = a \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ è determinata dalla condizione che $x - \pi(x) \in U$. Dunque $a = \frac{2x_1+x_3}{5}$ e $\underline{=}\frac{x_2+3x_4}{10}$ e la matrice cercata è

$$A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Trattandosi della proiezione su $U^\perp$, parallelamente ad U, si ha $\ker\pi = U$ ed $\mathrm{im}\,\pi = U^\perp$.

(c) Si ha $\phi = \pi \circ \phi$ se, e solo se, $(1 - \pi) \circ \phi = 0$ e quindi l'insieme cercato è il sottospazio delle applicazioni lineari, ϕ, tali che $\mathrm{im}\,\phi \subseteq \ker(1 - \pi) = \mathrm{im}\,\pi = U^\perp$. Quindi si tratta del sottospazio

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&2&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&2&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&2 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 3&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&3&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&3&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\square$

ESERCIZIO 3. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_5\}$, di $\mathbb{R}^5$.

(a) Si determinino il polinomio caratteristico di ϕ, gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori e si dica se ϕ è diagonalizzabile.

(b) Si determinino il polinomio minimo di ϕ ed un autovettore generalizzato di periodo massimo per ogni autovalore di ϕ.

(c) Si determinino una matrice di Jordan, J, di ϕ, ed una matrice invertibile, P, tali che $P^{-1}AP = J$.

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = -\det(A - x\mathbf{1}) = (x-2)^5$ e quindi l'endomorfismo ϕ ha un unico autovalore, 2, di molteplicità 5. Non essendo A una matrice scalare, ϕ non può essere diagonalizzabile. Osservando che

$$A - 2\mathbf{1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (A - 2\mathbf{1})^2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix}, \qquad \text{e} \qquad (A - 2\mathbf{1})^3 = \mathbf{0},$$

si conclude che vi è un sottospazio di dimensione 2 di autovettori ($\mathrm{rk}(A - 2\mathbf{1}) = 3$) ed è $\ker(\phi - 2) = \langle e_1 + e_2 + e_5, e_3 - e_2 \rangle$.

(*b*) Gli autovettori generalizzati hanno periodo minore o uguale a 3 e quindi il polinomio minimo è $\lambda_\phi(x) = (x-2)^3$ ed un autovettore generalizzato di periodo 3 è, ad esempio, e_4.

(*c*) Guardando ai ranghi di $A - 2$ ed $(A-2)^2$, si conclude che la matrice di Jordan di ϕ ha due blocchi, uno di ordine 3 ed uno di ordine 2. Consideriamo i vettori, $v_5 = e_4$, $v_4 = (\phi - 2)(v_5) = e_1 + e_2 + e_3$, $v_3 = (\phi-2)^2(v_5) = e_1 + e_2 + e_5$, ed i vettori $v_2 = e_5$, $v_1 = (\phi - 2)(v_2) = e_3 - e_2$, e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ la base da essi costituita. Si conclude che

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono le matrici cercate. □

ESERCIZIO 4. *Si consideri la forma quadratica $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, definita da*

$$q(x_1, \dots, x_4) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 - 2x_2x_3 - 4x_3x_4.$$

(a) *Si determini un'applicazione bilineare simmetrica, g, tale che $q(v) = g(v,v)$, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$, e si scriva la matrice di g rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$. Si dica se g è non-degenere.*

(b) *Si determini la segnatura di g ed un sottospazio isotropo massimale, $H \subset \mathbb{R}^4$.*

(c) *Sia v un vettore isotropo tale che $v \notin H$. Si mostri che $H \cap \langle v \rangle^\perp = \langle v_0 \rangle$, con $v_0 \neq 0$. Sia w_0 tale che $\langle v \rangle^\perp = \langle v, v_0, w_0 \rangle$; è vero che $g(v_0, w_0) \neq 0$? Si mostri che esiste un vettore isotropo $w \in \langle v_0, w_0 \rangle \smallsetminus \langle v_0 \rangle$. È vero che $\langle v, w \rangle$ è un sottospazio isotropo e che $\mathbb{R}^4 = H \oplus \langle v, w \rangle$?*

Svolgimento. (a) La matrice di g è

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

e si ha $\det G = 9$. Quindi g è non-degenere.

(*b*) Guardando alla matrice G, si vede che $H = \langle e_2, e_4 \rangle$ è un sottospazio isotropo (la sottomatrice estratta prendendo la seconda e la quarta riga e la seconda e la quarta colonna è la matrice nulla). Per motivi di dimensione, $H = H^\perp$ ed è quindi un sottospazio isotropo massimale. Si conclude che la segnatura di g è $(2,2)$ ($i(g) = 0$), perché solo in questo caso può esservi un sottospazio isotropo di dimensione 2 in $\mathbb{R}^4$.

(*c*) Sia $v \notin H$ un vettore isotropo ed osserviamo che $\langle v \rangle^\perp$ ha dimensione 3, perché g è non degenere. Poiché $\dim H = 2$, si ha $\dim(H \cap \langle v \rangle^\perp) \geq 1$. D'altra parte, non può aversi $H \subset \langle v \rangle^\perp$ perché, altrimenti, $H \oplus \langle v \rangle$ sarebbe un sottospazio isotropo di dimensione 3, contro il fatto che g sia non-degenere. Dunque $H \cap \langle v \rangle^\perp = \langle v_0 \rangle$, per un opportuno vettore isotropo, non nullo, v_0. Per costruzione, $\langle v_0 \rangle^\perp = H \oplus \langle v \rangle$ che non contiene w_0; quindi $g(v_0, w_0) \neq 0$. Dato $w = w_0 + tv_0$, basta prendere $t = -\frac{g(w_0,w_0)}{2g(v_0,w_0)}$ affinché w sia isotropo. Poiché $w \in \langle v_0, w_0 \rangle \subset \langle v \rangle^\perp$ e w è isotropo, si conclude che $\langle v, w \rangle$ è un sottospazio isotropo. Inoltre, $H \cap \langle v, w \rangle = \langle 0 \rangle$, perché $H \cap \langle v \rangle^\perp = \langle v_0 \rangle$, e si conclude che $\mathbb{R}^4 = H \oplus \langle v, w \rangle$. □

ESERCIZIO 5. [*Vecchio ordinamento*] *Studiare la conica $\mathscr{C}$ di equazione*

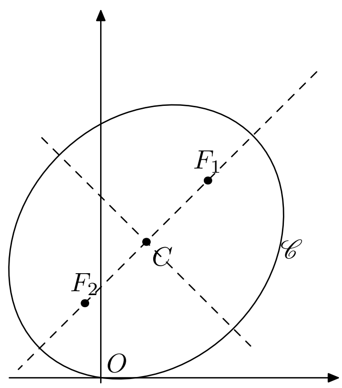
$$5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x - 28y = 0 .$$

In particolare determinare se è degenere, qual è il suo tipo, un'equazione canonica e l'opportuna trasformazione di coordinate, gli eventuali assi, asintoti, centro, fuochi. Se ne tracci infine un disegno approssimativo e si scriva l'equazione della retta tangente a $\mathscr{C}$ nell'origine.

Svolgimento. Consideriamo, come di consueto, il piano affine immerso nel piano proiettivo prendendo $x_0 = 0$ come retta impropria. Una matrice della conica $\mathscr{C}$ è $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -14 \\ -2 & 5 & -1 \\ -14 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. Poiché $\det A = -2^5 \cdot 3 \cdot 11 \neq 0$ si tratta di una conica non degenere, e poiché $\det A_\infty = 2^3 \cdot 3$ (A_∞ è la sottomatrice quadrata di A che si ottiene cancellando prima riga e prima colonna) si tratta di un'ellisse, che ha punti reali, perché passa per l'origine, $O = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Il centro, ovvero il polo della retta impropria, è il punto di coordinate omogenee $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. La matrice A_∞ ha autovalori 4 e 6 a cui corrispondono gli autovettori $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. L'equazione canonica di $\mathscr{C}$, in un opportuno sistema di riferimento ortonormale, è $\frac{1}{11}X^2 + \frac{3}{22}Y^2 = 1$ e la matrice dell'isometria che porta l'equazione in forma canonica è $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 3 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, come si può verificare calcolando la matrice $\frac{1}{44}{}^tPAP$. Gli assi hanno quindi equazioni:

$$h_1 : x - y + 2 = 0 \text{ (asse focale)}, \qquad h_2 : x + y - 4 = 0.$$



Infine, ricordiamo che i fuochi si trovano sull'asse focale, a distanza $\sqrt{\frac{11}{3}}$ dal centro. Sono i punti $F_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \pm \sqrt{\frac{11}{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La retta tangente nell'origine ha equazione $x + 7y = 0$. □

Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova scritta del 4 aprile 2006

ESERCIZIO 1. *Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino i punti*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e \qquad Q_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ Q_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ Q_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

e le sottovarietà lineari $\pi = P_1 \vee P_2 \vee P_3$, $\sigma = Q_1 \vee Q_2 \vee Q_3$.

(a) Si determinino le equazioni cartesiane di π e σ e si determini, se esiste, una direzione, $\langle v \rangle$, tale che la proiezione su σ parallelamente a $\langle v \rangle$ mandi ordinatamente P_1, P_2, P_3 su Q_1, Q_2, Q_3.

(b) Detta r la sottovarietà lineare $\pi \cap \sigma$, si determinino le intersezioni tra r ed i lati del triangolo $P_1P_2P_3$ e si dica quando tali intersezioni sono punti interni al lato oppure giacciono sul prolungamento dello stesso.

(c) Detta $\langle n \rangle$ la direzione normale al piano π, si determini una direzione $\langle w \rangle \subseteq \langle v, n \rangle$ che formi con $\langle n \rangle$ un angolo uguale a quello formato da $\langle v \rangle$ ed $\langle n \rangle$.

Svolgimento. (a) Un'equazione cartesiana di π è $x + y + z = 2$, mentre un'equazione cartesiana di σ è $5x + 4y = 6$. Osserviamo che

$$\overrightarrow{P_1Q_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{P_2Q_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{P_3Q_3} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

e quindi i tre vettori appartengono tutti al medesimo sottospazio e possiamo prendere come v uno qualunque di questi tre vettori.

(b) Un generico punto della retta $P_1 \vee P_2$ ha coordinate $\alpha P_1 + (1-\alpha)P_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ ed appartiene alla retta r se, e solo se, $\alpha = 2$ e quindi il punto di intersezione appartiene al prolungamento del lato. Un generico punto della retta $P_1 \vee P_3$ ha coordinate $\alpha P_1 + (1-\alpha)P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$ ed appartiene alla retta r se, e solo se, $\alpha = 3/4$ e quindi il punto di intersezione appartiene al lato. Un generico punto della retta $P_2 \vee P_3$ ha coordinate $\alpha P_2 + (1-\alpha)P_3 = \begin{pmatrix} 1-\alpha \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ ed appartiene alla retta r se, e solo se, $\alpha = 3/5$ e quindi il punto di intersezione appartiene al lato.

(c) Un vettore $w = an + bv$ soddisfa alla condizione richiesta se, e solo se,

$$\frac{\left| \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \\ a-b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(a+b)^2 + 2(a-b)^2}\sqrt{3}} = \frac{1}{3},$$

ovvero se, e solo se, $a(3a - 2b) = 0$. Quindi, escludendo il vettore v ($a = 0$), la direzione cercata è $\left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$. □

ESERCIZIO 2. *Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^7$, si considerino i vettori*

$$u_1 = e_1 - 2e_2 - e_4 + e_6, \qquad u_2 = 2e_1 - 2e_3 - e_5 + e_6,$$
$$u_3 = 2e_2 - e_3 + e_6 + e_7, \qquad u_4 = 4e_1 - 4e_2 - 2e_3 - e_5 + e_6 - e_7,$$

ove $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_7\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^7$. Si considerino i sottospazi $C = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, $D = \langle e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle$ ed $U = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$.

(a) *Si verifichi che* $U \cap C = \langle 0 \rangle$ e $\dim U = 4$ *e si concluda che* U *è il grafico di un'applicazione lineare* $\phi : D \to C$.
(b) *Si scriva la matrice di* ϕ *rispetto alle basi* $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ *di* C e $\mathcal{D} = \{e_4, e_5, e_6, e_7\}$ *di* D.
(c) *Si determinino dimensioni e basi per* $\operatorname{im}\phi$ *e* $\ker\phi$.
(d) *Si mostri che il sottoinsieme* $W = \{\, \psi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(D, D) \mid \phi \circ \psi = 0 \,\}$ *è un sottospazio dello spazio vettoriale* $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(D, D)$ *e se ne calcoli la dimensione. Detta* $\alpha_{\mathcal{D},\mathcal{D}} : \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(D, D) \to M_4(\mathbb{R})$ *l'applicazione che ad ogni endomorfismo di* D *associa la sua matrice rispetto alla base* $\mathcal{D}$*, si determini una base del sottospazio* $\alpha_{\mathcal{D},\mathcal{D}}(W)$ *di* $M_4(\mathbb{R})$.

Svolgimento. (a) Un vettore $a_1u_1a_2u_2 + a_3u_3 + a_4u_4$ appartiene ad $U \cap C$ se, e solo se, scritto rispetto alla base canonica, i coefficienti di $e_4, \dots, e_7$ sono uguali a zero. Si han quindi le condizioni

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 + a_4 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\ a_3 - a_4 = 0 \end{cases} \quad \text{da cui si deduce} \quad \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_4 = 0 \end{cases}.$$

Da questo calcolo si deduce che $U \cap C = \langle 0 \rangle$ e che i vettori $u_1, \dots, u_4$ sono linearmente indipendenti e quindi $\dim U = 4$. Ciò significa che la proiezione su D parallelamente a C induce un isomorfismo tra D ed U e quindi l'applicazione $\phi : D \to C$, avente U come grafico, è quella che al vettore $x \in D$ associa l'unico vettore $\phi(x) \in C$ tale che $x + \phi(x) \in U$. Il fatto che U sia un sottospazio ci dice che ϕ è un'applicazione lineare, ovvero, presi comunque $x + \phi(x)$, $y + \phi(y)$ in U e due scalari α e β, $\alpha(x + \phi(x)) + \beta(y + \phi(y)) = (\alpha x + \beta y) + (\alpha x\phi(x) + \beta\phi(y))$ appartiene ad U e quindi $\phi(\alpha x + \beta y) = \alpha x\phi(x) + \beta\phi(y)$.

(*b*) Guardando alla base data di U, si deduce che

$$\begin{aligned} \phi(-e_4 + e_6) &= e_1 - 2e_2 \\ \phi(-e_5 + e_6) &= 2e_1 - 2e_3 \\ \phi(e_6 + e_7) &= 2e_2 - e_3 \\ \phi(-e_5 + e_6 - e_7) &= 4e_1 - 4e_2 - 2e_3 \end{aligned} \quad \text{e quindi} \quad \begin{aligned} \phi(e_4) &= e_1 - e_3 \\ \phi(e_5) &= -2e_2 + e_3 \\ \phi(e_6) &= 2e_1 - 2e_2 - e_3 \\ \phi(e_7) &= -2e_1 + 4e_2 \end{aligned}.$$

Si conclude così che la matrice di ϕ rispetto alle basi date è

$$A = \alpha_{\mathcal{D},\mathcal{C}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(*c*) La matrice A ha rango 2 e l'immagine di ϕ è il sottospazio vettoriale di C generato dalla prima e dalla seconda colonna di A. Dunque $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{im}\phi = 2$, ed $\operatorname{im}\phi = \langle e_1 - 2e_2, -2e_2 + e_3 \rangle$. Per la formula delle dimensioni abbiamo che $\dim_{\mathbb{R}} \ker\phi = 4 - 2 = 2$, e risolvendo il sistema $AX = 0$ troviamo che $\ker\phi = \langle e_5 + e_6 + e_7, 2e_4 + e_5 - e_6 \rangle$.

(*d*) L'insieme W è formato da tutte le applicazioni lineari $\psi : D \to D$, per cui $\operatorname{im}\psi \subseteq \ker\phi$. Si può quindi identificare W con lo spazio vettoriale $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(D, \ker\phi)$. Dunque W è un sottospazio di $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(D, D)$ di dimensione $(\dim_{\mathbb{R}} D)(\dim_{\mathbb{R}} \ker\phi) = 4 \cdot 2 = 8$. Una base di $\alpha_{\mathcal{D},\mathcal{D}}(W)$ è costituita dalle seguenti matrici in $M_4(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ -1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&2&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&-1&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&2&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&2 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&-1 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri l'endomorfismo* $\phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, *di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & -5/2 & -1 & 0 \\ -1/2 & -1 & -1/2 & 0 & 0 \\ -5/2 & 1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, di $\mathbb{R}^4$.

(a) *Si determinino il polinomio caratteristico di ϕ, gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori. Si dica se ϕ è invertibile.*

(b) *Si determinino il polinomio minimo di ϕ ed un autovettore generalizzato di periodo massimo per ogni autovalore di ϕ.*

(c) *Si determinino una matrice di Jordan, J, di ϕ, ed una matrice invertibile, P, tali che $P^{-1}AP = J$.*

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}) = (x-2)^3(x+2)^2$, che ha termine noto diverso da zero e quindi ϕ è invertibile. Consideriamo le matrici

$$A - 2 = \begin{pmatrix} -5/2 & 1 & -5/2 & -1 & 0 \\ -1/2 & -3 & -1/2 & 0 & 0 \\ -5/2 & 1 & -5/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (A-2)^2 = \begin{pmatrix} 12 & -8 & 12 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & 4 & 0 & 0 \\ 12 & -8 & 12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A + 2 = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -5/2 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ -5/2 & 1 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Il rango di $\phi - 2$ è uguale a 3 e quindi si ha un sottospazio di autovettori di dimensione 2, $\ker(\phi - 2) = \langle e_1 - e_3, e_5 \rangle$. Il rango di $\phi + 2$ è uguale a 4 e quindi si ha un sottospazio di autovettori di dimensione 1, $\ker(\phi + 2) = \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle$.

(b) L'endomorfismo ϕ ha due autovalori, 2 e -2, per cui la molteplicità non coincide con la nullità e quindi non può essere diagonalizzabile. Dall'osservazione delle matrici calcolate sopra, si conclude che 2 è il massimo periodo per autovettori generalizzati relativi a ciascuno dei due autovalori e quindi il polinomio minimo è $\lambda_\phi(x) = (x-2)^2(x+2)^2$. Un autovettore generalizzato relativa all'autovalore 2 è, ad esempio, e_4. Osservando il polinomio minimo, si deduce che $\ker(\phi+2)^2 = \operatorname{im}(\phi-2)^2$, e quindi unautovettore generalizzato relativo all'autovalore -2 è, ad esempio, e_2.

(c) La matrice di Jordan di ϕ ha due blocchi, di ordine 1 e 2, relativi all'autovalore 2 ed un unico blocco, di ordine 2, relativo all'autovalore -2. Possiamo prendere $v_3 = e_4 \in \ker(\phi-2)^2 \smallsetminus \ker(\phi-2)$, $v_2 = (\phi-2)(v_3) = -e_1 + e_3$, $v_1 = e_5$ e $v_5 = e_2 \in \operatorname{im}(\phi-2)^2 \smallsetminus \ker(\phi+2)$, $v_4 = (\phi+2)e_2 = e_1 + e_2 + e_3$, ed otteniamo così una base rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan. Si conclude che

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono le matrici cercate. □

ESERCIZIO 4. *Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato dell'applicazione bilineare, g, di matrice*

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & -1 \\ -3 & 10 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$.

(a) *Si dica se g è non-degenere e si determini la sua segnatura.*

(b) *Sia $W = \langle e_2, e_3 \rangle$. Si dica se $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$ e, in caso affermativo, si scriva la matrice della proiezione ortogonale su W.*

(c) Si consideri l'applicazione $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ di matrice

$$P = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica. È vero che ϕ è un'isometria per l'applicazione g? È vero che esiste una matrice $U \in M_4(\mathbb{C})$ tale che ${}^t\overline{U}GU = \mathbf{1}_4$ e $U^{-1}PU$ sia una matrice diagonale?

Svolgimento. (a) Si ha

$$g_{11} = 2, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix} = 11, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & 10 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 15, \quad \det G = 1$$

e quindi l'applicazione bilineare g è definita positiva [segnatura $(4,0)$].

(b) La restrizione di g al sottospazio W ha matrice $\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ e quindi è non degenere, per cui $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$. Le equazioni cartesiane dell'ortogonale sono $W^\perp : \begin{cases} -3x_1 + 10x_2 = 0 \\ 2x_1 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$ e quindi dato un vettore, $x = x_1e_1 + \cdots + x_4e_4$, la sua proiezione ortogonale su W è $\pi(x) = \frac{g(x,e_2)}{g(e_2,e_2)}e_2 + \frac{g(x,e_3)}{g(e_3,e_3)}e_3$ quindi la matrice cercata è

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 10 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 10 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Si ha ${}^tPGP = P$ e quindi ϕ è un'isometria. Consideriamo la forma hermitiana di matrice G rispetto alla base canonica di $\mathbb{C}^4$, che indichiamo ancora con il simbolo g. Determinare U, significa determinare una base ortonormale di $\mathbb{C}^4$ costituita da autovettori di ϕ. Poiché ϕ è un'isometria, è un'applicazione invertibile e quindi tutti gli autovalori sono diversi da 0. Inoltre, se c è un autovalore e v è un autovettore ad esso relativo, si ha che $\mathbb{C}^4 = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^\perp$ e, se $x \in \langle v \rangle^\perp$, allora $g(\phi(x), v) = c^{-1}g(\phi(x), cv) = g(\phi(x), \phi(v)) = g(x, v) = 0$; e quindi $\phi(x) \in \langle v \rangle^\perp$. Dunque, esiste in $\mathbb{C}^4$ una base ortonormale di autovettori. □

ESERCIZIO 5. [*Vecchio ordinamento*] *Si consideri la conica $\mathscr{C}$ del piano euclideo, di equazione affine*

$$\mathscr{C} : x^2 + y^2 + 4xy + 2y - 2 = 0,$$

e se ne determinino gli eventuali assi, centro, vertici, fuochi, direttrice ed equazione canonica.

Svolgimento. Si tratta di un'iperbole di centro $C = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ ed assi $h_1 : x - y + 1 = 0$ (asse focale) ed $h_2 : 3x + 3y + 1 = 0$ (asse trasverso). L'equazione canonica è $9X^2 - 3Y^2 = 5$ ed i fuochi di $\mathcal{C}$ hanno coordinate omogenee $F_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 + \sqrt{10} \\ \sqrt{10} - 1 \end{pmatrix}$ ed $F_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{10} - 2 \\ \sqrt{10} + 1 \end{pmatrix}$. Infine, i vertici, ovvero i punti di intersezione $\mathcal{C} \cap h_1$, hanno coordinate omogenee $V_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 + \sqrt{10} \\ 2 + \sqrt{10} \end{pmatrix}$ e $V_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 - \sqrt{10} \\ 2 - \sqrt{10} \end{pmatrix}$. □

Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova scritta del 18 luglio 2006

ESERCIZIO 1. *Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino i piani*

$$\pi_1 : 2x + 3y = 2, \qquad \pi_2 : y + 2z = 0, \qquad \pi_3 : x + 2y + z = 2.$$

(a) *Si determinino, se esistono, punti o direzioni comuni ai tre piani. Si determinino le equazioni parametriche delle tre rette $r_1 = \pi_2 \cap \pi_3$, $r_2 = \pi_1 \cap \pi_3$ ed $r_3 = \pi_1 \cap \pi_2$.*

(b) *Determinare l'equazione cartesiana del luogo, $\mathscr{A}$, dei punti equidistanti dalle tre rette r_1, r_2, r_3.*

(c) *Si determinino le equazioni cartesiane dell'immagine di $\mathscr{A}$ nella simmetria ortogonale che ha come asse il piano $\pi : x + y = 0$.*

Svolgimento. (a) Il sistema delle 3 equazioni ha ranghi 2 e 3. Dunque non vi sono punti comuni ai tre piani, ma vi è una direzione comune, che è la soluzione del sistema omogeneo associato, ovvero il sottospazio generato dal vettore $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Questa è la direzione comune alle tre rette, r_1, r_2, r_3, che hanno equazioni parametriche

$$r_1 = P_1 + \langle v \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad r_2 = P_2 + \langle v \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad r_3 = P_3 + \langle v \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(b) I punti, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, equidistanti dalle tre rette, devono soddisfare alle condizioni

$$\frac{\|\overrightarrow{P_1X} \times v\|}{\|v\|} = \frac{\|\overrightarrow{P_2X} \times v\|}{\|v\|} = \frac{\|\overrightarrow{P_3X} \times v\|}{\|v\|};$$

Sono quindi le soluzioni del sistema lineare

$$\mathscr{A} : \begin{cases} 10x + 12y - 6z - 15 = 0 \\ 6x - 4y - 26z7 = 0 \end{cases}$$

che descrive ancora una retta parallela a v.

(c) La simmetria ortogonale rispetto al piano $x + y = 0$ è l'affinità (isometria) di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La retta $\mathscr{A}$ viene quindi trasformata nella retta di equazioni

$$\begin{cases} 12x + 10y + 6z + 15 = 0 \\ 4x - 6y - 26z + 7 = 0 \end{cases}.$$

Questa retta si poteva determinare osservando che il punto $P = \pi \cap \mathscr{A} = \begin{pmatrix} -27/7 \\ 27/7 \\ -17/14 \end{pmatrix}$ resta unito nella simmetria mentre il vettore v viene mandato in $v' = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. □

ESERCIZIO 2. *Si considerino gli spazi vettoriali V e W, dotati, rispettivamente, delle basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$, e indichiamo con $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare che soddisfi alle seguenti condizioni*

$$\phi(v_1 - v_3) = w_1 - 2w_2 - 2w_3, \qquad \phi(v_1 - v_2 + v_3) = w_2,$$
$$\phi(v_1 + v_3) = w_1 + 2w_2, \qquad \phi(v_1 - v_3 + v_4) = 5w_1 - 4w_3.$$

(a) *Si dica se ϕ è univocamente determinata dalle condizioni date e si determini la matrice di ogni tale ϕ, rispetto alle basi $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$.*
(b) *Si determinino dimensioni e basi per $\mathrm{im}\phi$ e $\ker\phi$.*
(c) *Si dica se il sottoinsieme $Z = \{\, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, V) \mid \phi \circ \psi = 1_W \,\}$ è un sottospazio o una sottovarietà lineare dello spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, V)$ e se ne calcoli la dimensione. Detta $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, V) \to M_{4\times 3}(\mathbb{R})$ l'applicazione che ad ogni omomorfismo associa la sua matrice rispetto alle basi $\mathcal{W}$ e $\mathcal{V}$, si dia una rappresentazione parametrica del sottoinsieme $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(Z)$ di $M_{4\times 3}(\mathbb{R})$.*

Svolgimento. (a) I vettori $v_1 - v_3$, $v_1 - v_2 + v_3$, $v_1 + v_3$, $v_1 - v_3 + v_4$ formano una base di V e quindi esiste un'unica applicazione lineare $\phi : V \to W$ che soddisfi alle condizioni date. In particolare, si ha

$$\begin{aligned}
\phi(v_1) &= \tfrac{1}{2}(\phi(v_1 - v_3) + \phi(v_1 + v_3)) = w_1 - w_3,\\
\phi(v_2) &= \phi(v_1 + v_3) - \phi(v_1 - v_2 + v_3) = w_1 + w_2,\\
\phi(v_3) &= \tfrac{1}{2}(\phi(v_1 + v_3) - \phi(v_1 - v_3)) = 2w_2 + w_3,\\
\phi(v_4) &= \phi(v_1 - v_3 + v_4) - \phi(v_1 - v_3) = 4w_1 + 2w_2 - 2w_3.
\end{aligned}$$

La matrice di ϕ rispetto alle basi date è

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) La matrice A ha rango 3 e l'immagine di ϕ è lo spazio vettoriale W. Per la formula delle dimensioni abbiamo che $\dim_{\mathbb{R}} \ker\phi = 4 - 3 = 1$, e risolvendo il sistema $AX = 0$ troviamo che $\ker\phi = \langle 2v_1 + 2v_2 - v_4 \rangle$.

(c) L'insieme Z è formato da tutte le applicazioni lineari $\psi : W \to V$, per cui $\phi \circ \psi = 1_W$, che non formano un sottospazio, essendo evidente che la somma di due tali applicazioni non soddisfa alla stessa condizione. Si tratta di una sottovarietà lineare perché, data una qualunque ψ_0 in Z e sommando a questa un qualunque elemento del sottospazio $K = \{\, \eta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, V) \mid \phi \circ \eta = 0 \,\}$, si ha che $\psi_0 + \eta \in Z$ e quindi Z è la sottovarietà lineare di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, V)$, passante per ψ_0 e parallela al sottospazio $K \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, \ker\phi)$ che ha dimensione $\dim K = 3$.

Una rappresentazione parametrica di $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(Z)$ è quindi

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

al variare di (α, β, γ) in $\mathbb{R}^3$. □

ESERCIZIO 3. *Nello spazio $\mathbb{R}^4$, dotato dell'usuale prodotto scalare, si consideri il sottospazio $U = \langle e_1 + e_3, e_2 - e_4 \rangle$.*
(a) *Si scriva la matrice dell'applicazione $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che manda ogni vettore nella sua proiezione ortogonale sul sottospazio U e si dica se è invertibile.*
(b) *Detta O l'origine, si considerino i punti $P = O + e_1 + e_2 + e_3$, $Q = O + e_1 + e_3 + e_4$ ed $R = O + e_2 + e_3 - e_4$. Si calcoli il volume del tetraedro, Δ, di vertici $OPQR$.*
(c) *Si determini la proiezione $\pi(\Delta)$ sul piano U e si dica se si tratta di un triangolo o di un quadrilatero. Si calcoli l'area di $\pi(\Delta)$.*

Svolgimento. (a) La proiezione π ha matrice

$$A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

che, ovviamente, non è invertibile; essendo la matrice di una proiezione, il suo nucleo è il sottospazio $U^\perp$.
(*b*) Il tetraedro ha come lati i vettori

$$P - O = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Q - O = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad R - O = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dunque, detta T la matrice che ha come colonne le coordinate di questi tre vettori, il volume del tetraedro è uguale a $\frac{1}{6}\sqrt{\det({}^tTT)} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.
(*c*) Il punto O appartiene ad U e quindi coincide con la sua proiezione. Le proiezioni degli altri tre vertici del tetraedro sono

$$P' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \qquad Q' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \qquad R' = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Con un calcolo diretto si ricava che $R' - O = \frac{5}{4}(P' - O) - \frac{3}{4}(Q' - O)$ e quindi $R' = \frac{5}{4}P' - \frac{3}{4}Q' + \frac{1}{2}O$ si trova all'esterno del triangolo $OP'Q'$ e forma con gli altri tre punti un quadrilatero convesso, la cui area è uguale alla somma delle aree dei triangoli $OP'Q'$ ed $OP'R'$. Quindi l'area del quadrilatero $\pi(\Delta)$ è uguale a

$$\frac{1}{2}\sqrt{\det({}^tHH)} + \frac{1}{2}\sqrt{\det({}^tKK)} = \frac{7}{4},$$

ove H è la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori $P' - O$, $Q' - O$ e K è la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori $P' - O$, $R' - O$. □

ESERCIZIO 4. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 15 & 2 & -2 & 5 \\ -9 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, di $\mathbb{R}^4$.

(a) Si determinino il polinomio caratteristico di ϕ, gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori. Si dica se ϕ è invertibile.
(b) Si determinino il polinomio minimo di ϕ ed un autovettore generalizzato di periodo massimo per ogni autovalore di ϕ.
(c) Si determinino una matrice di Jordan, J, di ϕ, ed una matrice invertibile, P, tali che $P^{-1}AP = J$.

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}) = (x+2)^4$, che ha termine noto uguale a 16 e quindi ϕ è invertibile. Il rango di $\phi + 2$ è uguale a 2 e quindi vi è un sottospazio di autovettori di dimensione 2, $\ker(\phi + 2) = \langle e_3, e_1 - 3e_4 \rangle$.
(*b*) L'endomorfismo ϕ ha un unico autovalore, -2, di molteplicità 4 e nullità 2, quindi non può essere diagonalizzabile. Osservando che

$$A + 2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 2 & 0 & 5 \\ -9 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad (A+2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{e} \qquad (A+2)^3 = \mathbf{0},$$

si conclude che il polinomio minimo è $(x+2)^3$ ed esistono autovettori generalizzati di periodo uguale a 3. Uno di questi è, ad esempio, e_2.

(c) La matrice di Jordan di ϕ ha quindi due blocchi, uno dei quali ha ordine 3. Possiamo prendere $v_4 = e_2$, $v_3 = (\phi+2)(v_4) = 2e_3 - e_4$, $v_2 = (\phi+2)^2(v_4) = -e_1 - 5e_3 + 3e_4$ e, da ultimo, un autovettore, linearmente indipendente da v_2, ad esempio, $v_1 = e_3$. Otteniamo così una base rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan. Si conclude che

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

sono le matrici cercate. □

ESERCIZIO 5. *Sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, si consideri la forma quadratica*

$$q(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0x_1 + x_0x_3 - x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2x_3.$$

(a) Si scriva la matrice dell'applicazione bilineare, g, associata a q, nella base canonica, $\{e_0, \dots, e_3\}$, di $\mathbb{R}^4$ e si determinino rango e segnatura di g.

(b) Sia $W = \langle e_0, e_1 - e_3 \rangle$. Si dica se $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$ e si determini una base di ciascuno dei due sottospazi. I due sottospazi sono isometrici?

(c) Si dica se esiste un sottospazio U, tale che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ ed i due sottospazi siano isometrici. In caso affermativo, si determini il sottospazio U ed un'isometria $\phi : U \to W$.

Svolgimento. (a) L'applicazione bilineare, $g(v,w) = q(v+w) - q(v) - q(w)$, ha matrice

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

con $\det G = 4$. Quindi g ha rango 4 (non-degenere) e la sua segnatura deve essere $(2,2)$, perché $\langle e_0, e_2 \rangle$ è un sottospazio isotropo.

(b) La matrice della restrizione di g a W, rispetto alla base data, è $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, che è degenere. Quindi $W \cap W^\perp = \langle e_0 \rangle$, $\mathbb{R}^4$ non è uguale a $W + W^\perp$ e la somma non è diretta. Si ha $W^\perp = \langle e_0, e_1 + 2e_2 - e_3 \rangle$. I due sottospazi non sono isometrici perché la restrizione di g a W è semidefinita positiva mentre la restrizione di g a $W^\perp$ è semidefinita negativa.

(c) Un tale sottospazio esiste, basta prendere, ad esempio, $U = \langle e_3, 3e_0 + e_1 - e_2 \rangle$ e l'applicazione $\phi : U \to W$ definita da $\phi(e_3) = e_0$ e $\phi(3e_0 + e_1 - e_2) = \sqrt{2}(e_1 - e_3)$. □

ESERCIZIO 6. [*Vecchio ordinamento*] *Studiare la conica $\mathscr{C}$ di equazione*

$$x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0\ .$$

In particolare determinare se è degenere, qual è il suo tipo, un'equazione canonica e l'opportuna trasformazione di coordinate, gli eventuali assi, asintoti, centro, fuochi. Se ne tracci infine un disegno approssimativo.

Svolgimento. Consideriamo, come di consueto il piano affine immerso nel piano proiettivo prendendo $x_0 = 0$ come retta impropria. Una matrice della conica $\mathscr{C}$ è $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Poiché $\det A = -4 \neq 0$ si tratta di una conica non degenere, e poiché $\det A_\infty = -3$ (A_∞ è la sottomatrice quadrata di A che si ottiene cancellando prima riga e prima colonna) si tratta di un'iperbole.

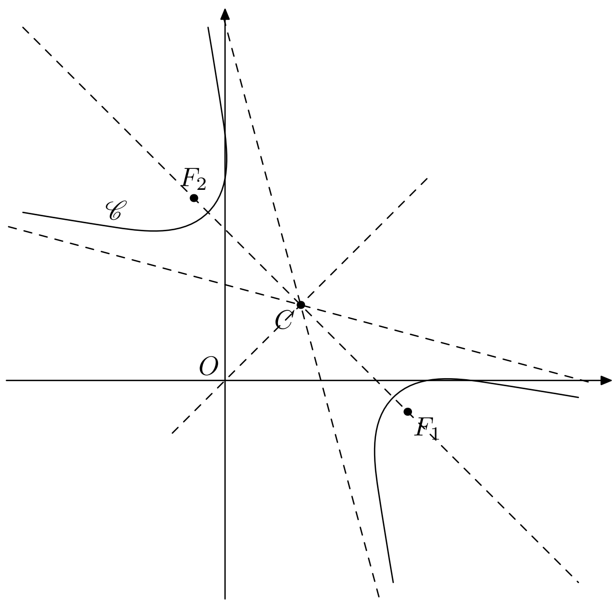
Il centro, ovvero il polo della retta impropria, è il punto di coordinate omogenee $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. La matrice A_∞ ha autovalori 3 e -1 a cui corrispondono gli autovettori $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Gli assi sono quindi le rette di equazioni

$$x - y = 0, \qquad \text{e} \qquad 3x + 3y = 4 \text{ (asse focale).}$$

L'equazione canonica di $\mathscr{C}$, in un opportuno sistema di riferimento ortonormale, è $\frac{3}{4}X^2 - \frac{9}{4}Y^2 = 1$ e la matrice dell'isometria che porta l'equazione in forma canonica è $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 2/3 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, come si può verificare calcolando la matrice $-\frac{3}{4}{}^tPAP$. Gli asintoti hanno equazioni affini:

$$a_1 : 2(3 - \sqrt{3}) - 3x + 3(\sqrt{3} - 2)y = 0 \qquad \text{e} \qquad a_2 : 2(3 + \sqrt{3}) - 3x - 3(\sqrt{3} + 2)y = 0.$$

Infine, ricordiamo che i fuochi si trovano sull'asse focale, a distanza 4/3 dal centro e sono quindi i punt1 $F_{1,2} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \pm \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Un disegno approssimativo della conica $\mathscr{C}$ è riportato qui sotto



e la discussione è conclusa. □

Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova scritta del 19 settembre 2006

ESERCIZIO 1. Nello spazio tridimensionale si considerino i punti

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare un'equazione cartesiana del piano, α, contenente il triangolo ABC, e calcolare l'area di tale triangolo.

(b) Determinare equazioni cartesiane e parametriche della retta, s, perpendicolare al piano α e passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) Calcolare la distanza tra la retta s e la retta r, passante per A e B.

(d) Determinare la proiezione ortogonale della retta $O \vee P$ sul piano α.

(e) Calcolare l'angolo fra il piano α ed il piano xy.

ESERCIZIO 2. Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, di $\mathbb{R}^4$.

(a) Si determinino il polinomio caratteristico di ϕ, gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori. Si dica se ϕ è diagonalizzabile e se è invertibile.

(b) Si determinino il polinomio minimo, f, di ϕ ed un autovettore generalizzato di periodo massimo per ciascun autovalore di ϕ.

(c) Si determinino una matrice di Jordan, J, di ϕ, ed una matrice invertibile, U, tali che $U^{-1}AU = J$.

(d) È vero che ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ di polinomio minimo f ha forma di Jordan J, rispetto ad un'opportuna base di $\mathbb{R}^4$? Giustificare la risposta.

ESERCIZIO 3. Sia $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, l'applicazione bilineare simmetrica associata alla forma quadratica

$$Q(X_1, \dots, X_4) = X_1^2 + 6X_1X_2 + 2X_1X_4 + 6X_2^2 + 2X_2X_3 + 8X_2X_4 + X_3^2 - 2X_3X_4 - 2X_4^2.$$

(a) Si scriva la matrice, G, di g rispetto al riferimento dato e si dica se g è non-degenere.

(b) Si determinino rango e segnatura di g e si scrivano una matrice invertibile, P, ed una matrice diagonale, D, tali che ${}^tPGP = D$.

(c) Dire se $Q(X_1, \dots, X_4) = 0$ ammette soluzioni non banali. Dire se esistono due piani iperbolici di $\mathbb{R}^4$ fra loro ortogonali. In caso di risposta affermativa, fornire degli esempi.

ESERCIZIO 4. Si considerino le sottovarietà lineari nello spazio affine di dimensione 5, così definite

$$\alpha_k : \begin{cases} kX_1 + X_2 + X_3 + X_4 = k \\ (k^2 + k)X_1 + (2k+1)X_2 + (k+2)X_3 + (k+2)X_4 = k^2 + k + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\beta_k : \begin{cases} kX_1 - (k-1)X_2 - (k+2)X_4 = 2k - \frac{3}{2} \\ (2k^2 + k)X_1 + (2k+1)X_2 + (k+2)X_3 + (k-1)X_4 = 2k^2 + 2k - 1 \end{cases}$$

al variare di k in $\mathbb{R}$.

(a) Calcolare le posizioni reciproche di α_k e β_k.

(b) Trovare i $k \in \mathbb{R}$ per cui $\alpha_k \cap \beta_k$ è un punto. Per tali k, esibire il punto.

(c) Trovare i $k \in \mathbb{R}$ per cui $\alpha_k \cap \beta_k$ è una retta. Per tali k determinare le equazioni parametriche della retta.

(d) Trovare le posizioni reciproche e le distanze tra le rette ottenute al punto (c).

ESERCIZIO 5. [*Vecchio ordinamento*] Studiare la conica $\mathscr{C}$ di equazione

$$X^2 + Y^2 - 2XY - 6Y + 1 = 0 \ .$$

In particolare determinare se è degenere, qual è il suo tipo, un'equazione canonica, gli eventuali assi, asintoti, centro o vertice.