Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)
prova di accertamento del 15 febbraio 2007

Notazione: Nel seguito si indicheranno con $n_1, n_2, \dots, n_6$ le cifre del numero di matricola (ad esempio, se il proprio numero di matricola è 510243, $n_1 = 5$, $n_2 = 1$, $n_3 = 0$, $n_4 = 2$, $n_5 = 4$, $n_6 = 3$). Chi sia sprovvisto di numero di matricola, ponga $n_1n_2 = 52$, $n_3n_4 =$ mese di nascita, $n_5n_6 =$ giorno di nascita.

ESERCIZIO 1. *Sia $n = 1$ se n_5 è pari ed $n = -1$ altrimenti. Sia $m = 1$ se n_4 è pari ed $m = -1$ altrimenti. Sia $k = 1$ se n_3 è pari e $k = -1$ altrimenti.*

Nello spazio euclideo, E^3, si considerino i punti P, Q, R e la retta r, ove

$$P = \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ m \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}, \qquad r : \begin{cases} Y - m = 0 \\ 5kX - nZ = 6nk \end{cases}.$$

(a) *Si determinino l'equazione cartesiana del piano $\pi = P \vee Q \vee R$ e l'intersezione $\{P_0\} = \pi \cap r$.*
(b) *Si determinino le equazioni parametriche e cartesiane della retta, s, proiezione ortogonale di r sul piano π e si dica quali punti di s cadono all'interno del triangolo di vertici P, Q, R.*
(c) *Si consideri il cilindro di asse r e raggio $2\sqrt{\frac{21}{13}}$ e si determinino i punti di intersezione, P_1, P_2, tra la retta s ed il cilindro.*
(d) *Si determinino i punti X sulla retta r tali che $\|\overrightarrow{P_0X}\| = \|\overrightarrow{P_0P_1}\|$ e si calcoli l'area dei triangoli P_1P_2X così determinati.*

Svolgimento. (a) $\pi : nX + mY + kZ = 1$ e $P_0 = \begin{pmatrix} n \\ m \\ -k \end{pmatrix}$.

(b) Il piano passante per r ed ortogonale a π ha equazione $5mkX - 4nkY - nmZ = 2mnk$ e quindi la retta s ha equazioni

$$s : \begin{cases} nX + mY + kZ = 1 \\ 5mkX - 4nkY - nmZ = 2mnk \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s = \begin{pmatrix} n \\ m \\ -k \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} n \\ 2m \\ -3k \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Utilizziamo coordinate baricentriche nel piano π, ed osserviamo che la retta s contiene i punti $P_0 = P + Q - R$ e $Q_0 = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}R$. Un generico punto della retta s è quindi $X_\lambda = \lambda P_0 + (1 - \lambda)Q_0 = \frac{\lambda+1}{2}P + \lambda Q + \frac{1-3\lambda}{2}R$. I punti interni al triangolo si trovano per $0 \le \lambda \le \frac{1}{3}$ (le intersezioni con i lati sono i punti Q_0 e $\frac{2}{3}P + \frac{1}{3}Q$).

(c) La retta r passa per P_0 ed è parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 5k \end{pmatrix}$. Dunque i punti X del cilindro sono determinati dalla condizione $\frac{\|\overrightarrow{P_0X} \times v\|}{\|v\|} = 2\sqrt{\frac{21}{13}}$ ed i punti di intersezione con s sono $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -m \\ 2k \end{pmatrix}$ e $P_2 = \begin{pmatrix} 2n \\ 3m \\ -4k \end{pmatrix}$.

(d) Si ha $\|\overrightarrow{P_0P_1}\| = \sqrt{14}$ e quindi i punti cercati sono due $X_{1,2} = P_0 \pm \sqrt{14}\frac{v}{\|v\|}$. Per ovvi motivi di simmetria, le aree dei due triangoli $P_1P_2X_1$ e $P_1P_2X_2$ coincidono e sono uguali a $\|\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0X_1}\| = 14\sqrt{\frac{6}{13}}$. $\square$

ESERCIZIO 2. *Siano m, n, k come nell'esercizio precedente.*
In $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare, si considerino i sottospazi

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1-n \\ 0 \\ m \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -nm \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n+2 \\ 0 \\ -m \\ 2k \end{pmatrix} \right\rangle \qquad W : \begin{cases} kx_1 + mx_2 + nx_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2mnx_3 + kx_4 = 0 \\ 2kx_1 - x_2 - mnx_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

(a) *Si determini una base ed un sistema di equazioni cartesiane per U. Si determini una base per W. È vero che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$?*
(b) *Detta $\pi_U : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proiezione su U parallelamente a W, si scriva la matrice $A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi_U)$, ove $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Si scriva la matrice $B = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi_W)$, ove $\pi_W : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ è la proiezione su W parallelamente ad U.*
(c) *Si determinino le equazioni cartesiane del sottospazio $U^\perp$ e si determini la matrice $C = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi')$, ove $\pi' : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ è la proiezione ortogonale su U.*
(d) *Si determinino $\pi_U \circ \pi'$ e $\pi' \circ \pi_U$. È vero che sono uguali?*

Svolgimento. (a) I tre vettori sono linearmente dipendenti e soddisfano al sistema

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ kmx_1 + knx_3 - mx_4 = 0 \end{cases}.$$

Una base è data, ad esempio, dai primi due generatori, $u_1 = \begin{pmatrix} 1-n \\ 0 \\ m \\ k \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -nm \\ 0 \end{pmatrix}$.

Il sistema che definisce W ha rango 2 e una base di W è $w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ n \\ -m \\ 0 \end{pmatrix}$ e $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -k \end{pmatrix}$.

I quattro vettori u_1, u_2, w_1, w_2 sono una base di $\mathbb{R}^4$ e quindi $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(b)

$$A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi_U) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -mn & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2mn & 2 & 0 \\ k & k & mnk & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \quad B = \mathbf{1} - A.$$

(c) Un vettore $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 \in U^\perp$ se, e solo se, $u_1 \cdot x = 0 = u_2 \cdot x$.

$$C = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi') = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -mn & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -mn & 0 & 2 & mnk \\ k & 0 & mnk & 2 \end{pmatrix}.$$

(d) Le due proiezioni hanno come immagine U ed inducono l'identità su questo sottospazio. Quindi $\pi_U \circ \pi' = \pi' \neq \pi_U = \pi' \circ \pi_U$. □

Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova di accertamento del 16 marzo 2007

ESERCIZIO 1.

Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, *di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -7 & -2 & -6 \\ -4 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, *di* $\mathbb{R}^4$.

(a) *Si determini il polinomio caratteristico di* ϕ *e si dica se* ϕ *è invertibile o nilpotente.*

(b) *Si determinino gli autovalori, i relativi spazi di autovettori per* ϕ *ed il polinomio minimo e si dica se* ϕ *è, o meno, diagonalizzabile.*

(c) *Si determinino una matrice di Jordan,* J, *di* ϕ, *ed una matrice invertibile,* P, *tali che* $P^{-1}AP = J$.

(d) *Si calcolino* J^{20} *ed* A^{20}.

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}) = (x+1)^4$, che ha termine noto uguale ad 1; quindi ϕ è invertibile.

(b) L'endomorfismo ϕ ha un unico autovalore, -1, di molteplicità 4 e quindi, non essendo A una matrice scalare, non può essere diagonalizzabile. Si ha

$$A + 1 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & -2 & -6 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 6 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \qquad (A+1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ed} \quad (A+1)^3 = \mathbf{0}.$$

Se ne deduce che il polinomio minimo di ϕ è $(x+1)^3$. Inoltre, $A + \mathbf{1}$ ha rango 2 e lo spazio di autovettori di ϕ è $\ker(\phi + 1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(c) La matrice di Jordan ha due blocchi, uno di ordine 3 ed uno di ordine 1, ed un autovettore generalizzato di periodo massimo è e_3. Una base, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, rispetto a cui ϕ ha forma di Jordan è costituita dai vettori $v_2 = (\phi+1)^2(e_3) = 6e_2 - 6e_4$, $v_3 = (\phi+1)(e_3) = 4e_1 - 2e_2 + 4e_3 + e_4$, $v_4 = e_3$, e da un autovettore indipendente da v_2, quale $v_1 = e_1 + e_3$. Perciò possiamo scrivere

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -6 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Scriviamo $J = D + N$, ove

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{ed} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Osservando che D ed N commutano ($DN = ND$) ed $N^3 = 0$, si ha

$$J^{20} = (D+N)^{20} = D^{20} + 20D^{19}N + \binom{20}{2} D^{18}N^2 = \mathbf{1} - 20N + 190N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -20 & 190 \\ 0 & 0 & 1 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & -1/6 & 0 & -1/3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
e, dalla relazione $A = PJP^{-1}$, si deduce che $A^{20} = PJ^{20}P^{-}1$, ovvero
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -20 & 190 \\ 0 & 0 & 1 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & -1/6 & 0 & -1/3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 & 0 & -80 & 0 \\ -1180 & 121 & 1180 & 120 \\ 80 & 0 & -79 & 0 \\ 1160 & -120 & -1160 & -119 \end{pmatrix}$$
Fine della discussione. □

ESERCIZIO 2. *Si consideri lo spazio vettoriale reale V ed una sua base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$. Sia $q : V \to \mathbb{R}$ la forma quadratica definita ponendo*
$$q(x_1v_1 + \cdots + x_4v_4) = -4x_1x_2 + 2x_1x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_3x_4 + x_4^2.$$
(a) Si scriva la matrice, G, rispetto alla base data, dell'applicazione bilineare $g : V \times V \to \mathbb{R}$ tale che $q(v) = g(v, v)$ per ogni $v \in V$ e si dica se g è non degenere.
(b) Si classifichi l'applicazione g, determinandone l'eventuale nucleo e la segnatura..
(c) Si determinino (se esistono) una matrice invertibile, P, ed una matrice diagonale, D, tali che ${}^tPGP = D$.
(d) Si dica se esistono due sottospazi isotropi di dimensione massima, H_1 ed H_2, tali che $V = H_1 \oplus H_2$. Si dica se esiste un'isometria non banale, $\phi : V \to V$, che abbia i sottospazi H_1 ed H_2 come spazi di autovettori. In tal caso, cosa si può dire degli autovalori corrispondenti?

Svolgimento. (a) Si ha
$$G = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
e $\det G = 25$; quindi g è non-degenere.
(b) Il nucleo è uguale a $\langle 0 \rangle$ e, per determinare la segnatura di g, cerchiamo una base ortogonale(*). I vettori $w_1 = v_2$ e $w_2 = v_4$, sono ortogonali tra loro e $g(w_1, w_1) = g(w_2, w_2) = 1$. Il vettore $w_3 = v_1 + 2v_2 - v_4$ appartiene al sottospazio $\langle w_1, w_2 \rangle^\perp$ e $g(w_3, w_3) = -5$. Infine, $w_4 = v_2 - v_3 + 2v_4$ appartiene al sottospazio $\langle w_1, w_2, w_3 \rangle^\perp$ e $g(w_4, w_4) = -5$. Quindi $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$ è una base ortogonale di V e la segnatura di g è $(2, 2)$.
(c) Presa la matrice di cambiamento di base, $P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(1)$, si ha ${}^tPGP = D$, ove
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
(d) Due sottospazi isotropi massimali sono, ad esempio,
$$H_1 = \left\langle \sqrt{5}w_1 + w_3, \sqrt{5}w_2 + w_4 \right\rangle \qquad \text{ed} \qquad H_2 = \left\langle \sqrt{5}w_1 - w_3, \sqrt{5}w_2 - w_4 \right\rangle.$$
Chiaramente si ha $V = H_1 \oplus H_2$. Ogni vettore, $v \in V$, si scrive quindi come $v = x_1 + x_2$ con $x_i \in H_i$, $i = 1, 2$. Per un'applicazione lineare, $\phi : V \to V$, che abbia i due sottospazi come spazi di autovettori, si ha quindi $\phi(v) = \phi(x_1 + x_2) = ax_1 + bx_2$ ove a e b sono i due autovalori. Se, analogamente, $w = y_1 + y_2$ e $\phi(w) = ay_1 + by_2$, affinché ϕ sia un'isometria, deve aversi $g(v, w) = g(\phi(v), \phi(w))$, e quindi
$$g(x_1, y_2) + g(x_2, y_1) = g(v, w) = g(\phi(v), \phi(w)) = ab(g(x_1, y_2) + g(x_2, y_1)).$$
Perché ciò accada per ogni coppia di vettori di V, è necessario e sufficiente che $ab = 1$. Quindi una tale isometria esiste e gli autovalori devono essere l'uno l'inverso dell'altro. □

(*) Si poteva determinare la segnatura di g senza bisogno di trovare una base ortogonale. In che modo?

Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova scritta del 21 marzo 2007

ESERCIZIO 1. *Nello spazio euclideo E^4, si considerino le sottovarietà lineari*

$$\pi_1 : \begin{cases} x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \qquad \pi_2 : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_4 = 2 \end{cases} \qquad \pi_3 : \begin{cases} x_2 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

(a) Si determinino le dimensioni di π_1, π_2, π_3, e si determinino i punti delle sottovarietà lineari $\pi_1 \cap \pi_2$, $\pi_1 \cap \pi_3$, $\pi_2 \cap \pi_3$.
(b) Siano $P_1 \in \pi_2 \cap \pi_3$, $P_2 \in \pi_1 \cap \pi_3$, $P_3 \in \pi_1 \cap \pi_2$. Si determinino le equazioni cartesiane del piano $\sigma = P_1 \vee P_2 \vee P_3$ e l'area del triangolo $P_1P_2P_3$.
(c) Qual'è la distanza di σ dall'origine?

Svolgimento. (a) I tre sistemi lineari (incompleto e completo) hanno tutti ranghi $(2, 2)$ e quindi si tratta di tre piani. Le intersezioni sono determinate da sistemi di ranghi $(4, 4)$, e quindi le intersezioni si riducono a tre punti, ovvero

$$\{P_1\} = \pi_2 \cap \pi_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \{P_2\} = \pi_1 \cap \pi_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \{P_3\} = \pi_1 \cap \pi_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Il piano $P_1 \vee P_2 \vee P_3$ ha equazioni cartesiane

$$\sigma : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ 3x_2 - x_3 = 3 \end{cases}.$$

Indichiamo con T la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori $P_2 - P_3$ e $P_1 - P_3$. Si ha

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \\ 0 & 3/2 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix} \qquad \text{e l'area del triangolo è } A = \frac{1}{2}\sqrt{\det({}^tTT)} = \frac{\sqrt{21}}{4}.$$

(c) Per determinare la distanza di σ dall'origine, O, possiamo calcolare il rapporto tra il volume del parallelepipedo determinato dai vettori $\overrightarrow{P_3O}$, $\overrightarrow{P_3P_2}$, $\overrightarrow{P_3P_1}$ e l'area del parallelogramma di lati $\overrightarrow{P_3P_2}$, $\overrightarrow{P_3P_1}$. Detta S la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori $\overrightarrow{OP_3}$, $\overrightarrow{OP_2}$, $\overrightarrow{OP_1}$, si ha

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3/2 & 1 & 1 \\ 3/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e il volume del parallelepipedo è } V = \sqrt{\det({}^tSS)} = \frac{\sqrt{31}}{2}.$$

Dunque la distanza di σ dall'origine è il rapporto $d = V/2A = \sqrt{31/21}$. □

ESERCIZIO 2. *Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi*

$$U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad e \qquad U_2 : \begin{cases} 7x_1 - 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 = 0 \\ 3x_1 - 17x_2 = 0 \end{cases}.$$

(a) *Determinare le equazioni cartesiane ed una base di U_1 ed U_2. Si determini, se esiste, una base $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $U_1 = \langle u_1, u_2 \rangle$ ed $U_2 = \langle u_3, u_4 \rangle$.*

(b) *Detta $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$, si determinino le matrici di cambiamento di base $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{E}}(1)$ e $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{U}}(1)$, ove $\mathcal{U}$ è la base definita al punto precedente. Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi)$, ove $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ è la proiezione su U_2 parallelamente ad U_1.*

(c) *Si determinino tutte le applicazioni lineari, $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, tali che $\phi(u) = u$ per ogni $u \in U_1$ e $\pi(\phi(x)) = x$, per ogni $x \in U_2$, scrivendone la matrice $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi)$.*

Svolgimento. (a) I tre generatori di U_1 sono linearmente dipendenti. Infatti, se li indichiamo ordinatamente con u_1, u_2, u, si ha $2u_1 + 2u_2 - u = 0$. Una base di U è quindi data dai vettori u_1 ed u_2, che sono linearmente indipendenti. Una base di U_2 è data dai vettori $u_3 = e_3$ ed $u_4 = e_4$ ed i quattro vettori formano una base, $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$, di $\mathbb{R}^4$. Equazioni cartesiane di U_1 e di U_2 sono, ad esempio,

$$U_1 : \begin{cases} 3x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad U_2 : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

(b) Le matrici di cambiamento di base sono

$$P = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P^{-1} = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{U}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre,

$$A = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{E}}(1)\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\pi)\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{U}}(1) = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è la matrice della proiezione su U_2, parallelamente ad U_1.

(c) Le applicazioni lineari richieste, hanno matrice del tipo

$$\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

al variare dei parametri a, b, c, d in $\mathbb{R}$. Per trovare le matrici nella base canonica, possiamo usare le matrici di cambiamento di base. Dunque

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi) = P\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\phi)P^{-1} = \begin{pmatrix} 1-2a+b & a+b & a & b \\ 2c-d & 1-c-d & -c & -d \\ -4a+2b-2c+d & 2a+2b+c+d & 2a+c+1 & 2b+d \\ 2a-b-2c+d & -a-b+c+d & c-a & d-b+1 \end{pmatrix}$$

sono le matrici cercate. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -7 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, di $\mathbb{R}^4$.

(a) *Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori.*

(b) *Si determinino una matrice di Jordan, J, di ϕ, ed una matrice invertibile, P, tali che $P^{-1}AP = J$.*

(c) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 14. Si determinino le possibili matrici di Jordan degli endomorfismi, $\psi : V \to V$, tali che

$$\dim(\mathit{ker}(\psi-3)^2) = 4, \quad \dim(\mathit{ker}(\psi-3)) = 2, \quad \dim(\mathit{ker}(\psi-2)^3) = 6,$$
$$\dim(\mathit{ker}(\psi-2)) = 3, \quad \dim(\mathit{ker}(\psi^4)) = 4, \quad \dim(\mathit{im}\psi) = 12.$$

Svolgimento. (*a*) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = -\det(A - x\mathbf{1}) = (x+2)^4$ e quindi l'endomorfismo ϕ ha un unico autovalore, -2, di molteplicità 4. Osservando che

$$A + 2\mathbf{1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \text{e} \qquad (A+2\mathbf{1})^2 = \mathbf{0},$$

si conclude che il polinomio minimo di ϕ è $\lambda_\phi(x) = (x+2)^2$ e vi è un sottospazio di dimensione 2 di autovettori ($\operatorname{rk}(A - 2\mathbf{1}) = 2$) ed è $\ker(\phi - 2) = \langle e_1 - e_3, e_2 + e_4 \rangle$.

(*b*) La matrice di Jordan di ϕ ha due blocchi di ordine 2. Consideriamo i vettori, $v_4 = e_4$, $v_3 = (\phi+2)(v_4) = -2e_1 + 5e_2 + 2e_3 + 5e_4$, e $v_2 = e_1$, $v_1 = (\phi+2)(v_2) = -3e_1 + 3e_3$, e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ la base da essi costituita. Si conclude che

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

sono le matrici cercate.

(*c*) Il polinomio caratteristico di ψ è $p_\psi(x) = x^4(x-2)^6(x-3)^4$; quindi gli unici autovalori per ψ sono $0, 2, 3$ e per ciascuno di essi la nullità (molteplicità geometrica) è minore della molteplicità (algebrica). In particolare, per gli autovalori 0 e 3 ci sono 2 blocchi di Jordan ($\dim(\ker(\psi-3)) = 2 = \dim(\ker\psi) = \dim V - \dim(\operatorname{im}\psi)$), mentre per l'autovalore 2 i blocchi sono 3 ($\dim(\ker(\psi-2)) = 3$). Il massimo periodo degli autovettori generalizzati relativi all'autovalore 3 è 2 e quindi vi sono 2 blocchi di ordine 2 relativi a tale autovalore nella matrice di Jordan di ψ. Per quanto riguarda gli altri due autovalori, il massimo periodo dei relativi autovettori generalizzati è maggiore di 1 e minore o uguale a 3 (perché?). Quindi vi sono 4 possibilità per la matrice di Jordan, J, di ψ, distinte dal polinomio minimo $\lambda_\psi(x) = x^a(x-2)^b(x-3)^2$. Si ha $J = \begin{pmatrix} J_0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$, ove

$$J_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & & \\ & 3 & 0 & \\ & & 3 & 1 \\ & & & 3 \end{pmatrix}, \quad J_0 = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} & \text{se } a = 2 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} & \text{se } a = 3 \end{cases}, \quad J_2 = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & 2 & 0 & & & \\ & & 2 & 1 & & \\ & & & 2 & 0 & \\ & & & & 2 & 1 \\ & & & & & 2 \end{pmatrix} & \text{se } b = 2 \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & & & & \\ & 2 & 1 & & & \\ & & 2 & 0 & & \\ & & & 2 & 1 & \\ & & & & 2 & 1 \\ & & & & & 2 \end{pmatrix} & \text{se } b = 3 \end{cases}$$

Fine della discussione. □

ESERCIZIO 4. *Sia V uno spazio vettoriale reale e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una sua base. Si consideri la forma quadratica $q : V \to \mathbb{R}$, definita da*

$$q(x_1v_1 + \cdots + x_4v_4) = x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_1x_4 + 2x_2^2 - 5x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3^2 - x_3x_4.$$

(a) Si scriva la matrice nella base $\mathcal{V}$ dell'applicazione bilineare simmetrica, $g : V \times V \to \mathbb{R}$, tale che $g(v, w) = q(v + w) - q(v) - q(w)$, per ogni $v, w \in V$. Si dica se g è non-degenere e si determini l'eventuale nucleo, N.
(b) Si determinino la segnatura di g e tutti i sottospazi isotropi massimali di V.
(c) Si dica se i sottospazi $W_1 = \langle v_1, v_2\rangle$ e $W_2 = \langle v_3, v_4\rangle$ sono complementari del nucleo, N. In caso affermativo si scriva la matrice, nelle basi date, dell'applicazione $\phi : W_2 \to W_1$, che manda ogni vettore $w \in W_2$ nella sua proiezione su W_1, parallelamente ad N. È vero che ϕ è un'isometria?

Svolgimento. (a) La matrice di g è

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -5 & 2 \\ -2 & -5 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

che è degenere ($\mathrm{rk}\, G = 2$). Il nucleo è il sottospazio $N = \langle 3v_1 - 2v_2 - v_3, 2v_1 - v_2 + v_4\rangle$.

(b) Il sottospazio $H = \langle v_1, v_4\rangle$ è un complementare del nucleo (la restrizione di g è non-degenere) e contiene due vettori isotropi linearmente indipendenti. Dunque la restrizione di g ad H è non-definita e la segnatura di g è $(1, 1)$. I sottospazi isotropi massimali sono iperpiani (dimensione 3) e sono, precisamente, $H_1 = N \oplus \langle v_1\rangle$ ed $H_2 = N \oplus \langle v_4\rangle$. Se esistesse un altro sottospazio isotropo massimale, dovrebbe contenere il nucleo N ed intersecare H in un sottospazio isotropo di dimensione 1, ma $\langle v_1\rangle$ e $\langle v_4\rangle$ sono gli unici sottospazi isotropi di H.

(c) Si ha $V = N \oplus W_1 = N \oplus W_2$, come si verifica facilmente esaminando i generatori dei sottospazi in questione. Osserviamo che

$$v_3 = (3v_1 - 2v_2) - (3v_1 - 2v_2 - v_3), \qquad v_4 = (-2v_1 + v_2) + (2v_1 - v_2 + v_4),$$

ove, in ognuna delle somme, il primo addendo sta in W_1 ed il secondo sta in N, quindi la matrice di ϕ nelle basi date è $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Osserviamo infine che ϕ è un'isometria, perché

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

come si doveva verificare. □

ESERCIZIO 5. [*Vecchio ordinamento*] *Studiare la conica* $\mathscr{C}$ *di equazione*

$$3x^2 - 8xy - 3y^2 - 4x + 22y = 0 \ .$$

In particolare determinare se è degenere, qual è il suo tipo, un'equazione canonica e l'opportuna trasformazione di coordinate, gli eventuali assi, asintoti, centro, fuochi. Se ne tracci infine un disegno approssimativo e si scriva l'equazione della retta tangente a $\mathscr{C}$ *nell'origine.*

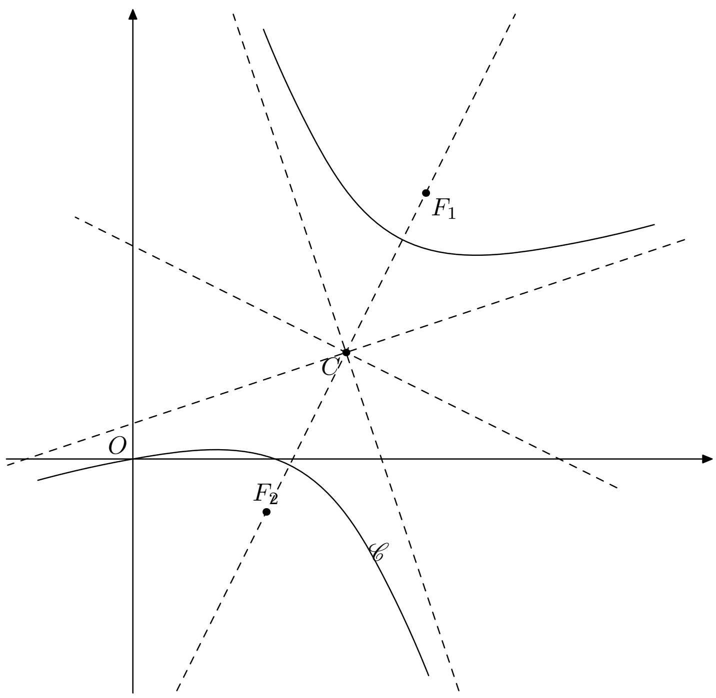
Svolgimento. Consideriamo, come di consueto, il piano affine immerso nel piano proiettivo prendendo $x_0 = 0$ come retta impropria. Una matrice della conica $\mathscr{C}$ è $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 11 \\ -2 & 3 & -4 \\ 11 & -4 & -3 \end{pmatrix}$. Poiché $\det A = -175 \neq 0$ si tratta di una conica non degenere, e poiché $\det A_\infty = -25$ (A_∞ è la sottomatrice quadrata di A che si ottiene cancellando prima riga e prima colonna) si tratta di un'iperbole. I punti impropri sono $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $Q_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ che rappresentano due direzioni ortogonali e quindi si tratta di un'iperbole equilatera. Gli asintoti sono le rette polari di P_∞ e Q_∞, che si intersecano nel centro, ovvero

$$a_1 : x - 3y + 1 = 0, \qquad a_2 : 3x + y - 7 = 0, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A_∞ ha autovalori 5 e -5 a cui corrispondono gli autovettori $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, direzioni degli assi. L'equazione canonica di $\mathscr{C}$, in un opportuno sistema di riferimento ortonormale, è $X^2 - Y^2 = \frac{7}{5}$ e la matrice dell'isometria che porta l'equazione in forma canonica è $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 1 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, come si può verificare calcolando la matrice $-\frac{1}{7}{}^tPAP$. Gli assi hanno quindi equazioni:

$$h_1 : 2x - y - 3 = 0 \text{ (asse focale)},$$
$$h_2 : x + 2y - 4 = 0.$$

Infine, ricordiamo che i fuochi si trovano sull'asse focale, a distanza $\sqrt{\frac{14}{5}}$ dal centro. Sono i punti $F_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \pm \frac{\sqrt{14}}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.



La retta tangente nell'origine ha equazione $2x - 11y = 0$. □

Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)
prova scritta del 29 marzo 2007

ESERCIZIO 1. *Nello spazio euclideo E^4, si considerino le sottovarietà lineari*

$$\pi_1 : \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases} \qquad \pi_2 : \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -1 \end{cases} \qquad \pi_3 : \begin{cases} 2x_1 + x_4 = 1 \\ 2x_2 - x_4 = 1 \\ 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}.$$

(a) *Si determinino le dimensioni di π_1, π_2, π_3, e si determinino i punti delle sottovarietà lineari $\pi_1 \cap \pi_2$, $\pi_1 \cap \pi_3$, $\pi_2 \cap \pi_3$.*
(b) *Siano $P_1 \in \pi_2 \cap \pi_3$, $P_2 \in \pi_1 \cap \pi_3$, $P_3 \in \pi_1 \cap \pi_2$. Si determinino le equazioni cartesiane del piano $\sigma = P_1 \vee P_2 \vee P_3$ ed il volume del tetraedro di vertici $OP_1P_2P_3$.*
(c) *Si determinino le equazioni cartesiane del piano, τ, passante per il baricentro del triangolo $P_1P_2P_3$ e perpendicolare al piano σ. Qual è la distanza di P_2 da τ?*

Svolgimento. (a) I primi due sistemi lineari (incompleto e completo) hanno ranghi $(2,2)$ e quindi rappresentano due piani, mentre il terzo ha rango $(3,3)$ e rappresenta una retta. Le intersezioni sono determinate da sistemi di ranghi $(4,4)$, e quindi si riducono a tre punti, ovvero

$$\{P_1\} = \pi_2 \cap \pi_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \{P_2\} = \pi_1 \cap \pi_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \{P_3\} = \pi_1 \cap \pi_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Il piano $P_1 \vee P_2 \vee P_3$ ha equazioni cartesiane

$$\sigma : \begin{cases} x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases},$$

dunque contiene l'origine ed il tetraedro è degenere. Il volume cercato è nullo.

(c) Il baricentro del triangolo è $G = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$. Le equazioni del piano τ son quindi

$$\tau : \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 7 \\ 3x_2 + 3x_4 = 4 \end{cases}.$$

Il vettore $P_2 - G$ sta sul piano σ ed è quindi ortogonale a τ. La distanza è $\|P_2 - G\| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. □

ESERCIZIO 2. *Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi*

$$U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad e \qquad U_2 : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

(a) *Determinare equazioni cartesiane per U_1 ed una base di U_2. Si determini, se esiste, una base $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $U_1 = \langle u_1, u_2 \rangle$ ed $U_2 = \langle u_3, u_4 \rangle$. È vero che $\mathbb{R}^4 = U_1 \oplus U_2$?*
(b) *Detta $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$, si determini la matrice $A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi)$, ove $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ è la proiezione su U_1, parallelamente ad U_2. Si determini $ker(1 - \pi) \subseteq \mathbb{R}^4$.*
(c) *Si dica se le applicazioni lineari, $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, tali che $\pi(\phi(x)) \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, per ogni $x \in \mathbb{R}^4$, formano un sottospazio di $Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ e si scrivano le matrici $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi)$ di tali applicazioni.*

Svolgimento. (a) I tre generatori di U_1 sono linearmente indipendenti, così come lo sono le equazioni che definiscono U_2. Si ha quindi

$$U_1 : x_3 = 0 \qquad \text{e} \qquad U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

(b) La matrice cercata è

$$A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Infine, $\ker(1 - \pi) = \operatorname{im}\pi = U_1$.

(c) Poiché π è la proiezione su U_1 ed $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_1$, la condizione data è equivalente $\operatorname{im}\phi \subseteq \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \ker\pi$.
Dunque le applicazioni in questione formano un sottospazio di dimensione 8 di $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ e le matrici corrispondenti sono tutte e sole le matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ e & f & g & h \\ a & b & c & d \end{pmatrix},$$

al variare di a, b, c, d, e, f, g, h in $\mathbb{R}$. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, di $\mathbb{R}^4$.

(a) Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori.

(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, di ϕ, ed una matrice invertibile, P, tali che $P^{-1}AP = J$.

(c) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 14. Si determini le possibili matrici di Jordan degli endomorfismi, $\psi : V \to V$, tali che

$$\dim(\ker(\psi - 3)) = 3, \quad \dim(\ker(\psi - 3)^2) = 6, \quad \dim(\ker(\psi - 3)^3) = 9,$$
$$\dim(\ker(\psi - 3)^4) = 11, \quad \dim(\ker((\psi - 3)^5)) = 13.$$

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}) = x(x-1)^3$ e quindi l'endomorfismo ϕ ha gli autovalori, 0 ed 1, con molteplicità 1 e 3, rispettivamente. Osservando che

$$A - \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

ha rango 2, si conclude che il polinomio minimo di ϕ è $\lambda_\phi(x) = x(x-1)^2$ (perché?). I sottospazi di autovettori sono $\ker\phi = \langle e_1 + 2e_2 + 2e_3 - 3e_4 \rangle$ e $\ker(\phi - 1) = \langle e_1 + e_3, 3e_2 + e_3 - 3e_4 \rangle$.

(b) Il blocco relativo all'autovalore 1, è formato da due blocchi di Jordan ordine 1 e 2, rispettivamente; inoltre guardando al polinomio minimo, si deduce che $\operatorname{im}\phi = \ker(\phi - 1)^2$. Consideriamo i vettori, $v_4 = e_1 =$

$\phi(-2e_1-3e_3) \in \operatorname{im}\phi \smallsetminus \ker(\phi-1)$, $v_3 = (\phi-1)(v_4) = 3e_1+3e_3$, $v_2 = 3e_2+e_3-3e_4$, $v_1 = e_1+2e_2+2e_3-3e_4$, e la base, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, da essi costituita. Si conclude che

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono le matrici cercate.

(c) L'autovalore 3 ha molteplicità (algebrica) maggiore o uguale a 13, quindi il polinomio caratteristico di ψ può essere $p_\psi(x) = \begin{cases} (x-3)^{14} \\ (x-3)^{13}(x-a) \end{cases}$, ove a è un numero reale diverso da 3. Nel caso in cui vi sia solo l'autovalore 3, ci sono 3 blocchi di Jordan, di ordini 3, 5 e 6. Nell'altro caso c'è un blocco di ordine 1 relativo all'autovalore a e 3 blocchi di Jordan relativi all'autovalore 3, uno di ordine 3 e due di ordine 5. □

ESERCIZIO 4. *Sia V uno spazio vettoriale reale e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una sua base. Si consideri la forma quadratica $q : V \to \mathbb{R}$, definita da*

$$q(x_1v_1 + \cdots + x_4v_4) = 2x_1x_2 - 2x_1x_4 + 4x_2x_3 + 2x_2x_4 - x_3^2 - x_4^2.$$

(a) Si scriva la matrice nella base $\mathcal{V}$ dell'applicazione bilineare simmetrica, $g : V \times V \to \mathbb{R}$, tale che $g(v,v) = q(v)$, per ogni $v \in V$. Si dica se g è non-degenere e si determini l'eventuale nucleo, N.

(b) Si determinino la segnatura di g e (se esiste) una base ortogonale, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$, di V tale che

$$\langle w_4 \rangle = \langle v_4 \rangle, \qquad \langle w_3, w_4 \rangle = \langle v_3, v_4 \rangle, \qquad \langle w_2, w_3, w_4 \rangle = \langle v_2, v_3, v_4 \rangle.$$

(c) Si determinino, se esistono, due sottospazi isotropi massimali, U e W, tali che $V = U \oplus W$. È vero che, per ogni vettore $u \in U$ esiste un vettore $w \in W$ tale che $\langle u, w \rangle$ sia un sottospazio isotropo massimale?

Svolgimento. (a) La matrice di g è

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che è non-degenere ($\det G = 5$).

(b) Prendiamo $w_4 = v_4$, $w_3 = v_3$, $w_2 = v_2 + 2v_3 + v_4$, $w_1 = v_1 - v_4$ e si ottiene una base ortogonale, soddisfacente alla condizione richiesta, con $g(w_1, w_1) = 1$, $g(w_2, w_2) = 5$, $g(w_3, w_3) = -1$, $g(w_4, w_4) = -1$. In particolare la segnatura di g è $(2, 2)$.

(c) Possiamo prendere $U = \langle w_1 + w_3, w_2 + \sqrt{5}w_4 \rangle$ e $W = \langle w_1 - w_3, w_2 - \sqrt{5}w_4 \rangle$. Per ogni vettore $u \in U$, l'intersezione $\langle u \rangle^\perp \cap W$ ha dimensione 1 (perché?) e quindi preso un generatore non nullo, w, di tale intersezione, il sottospazio $\langle u, w \rangle$ è isotropo (massimale). □

ESERCIZIO 5. [*Vecchio ordinamento*] *Studiare la conica* $\mathscr{C}$ *di equazione*

$$9x^2 - 12xy + 4y^2 - 8x + y + 6 = 0 \ .$$

In particolare determinare se è degenere, qual è il suo tipo, un'equazione canonica e l'opportuna trasformazione di coordinate, gli eventuali assi, asintoti, centro, vertici, fuochi. Si tracci un disegno approssimativo di $\mathscr{C}$. *Si determini la retta che congiunge i punti di intersezione tra la conica e le rette tangenti uscenti dall'origine.*

Svolgimento. Consideriamo, come di consueto, il piano affine immerso nel piano proiettivo prendendo $x_0 = 0$ come retta impropria. Una matrice della conica $\mathscr{C}$ è $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 1/2 \\ -4 & 9 & -6 \\ 1/2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$. Poiché $\det A = -169/4 \neq 0$ si tratta di una conica non degenere, e poiché $\det A_\infty = 0$ (A_∞ è la sottomatrice quadrata di A che si ottiene cancellando prima riga e prima colonna) si tratta di una parabola. Il punto improprio è $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e la sua direzione ortogonale, $Q_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, è il polo dell'asse. Quindi l'asse ed il vertice sono

$$h : 3x - 2y - 1 = 0, \qquad \text{e} \qquad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'autovalore non nullo di A_∞ è uguale a 13. L'equazione canonica di $\mathscr{C}$, in un opportuno sistema di riferimento ortonormale, è $\sqrt{13}X^2 - Y = 0$ e la matrice dell'isometria che porta l'equazione in forma canonica è $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \\ 1 & -2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \end{pmatrix}$, come si può verificare calcolando la matrice $\frac{2}{\sqrt{13}}{}^tPAP$. Infine, ricordiamo che il fuoco si trova sull'asse focale, a distanza $\frac{1}{4\sqrt{13}}$ dal vertice. È il punto $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{1}}{52} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. La retta cercata è la polare dell'origine ovvero $y - 8x + 12 = 0$. $\square$

Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova scritta del 17 luglio 2007

ESERCIZIO 1. *Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino i punti*

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si determinino, il volume del tetraedro, Δ, di vertici P, Q, R, S e l'equazione cartesiana del piano $\pi = Q \vee R \vee S$.*

(b) *Siano M ed N i punti medi dei segmenti PQ e PR. Si determinino i punti, X, sulla retta $P \vee S$ tali che il volume del tetraedro di vertici M, N, P, X sia la metà del volume di Δ. Tra tali punti si determini il punto X_0, avente minima distanza da S e si scriva l'equazione cartesiana del piano $\sigma = M \vee N \vee X_0$.*

(c) *Detta $r = \sigma \cap \pi$, si determini l'equazione cartesiana del luogo dei punti equidistanti da P e da r.*

Svolgimento. (a) Il volume (non orientato) è uguale a $2/3$. $\pi : x - 5y + 7z = 11$.

(b) $M = P + 1/2(Q - P) = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $N = P + 1/2(R - P) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$, $X = P + t(S - P)$ e quindi $vol^3(PMNX) = |t/6|$. Dunque i punti cercati sono 2 ($t = \pm 2$), il più vicino ad S è $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\sigma : 7x - 23y + 25z = 49$.

(c) La retta r passa per $U = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -7/3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dunque i punti $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartenenti al luogo cercato soddisfano alla condizione

$$d(Y, r) = \frac{\|(Y - U) \times v\|}{\|v\|} = \|Y - P\| = d(Y, P).$$

Si ottiene così un'equazione di secondo grado, ovvero $(y - 2z + \frac{7}{3})^2 + (x - 3z + \frac{2}{3})^2 + (2x - 3y - \frac{17}{3})^2 = 14\Big((x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2\Big)$. □

ESERCIZIO 2. *Si considerino i seguenti sottospazi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$:*

$$U : \begin{cases} X_1 + X_3 + X_4 = 0 \\ 3X_1 - 2X_2 + 2X_3 + X_4 = 0 \\ X_1 - 2X_2 - X_4 = 0 \end{cases} \qquad e \qquad V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(a) *Si determinino la dimensione, una base e delle equazioni cartesiane per i sottospazi U e V.*

(b) *Si determinino $U \cap V$ ed un sottospazio, W, tale che $V = W \oplus (U \cap V)$. Si verifichi che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.*

(c) *Determinare le matrici in base canonica di π_U^W, σ_W^U. Qual è la restrizione ad $U \cap V$ di queste due applicazioni?*

(d) *Si dica se l'insieme, C, delle applicazioni lineari $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tali che $im(\pi_U^W \circ \phi) \subseteq V \cap U$ è un sottospazio di $Hom(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ ed in tal caso se ne calcoli la dimensione. Si scrivano le matrici in base canonica degli elementi di C.*

Svolgimento. (a) La seconda equazione che definisce V è uguale al doppio della prima più la terza ed il sistema ha rango 2. Quindi $\dim U = 2$ ed una base è $\{e_1 + e_2 - e_4, e_2 + 2e_3 - 2e_4\}$.

I tre vettori che generano V sono linearmente indipendenti. Quindi V ha dimensione 3 ed è determinato dall'equazione cartesiana $V : X_1 + 2X_3 + X_4 = 0$.

(b) $U \cap V = \langle e_1 + e_2 - e_4 \rangle$ ha dimensione 1 e possiamo prendere $W = \langle e_1 - 2e_3 - e_4, e_1 - e_3 + e_4 \rangle$. Tramite la tecnica di eliminazione di Gauss, si verifica che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(c) Dato un vettore $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, la proiezione, $\pi_U^W(x) = a(e_1 + e_2 - e_4) + b(e_2 + 2e_3 - 2e_4) \in U$, è quell'unico vettore tale che $x - \pi_U^W(x) \in W$. Deve quindi aversi

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi_U^W) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -6 & -5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & 12 & 6 \\ -5 & -2 & -6 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma_W^U) = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(1 - 2\pi_U^W) = \mathbf{1}_4 - 2\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi_U^W).$$

Essendo $U \cap V \subset U$, per ogni $x \in U \cap V$, si ha $\pi_U^W(x) = x$ e $\sigma_W^U(x) = -x$.

(d) C non è vuoto perché contiene l'applicazione nulla. Indicato con v_0 un generatore di $U \cap V$, si ha che

$$\operatorname{im}(\pi_U^W \circ \phi) \subseteq V \cap U \iff \forall x \in \mathbb{R}^4,\ \phi(x) = av_0 + w,\ \exists a \in \mathbb{R},\ \exists w \in W \iff \operatorname{im}\phi \subseteq (V \cap U) + W = V.$$

Dunque, gli elementi di C formano un sottospazio di $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ isomorfo a $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^4, V)$, che ha dimensione 12. Le matrici in base canonica degli elementi di C hanno come colonne combinazioni lineari dei vettori della base di V data nel testo. Con questo in mente, il lettore può facilmente scrivere le matrici di una base di C o la matrice di un generico suo elemento (farlo!). □

ESERCIZIO 3. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & 5 \\ -4 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, di $\mathbb{R}^4$.

(a) Si determinino il polinomio caratteristico di ϕ, gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori. Si calcoli $\det\phi$.

(b) Si determinino il polinomio minimo di ϕ ed un autovettore generalizzato di periodo massimo per ogni autovalore di ϕ.

(c) Si determinino una matrice di Jordan, J, di ϕ, ed una matrice invertibile, P, tali che $P^{-1}AP = J$.

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}) = (x-2)(x+1)^3$, che ha termine noto uguale a -2 e quindi $\det\phi = -2$. Il rango di $\phi - 2$ è uguale a 3 e quindi vi è un sottospazio di autovettori di dimensione 1, $\ker(\phi - 2) = \langle e_1 + 4e_3 \rangle$. Il rango di $\phi + 1$ è uguale a 2 e quindi vi è un sottospazio di autovettori di dimensione 2, $\ker(\phi + 1) = \langle e_1 + e_3, e_1 + e_2 + e_4 \rangle$.

(b) La molteplicità dell'autovalore -1 è uguale a 3, mentre la sua nullità è strettamente più piccola, quindi ϕ non può essere diagonalizzabile. Osservando che

$$A + 1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ -4 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad (A+1)^2 = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -20 & 12 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

si conclude che il polinomio minimo è $(X-2)(x+1)^2$. Per l'autovalore 2 non ci sono autovettori generalizzati che non siano autovettori, mentre per l'autovalore -1 ci sono autovettori generalizzati di periodo 2, ad esempio $3e_2 + 5e_3$.

(c) La matrice di Jordan di ϕ ha quindi tre blocchi, uno relativo all'autovalore 2 e due relativi all'autovalore -1, uno dei quali ha ordine 2. Possiamo prendere $v_4 = 3e_2 + 5e_3$, $v_3 = (\phi+1)(v_4) = 5e_1 - 15e_2 + 20e_3 - 15e_4$, $v_2 = e_1 + e_3$ e $v_1 = e_1 + 4e_3$. Otteniamo così una base rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan. Si conclude che

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & 3 \\ 4 & 1 & 20 & 5 \\ 0 & 0 & -15 & 0 \end{pmatrix}$$

sono le matrici cercate. □

ESERCIZIO 4. *Sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, si consideri la forma quadratica*

$$q(X_0, X_1, X_2, X_3) = X_0^2 + 4X_0X_2 - 2X_0X_3 - 2X_1X_2 + X_2^2 + 2X_2X_3 + X_3^2.$$

(a) *Si scriva la matrice nella base canonica, $\{e_0, \dots, e_3\}$, dell'applicazione bilineare, g, tale che $q(v) = g(v, v)$ e si determinino rango, segnatura ed eventuale nucleo di g.*

(b) *Si considerino i sottospazi $W_0 = \langle e_0, e_1, e_2\rangle$ e $W_1 = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$, dotati della restrizione di g. È vero che i due sottospazi sono isometrici? In caso affermativo si scriva esplicitamente un'isometria.*

(c) *Si considerino i sottospazi $Z_0 = \langle e_0, e_1\rangle$ e $Z_1 = \langle e_2, e_3\rangle$, dotati della restrizione di g. Si scriva, se esiste, un'isometria $\phi : Z_0 \to Z_1$, tale che $\phi(e_0) = e_3$. È vero che esiste un'isometria $\psi : W_0 \to W_1$ che coincide con ϕ su Z_0? In caso affermativo la si scriva esplicitamente.*

Svolgimento. (a) L'applicazione bilineare ha matrice

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

con $\mathrm{rk} G = 3$ e quindi si tratta di un'applicazione bilineare degenere con nucleo $N = \langle e_0 + 3e_1 + e_3\rangle$. La segnatura è $(2, 1)$.

(b) La restrizione di g ai due sottospazi è non degenere e quindi i due sottospazi sono isometrici. Una possibile isometria è la proiezione parallela al nucleo N,

(c) Basta prendere $\phi(e_1) = e_2 - e_3$. L'isometrria ψ esiste per il Teorema di estensione delle isometrie. Più esplicitamente, basta porre $\psi(e_2) = ae_1 + be_2 + ce_3$ e imporre le condizioni

$$\begin{cases} g(e_3.\psi(e_2)) = 2 \\ g(e_2 - e_3, \psi(e_2)) = -1 \\ g(\psi(e_2), \psi(e_2)) = 1 \end{cases}.$$

Dunque, posto $\psi(e_2) = e_1 + 4e_2 - e_3$, si ha l'isometria cercata. □

ESERCIZIO 5. [*Vecchio ordinamento*] *Studiare la conica* $\mathscr{C}$ *di equazione*

$$11x^2 - 4xy + 14y^2 - 10x = 0 \ .$$

In particolare, si determini se è degenere, qual è il suo tipo, un'equazione canonica e l'opportuna trasformazione di coordinate, gli eventuali assi, asintoti, centro, fuochi. Se ne tracci un disegno approssimativo.

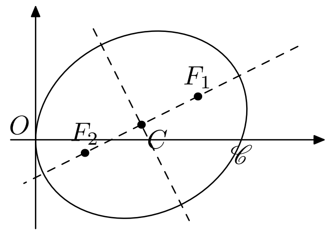
Sia r *un diametro parallelo all'asse* x *e si determini una direzione,* $\langle v\rangle$*, tale che la simmetria di asse* r *e direzione* $\langle v\rangle$ *mandi punti della conica su punti della conica.*

Svolgimento. Consideriamo, come di consueto il piano affine immerso nel piano proiettivo prendendo $x_0 = 0$ come retta impropria. Una matrice della conica $\mathscr{C}$ è $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ -5 & 11 & -2 \\ 0 & -2 & 14 \end{pmatrix}$. Poiché $\det A = -2 \cdot 5^2 \cdot 7 \neq 0$ si tratta di una conica non degenere, e poiché $\det A_\infty = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$ (A_∞ è la sottomatrice quadrata di A che si ottiene cancellando prima riga e prima colonna) si tratta di un'ellisse con punti reali, passante per l'origine.

Il centro, ovvero il polo della retta impropria, è il punto di coordinate omogenee $C = \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$. La matrice A_∞ ha autovalori 10 e 15 a cui corrispondono gli spazi di autovettori $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$. Gli assi sono quindi le rette di equazioni

$$2x + y = 1, \qquad \text{e} \qquad 3x - 6y = 1 \ \text{(asse focale)}.$$

L'equazione canonica di $\mathscr{C}$, in un opportuno sistema di riferimento ortonormale, è $\frac{30}{7}X^2 + \frac{45}{7}Y^2 = 1$ e la matrice dell'isometria che porta l'equazione in forma canonica è $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7/15 & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/15 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, come si può verificare calcolando la matrice $\frac{3}{7}{}^tPAP$. Infine, ricordiamo che i fuochi si trovano sull'asse focale, a distanza $\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{10}}$ dal centro. Un disegno approssimativo della conica $\mathscr{C}$ compare a fianco e la discussione è conclusa. □



Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova scritta del 11 settembre 2007

ESERCIZIO 1. *Si consideri lo spazio euclideo tridimensionale ed un sistema di coordinate ortonormali* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. *Un tetraedro si dice regolare se le sue facce sono triangoli equilateri.*

(a) *Dati i punti* $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *e* $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, *si determinino un punto* P_2, *appartenente al piano* $z = 0$, *ed un punto* P_3 *avente tutte le coordinate positive, in modo che i quattro punti siano i vertici di un tetraedro regolare.*

(b) *Dati due vertici* P_i, P_j *del tetraedro, siano* P_h, P_k *i rimanenti vertici. Diremo che i lati* P_iP_j *e* P_hP_k *del tetraedro sono opposti. È vero che le due rette* $P_i \vee P_j$ *e* $P_h \vee P_k$ *sono (sghembe ed) ortogonali? Qual'è la distanza tra le due rette?*

(c) *Si verifichi che i punti di minima distanza tra le due rette sono i punti medi* $\frac{P_i+P_j}{2}$ *e* $\frac{P_h+P_k}{2}$. *È vero che segmenti che congiungono i punti di minima distanza tra coppie di lati opposti del tetraedro* $P_0P_1P_2P_3$ *si incontrano nel baricentro del tetraedro?*

Svolgimento. (a) Ci sono due possibili vertici per un triangolo equilatero di base P_0P_1, ma la condizione su P_3 impone di scegliere il vertice con le coordinate non negative, ovvero $P_2 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Il punto P_3 deve stare sulla perpendicolare al piano $z = 0$, passante per il baricentro del triangolo $P_0P_1P_2$, e quindi $P_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

(b) Per simmetria è sufficiente fare i conti per una coppia di lati opposti, ad esempio, $P_0 \vee P_1$ e $P_2 \vee P_3$. Si ha $\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\overrightarrow{P_2P_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ e quindi le due rette sono perpendicolari. La distanza tra le due rette è uguale a $\frac{|\overrightarrow{P_0P_2}\cdot\overrightarrow{P_0P_1}\times\overrightarrow{P_2P_3}|}{\|\overrightarrow{P_0P_1}\times\overrightarrow{P_2P_3}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(c) Il generico punto della retta $P_0 \vee P_1$ ha coordinate $R_s = P_0 + s\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix} \frac{s}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed il generico punto della retta $P_2 \vee P_3$ ha coordinate $S_t = P_2 + t\overrightarrow{P_2P_3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3-2t}{2\sqrt{3}} \\ \frac{t\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. Si verifica facilmente che il vettore $\overrightarrow{R_sS_t}$ è ortogonale ad entrambe le rette se, e solo se, $s = t = \frac{1}{2}$. Dunque i punti di minima distanza sono proprio i punti medi dei lati opposti. Con un calcolo diretto analogo al precedente, si verifica che le due rette $\frac{P_0+P_1}{2} \vee \frac{P_2+P_3}{2}$ e $\frac{P_0+P_2}{2} \vee \frac{P_1+P_3}{2}$ si incontrano nel punto $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ che è il baricentro del tetraedro ed il punto medio dei due segmenti $\frac{P_0+P_1}{2}\,\frac{P_2+P_3}{2}$ e $\frac{P_0+P_2}{2}\,\frac{P_1+P_3}{2}$. □

ESERCIZIO 2. *Siano date le basi* $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$ *degli spazi vettoriali reali* V *e* W, *rispettivamente.*

(a) *Si determinino tutte le applicazioni lineari* $\phi : V \to W$ *tali che*

$$\phi(v_1 + v_3) = w_1 + w_2 + 2w_3, \quad \phi(v_2 + v_4) = 2w_1, \quad \phi(v_3) = w_2 + w_3, \quad \phi(v_1 + v_2 + v_4) = 3w_1 + w_3$$

e si scriva l'eventuale matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$ *per ciascuna di queste.*

(b) *Si determinino nucleo ed immagine per* ϕ *e si determini, se esiste, un sottospazio* $U \subseteq V$ *tale che* $\phi_{|U}$ *sia una biiezione su* W *per tutte le applicazioni,* ϕ, *soddisfacenti alle condizioni del punto (a).*

(c) *Si consideri l'unione $\mathscr{K}$ dei sottospazi $\ker\phi$ per tutte le applicazioni, ϕ, soddisfacenti alle condizioni del punto (a). Si dica se $\mathscr{K}$ è un sottospazio o una sottovarietà lineare di $\mathbb{R}^4$ e se ne determinino le equazioni cartesiane.*

Svolgimento. (a) Dalle relazioni date, si ricava

$$\begin{aligned}\phi(v_1) &= w_1 + w_3,\\ \phi(v_2) &= (a+2)w_1 + bw_2 + cw_3,\\ \phi(v_3) &= w_2 + w_3,\\ \phi(v_4) &= -aw_1 - bw_2 - cw_3.\end{aligned}$$

Dunque, al variare dei parametri $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, si ottengono tutte le possibili applicazioni ϕ e la matrice associata è

$$A_{(a,b,c)} = \begin{pmatrix} 1 & a+2 & 0 & -a \\ 0 & b & 1 & -b \\ 1 & c & 1 & -c \end{pmatrix}.$$

(b) La matrice $A_{(a,b,c)}$ ha rango 3, per qualsiasi valore di (a, b, c) e quindi ϕ è comunque suriettiva. $\ker\phi = \langle 2(c-b)v_1 + (a+b-c)v_2 + 2bv_3 + (a+b-c+2)v_4 \rangle$. Bisogna trovare un sottospazio complementare del nucleo di ϕ, per qualsiasi valore di (a, b, c). Possiamo prendere, ad esempio, $U = \langle v_1, v_2 + v_4, v_3 \rangle$, dato che l'immagine di questi tre vettori genera $\operatorname{im}\phi = W$ per qualsiasi valore di (a, b, c).

(c) Per quanto visto al punto (b), $\mathscr{K} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\\1\\2\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\-1\\0\\-1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e quindi è una sottovarietà lineare di dimensione 3, ovvero un iperpiano di $\mathbb{R}^4$. La sua equazione cartesiana è $\mathscr{K} : x_2 - x_4 + 2 = 0$. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_5\}$, di $\mathbb{R}^5$.

(a) *Si determinino il polinomio caratteristico di ϕ, gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori. Si dica se ϕ è invertibile.*
(b) *Si determinino il polinomio minimo di ϕ ed un autovettore generalizzato di periodo massimo per ogni autovalore di ϕ.*
(c) *Si determinino una matrice di Jordan, J, di ϕ, ed una matrice invertibile, P, tali che $P^{-1}AP = J$.*

Svolgimento. (a) e (b) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = -\det(A - x\mathbf{1}) = (x-1)^3(x-3)^2$, che ha termine noto uguale a 9 e quindi ϕ è invertibile. L'endomorfismo ϕ ha due autovalori, 1, di molteplicità 3 e nullità 2, e 3, di molteplicità 2 e nullità 1, quindi non può essere diagonalizzabile. Si ha infatti

$$A - 1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (A-1)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -10 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & -10 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad A - 3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

e gli spazi di autovettori sono

$$\ker(\phi - 1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1\\-1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\0\\0\\1\\0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{e} \qquad \ker(\phi - 3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Il rango di $(A-1)^2$ è uguale a 2 ed il polinomio minimo è $\lambda_\phi(x) = (x-1)^2(x-3)^2$. Dunque il periodo massimo è uguale a 2 per ciascuno degli autovalori. Per l'autovalore 1 possiamo prendere, ad esempio, l'autovettore generalizzato $v_3 = 5e_1 + e_3 - 2e_5$. Ricordando che $(A-3)^2(A-1)^2 = 0$, si conclude che $\operatorname{im}(\phi-1)^2 \subseteq \ker(\phi-3)^2$ e quindi che i due sottospazi sono uguali, per motivi di dimensione. Un autovalore generalizzato di periodo 2 per l'autovalore 3 è quindi $v_5 = 2e_3 + e_4 - 2e_5$.

(c) La matrice di Jordan di ϕ ha due blocchi, uno di ordine 2 ed uno di ordine 1 relativi all'autovalore 1, ed un blocco di ordine 2, relativo all'autovalore 3. Presi i vettori $v_5 = 2e_3+e_4-2e_5$, $v_4 = (\phi-3)(v_5) = -6e_1-6e_2$, $v_3 = 5e_1+e_3-2e_5$, $v_2 = (\phi-1)(v_3) = 3e_1+e_2+2e_4$ e $v_1 = e_1-e_2$ otteniamo così una base, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$, rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan. Si conclude che

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&3&1\\ 0&0&0&0&3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 1&3&5&-6&0\\ -1&1&0&-6&0\\ 0&0&1&0&2\\ 0&2&0&0&1\\ 0&0&-2&0&-2 \end{pmatrix}$$

sono le matrici cercate. □

ESERCIZIO 4. *Si consideri sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, la forma quadratica*

$$q(X) = X_1^2 + 4X_1X_3 - 2X_1X_4 + 2X_2X_3 - 4X_2X_4 + X_4^2.$$

(a) Si scriva la matrice dell'applicazione bilineare simmetrica, $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, tale che $q(X) = g(X, X)$, per ogni $X \in \mathbb{R}^4$ e si dica se g è non-degenere.

(b) Si consideri il sottospazio $W = \langle e_1, e_3\rangle^\perp$; si dica se $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$ e si determini la matrice della proiezione ortogonale su $W^\perp$. È vero che W e $W^\perp$ sono isometrici?

(c) Si consideri su $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare che ha la base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, come base ortonormale. È vero che esiste una base, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, che sia ortogonale simultaneamente per g e per il prodotto scalare? Che rapporti vi sono tra le entrate della matrice di g e quelle della matrice del prodotto scalare rispetto a tale base?

Svolgimento. (a) La forma quadratica $q(X)$ ha matrice

$$G = \begin{pmatrix} 1&0&2&-1\\ 0&0&1&-2\\ 2&1&0&0\\ -1&-2&0&1 \end{pmatrix},$$

e quindi $q(X) = {}^tXGX$. Con un calcolo diretto si verifica che $\det G = 8$ e quindi g è non-degenere.

(b) Il sottospazio $W = \langle e_1, e_3\rangle^\perp$ è formato dalle soluzioni del sistema lineare (omogeneo)

$$\begin{cases} X_1 + 2X_3 - X_4 = 0 \\ 2X_1 + X_2 = 0 \end{cases};$$

e quindi $W = \langle e_3 + 2e_4, e_1 - 2e_2 + e_4\rangle$. La restrizione di g a $W^\perp = \langle e_1, e_3\rangle$, è non degenere e non definita (e_3 è isotropo) e la matrice della restrizione di g a W, rispetto alla base data, è $\left(\begin{smallmatrix} 4&8\\ 8&8 \end{smallmatrix}\right)$, che è pure non degenere e non definita, quindi $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$ ed i due sottospazi sono isometrici perché hanno la stessa segnatura. Per determinare la proiezione ortogonale su $W^\perp$, $p_{W^\perp} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, ragioniamo nel modo seguente. Preso un generico vettore, $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{smallmatrix}\right)$, la sua proiezione, sarà $p_{W^\perp}(x) = ae_1 + be_3$, ove a, b sono determinati in modo che $x - p_{W^\perp}(x) \in W$, ovvero $a = \frac{4x_1+2x_2}{4}$ e $b = \frac{-x_2+4x_3-2x_4}{4}$. La matrice della proiezione ortogonale su $W^\perp$ è quindi

$$Q = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(p_{W^\perp}) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4&2&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&-1&4&-2\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

(c) G è una matrice simmetrica e quindi autoaggiunta rispetto al prodotto scalare. Dunque esiste una base ortonormale, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori per G. Rispetto a tale base dunque le due forme quadratiche sono entrambo diagonali ed il rapporto tra le entrate diagonali delle due matrici sono esattamente gli autovalori di G relativi agli autovettori della base [non è richiesta la determinazione della base $\mathcal{V}$]. □

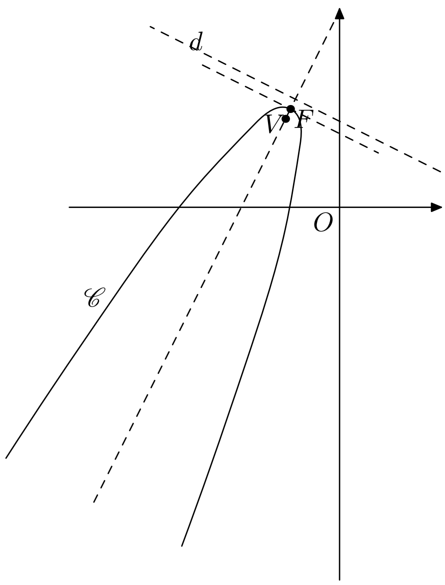
ESERCIZIO 5. [*Vecchio ordinamento*] *Studiare la conica* $\mathscr{C}$ *di equazione*

$$4x^2 + 4xy + y^2 + 2x - 4y + 10 = 0 \ .$$

In particolare determinare se è degenere, qual è il suo tipo, un'equazione canonica e l'opportuna trasformazione di coordinate, gli eventuali assi, asintoti, centro, fuochi. Se ne tracci infine un disegno approssimativo.

Svolgimento. Consideriamo, come di consueto il piano affine immerso nel piano proiettivo prendendo $x_0 = 0$ come retta impropria. Una matrice della conica $\mathscr{C}$ è $A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Poiché $\det A = -25 \neq 0$ si tratta di una conica non degenere, e poiché $\det A_\infty = 0$ (A_∞ è la sottomatrice quadrata di A che si ottiene cancellando prima riga e prima colonna) si tratta di una parabola.

La direzione dell'asse, ovvero il polo della retta impropria, è il punto improprio $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. La direzione ortogonale $P_\infty^\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è il polo dell'asse che è quindi la retta $h : 2x + y = 0$. Il vertice è il punto proprio di intersezione tra l'asse e la conica ovvero il punto di coordinate omogenee $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. La matrice A_∞ ha autovalori 0 e 5 relativi agli spazi di autovettori corrispondenti a P_∞ e $P_\infty^\perp$. L'equazione canonica di $\mathscr{C}$, in un opportuno sistema di riferimento ortonormale, è $2Y = \sqrt{5}X^2$ e la matrice dell'isometria che porta l'equazione in forma canonica è $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2 & -2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, come si può verificare calcolando il prodotto $\frac{1}{\sqrt{5}} {}^tPAP$. Infine, ricordiamo che il fuoco si trovano sull'asse focale, a distanza $\frac{1}{2\sqrt{5}}$ dal vertice ed è precisamente il punto $F = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Un disegno approssimativo della conica in questione è riportato qui sotto



e la discussione è conclusa. □

Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova scritta del 17 settembre 2007

ESERCIZIO 1. Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino i punti

$$P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare le equazioni cartesiane della sottovarietà lineare $\pi = P_1 \vee P_2 \vee P_3$ e verificare che P_0 non appartiene a π.

(b) Determinare l'area, A, del triangolo $P_1P_2P_3$, il volume, V, del tetraedro $P_0P_1P_2P_3$ e la distanza, d, di P_0 da π.

(c) Determinare i punti $P_t = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ per cui la proiezione su π di centro P_t è ben definita e l'immagine del punto P_0 è interna al triangolo $P_1P_2P_3$.

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(a) Determinare una base di U ed una di W e verificare se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(b) Sia $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare che manda ogni vettore $x \in \mathbb{R}^4$ nella sua proiezione su U, parallela a W. Si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi)$ e determinare $\ker\pi$ ed $\operatorname{im}\pi$.

(c) Sia $\pi' : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare che manda ogni vettore $x \in \mathbb{R}^4$ nella sua proiezione su W, parallela a U. Si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi)$ e si dica se $\pi(x) + \pi'(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^4$.

(d) Detta $\sigma : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la simmetria di asse U, parallela al sottospazio W, si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma)$.

ESERCIZIO 3. Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ -15 & -4 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -7 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, di $\mathbb{R}^4$.

(a) Si determinino il polinomio caratteristico di ϕ, gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori e si dica se ϕ è diagonalizzabile.

(b) Si determinino il polinomio minimo di ϕ ed un autovettore generalizzato di periodo massimo per ogni autovalore di ϕ.

(c) Si determinino una matrice di Jordan, J, di ϕ, ed una matrice invertibile, P, tali che $P^{-1}AP = J$.

ESERCIZIO 4. Sullo spazio $\mathbb{R}^4$, si consideri la forma quadratica

$$q(X_1, X_2, X_3, X_4) = 2X_1^2 + 2X_1X_3 + X_2^2 - 4X_2X_3 - 2X_2X_4 + X_3^2 + 2X_4^2$$

nelle coordinate associate alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$.

(a) Si scriva la matrice dell'applicazione bilineare simmetrica $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ tale che $q(X) = g(X, X)$, per ogni $X \in \mathbb{R}^4$. Si dica se g è non-degenere e si determini il sottospazio $W = \langle e_1, e_3 \rangle^\perp$.

(b) Si dica se $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$ e, in caso affermativo, si scriva la matrice della proiezione ortogonale su W.

(c) Si determinino le segnature delle restrizioni di g a W ed a $W^\perp$. È vero che la segnatura di g è la somma delle segnature delle due restrizioni?