Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova di accertamento del 14 febbraio 2008

ESERCIZIO 1. *Nello spazio euclideo, E^3, si considerino i punti $P_0, \dots, P_3$ di coordinate*

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si determinino le equazioni cartesiane delle rette $P_0 \vee P_1$ e $P_2 \vee P_3$ e si calcoli la distanza tra le due rette.*

(b) *Si determinino le costanti $t_0, \dots, t_3$ tali che i punti di coordinate*

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ t_0 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ t_1 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ t_2 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ t_3 \end{pmatrix},$$

appartengano all'iperpiano $\tau : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ di E^4 e si determini il baricentro, G, del tetraedro avente tali punti come vertici.

(c) *Si determinino i punti interni al tetraedro contenuti nella retta, r, passante per G e parallela allo spigolo Q_1Q_2. Si determini la lunghezza del segmento di r formato da tali punti.*

(d) *Si determini una retta, s, perpendicolare allo spigolo Q_1Q_2, che intersechi il tetraedro nel solo punto G e si scrivano le equazioni cartesiane in E^4 della retta s e del piano $r \vee s$. Una tale retta è unica? È unico il piano?*

Svolgimento. (a) Si hanno le rappresentazioni parametriche

$$P_0 \vee P_1 = P_0 + \langle P_1 - P_0 \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$P_2 \vee P_3 = P_2 + \langle P_3 - P_2 \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$

da cui si deducono le equazioni cartesiane

$$P_0 \vee P_1 : \begin{cases} x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad P_2 \vee P_3 : \begin{cases} x_1 + x_3 = -1 \\ 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}.$$

La distanza tra le due rette è uguale a $d = \frac{|(P_2-P_0)\cdot(P_1-P_0)\times(P_3-P_2)|}{\|(P_1-P_0)\times(P_3-P_2)\|} = 1$.

(b) Si ha

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

ed il baricentro è $G = \frac{Q_0+Q_1+Q_2+Q_3}{4} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

(c) I punti di r si scrivono come $G+t(Q_2-Q_1)$, al variare di t in $\mathbb{R}$ ed hanno quindi coordinate baricentriche $\frac{1}{4}Q_0+\left(\frac{1}{4}-t\right)Q_1+\left(\frac{1}{4}+t\right)Q_2+\frac{1}{4}Q_3$. Tali punti sono interni al tetraedro se, e solo se, le coordinate baricentriche sono tutte positive, ovvero $-\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{4}$. La lunghezza del segmento è la distanza fra i due estremi, ovvero, 1.

(d) La retta $s = G + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ soddisfa alle condizioni richieste, perché, passa per G ed è ortogonale all'iperpiano τ. Le sue equazioni cartesiane sono quindi uguali a

$$s : \begin{cases} x_1 - x_4 = -\frac{1}{4} \\ x_2 - x_4 = \frac{1}{4} \\ x_3 - x_4 = -1 \end{cases} \qquad \text{e si ha} \qquad r \vee s : \begin{cases} x_1 - x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_3 - x_4 = -1 \end{cases}.$$

La retta s non è unica, perché le direzioni ortogonali a $Q_2 - Q_1$ formano un iperpiano in E^4, di cui solo un piano è parallelo a τ. Ogni direzione nell'iperpiano che sia complementare a questo piano, potrebbe essere scelta. La differenza tra due tali direzioni (non parallele) si proietta sull'iperpiano τ lungo una direzione perpendicolare ad r e quindi i due piani per r, paralleli alle due diverse direzioni sono distinti. $\square$

ESERCIZIO 2. *Si consideri l'applicazione $\phi : M_{3\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, definita da $\phi(X) = AX$, ove*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ed X varia in $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

(a) Si verifichi che ϕ è un'applicazione lineare e si determinino nucleo ed immagine per ϕ.

(b) Si determinino gli elementi di $\mathscr{B} = \{ X \in M_{3\times 2}(\mathbb{R}) \mid \phi(X) = \mathbf{1}_2 \}$. Si dica se $\mathscr{B}$ è un sottospazio oppure una sottovarietà lineare di $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ e se ne calcoli la dimensione.

(c) Si fissi una matrice $B_0 \in \mathscr{B}$ (se esiste) e si consideri l'applicazione $\psi : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{3\times 2}(\mathbb{R})$, definita da $\psi(Y) = B_0 Y$. Si determinino nucleo ed immagine di ψ. Si dica se $\mathrm{im}\psi + \ker\phi = \mathrm{im}\psi \oplus \ker\phi$ e si determini la dimensione di questo sottospazio.

(d) Si identifichi $\mathbb{R}^2$ con il sottospazio $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \right\}$ e si consideri A come matrice, nelle basi canoniche, di un'applicazione lineare $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. È vero che esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = U \oplus \langle v \rangle$ ed α coincide con la proiezione su U, parallelamente a $\langle v \rangle$?

Svolgimento. (a) Il fatto che ϕ sia un'applicazione lineare discende dall'osservazione che il prodotto di matrici distribuisce rispetto alla somma ed è compatibile col prodotto per scalari. Con un calcolo diretto, si ricava

$$\ker\phi = \left\{ \begin{pmatrix} -a & -b \\ 2a & 2b \\ 2a & 2b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{im}\,\phi = M_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

(b) Si ha

$$\mathscr{B} = \phi^{-1}(\mathbf{1}_2) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \ker\phi = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2-a & -b \\ 2a & 2b \\ 2a & 2b-1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si tratta quindi di una sottovarietà lineare di $\mathbb{A}(M_{3\times 2}(\mathbb{R}))$, di dimensione 2 (un piano).

(c) Sia $B_0 = \begin{pmatrix} 1/2-a & -b \\ 2a & 2b \\ 2a & 2b-1 \end{pmatrix}$. Allora

$$\mathrm{im}\,\psi = \left\langle \begin{pmatrix} 1/2-a & 0 \\ 2a & 0 \\ 2a & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1/2-a \\ 0 & 2a \\ 0 & 2a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 2b & 0 \\ 2b-1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 2b \\ 0 & 2b-1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad \ker\psi = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Qualunque siano a e b, si ha $\mathrm{im}\,\psi \cap \ker\phi = \langle 0 \rangle$; quindi i due sottospazi sono in somma diretta e si ha $M_{3\times 2}(\mathbb{R}) = \mathrm{im}\,\psi \oplus \ker\phi$ (dimensione 6).

(d) Se esistesse un vettore v, soddisfacente alle condizioni poste, dovrebbe aversi simultaneamente $-e_1 \in \langle v \rangle$ ed $e_2 + e_3 \in \langle v \rangle$, ove $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Ciò è chiaramanete in contrasto con l'indipendenza dei tre vettori della base. $\square$

Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova di accertamento del 14 marzo 2008

ESERCIZIO 1. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, di $\mathbb{R}^4$.

(a) Si determini il polinomio caratteristico di ϕ e si dica se ϕ è invertibile o nilpotente.

(b) Si determinino gli autovalori, i relativi spazi di autovettori per ϕ ed il polinomio minimo e si dica se ϕ è, o meno, diagonalizzabile.

(c) Si determinino una matrice di Jordan, J, di ϕ, ed una matrice invertibile, P, tali che $P^{-1}AP = J$.

(d) Si verifichi che si ha $\ker\phi^2 = \ker\phi + \mathrm{im}\phi$ e $\mathrm{im}\phi^2 = \ker\phi \cap \mathrm{im}\phi$. Queste relazioni restano vere per qualsiasi endomorfismo $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ che abbia lo stesso polinomio minimo di ϕ? (dimostrarlo in caso affermativo, altrimenti dare un controesempio)

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}) = x^4$; quindi (per il Teorema di Hamilton-Cayley) ϕ è nilpotente.

(*b*) L'endomorfismo ϕ ha un unico autovalore, 0, di molteplicità 4 e quindi, non essendo A una matrice scalare, non può essere diagonalizzabile. Si ha

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ed} \quad A^3 = \mathbf{0}.$$

Se ne deduce che il polinomio minimo di ϕ è x^3. Inoltre, A ha rango 2 e lo spazio di autovettori di ϕ è $\ker\phi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(*c*) La matrice di Jordan ha quindi due blocchi, uno di ordine 3 ed uno di ordine 1, ed un autovettore generalizzato di periodo massimo è, ad esempio, e_4. Una base, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, rispetto a cui ϕ ha forma di Jordan è costituita dai vettori $v_2 = \phi^2(e_4) = 2e_1 - e_2 + e_3 + e_4$, $v_3 = \phi(e_4) = -e_1 - e_3$, $v_4 = e_4$, e da un autovettore indipendente da v_2, quale $v_1 = e_1 + e_4$. Perciò possiamo scrivere

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(*d*) Usando la base testé trovata, possiamo scrivere

$$\ker\phi = \langle v_1, v_2 \rangle, \quad \mathrm{im}\,\phi = \langle v_2, v_3 \rangle, \qquad \ker\phi^2 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle, \quad \mathrm{im}\,\phi^2 = \langle v_2 \rangle.$$

Si ha così la verifica delle condizioni richieste. Le condizioni sono false per un generico endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ con polinomio minimo x^3. Ad esempio, si consideri $\psi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ con matrice di Jordan $J' = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$, rispetto alla base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$. In questo caso si ha

$$\ker\psi = \langle v_1, v_3 \rangle, \quad \mathrm{im}\,\psi = \langle v_1, v_3, v_4 \rangle, \qquad \ker\psi^2 = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle, \quad \mathrm{im}\,\psi^2 = \langle v_3 \rangle;$$

e $\mathrm{im}\,\psi^2 \subsetneq \ker\psi \cap \mathrm{im}\,\psi$, come pure $\ker\psi + \mathrm{im}\,\psi \subsetneq \ker\psi^2$. □

ESERCIZIO 2. *Si consideri lo spazio vettoriale reale V ed una sua base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$. Sia $q : V \to \mathbb{R}$ la forma quadratica definita ponendo*

$$q(x_1v_1 + \cdots + x_4v_4) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_2x_4 - 4x_3x_4 - 4x_4^2.$$

(a) Si scriva la matrice, G, rispetto alla base data, dell'applicazione bilineare $g : V \times V \to \mathbb{R}$ tale che $q(v) = g(v, v)$ per ogni $v \in V$ e si dica se g è non degenere.
(b) Si classifichi l'applicazione g, determinandone l'eventuale nucleo e la segnatura.
(c) Si determinino (se esistono) una matrice invertibile, P, ed una matrice diagonale, D, tali che ${}^tPGP = D$.
(d) Si dica se esistono due sottospazi, $H_1 = \langle u_1, u_2\rangle$ ed $H_2 = \langle u_3, u_4\rangle$, tali che $V = H_1 \oplus H_2$ e la matrice di g, relativa alla base $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$, sia $\left(\begin{smallmatrix} 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&0 \end{smallmatrix}\right)$. Fissato il sottospazio isotropo, H_1, determinare tutti i possibili sottospazi isotropi, H_2, soddisfacenti alle condizioni precedenti.

Svolgimento. (a) Si ha

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0\\ -2 & 4 & -2 & 2\\ 1 & -2 & 0 & -2\\ 0 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

e $\det G = 4$; quindi g è non-degenere.

(b) Il nucleo è uguale a $\langle 0\rangle$ e, per determinare la segnatura di g, cerchiamo una base ortogonale. I vettori $w_1 = v_1$ e $w_2 = v_4$, sono ortogonali tra loro e $g(w_1, w_1) = 1$, $g(w_2, w_2) = -4$. Il vettore $w_3 = 4v_1 + 2v_2 + v_4$ appartiene al sottospazio $\langle w_1, w_2\rangle^\perp$ e $g(w_3, w_3) = 4$. Infine, $w_4 = v_1 + v_2 + v_3$ appartiene al sottospazio $\langle w_1, w_2, w_3\rangle^\perp$ e $g(w_4, w_4) = -1$. Quindi $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$ è una base ortogonale di V e la segnatura di g è $(2, 2)$.

(c) Presa la matrice di cambiamento di base, $P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(1)$, si ha ${}^tPGP = D$, ove

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) I due sottospazi devono essere isotropi e due sottospazi isotropi massimali sono, ad esempio,

$$H_1 = \langle 2w_1 + w_2, w_3 + 2w_4\rangle \qquad \text{ed} \qquad H_2 = \langle 2w_1 - w_2, w_3 - 2w_4\rangle\,.$$

Chiaramente si ha $V = H_1 \oplus H_2$ e, posto $u_1 = w_1 + \frac{1}{2}w_2$, $u_2 = \frac{1}{4}w_3 + \frac{1}{2}w_4$, $u_3 = \frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{4}w_2$ ed $u_4 = \frac{1}{2}w_3 - w_4$, la matrice di g rispetto alla base $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$ è quella cercata.

Un sottospazio complementare di $H_1 = \langle u_1, u_2\rangle$, è generato da due vettori del tipo $u_3 + au_1 + bu_2$ ed $u_4 + cu_1 + du_2$ (perché?), ed è un sottospazio isotropo se, e solo se,

$$g(u_3 + au_1 + bu_2, u_3 + au_1 + bu_2) = 2a = 0, \qquad g(u_3 + au_1 + bu_2, u_4 + cu_1 + du_2) = b + c = 0,$$
$$g(u_4 + cu_1 + du_2, u_4 + cu_1 + du_2) = 2d = 0.$$

Quindi i complementari isotropi di H_1 sono i sottospazi $H_a = \langle u_3 + au_2, u_4 - au_1\rangle$, al variare di a in $\mathbb{R}$ e non cambia la matrice di g nella base $u_1, u_2, u_3 + au_2, u_4 - au_1$. □

Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova scritta del 18 marzo 2008

ESERCIZIO 1. *Nello spazio euclideo E^4, si considerino i punti*

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e le sottovarietà lineari

$$\pi_1 : \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 2 \end{cases} \qquad \pi_2 : \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad \pi_3 : \begin{cases} x_1 - x_2 = -2 \\ x_3 - x_4 = -1 \end{cases}.$$

(a) Si determinino equazioni cartesiane del piano $\tau = P_1 \vee P_2 \vee P_3$ e si determinino un punto ed il sottospazio direttore della sottovarietà lineare $p = \pi_1 \cap \pi_2$.

(b) Si rappresenti in forma parametrica la sottovarietà lineare $t = \pi_3 \cap \tau$ e si determini la distanza di p da t.

(c) Si determinino i punti di t interni al triangolo $P_1P_2P_3$, le intersezioni di t con i lati del triangolo e l'area delle due regioni in cui il triangolo viene suddiviso da t (fare un disegnino indicativo).

Svolgimento. (a) Il piano $\tau = P_3 + \left\langle \overrightarrow{P_3P_1}, \overrightarrow{P_3P_2} \right\rangle$ ha equazioni cartesiane

$$\tau : \begin{cases} x_1 - x_4 = -1 \\ x_2 - x_3 = 2 \end{cases}.$$

Il sistema che determina $\pi_1 \cap \pi_2$ ha rango $(4, 4)$ e quindi p è un punto (sottospazio direttore $\langle 0 \rangle$) ed ha coordinate $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Il sistema che determina $t = \pi_3 \cap \tau$ ha rango $(3, 3)$ e quindi t è la retta $t = T_0 + \langle v \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.
La distanza, δ, di p da t si ottiene dividendo l'area del parallelogramma di lati $P - T_0$ e v per la lunghezza della base v, ovvero

$$\delta = \frac{\sqrt{\det({}^tTT)}}{\|v\|} = 1, \qquad \text{ove} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Per determinare i punti di t interni al triangolo $P_1P_2P_3$ si possono utilizzare coordinate baricentriche nel piano τ, centrate nei tre vertici del triangolo. Si ha

$$T_0 = P_1 + P_2 - P_3, \quad v = (P_2 - P_3) + \tfrac{1}{2}(P_1 - P_3) \quad \text{e quindi} \quad T_0 + \alpha v = (1 + \tfrac{1}{2}\alpha)P_1 + (1 + \alpha)P_2 - (1 + \tfrac{3}{2}\alpha)P_3.$$

I punti sono interni al triangolo se, e solo se, $-1 < \alpha < -\frac{2}{3}$ e gli estremi del segmento sono quindi i punti $Q_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, appartenente al lato P_1P_3 $(\alpha = -1)$, e $Q_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 4/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$. appartenente al lato P_1P_2 $(\alpha = -\frac{2}{3})$.
Dunque per determinare le aree richieste, basta determianre l'area del triangolo $P_1Q_2Q_3$ $(1/3)$ e la differenza tra quest'area e l'area dell'intero triangolo $P_1P_2P_3$ (2). □

ESERCIZIO 2. *Siano U, V, W, spazi vettoriale reali e siano $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_3\}$, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_5\}$, delle rispettiva basi. Si considerino le applicazioni lineari $\phi : V \to W$ e $\psi : U \to W$, determinate dalle condizioni*

$$\begin{aligned} \phi(v_1 - v_3) &= 0 = \phi(v_2 - 2v_4) & \qquad \psi(u_1 + u_2 - 3u_3) &= 0 \\ \phi(v_1 - v_4) &= -w_2 - w_3 - w_4 & \psi(u_1 + u_2) &= 3w_1 + 6w_3 + 3w_5 \\ \phi(v_1 + v_2) &= 3w_1 - w_2 + 5w_3 - w_4 + 3w_5 & \psi(u_2 - u_3) &= -w_1 + w_2 - w_3 + w_4 - w_5 \end{aligned}$$

(a) Si determinino le matrici $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$ e $B = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(\psi)$.
(b) Si determinino nucleo ed immagine di ψ e ϕ e si verifichi che $\mathrm{im}\psi = \mathrm{im}\phi$.
(c) Si consideri l'insieme $X = \{\, \lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U,V) \mid \psi = \phi \circ \lambda \,\}$. Si mostri che X è una sottovarietà lineare di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U,V)$ e se ne calcoli la dimensione. Si determinino le matrici $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\lambda)$ al variare di λ in X.

Svolgimento. (a) Le matrici sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) ϕ e ψ hanno entrambo rango 2 e si ha $\ker\phi = \langle v_1 - v_3, v_2 - 2v_4 \rangle$ e $\ker\psi = \langle u_1 + u_2 - 3u_3 \rangle$. Inoltre,

$$\mathrm{im}\,\phi = \langle w_1 + 2w_3 + w_5, w_1 - w_2 + w_3 - w_4 + w_5 \rangle = \langle w_2 + w_3 + w_4, w_1 + 2w_3 + w_5 \rangle = \mathrm{im}\,\psi.$$

(c) Essendo $\mathrm{im}\,\psi \subseteq \mathrm{im}\,\phi$, in particolare, si ha

$$\psi(u_1) = \phi(v_1 + v_2), \qquad \psi(u_2) = \phi(v_4 - v_1), \qquad \psi(u_3) = \phi(v_4).$$

Posto $\lambda_0(u_1) = v_1 + v_2$, $\lambda_0(u_2) = -v_1 + v_4$, $\lambda_0(u_3) = v_4$, si costruisce un omomorfismo, $\lambda_0 : U \to V$, appartenente ad X che quindi non è vuoto. Inoltre, se λ è un elemento di X, $\mu = \lambda - \lambda_0$ è un elemento di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U,V)$ per cui $\phi \circ \mu = 0$. Quindi μ appartiene al sottospazio H di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U,V)$ formato dagli omomorfismi la cui immagine è contenuta in $\ker\phi$. $\dim H = \dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U, \ker\phi) = 6$ e quindi $X = \lambda_0 + H$ è una sottovarietà lineare di dimensione 6 di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U,V)$. Le matrici degli elementi di X sono quindi del tipo

$$\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1+a_1 & -1+a_3 & a_5 \\ 1+a_2 & a_4 & a_6 \\ -a_1 & -a_3 & -a_5 \\ -2a_2 & 1-2a_4 & 1-2a_6 \end{pmatrix},$$

al variare di ${}^t(a_1, \dots, a_6)$ in $\mathbb{R}^6$. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -7 & -4 & -3 \\ 3 & 6 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, di $\mathbb{R}^4$.
(a) Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori. Si dica se ϕ è invertibile o nilpotente.
(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, di ϕ, ed una matrice invertibile, P, tali che $P^{-1}AP = J$.
(c) Sia $\psi : V \to V$ un endomorfismo di polinomio caratteristico $p_\psi(x) = (x - a)^n$ e polinomio minimo $\lambda_\psi(x) = (x - a)^c$. Si mostri che, se $c = n$, allora $\mathrm{im}(\psi - a)^{n-k} = \ker(\phi - a)^k$, per ogni $k = 1, \dots, n-1$. È vero o falso che $c \geq 2$ e $\mathrm{im}(\psi - a)^{c-k} = \ker(\phi - a)^k$, per ogni $k = 1, \dots, c-1$ implica $c = n$? (dimostrarlo in caso affermativo, altrimenti dare un controesempio)

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}) = x^3(x+3)$ e quindi l'endomorfismo ϕ ha l'autovalore, -3, con molteplicità (e nullità) 1 e l'autovalore 0, con molteplicità 3; in particolare, ϕ non è né invertibile (perché $\det\phi = 0$), né nilpotente (perché ha un autovalore diverso da 0). Osservando che $\mathrm{rk}\,A = 2$ e $\ker\phi = \langle e_1 - e_3, e_2 - e_3 - e_4 \rangle$, si conclude che ϕ non è diagonalizzabile, ma non può avere un autovettore generalizzato di periodo 3, relativo all'autovalore 0 (perché?). Dunque, deve aversi $\lambda_\phi(x) = x^2(x+3)$. Infine

$$A + 3\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & -4 & -3 \\ 3 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{e} \qquad \ker(\phi + 3) = \langle e_2 - e_3 \rangle,$$

ed osserviamo che, per motivi di dimensione, $\mathrm{im}\,(\phi+3) = \ker\phi^2$.

(b) La matrice di Jordan di ϕ ha due blocchi di ordine 1, relativi agli autovalori -3 e 0, rispettivamente, ed un blocco di ordine 2 relativo all'autovalore 0. Consideriamo i vettori, $v_4 = e_1 - 4e_2 + 6e_3 + e_4$, $v_3 = \phi(v_4) = 3e_1 - 3e_2 + 3e_4$, e $v_2 = e_1 - e_3$, $v_1 = e_2 - e_3$, e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ la base da essi costituita. Si conclude che

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -4 \\ -1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

sono le matrici cercate.

(c) Se $p_\psi(x) = (x-a)^n = \lambda_\psi(x)$, allora la matrice di Jordan di ψ ha un unico blocco di ordine n, relativo all'autovalore a, determinato da un autovettore generalizzato di periodo n, v, e dalla base, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$, ove $v_1 = (\psi - a)^{n-1}(v), v_2 = (\psi - a)^{n-2}(v), \dots, v_{n-1} = (\psi - a)(v), v_n = v$, rispetto alla quale ψ ha matrice di Jordan. In particolare, si ha $\mathrm{im}\,(\psi - a)^{n-k} = \langle v_1, \dots, v_{n-k}\rangle = \ker(\psi - a)^k$, qualunque sia $k = 1, \dots, n-1$.

Non è vera però l'implicazione inversa. È sufficiente osservare che l'endomorfismo, $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice $J = \left(\begin{smallmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{smallmatrix}\right)$, ha $\lambda_\psi(x) = (x-a)^2$, $p_\psi(x) = (x-a)^4$ e $\ker(\phi - a) = \mathrm{im}\,(\phi - a)$.

Si potrebbe verificare che, per $c \geq 2$, la condizione $\mathrm{im}\,(\psi - a)^{c-k} = \ker(\phi - a)^k$, per ogni $k = 1, \dots, c-1$ implica che tutti i blocchi di Jordan, relativi all'autovalore a, hanno ordine c (dimostrarlo!). □

ESERCIZIO 4. *Sia V uno spazio vettoriale reale e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una sua base. Si consideri la forma quadratica $q : V \to \mathbb{R}$, definita da*

$$q(x_1v_1 + \dots + x_4v_4) = X_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_4 + 4x_2^2 + 2x_2x_3 - 2x_3x_4 + 2x_4^2.$$

(a) *Si scriva la matrice nella base $\mathcal{V}$ dell'applicazione bilineare simmetrica, $g : V \times V \to \mathbb{R}$, tale che $g(v,v) = q(v)$, per ogni $v \in V$. Si dica se g è non-degenere e si determini l'eventuale nucleo, N.*
(b) *Si determinino la segnatura di g e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali di V.*
(c) *Si dica se esiste un'isometria $\phi : V \to V$ tale che $\phi(v_3) = v_3$ e $\phi(\langle v_2, v_3\rangle) = \langle v_3, v_4\rangle$. In caso affermativo, si determini il vettore $\phi(v_2)$.*

Svolgimento. (a) La matrice di g è

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

e $\det G = -5$, per cui g è non degenere ed il nucleo è il sottospazio banale, $N = \langle 0\rangle$.

(b) La segnatura di g è uguale a $(3,1)$ perché il determinante è negativo e la restrizione di di g al sottospazio $\langle v_2, v_4\rangle$ è definita positiva. La dimensione di un sottospazio isotropo massimale è quindi uguale ad 1.

(c) La restrizione di g a ciascuno dei due sottospazi, $\langle v_2, v_3\rangle$ e $\langle v_3, v_4\rangle$, è non-degenere e non-definita, quindi esistono isometrie. Se imponiamo $\phi(v_3) = v_3$, deve aversi $\phi(v_2) = av_3 + bv_4$, con

$$1 = g(v_2, v_3) = g(av_3 + bv_4, v_3) = -b \qquad \text{e} \qquad 4 = g(v_2, v_2) = g(av_3 + bv_4, av_3 + bv_4) = -2ab + 2b^2;$$

quindi esiste una tale isometria e si ha $\phi(v_2) = v_3 - v_4$. L'isometria si estende ad un'isometria di tutto V mandando una base ortonormale di $\langle v_2, v_3\rangle^\perp$ su una base ortonormale di $\langle v_3, v_4\rangle^\perp$. Tali basi esistono perché la restrizione di g ad entrambo i sottospazi è definita positiva (Teorema di Sylvester). □

Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova scritta del 1 aprile 2008

ESERCIZIO 1. *Nello spazio euclideo E^4, si considerino le sottovarietà lineari*

$$\rho_1 : \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad \rho_2 : \begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad \rho_3 : \begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad \tau : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \end{cases}.$$

(a) *Si determinino le dimensioni di ρ_1, ρ_2, ρ_3 e τ e si determinino le intersezioni $\rho_1 \cap \tau$, $\rho_2 \cap \tau$, $\rho_3 \cap \tau$, $\rho_1 \cap \rho_2 \cap \rho_3$.*

(b) *Presi $P_1 \in \rho_1 \cap \tau$, $P_2 \in \rho_2 \cap \tau$, $P_3 \in \rho_3 \cap \tau$, $P_0 \in \rho_1 \cap \rho_2 \cap \rho_3$. si determini il volume del tetraedro di vertici $P_0P_1P_2P_3$ e la distanza del punto P_0 da τ.*

(c) *Si determini l'equazione del luogo, $\mathscr{Q}$, formato dai punti di E^4 che han distanza 1 da τ. Esistono dei piani su cui $\mathscr{Q}$ taglia dei cerchi? (In caso affermativo si faccia un esempio, determinando centro e raggio; in caso negativo si spieghi perché tali piani non possano esistere)*

Svolgimento. (a) I sistemi ρ_1, ρ_2, ρ_3 han rango 3 e quindi definiscono delle rette, mentre il sistema τ ha rango 2 e quindi definisce un piano. Si ha

$$\rho_1 \cap \tau = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \rho_2 \cap \tau = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \rho_3 \cap \tau = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \rho_1 \cap \rho_2 \cap \rho_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(*b*) Si consideri la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ che ha come colonne le coordinate dei vettori $P_0 - P_1$, $P_2 - P_1$ e $P_3 - P_1$. Il volume cercato è $V = \frac{1}{6}\sqrt{\det({}^tTT)} = \frac{1}{3}$.

Detta S la matrice che ha come colonne le ultime due colonne della matrice T, la distanza cercata è uguale a $d = 6V/\sqrt{\det({}^tSS)} = 1$.

(*c*) I vettori $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(P_2 - P_1)$ e $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(P_3 - P_1)$, formano una base ortonormale del sottospazio direttore del piano τ. Dunque, il luogo $\mathscr{Q}$ è formato dai punti $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ tali che

$$\|(X - P_1) - (X - P_1) \cdot v_1 - (X - P_1) \cdot v_2\| = 1 \qquad \text{ovvero} \qquad \mathscr{Q} : (x_1 + x_2 - 1)^2 + (x_3 + x_4 - 1)^2 = 2.$$

Ad esempio, intersecando questa ipersuperficie con il piano $\pi : \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$, si ottiene la circonferenza di centro $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e raggio $\sqrt{2}$. □

ESERCIZIO 2. *Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 5}$ lo spazio vettoriale (reale) dei polinomi di grado minore o uguale a 5 e si consideri l'applicazione $\phi_2 : V \to V$, definita da $\phi_2(P(X)) = P(X) + P(2 - X)$, per ogni $P(X) \in V$.*

(a) *Si verifichi che ϕ_2 è lineare e si scriva la sua matrice nella base $\{1, X, \dots, X^5\}$ di V. Si determinino delle basi per nucleo ed immagine di ϕ_2. È vero che $V = \ker\phi_2 \oplus \operatorname{im}\phi_2$?*

(b) *Si determinino gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori per ϕ_2. Si dica se ϕ_2 è diagonalizzabile. Fissato un qualsiasi numero reale α, si ponga $\phi_\alpha(P(X)) = P(X) + P(\alpha - X)$, per ogni $P(X) \in V$. È vero che α è un autovalore per ϕ_α? Cosa si può dire del polinomio minimo di ϕ_α?*

(c) *Fissati ad arbitrio un numero naturale $n > 0$ e due numeri reali α e β, sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq n}$ lo spazio vettoriale (reale) dei polinomi di grado minore o uguale a n e si considerino gli endomorfismi $\phi_\alpha : V \to V$*

e $\phi_\beta : V \to V$. È vero che $V = ker\phi_\alpha \oplus im\phi_\beta$? (in caso affermativo dare una dimostrazione in caso negativo dare un controesempio).

Svolgimento. (a) Si verifica con un semplice calcolo che $\phi_2(aP(X) + bQ(X)) = a\phi_2(P(X)) + b\phi_2(Q(X))$, qualunque siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $P(X), Q(X) \in V$. La matrice cercata è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 0 & 0 & -4 & -12 & -32 & -80 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 24 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\ker\phi_2 = \langle X - 1, (X-1)^3, (X_-1)^5 \rangle$ ed $\operatorname{im}\phi_2 = \langle 1, (X-1)^2, (X-1)^4 \rangle$ (perché?) e quindi $V = \ker\phi_2 \oplus \operatorname{im}\phi_2$.

(b) I vettori del nucleo sono autovettori relativi all'autovalore 0, mentre si ha $\phi_2(P(X)) = 2P(X)$, per ogni $P(X) \in \operatorname{im}\phi_2$. Dunque ϕ_2 è diagonalizzabile, con autovalori 0 e 2, entrambi di molteplicità e nullità 3.

Se si considera l'applicazione $\phi_\alpha : V \to V$, si può verificare con un calcolo diretto che gli autovalori sono ancora 0 e 2 (qualunque sia α) e che i sottospazi di autovettori corrispondenti sono

$$\ker\phi_\alpha = \langle X - \alpha/2, (X-\alpha/2)^3, (X-\alpha/2)^5 \rangle \qquad \text{ed} \qquad \operatorname{im}\phi_\alpha = \langle 1, (X-\alpha/2)^2, (X-\alpha/2)^4 \rangle .$$

Dunque il polinomio minimo di ϕ_α è $X(X-2)$, qualunque sia il valore di α.

(c) Si osservi che, indipendentemente dal valore di α, $\ker\phi_\alpha$ ha una base formata polinomi di ciascun grado dispari ($\leq n$) ed $\operatorname{im}\phi_\alpha$ ha una base formata da polinomi di ciascun grado pari ($\leq n$). Unendo le due basi si ottiene una base di V e quindi $V = \ker\phi_\alpha \oplus \operatorname{im}\phi_\beta$. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, di $\mathbb{R}^4$.

(a) *Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori. Si dica se ϕ è invertibile o nilpotente.*
(b) *Si determinino una matrice di Jordan, J, di ϕ, ed una matrice invertibile, P, tali che $P^{-1}AP = J$.*
(c) *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 10 e $\psi : V \to V$ un endomorfismo di polinomio minimo $\lambda_\psi(x) = x^4(x-2)^2$. Sapendo che $\dim ker(\psi - 2) = 2 = \dim ker\psi$, si scrivano le possibili matrici di Jordan per ψ. È vero che l'ulteriore conoscenza di $rk\psi^2$ permetterebbe di determinare completamente ψ?*

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}) = x(x+1)^3$ e quindi l'endomorfismo ϕ ha l'autovalore, -1, con molteplicità 3 e l'autovalore 0, con molteplicità (e nullità) 1; in particolare, ϕ non è né invertibile (perché $\det\phi = 0$), né nilpotente (perché ha un autovalore diverso da 0). Osservando che

$$A + \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \text{e} \qquad (A+\mathbf{1})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

e quindi $\operatorname{rk}(\phi+1) = 2$, $\operatorname{rk}(\phi+1)^2 = 1$, si conclude che ϕ non è diagonalizzabile, ed ha autovettori generalizzati, di periodo al più 2, relativi all'autovalore -1. Si ha $\ker\phi = \operatorname{im}(\phi+1)^2 = \langle e_1 + e_2 - e_4 \rangle$ e $\ker(\phi+1) = \langle e_2 - e_4, 2e_1 - 3e_2 + e_3 \rangle$. Dunque, deve aversi $\lambda_\phi(x) = x(x+1)^2$.

(b) La matrice di Jordan di ϕ ha due blocchi di ordine 1, relativi agli autovalori -1 e 0, rispettivamente, ed un ulteriore blocco di ordine 2 relativo all'autovalore -1. Consideriamo i vettori, $v_4 = e_4$, $v_3 = (\phi+1)(v_4) = 2e_1 - e_2 + e_3 - 2e_4$, e $v_2 = e_2 - e_4$, $v_1 = e_1 + e_2 - e_4$, e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ la base da essi costituita. Si conclude che

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

sono le matrici cercate.

(c) Dai dati in possesso, sappiamo che vi sono solo due possibili autovalori, 0 e 2, per ψ, che per ciascuno degli autovalori vi sono due blocchi di Jordan e, infine, che deve esserci almeno un blocco di ordine 4 per l'autovalore 0, ed uno di ordine 2 per l'autovalore 2. Vi sono quindi due possibili matrici di Jordan per ψ, distinte dal polinomio caratteristico, ovvero dalla molteplicità (algebrica) degli autovalori:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & & \\ & & & & 0 & 1 & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & 2 & 1 & \\ & & & & & & & & 2 & \\ & & & & & & & & & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & & \\ & & & & 0 & 1 & & & & \\ & & & & & 0 & & & & \\ & & & & & & 2 & 1 & & \\ & & & & & & & 2 & & \\ & & & & & & & & 2 & 1 \\ & & & & & & & & & 2 \end{pmatrix}.$$

In entrambo i casi si ha $\operatorname{rk}\psi^2 = 5$ e quindi la conoscenza di questo dato non serve a determinare ψ. □

ESERCIZIO 4. *Sia V uno spazio vettoriale reale e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una sua base. Si consideri la forma quadratica $q : V \to \mathbb{R}$, definita da*

$$q(x_1v_1 + \dots + x_4v_4) = -x_1x_2 + x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4.$$

(a) Si scriva la matrice nella base $\mathcal{V}$ dell'applicazione bilineare simmetrica, $g : V \times V \to \mathbb{R}$, definita da $g(v, w) = q(v + w) - q(v) - q(w)$, per ogni $v, w \in V$. Si dica se g è non-degenere e si determinino l'eventuale nucleo e la segnatura di g.

(b) Si determinino tutti i sottospazi isotropi massimali contenenti il vettore v_1.

(c) Sia W uno spazio vettoriale reale di dimensione $n > 2$ e $g : W \times W \to \mathbb{R}$ un'applicazione bilineare simmetrica, non-degenere e non definita. Dato un vettore isotropo, $w \neq 0$, sia $\langle w\rangle^\perp = \langle w\rangle \oplus T$ e si mostri che la restrizione di g a T è non degenere ed ha lo stesso indice d'inerzia di g su W.

Svolgimento. (a) La matrice di g è

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e $\det G = 5$, per cui g è non degenere e la segnatura è necessariamente $(2, 2)$ (altrimenti il determinante sarebbe negativo, oppure non potrebbero esservi vettori isotropi).

(b) La dimensione di un sottospazio isotropo massimale è uguale a 2 e vi sono esattamente due sottospazi isotropi massimali contenenti v_1. Infatti, $\langle v_1\rangle^\perp = \langle v_1, v_2 + v_3, v_3 + v_4\rangle$ e la restrizione di g a questo sottospazio è degenere, con nucleo uguale a $\langle v_1\rangle$. La restrizione di g al complementare, $\langle v_2 + v_3, v_3 + v_4\rangle$ è non degenere e non definita e vi sono esattamente due sottospazi isotropi, generati da $2v_2 + (1 \pm \sqrt{5})v_3 - (1 \mp \sqrt{5})v_4$. Dunque i sottospazi isotropi massimali contenenti v_1 sono $H_1 = \langle v_1, 2v_2 + (1 + \sqrt{5})v_3 - (1 - \sqrt{5})v_4\rangle$ ed $H_2 = \langle v_1, 2v_2 + (1 - \sqrt{5})v_3 - (1 + \sqrt{5})v_4\rangle$.

(c) Sia v un vettore tale che $g(v, w) \neq 0$ (esiste perché altrimenti v apparterrebbe al nucleo di g). La restrizione di g al sottospazio $\langle v, w\rangle$ è non degenere (perché?) e quindi, per il Teorema di decomposizione ortogonale, lo stesso vale per il sottospazio $\langle v, w\rangle^\perp \subset \langle w\rangle^\perp$ e si ha $\langle w\rangle^\perp = \langle w\rangle \oplus \langle v, w\rangle^\perp$. Per concludere basta osservare che la proiezione parallela a $\langle w\rangle$ su ogni altro complementare, T, è un'isometria (perché?) e che l'indice di inerzia della restrizione di g a $\langle v, w\rangle$ è uguale a 0 (completare per bene il ragionamento!). $\square$

Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova scritta del 15 luglio 2008

ESERCIZIO 1. Si considerino i seguenti sottospazi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$:

$$U : \begin{cases} X_1 + X_2 + X_4 = 0 \\ X_1 + 2X_2 - 2X_3 + 3X_4 = 0 \\ X_1 + 2X_3 - X_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad V = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(a) [2 punti] Si determinino la dimensione, una base e delle equazioni cartesiane per i sottospazi U e V.

(b) [2 punti] Si determinino $U \cap V$ ed un sottospazio, W, tale che $V = W \oplus (U \cap V)$. Si verifichi che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(c) [2 punti] Determinare le matrici in base canonica di π_U^W, σ_W^U. Qual è la restrizione ad $U \cap V$ di queste due applicazioni?

(d) [3 punti] Si dica se l'insieme, C, delle applicazioni lineari $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tali che $\mathrm{im}(\pi_U^W \circ \phi) \subseteq V \cap U$ è un sottospazio di $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ ed in tal caso se ne calcoli la dimensione. Si scrivano le matrici in base canonica degli elementi di C.

ESERCIZIO 2. Nello spazio $\mathbb{R}^4$, dotato dell'usuale prodotto scalare, si considerino i punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) [2 punti] Si determinino l'area del triangolo $P_1P_2P_3$ e le equazioni cartesiane del piano, τ, che lo contiene.

(b) [2 punti] Preso il sottospazio $U = \langle e_1 - e_4, e_2 + e_3 \rangle$, si scriva la matrice della simmetria ortogonale, $\sigma : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di asse U.

(c) [3 punti] Si determini la reciproca posizione di U e τ e si calcoli la distanza tra i due piani. È vero che τ e $\sigma(\tau)$ sono paralleli?

ESERCIZIO 3. Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_5\}$, di $\mathbb{R}^5$.

(a) [2 punti] Si determinino il polinomio caratteristico ed il il polinomio minimo di ϕ, gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori.

(b) [2 punti] Si determinino una matrice di Jordan, J, di ϕ, ed una matrice invertibile, P, tali che $P^{-1}AP = J$.

(c) [3 punti] Si calcolino J^{23} ed A^{23}.

ESERCIZIO 4. Sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, si consideri la forma quadratica

$$q(X_0, X_1, X_2, X_3) = X_0^2 - 2X_0X_1 - 2X_0X_3 + X_1^2 - 2X_1X_2 - 4X_1X_3 + X_3^2.$$

(a) [2 punti] Si scriva la matrice nella base canonica, $\{e_0, \dots, e_3\}$, dell'applicazione bilineare, g, tale che $q(v) = g(v, v)$ e si determinino rango, segnatura ed eventuale nucleo di g.

(b) [2 punti] Si considerino i sottospazi $W_0 = \langle e_0, e_1, e_2 \rangle$ e $W_1 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, dotati della restrizione di g. È vero che i due sottospazi sono isometrici? In caso affermativo si scriva esplicitamente un'isometria.

(c) [3 punti] Si considerino i sottospazi $Z_0 = \langle e_0, e_1 \rangle$ e $Z_1 = \langle e_2, e_3 \rangle$, dotati della restrizione di g. Si scriva, se esiste, un'isometria $\phi : Z_0 \to Z_1$, tale che $\phi(e_0) = e_3$. È vero che esiste un'isometria $\psi : W_0 \to W_1$ che coincide con ϕ su Z_0? In caso affermativo la si scriva esplicitamente.

ESERCIZIO 5. [*Vecchio ordinamento*] Si consideri la conica $\mathscr{C}$ di equazione

$$x - (1 - y)(2x + y) = 0 .$$

(a) [4 punti] Si determini se $\mathscr{C}$ è degenere, qual è il suo tipo, un'equazione canonica, gli eventuali assi, asintoti, centro e fuochi. Se ne tracci un disegno approssimativo.

(b) [3 punti] Sia r un diametro parallelo all'asse x e si determini una direzione, $\langle v \rangle$, tale che la simmetria di asse r e direzione $\langle v \rangle$ mandi punti della conica su punti della conica.

Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova scritta del 9 settembre 2008

ESERCIZIO 1. Al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, si consideri la famiglia di applicazioni lineari $\phi_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ di matrici

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & -t \\ 1-t & -1 & -1 & 2t-1 \\ t & 1 & 1-t & -t \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi canoniche.

(a) Si determinino le dimensioni di nucleo ed immagine di ϕ_t, al variare di t in $\mathbb{R}$. Si determini, per ogni valore di t, una base del nucleo di ϕ_t.

(b) Si mostri che i nuclei di tutte le applicazioni ϕ_t, al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, sono contenuti in uno stesso sottospazio di dimensione 3. Sono anche contenuti in un sottospazio di dimensione più piccola?

(c) Si mostri che l'unione di tutti i nuclei delle applicazioni ϕ_t è contenuta nell'insieme delle soluzioni di un sistema (non lineare) di equazioni omogenee e si determinino tali equazioni.

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

(a) Si mostri che l'insieme $\mathscr{U} = \{\, B \in M_3(\mathbb{R}) \mid \operatorname{im} B \subseteq \operatorname{im} A \,\}$ è un sottospazio di $M_3(\mathbb{R})$ e se ne determini una base.

(b) Si consideri l'applicazione bilineare $M_3(\mathbb{R}) \times M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, definita da $(X, Y) \mapsto \operatorname{tr}({}^tXY)$. Si verifichi che si tratta di un'applicazione bilineare simmetrica e non degenere e se ne determini la segnatura.

(c) Si determini il sottospazio $\mathscr{U}^\perp$ rispetto all'applicazione bilineare definita sopra.

ESERCIZIO 3. Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, avente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica.

(a) Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ.

(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, di ϕ, ed una matrice invertibile, P, tali che $P^{-1}AP = J$.

(c) Sia D una matrice diagonale di ordine n. È vero che ogni matrice diagonale è combinazione lineare di $\mathbf{1}, D, D^2, \dots, D^{n-1}$ se, e solo se, D ha gli autovalori a due a due distinti?

ESERCIZIO 4. Si consideri lo spazio vettoriale reale V dotato dell'applicazione bilineare simmetrica g, di matrice

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$.

(a) Si verifichi che g è degenere e si determini il suo nucleo N.

(b) Sia $W = \langle v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3 \rangle$, e si verifichi che $V = W \oplus N$. Si indichi con $\pi_v : V \to W$ la proiezione parallela ad N e si consideri l' applicazione $\tilde{g} : W \times W \to \mathbb{R}$ così definita: dati due vettori w

e w' in W, siano $x, x' \in V$, tali che $\pi_v(x) = w$ e $\pi_v(x') = w'$ e si ponga $\tilde{g}(w, w') := g(x, x')$. Si mostri che $\tilde{g}$ è ben definita e non-degenere.

(c) Si determini la segnatura di $\tilde{g}$ e quella di g.

ESERCIZIO 5. [*Vecchio ordinamento*] Si consideri la conica $\mathcal{C}$ del piano euclideo, di equazione affine

$$\mathcal{C} : 5x^2 + 5y^2 - 6xy + 2x = 0,$$

e se ne determinino l'equazione canonica e gli eventuali assi, centro, vertici, fuochi, direttrice, asintoti. Si tracci un disegno approssimativo della conica.

Esame di Matematica 2 (laurea in Fisica)

prova scritta del 23 settembre 2008

ESERCIZIO 1. Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino le rette

$$\ell_1 : \begin{cases} 2x + y = 0 \\ y + 4z = 2 \end{cases}, \qquad \ell_2 : \begin{cases} 2x - y = 4 \\ y + z = -1 \end{cases}, \qquad \ell_1 : \begin{cases} x + y = -1 \\ y - z = -3 \end{cases},$$

ed il piano $\pi : x + y + z = 1$.

(a) [2 punti] Verificare che le tre rette concorrono ad un punto, P_0, non appartenente a π.

(b) [3 punti] Determinare il piano, π', corrispondente a π nella simmetria centrale di centro P_0 e calcolare la distanza tra π e π'.

(c) [3 punti] Posto $P_i = \ell_i \cap \pi$, per $i = 1, 2, 3$. Determinare i punti $Q_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$ per cui la proiezione su π di centro Q_t è ben definita e l'immagine del punto P_0 è interna al triangolo $P_1P_2P_3$.

ESERCIZIO 2. Nello spazio affine di dimensione 4 su $\mathbb{R}$, si considerino le due famiglie di sottovarietà lineari

$$\mathbb{L}_t : \begin{cases} (t-1)X_1 + 2tX_3 + 2tX_4 = 1 \\ (t+2)X_2 - tX_3 - X_4 = 2 - t \\ (t-1)X_1 + (t+2)X_2 + 2tX_3 = 3 \end{cases}$$

$$\mathbb{M}_t : (t-1)X_1 + (t+2)X_2 + tX_3 - X_4 = 3 - t$$

al variare di t in $\mathbb{R}$.

(a) [2 punti] Si verifichi che le dimensioni di $\mathbb{L}_t$ ed $\mathbb{M}_t$ sono indipendenti da t.

(b) [2 punti] Trovare i valori di t per cui $\mathbb{L}_t \cap \mathbb{M}_t$ è formato da un solo punto. In tali casi scrivere esplicitamente il punto P_t di intersezione (in funzione di t).

(c) [2 punti] Trovare i valori di t per cui $\mathbb{L}_t \cap \mathbb{M}_t$ è vuoto e quelli per cui $\mathbb{L}_t \cap \mathbb{M}_t$ è una retta e, in questo ultimo caso, scrivere l'equazione parametrica della retta intersezione.

(d) [2 punti] Si determini $\mathbb{L}_t \vee \mathbb{M}_t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Si determini la sottovarietà generata da tutte le intersezioni $\mathbb{L}_t \cap \mathbb{M}_t$.

ESERCIZIO 3. Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, di $\mathbb{R}^4$.

(a) [3 punti] Si determinino il polinomio caratteristico di ϕ, gli autovalori ed i relativi spazi di autovettori. Si dica se ϕ è invertibile.

(b) [2 punti] Si determinino il polinomio minimo di ϕ ed un autovettore generalizzato di periodo massimo per ogni autovalore di ϕ.

(c) [3 punti] Si determinino una matrice di Jordan, J, di ϕ, ed una matrice invertibile, P, tali che $P^{-1}AP = J$.

ESERCIZIO 4. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato dell'applicazione bilineare, g, di matrice

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$.

(a) [2 punti] Si dica se g è non-degenere e si determini il sottospazio $W = \langle e_2, e_4 \rangle^\perp$.

(b) [3 punti] Si dica se $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$ e, in caso affermativo, si scriva la matrice della proiezione ortogonale su $W^\perp$.

(c) [3 punti] Si determinino le segnature delle restrizioni di g a W ed a $W^\perp$. È vero che W e $W^\perp$ sono isometrici?