

# Sommario del contenuto

<b>I. Curve</b> .....	3
Cammini parametrizzati. Equazioni di Frenet .....	3
Un risultato globale per le curve piane .....	9
Appendice. Curve di Peano .....	13
<b>II. Superficie (teoria locale)</b> .....	17
Alcuni richiami sulle funzioni di più variabili .....	17
Superficie .....	20
Appendice. Richiami di Topologia generale .....	28
<b>III. Varietà differenziabili</b> .....	37
Varietà differenziabile. ....	37
Spazio tangente .....	40
Appendice. Prodotto tensoriale, prodotto esterno. ....	44
<b>IV. Gruppi ed Algebre di Lie</b> .....	57
Definizioni ed esempi .....	57
Esponenziale .....	62
<b>V. Varietà Riemanniane</b> .....	67
Equazioni strutturali delle superficie .....	67
Geodetiche .....	72
Appendice. Partizioni dell'unità .....	78
<b>VI. Forme differenziali e Integrazione</b> .....	83
Forme differenziali .....	83
Integrazione. Formula di Stokes .....	88
Appendice. Orientamento .....	92
<b>VII. Teorema dell'indice e teorema di Gauss-Bonnet</b> .....	95
Il teorema dell'indice .....	95
Il teorema di Gauss-Bonnet .....	98
Appendice. Suggerimenti per ulteriori letture .....	101



# I

## Curve

In questo capitolo vogliamo dare una rapida introduzione delle tecniche della Geometria Differenziale applicate allo studio delle curve immerse nello spazio.

### 1. Cammini parametrizzati. Equazioni di Frenet

**1.1 Definizione.** Un *cammino* in  $\mathbb{R}^n$  è un'applicazione continua  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Se  $\mathcal{A}$  è una suddivisione finita  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$  dell'intervallo  $[a, b]$ , si pone

$$l_\gamma(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^r \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|.$$

Si dice che il cammino  $\gamma$  è *rettificabile* se esiste finito  $l(\gamma) = \sup_{\mathcal{A}} l_\gamma(\mathcal{A})$  al variare di  $\mathcal{A}$  tra le suddivisioni finite dell'intervallo  $[a, b]$ . In tal caso si dice che  $l(\gamma)$  è la *lunghezza* del cammino  $\gamma$ .

Osserviamo che la lunghezza del cammino  $\gamma$  non dipende dalla sua parametrizzazione, infatti, se  $f : [c, d] \rightarrow [a, b]$  è un'applicazione biunivoca e continua (e quindi monotona) allora il cammino  $\delta = \gamma \circ f$  ha la stessa lunghezza di  $\gamma$ .

Il cammino  $\gamma$  si dice *di classe  $\mathcal{C}^k$  a tratti* se esiste una suddivisione finita  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_s = b$  dell'intervallo  $[a, b]$ , tale che la restrizione  $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$  (eventualmente prolungata per continuità) sia una funzione di classe  $\mathcal{C}^k$ , per ogni  $i = 1, \dots, s$ .

Due cammini di classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 1$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\delta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , si dicono  *$\mathcal{C}^k$ -equivalenti* se esiste un'applicazione biunivoca e crescente  $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ , di classe  $\mathcal{C}^k$  assieme con la sua inversa, tale che  $\gamma(t) = \delta(f(t))$ , per ogni  $t \in [a, b]$ .

Un cammino di classe  $\mathcal{C}^k$ , con  $k \geq 1$ , si dice *regolare* se  $\gamma'(t) \neq 0$  per ogni valore di  $t$  e le classi di equivalenza di cammini regolari sono dette *curve orientate*.

Ricordiamo un risultato elementare

**1.2 Proposizione.** Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è un cammino di classe  $\mathcal{C}^1$  a tratti, allora  $\gamma$  è rettificabile ed

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

*dim.* Sia  $\mathcal{A}$  una suddivisione finita  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$  dell'intervallo  $[a, b]$ . Per  $j = 1, \dots, n$ , indichiamo con  $\gamma_j(t)$  la  $j$ -esima componente del vettore  $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$  ed osserviamo che, trattandosi di funzioni di classe  $\mathcal{C}^1$ , si ha

$$\gamma_j(t_i) - \gamma_j(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'_j(t) dt = (\gamma'_j(t_i) + \lambda_{ij})(t_i - t_{i-1}).$$

Quindi si ha

$$|\lambda_{ij}| = \left| \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\gamma'_j(t) - \gamma'_j(t_i)] dt \right| \leq \max_{t \in [t_{i-1}, t_i]} |\gamma'_j(t) - \gamma'_j(t_i)|.$$

In termini di vettori possiamo quindi scrivere

$$[\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})] - \gamma'(t_i)(t_i - t_{i-1}) = \lambda_i(t_i - t_{i-1}),$$

ove  $\lambda_i$  è il vettore che ha come componenti i  $\lambda_{ij}$  e, dalla disuguaglianza  $|\|v\| - \|w\|| \leq \|v - w\|$ , valida per ogni coppia di vettori, si deduce

$$\left| \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| - \|\gamma'(t_i)\|(t_i - t_{i-1}) \right| \leq \|\lambda_i\|(t_i - t_{i-1}) \leq \|m_i\|(t_i - t_{i-1}),$$

ove indichiamo con  $m_i$  i vettori che hanno come componenti i termini  $m_{ij} = \max_{t \in [t_{i-1}, t_i]} |\gamma'_j(t) - \gamma'_j(t_i)|$ , per  $j = 1, \dots, n$ . Sommiamo su tutti gli intervalli della suddivisione e separiamo la somma  $\sum_{i=1}^r \|m_i\|(t_i - t_{i-1})$  in due parti. Sugli intervallini che non contengono punti di discontinuità della curva, le componenti del vettore  $\gamma'$  sono funzioni uniformemente continue e quindi le componenti del vettore  $m_i$  tendono a zero al tendere a zero dell'ampiezza dell'intervallino e quindi la somma di questi addendi è maggiorata dal prodotto di una funzione tendente a zero con la massima ampiezza della suddivisione per l'ampiezza dell'intervallo  $b - a$ . I punti di discontinuità sono in numero finito come gli intervallini che li contengono; l'ampiezza delle oscillazioni delle componenti del vettore  $\gamma'$  su questi intervallini è maggiorata da una costante  $K$  e quindi questa somma finita è maggiorata da una costante per la somma di un numero finito (indipendente dalla suddivisione) di ampiezze di intervallini, e quindi tende a zero al tendere a zero della massima ampiezza della suddivisione. Si conclude che la differenza

$$\left| l_\gamma(\mathcal{A}) - \sum_{i=1}^r \|\gamma'(t_i)\|(t_i - t_{i-1}) \right|$$

tende a zero al tendere a zero della massima ampiezza della suddivisione e quindi che  $l(\gamma)$  coincide con il limite delle somme integrali. **CVD**  $\square$

Un cammino regolare (o, meglio, 1-regolare),  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , può essere riparametrizzato in modo "canonico". Infatti, posto

$$s(t) = c + \int_a^t \|\gamma'(x)\| dx,$$

ove  $c$  è una costante arbitraria, la funzione così definita è di classe  $\mathcal{C}^k$  con derivata strettamente positiva e quindi crescente ed invertibile. Sia  $t(s)$  l'inversa (sempre crescente e di classe  $\mathcal{C}^k$ ) ed osserviamo che il cammino  $\delta(s) = \gamma(t(s))$  ha ancora classe  $\mathcal{C}^k$  ed ha la proprietà che  $\|\delta'(s)\| = 1$  per ogni  $s$ . Il parametro  $s$  è detto la *lunghezza d'arco* della curva  $\gamma$ , e si ha  $\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\|$ .

Il vettore unitario  $\frac{d\delta}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$  è detto il *vettore tangente*<sup>(\*)</sup> alla curva  $\gamma$ .

**1.3 Definizione.** Diremo che un cammino  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è *k-regolare* se è di classe  $\mathcal{C}^k$  in  $[a, b]$  ed i vettori  $\gamma'(t), \dots, \gamma^{(k)}(t)$  sono linearmente indipendenti, per ogni  $t \in [a, b]$ . In tal caso, per ogni  $i \leq k$ , il sottospazio affine (sottovarietà lineare), passante per  $\gamma(t)$  e parallelo al sottospazio  $\langle \gamma'(t), \dots, \gamma^{(i)}(t) \rangle$  è detto l'*i-esimo spazio osculatore* a  $\gamma$  in  $\gamma(t)$ . Si verifica facilmente che questa sottovarietà lineare è indipendente dalla scelta della parametrizzazione della curva  $\gamma$ .

Ad esempio osserviamo che, per una curva regolare  $\gamma$ , la retta  $\gamma(t) + \langle \gamma'(t) \rangle$  (1-sottospazio osculatore), altri non è che la retta tangente a  $\gamma$  nel punto  $\gamma(t)$ .

Se la curva  $\delta$  è  $n - 1$ -regolare e contenuta nell'iperpiano  $\pi : \ell(X) = a$ , allora l'iperpiano osculatore a  $\delta$  coincide con  $\pi$  in ogni punto  $\delta(t)$ , perché, derivando la relazione  $\ell(\gamma(t)) = a$ , si ottiene  $\ell(\gamma^{(k)}(t)) = 0$  per ogni  $k = 1, \dots, n - 1$ .

In particolare, se una curva 2-regolare  $\delta$  è contenuta in un piano, allora questo è il piano osculatore alla curva in ogni punto.

---

(\*) Alcuni autori lo chiamano *versore tangente*, indicando come vettore tangente il vettore  $\gamma'(t)$  che, nelle nostre notazioni, dipende dal cammino scelto e non dalla curva. Per questo motivo riserviamo il nome di vettore tangente al caso in cui il cammino è parametrizzato "canonicamente".

**1.4 Definizione.** Dati  $n$  vettori  $v_1(t), \dots, v_n(t)$ , di classe  $\mathcal{C}^k$ , con  $k \geq 1$ , in  $\mathbb{R}^n$ , diremo che formano (nell'ordine) un *riferimento mobile ortonormale* concorde con la base canonica se, per ogni  $t_0 \in [a, b]$ , i vettori  $v_1(t_0), \dots, v_n(t_0)$  sono una base ortonormale orientata concordemente con la base canonica di  $\mathbb{R}^n$ .

Un riferimento mobile ortonormale in  $\mathbb{R}^n$  si può quindi considerare come un cammino parametrizzato nel gruppo ortogonale  $O_n(\mathbb{R})$ .

In particolare, se  $v_1(t), \dots, v_n(t)$  formano un riferimento mobile ortonormale, si ha

$$v'_j(t) = \sum_{i=1}^n a_{ij}(t)v_i(t), \quad \text{per } j = 1, \dots, n$$

ovvero, indicando con  $V$  la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori  $v_1(t), \dots, v_n(t)$  (rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^n$ ), si ha  $V' = VA$ , ove  $A = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$ . Derivando la relazione di ortogonalità,  ${}^tVV = \mathbf{1}$ , si ricava che

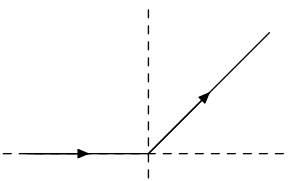
$${}^tV'V + {}^tVV' = 0, \quad \text{ovvero} \quad {}^tA({}^tVV) + ({}^tVV)A = {}^tA + A = \mathbf{0} \quad (1.5)$$

e quindi  $A$  deve essere una matrice antisimmetrica.

Vogliamo mostrare come, ad ogni curva di classe  $\mathcal{C}^n$ ,  $n-1$ -regolare, si possa associare un riferimento mobile ortonormale (riferimento di Frenet) e come questo determini a sua volta la curva data.

**1.6 Definizione.** Sia  $\gamma$  una curva un *riferimento di Frenet* lungo  $\gamma$  (se esiste) è un riferimento mobile ortonormale  $v_1(t), \dots, v_n(t)$  concorde con l'orientamento e tale che, per  $1 \leq k \leq n-1$  il sottospazio  $\langle v_1(t), \dots, v_k(t) \rangle$  coincida con il  $k$ -esimo sottospazio osculatore e le basi  $\gamma'(t), \dots, \gamma^{(k)}(t)$  e  $\{v_1(t), \dots, v_k(t)\}$  siano orientate concordemente.

Una curva generica  $\gamma$  può non avere un riferimento di Frenet, ad esempio la curva piana

$$\lambda(t) = \begin{cases} -e^{-1/t^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{se } t < 0 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{se } t = 0 \\ e^{-1/t^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{se } t > 0 \end{cases}$$


è di classe  $\mathcal{C}^\infty$ , ma non esiste un vettore unitario  $v(t)$ , differenziabile rispetto a  $t$ , tale che  $\lambda'(t) = \|\lambda'(t)\|v(t)$  per ogni  $t$ . Ciò perché nel punto  $\lambda(0) = (0, 0)$  il vettore  $\lambda'(t)$  si annulla e quindi la curva non è regolare.

**1.7 Proposizione.** Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva  $n-1$ -regolare. Allora esiste un'unico riferimento di Frenet  $\{e_1(t), \dots, e_n(t)\}$  lungo  $\gamma$ .

*dim.* Ricordiamo che due basi sono orientate concordemente se il determinante del cambiamento di base è positivo. Ciò detto, la dimostrazione si riduce all'applicazione del processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt ai vettori  $\gamma'(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t)$  e scegliere come ultimo vettore della base un vettore unitario,  $e_n(t)$ , normale al sottospazio  $\langle \gamma'(t), \dots, \gamma^{(k)}(t) \rangle$ , in modo che l'orientamento della base  $\gamma'(t), \dots, \gamma^{(k)}(t), e_n(t)$  sia concorde con la base canonica di  $\mathbb{R}^n$ .

In modo esplicito, si procede ricorsivamente ponendo  $e_1(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$  e poi, supponendo di aver definito i vettori  $e_1(t), \dots, e_i(t)$ , per  $1 \leq i < n-1$ , si pone dapprima

$$v_{i+1}(t) = \gamma^{(i+1)}(t) - \sum_{j=1}^i \left( \gamma^{(i+1)}(t) \cdot e_j(t) \right) e_j(t)$$

ed infine  $e_{i+1}(t) = \frac{v_{i+1}(t)}{\|v_{i+1}(t)\|}$ .

Costruiti i vettori  $e_1(t), \dots, e_{n-1}(t)$ , si può prendere il loro “prodotto vettoriale”, ovvero il vettore  $v_n(t)$  che ha come coordinate i minori di ordine  $n-1$  (presi con segno opportuno) della matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori  $e_1(t), \dots, e_{n-1}(t)$  rispetto alla base canonica, ed infine porre  $e_n(t) = \frac{v_n(t)}{\|v_n(t)\|}$ . **CVD**  $\square$

Osserviamo che, se  $\gamma$  è una curva  $n-1$ -regolare ed  $e_1(t), \dots, e_n(t)$  è un riferimento di Frenet del tipo descritto nella Proposizione precedente, allora si ha

$$(e'_1(t), \dots, e'_n(t)) = (e_1(t), \dots, e_n(t))A \quad [\text{equazioni di Frenet}]$$

ove  $A$  è una matrice antisimmetrica [cf. (I.1.5)]. Inoltre, in base alla costruzione descritta, si ha che  $e'_i(t) \in \langle \gamma'(t), \dots, \gamma^{(i+1)}(t) \rangle = \langle e_1(t), \dots, e_{i+1}(t) \rangle$  e quindi la matrice  $A$  è necessariamente della forma

$$(1.8) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ \omega_1 & 0 & -\omega_2 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & -\omega_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \omega_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le equazioni di Frenet si possono quindi scrivere come

$$(1.9) \quad e'_1 = \omega_1 e_2; \quad e'_i = \omega_i e_{i+1} - \omega_{i-1} e_{i-1}, \quad 2 \leq i \leq n-1; \quad e'_n = -\omega_{n-1} e_{n-1}.$$

**1.10 Proposizione.** Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva  $n-1$ -regolare e siano

$$(e'_1(t), \dots, e'_n(t)) = (e_1(t), \dots, e_n(t))A$$

le equazioni di Frenet associate, allora si ha  $\omega_i(t) > 0$  per  $1 \leq i \leq n-2$ .

*dim.* In base al procedimento di costruzione del riferimento di Frenet, per  $1 \leq i \leq n-1$ , si ha

$$e_i(t) = \sum_{k=1}^i b_{ki}(t) \gamma^{(k)}(t), \quad \text{con } b_{ii}(t) > 0,$$

e quindi, invertendo la matrice di cambiamento di base, si ha

$$\gamma^{(i)}(t) = \sum_{j=1}^i a_{ji}(t) e_j(t), \quad \text{con } a_{ii}(t) = b_{ii}(t)^{-1} > 0.$$

Poiché il riferimento di Frenet è ortonormale, per  $1 \leq i \leq n-2$ , si ha

$$\omega_i = e'_i \cdot e_{i+1} = \left( \sum_{k=1}^i b'_{ki} \gamma^{(k)} + \sum_{k=1}^i b_{ki} \gamma^{(k+1)} \right) \cdot e_{i+1} = b_{ii}(\gamma^{(i+1)}) \cdot e_{i+1} = b_{ii} b_{i+1, i+1}^{-1} > 0$$

che è quanto volevamo verificare. **CVD**  $\square$

È immediato verificare che le equazioni di Frenet non cambiano se si trasforma la curva con un'isometria dello spazio  $\mathbb{R}^n$ ; infatti, se  $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è un'isometria, allora la curva  $\tilde{\gamma}(t) = B \circ \gamma(t)$  ha il riferimento di Frenet  $\tilde{e}_1(t) = B e_1(t), \dots, \tilde{e}_n(t) = B e_n(t)$  e le equazioni di Frenet sono quindi  $(\tilde{e}'_1(t), \dots, \tilde{e}'_n(t)) = (\tilde{e}_1(t), \dots, \tilde{e}_n(t))A$ .

Consideriamo ora una riparametrizzazione della curva  $\gamma$ , ovvero confrontiamo le equazioni di Frenet della curva  $\gamma(t)$  e della curva  $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ , ove  $t(s)$  è una funzione di classe  $\mathcal{C}^n$ , con  $t'(s) > 0$ <sup>(†)</sup>. Usando la formula di derivazione delle funzioni composte, si ha che, per ogni  $i$ ,  $\langle \gamma'(t(s)), \dots, \gamma^{(i)}(t(s)) \rangle = \langle \tilde{\gamma}'(s), \dots, \tilde{\gamma}^{(i)}(s) \rangle$  e quindi coincidono i riferimenti di Frenet. Per la formula di derivazione delle funzioni composte, si ha quindi  $\frac{de_i(t(s))}{ds} = \frac{de_i(t(s))}{dt} \frac{dt}{ds}$  e quindi le equazioni di Frenet diventano

$$\frac{d}{ds}(e_1(t(s)), \dots, e_n(t(s))) = (e_1(t(s)), \dots, e_n(t(s)))A(t(s))\frac{dt}{ds}$$

e quindi la matrice  $A$  viene moltiplicata per una funzione scalare.

**1.11 Definizione.** Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva  $n - 1$ -regolare, sia  $e_1(t), \dots, e_n(t)$  il riferimento di Frenet lungo  $\gamma$  e siano  $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}$  i coefficienti dell'equazione di Frenet [cf. (I.1.8)]. Si chiama *i-esima curvatura* della curva  $\gamma$  la funzione scalare  $\kappa_i(t) = \frac{\omega_i(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ , per  $1 \leq i \leq n - 1$ .

È facile verificare che le curvature non dipendono dalla parametrizzazione della curva  $\gamma$  e sono invarianti per isometrie dello spazio  $\mathbb{R}^n$ . In particolare, se si riparametrizza la curva  $\gamma$  con la lunghezza d'arco, i coefficienti dell'equazione di Frenet coincidono con le curvature di  $\gamma$ .

**1.12 Osservazione.** Nel caso di una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  vi sono solo due curvature e, tradizionalmente, sono indicate come

$$\kappa(t) := \kappa_1(t) \quad [\text{curvatura}], \quad \tau(t) := \kappa_2(t) \quad [\text{torsione}].$$

Supponiamo che la curva sia parametrizzata dalla lunghezza d'arco, ovvero consideriamo la curva  $\delta(s)$  con  $\|\delta'(s)\| = 1$  (per ogni  $s$ ). Allora  $e_1(s) = \delta'(s)$  è il *vettore tangente* e  $\delta''$  è ortogonale a  $\delta' = e_1$ . Si ha quindi  $\delta'' = \kappa e_2$ , ove  $\kappa(s) > 0$  è la curvatura della curva  $\delta$  ed  $e_2(s) = \frac{\delta''(s)}{\kappa(s)}$  è il *vettore normale*. Infine, il terzo vettore del riferimento di Frenet è il *vettore binormale*  $e_3(s) = e_1 \times e_2$  ed  $e_3'(s) = -\tau(s)e_2(s)$ . A volte si indicano anche con  $T$ ,  $N$  e  $B$ , rispettivamente, i vettori tangente, normale e binormale. Osserviamo che la curvatura misura la variazione del vettore tangente e la torsione misura la variazione del piano osculatore.

In particolare, se  $\tau(s) = 0$  per ogni  $s$ , significa che il vettore binormale è costante e quindi i piani osculatori sono tutti paralleli tra loro. Inoltre, dalle equazioni di Frenet si ricava

$$(\delta \cdot e_3)' = (\delta \cdot e_1 \times e_2)' = e_1 \cdot e_1 \times e_2 + \delta \cdot \kappa e_2 \times e_2 - \delta \cdot e_1 \times \kappa e_1 = 0$$

e quindi la curva  $\delta$  è contenuta in un piano ortogonale ad  $e_3$ .

Consideriamo una curva  $\delta(s)$ , parametrizzata dalla lunghezza d'arco, e supponiamo che si abbia  $\delta'' = 0$  (ovvero che  $\delta$  abbia "curvatura nulla"). Allora, consideriamo il vettore tangente  $e_1(s) = \delta'(s)$ , che è un vettore costante e si ha

$$(\delta \times e_1)' = \delta' \times \delta' + \delta \times \delta'' = 0$$

e quindi la curva  $\delta$  è una retta parallela al vettore  $e_1$ .

**Esercizio 1.1.** (a) Verificare che per una curva piana regolare  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , si ha

$$\kappa(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

(b) Verificare che per una curva regolare  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , si ha

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} \quad \tau(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2}.$$

(†) Si osservi che, affinché  $\tilde{\gamma}$  sia regolare, deve aversi  $t'(s) \neq 0$  per ogni  $s$  e scegliamo le riparametrizzazioni con derivata positiva, perché rispettano il verso di percorrenza della curva.

□

Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva regolare e sia  $P = \gamma(t_0)$  un suo punto. Possiamo considerare il *cerchio osculatore* alla curva in  $P$ , ovvero un cerchio per  $P$  che abbia in comune con  $\gamma$  il vettore tangente in  $P$ . Se indichiamo con  $\kappa$  la curvatura di  $\gamma$  e con  $e_1, e_2$  i primi due vettori del riferimento di Frenet, possiamo considerare il cerchio di centro  $C = \gamma(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}e_2(t_0)$  e raggio  $\frac{1}{\kappa(t_0)}$ , contenuto nel piano osculatore, ovvero la curva

$$\delta(\theta) = C + \frac{1}{\kappa(t_0)}(\cos \theta e_1(t_0) + \sin \theta e_2(t_0)), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

È facile verificare che, per  $\theta = \frac{3\pi}{2}$ , il cerchio tocca la curva in  $P = \gamma(t_0)$  e che il vettore tangente a  $\delta$  in quel punto coincide con  $e_1(t_0)$ .

Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regolare parametrizzata dalla lunghezza d'arco e sia  $s_0 \in (a, b)$ . Possiamo considerare lo sviluppo di Taylor delle componenti di  $\gamma$  nel punto  $s_0$  e scrivere

$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + \gamma'(s_0)(s - s_0) + \gamma''(s_0)\frac{(s - s_0)^2}{2} + \gamma'''(s_0)\frac{(s - s_0)^3}{6} + o(s - s_0)^3.$$

Ricordando che  $\gamma$  è parametrizzata dalla lunghezza d'arco ed applicando le equazioni di Frenet, si ricava  $\gamma' = e_1$ ,  $\gamma'' = e_1' = \kappa e_2$ ,  $\gamma''' = \kappa' e_2 + \kappa(\tau e_3 - \kappa e_1)$ ; e quindi la *rappresentazione normale della curva* in  $s_0$ , ovvero

$$\begin{aligned} \gamma(s) = \gamma(s_0) + \left( (s - s_0) - \frac{(s - s_0)^3}{6} \kappa^2(s_0) \right) e_1(s_0) + \left( \frac{(s - s_0)^2}{2} \kappa(s_0) + \frac{(s - s_0)^3}{6} \kappa'(s_0) \right) e_2(s_0) + \\ + \left( \frac{(s - s_0)^3}{6} \kappa(s_0) \tau(s_0) \right) e_3(s_0) + o(s - s_0)^3. \end{aligned}$$

La rappresentazione normale, può essere utile per studiare le proiezioni della curva sui piani fondamentali del riferimento di Frenet in  $s_0$  o proprietà locali della curva. Ad esempio, è facile verificare che il piano osculatore in  $s_0$  è il limite per  $h \rightarrow 0$  dei piani contenenti la retta tangente alla curva in  $s_0$  ed il punto  $\gamma(s_0 + h)$ . Infatti, per  $h \neq 0$ , si ha il piano  $z = \frac{\kappa \tau h}{3(\kappa + \kappa' h/3)} y$  che tende al piano osculatore,  $z = 0$ , quando  $h$  tende a 0.

Le curvature caratterizzano una curva regolare. Infatti, fissate opportunamente le  $n - 1$  funzioni  $\kappa_1(t), \dots, \kappa_{n-1}(t)$  esiste una curva regolare che abbia queste funzioni come curvature e inoltre, se due curve regolari hanno le stesse curvature allora esiste un'isometria dello spazio  $\mathbb{R}^n$  che trasforma una curva nell'altra. Diamo un cenno della dimostrazione di questi fatti che discendono dal Teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni di equazioni differenziali [cf. ad es. G. de Marco, *Analisi due*, Cap. XI].

**1.13 Proposizione.** *Siano  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  due curve  $n-1$ -regolari e siano  $e_1(t), \dots, e_n(t)$  ed  $f_1(t), \dots, f_n(t)$  i rispettivi riferimenti di Frenet. Se  $\|\gamma'(t)\| = \|\delta'(t)\|$  per ogni  $t$  e le due curve hanno le stesse curvature,  $\kappa_1(t), \dots, \kappa_{n-1}(t)$ , allora esiste un'unica isometria  $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tale che  $\delta(t) = B \circ \gamma(t)$  per ogni  $t$  e  $B$  rispetta l'orientamento dello spazio.*

*dim.* Fissato un punto  $t_0 \in [a, b]$ , esiste un'unica isometria  $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tale che  $\delta(t_0) = B\gamma(t_0)$  ed  $f_i(t_0) = B e_i(t_0)$  per  $i = 1, \dots, n$  ed ha determinante positivo perchè i due riferimenti di Frenet sono orientati concordemente. Se consideriamo i due riferimenti mobili  $B \circ e_1(t), \dots, B \circ e_n(t)$  ed  $f_1(t), \dots, f_n(t)$ , si ha che entrambi soddisfano alle stesse equazioni di Frenet e coincidono nel punto  $t_0$ . Per l'unicità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali si può concludere che i due riferimenti mobili coincidono su tutto l'intervallo  $[a, b]$ , ma facciamo lo stesso una verifica diretta di questa affermazione. Precisamente, mostriamo che  $H(t) = \sum_{i=1}^n \|B e_i(t) - f_i(t)\|^2 = 0$ . Infatti, si ha

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \|B e_i(t) - f_i(t)\|^2 = \sum_{i=1}^n (B e_i'(t) - f_i'(t)) \cdot (B e_i(t) - f_i(t))$$



e utilizzando le equazioni di Frenet [cf. (I.1.9)], questa grandezza coincide con

$$\begin{aligned} & \omega_1(t)(Be_2(t) - f_2(t)) \cdot (Be_1(t) - f_1(t)) + \sum_{i=2}^{n-1} [\omega_i(Be_{i+1}(t) - f_{i+1}(t)) \cdot (Be_i(t) - f_i(t)) - \\ & - \omega_{i-1}(Be_{i-1}(t) - f_{i-1}(t)) \cdot (Be_i(t) - f_i(t))] - \omega_{n-1}(Be_{n-1}(t) - f_{n-1}(t)) \cdot (Be_n(t) - f_n(t)) = 0. \end{aligned}$$

Dunque la somma  $H(t)$  è costante al variare di  $t$  e si annulla per  $t = t_0$ . Si conclude che è identicamente nulla, ovvero  $Be_i(t) = f_i(t)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , qualunque sia  $t$ .

Da ciò si deduce che

$$B\gamma'(t) = \|\gamma'(t)\|Be_1(t) = \|\delta'(t)\|f_1(t) = \delta'(t)$$

e quindi

$$B\gamma(t) - B\gamma(t_0) = \int_{t_0}^t B\gamma'(t)dt = \int_{t_0}^t \delta'(t)dt = \delta(t) - \delta(t_0)$$

da cui si conclude che  $B\gamma(t) = \delta(t)$ .

Infine, data un'isometria  $B'$  tale che  $\delta(t) = B' \circ \gamma(t)$ , per ogni  $t$ , allora deve aversi  $f_i(t) = B'e_i(t)$  per  $i = 1, \dots, n$ . Ciò vale, in particolare, per  $t = t_0$  e quindi necessariamente  $B' = B$ . **CVD**  $\square$

**1.14 Proposizione.** *Siano  $\kappa_1(s), \dots, \kappa_{n-1}(s)$  funzioni differenziabili definite in un intorno di  $0 \in \mathbb{R}$ , con  $\kappa_i(s) > 0$  per  $1 \leq i \leq n-2$ . Allora esistono un intervallo  $[a, b]$ , contenente 0, ed una curva  $n-1$ -regolare,  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , parametrizzata dalla lunghezza d'arco, che abbia come  $i$ -esima curvatura la funzione  $\kappa_i(s)$  per  $i = 1, \dots, n-1$ .*

*dim.* Sia  $A$  la matrice di Frenet [cf. (I.1.8)] con  $\omega_i(s) = \kappa_i(s)$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , e consideriamo il sistema di equazioni differenziali  $X' = XA$ , con la condizione iniziale  $X(0) = \mathbf{1}_n$ . Per il Teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni di equazioni differenziali, esiste una matrice di soluzioni  $X(s)$ , definita in un intervallo  $[a, b]$ , contenente 0. Le colonne della matrice  $X(s)$  formano un riferimento mobile, ortonormale, perché  $A$  è antisimmetrica ( ${}^tA = -A$ ). Infatti,  $\frac{d}{ds}(X^tX) = (XA)^tX + X^t(XA) = 0$ , e quindi il prodotto  $X^tX$  è costante ed è uguale a  $\mathbf{1}_n$  per  $s = 0$ .

Indicata con  $e_1(s)$  la prima colonna di  $X(s)$ , si pone

$$\gamma(s) = \int_0^s e_1(t)dt$$

al variare di  $s$  in  $[a, b]$  e si ottiene così una curva che ha  $e_1$  come vettore tangente (e quindi è parametrizzata dalla lunghezza d'arco) ed ha le colonne della matrice  $X(s)$  come riferimento di Frenet. Quindi le funzioni  $\kappa_1(s), \dots, \kappa_{n-1}(s)$  sono le curvatures di  $\gamma(s)$ . **CVD**  $\square$

## 2. Un risultato globale per le curve piane

In questa sezione vogliamo dare l'esempio di un risultato globale sulle curve piane, noto col nome di *Umlaufsatz*. Potremmo pensare a questo risultato come ad una generalizzazione dell'osservazione che la somma degli angoli esterni ad un poligono piano è uguale a  $2\pi$ . Cominciamo con alcune definizioni che ci serviranno nel seguito.

**2.1 Definizione.** Una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  è *chiusa* se esiste una curva  $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che  $\tilde{\gamma}|_{[a,b]} = \gamma$  e  $\tilde{\gamma}(t + \omega) = \tilde{\gamma}(t)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , ove  $\omega = b - a$ .

Diremo che la curva  $\gamma$  è *semplice e chiusa* se è chiusa e  $\gamma|_{[a,b]}$  è biiettiva.

La curva chiusa  $\gamma$  è di classe  $\mathcal{C}^k$  se lo è anche  $\tilde{\gamma}$  e quindi deve aversi  $\gamma^{(j)}(a^+) = \gamma^{(j)}(b^-)$  per  $j = 1, \dots, k$ .

Data una curva piana, regolare,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , si definisce la mappa indotta  $e_1 : [a, b] \rightarrow S^1$ , ponendo

$$e_1(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \in S^1 = \{ \zeta \in \mathbb{R}^2 \mid \|\zeta\| = 1 \}.$$

Alla mappa  $e_1$  si può associare una funzione che “misura le rotazioni del vettore  $e_1$ ”.

**2.2 Proposizione.** Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva piana regolare, allora esiste una funzione continua e derivabile  $\vartheta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $e_1(t) = \cos \vartheta(t)e_1 + \sin \vartheta(t)e_2$ , ove  $e_1, e_2$  è la base canonica di  $\mathbb{R}^2$ . La differenza  $\vartheta(b) - \vartheta(a)$  è indipendente dal cammino e dalla scelta della funzione  $\vartheta$ .

*dim.* La funzione  $\vartheta(t)$  è determinata dalle condizioni  $\cos \vartheta(t) = e_1(t) \cdot e_1$  e  $\sin \vartheta(t) = e_1(t) \cdot e_2$ , a meno della scelta del valore iniziale  $\vartheta(a)$  che è determinato a meno di multipli interi di  $2\pi$  e la differenza  $\vartheta(b) - \vartheta(a)$  è indipendente da tale scelta. Notiamo infine che il vettore  $e_1(t)$  è il primo vettore del riferimento di Frenet e quindi non dipende dal cammino scelto per rappresentare la curva  $\gamma$  o dalla sua parametrizzazione.

**CVD** □

La funzione “angolo” esiste anche in casi più generali, come mostra il seguente risultato, che utilizzeremo nel seguito. Ricordiamo che un sottoinsieme,  $S$ , di  $\mathbb{R}^2$  si dice *stellato* rispetto ad un suo punto,  $x_0$ , se, per ogni punto  $y \in S$ , il segmento che congiunge  $x_0$  con  $y$  è contenuto in  $S$ .

**2.3 Lemma.** Sia  $e : T \rightarrow S^1$  una funzione continua, definita sul sottoinsieme  $T \subseteq \mathbb{R}^2$ , stellato rispetto al punto  $x_0$ . Allora esiste una funzione  $\vartheta : T \rightarrow \mathbb{R}$  tale che, per ogni  $t$  in  $T$  si abbia  $e(t) = \cos \vartheta(t)e_1 + \sin \vartheta(t)e_2$ , ove  $e_1, e_2$  è la base canonica di  $\mathbb{R}^2$ . Due tali funzioni differiscono per multipli interi di  $2\pi$ .

*dim.* Fissiamo il valore  $\vartheta(x_0)$  ed osserviamo che, in base alla proposizione precedente, preso comunque un punto  $x \in T$ , possiamo definire coerentemente la funzione  $\vartheta$  sul segmento che congiunge  $x_0$  con  $x$  e la funzione è continua su tale segmento. Dobbiamo mostrare che la funzione così definita è continua in ogni punto  $y_0 \in T$ .

Poiché il segmento chiuso di estremi  $x_0$  ed  $y_0$  è compatto e  $\vartheta$  è continua su tale segmento, esiste un numero reale positivo  $\delta$  tale che per ogni coppia di punti  $y, y'$  del segmento chiuso, con  $\|y - y'\| < \delta$ , si abbia  $|\vartheta(y) - \vartheta(y')| < \pi$ .

Poiché la funzione  $e$  è continua, preso comunque  $\varepsilon > 0$ , esiste un intorno  $U$  di  $y_0$  tale che  $U$  sia contenuto nella sfera aperta di centro  $y_0$  e raggio  $\delta$  e per  $y \in U$ , si abbia  $|\vartheta(y) - \vartheta(y_0)| = \varepsilon' + 2k\pi$  con  $|\varepsilon'| < \varepsilon$  e  $k \in \mathbb{Z}$ , dipendenti dal punto  $y$ .

Fissato un punto  $y \in U$ , consideriamo la funzione  $\phi(s) = \vartheta(x_0 + s(y - x_0)) - \vartheta(x_0 + s(y_0 - x_0))$ , al variare di  $s$  in  $[0, 1]$ . Le due funzioni di cui si considera la differenza, sono continue e quindi anche  $\phi$  lo è e la distanza tra i due argomenti di  $\vartheta$  è  $\|s(y - y_0)\| < \delta$ . Quindi  $|\phi(s) - \phi(0)| < \pi$ , ed essendo  $\phi(0) = 0$ , si ha

$$\pi > |\phi(1)| = |\vartheta(y) - \vartheta(y_0)| = |2k\pi + \varepsilon'|$$

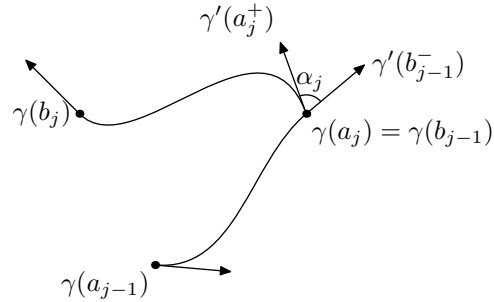
e quindi  $k = 0$  e  $\vartheta$  è continua. **CVD** □

**2.4 Definizione.** Sia  $\gamma : [0, \omega] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva chiusa, liscia e regolare a tratti, e sia  $0 = b_{-1} = a_0 < b_0 = a_1 < b_1 = a_2 < \dots < b_k = \omega$  una suddivisione dell'intervallo  $[0, \omega]$  tale che  $\gamma$  sia liscia e regolare sugli intervallini  $[a_i, b_i]$ , per  $i = 0, \dots, k$ .

L'angolo esterno,  $\alpha_j \in (-\pi, \pi)$ , alla curva  $\gamma$  nel punto  $a_j = b_{j-1}$  è l'angolo orientato tra i vettori  $\gamma'(b_{j-1}^-)$  e  $\gamma'(a_j^+)$ , e non è definito se i due vettori formano un angolo piatto.

Indicata con  $\vartheta_j$  la funzione definita nella *Proposizione I.2.2* per il tratto di  $\gamma$  parametrizzato dall'intervallo  $[a_j, b_j]$ , si definisce il numero di rotazioni,  $n_\gamma$ , della curva chiusa  $\gamma$  ponendo

$$n_\gamma = \frac{1}{2\pi} \left[ \sum_{j=0}^k (\vartheta_j(b_j) - \vartheta_j(a_j)) + \sum_{j=0}^k \alpha_j \right].$$



**2.5 Esempi elementari.** (a) Se  $\gamma$  è un triangolo o, più in generale, un poligono convesso,  $n_\gamma$  è uguale alla somma degli angoli esterni divisa per  $2\pi$  quindi,  $n_\gamma = 1$ .

(b) Se  $\gamma$  è un cerchio, non ci sono angoli esterni ed  $n_\gamma$  conta il numero di giri compiuti, ovvero quante volte la curva  $\gamma$  percorre il cerchio.

Osserviamo che, qualunque sia la curva chiusa (liscia a tratti), il numero di rotazioni,  $n_\gamma$ , è un numero intero. Infatti, basta osservare che, per definizione,  $\vartheta_{j-1}(b_{j-1}) - \vartheta_j(a_j) + \alpha_j \in 2\pi\mathbb{Z}$ . Inoltre, se indichiamo con  $s$  la lunghezza d'arco (di un tratto regolare) della curva  $\gamma$ , si ha  $\vartheta'(s) = \kappa(s)$ , ove  $\kappa(s)$  è la curvatura definita dalle equazioni di Frenet. Infatti, nelle consuete notazioni, si ha  $\cos \vartheta(s) = e_1(s) \cdot e_1$  e quindi, derivando rispetto ad  $s$  si ottiene

$$-\vartheta'(s) \sin \vartheta(s) = e_1'(s) \cdot e_1 = \kappa(s) e_2(s) \cdot e_1 = -\kappa(s) e_1(s) \cdot e_2 = -\kappa(s) \sin \vartheta(s).$$

Se la curva non è parametrizzata dalla lunghezza d'arco, si ha  $\vartheta'(t) = \vartheta'(s) \frac{ds}{dt} = \kappa(t) \|\gamma'(t)\|$ , quindi, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, si ha

$$\vartheta_j(b_j) - \vartheta_j(a_j) = \int_{a_j}^{b_j} \kappa(t) \|\gamma'(t)\| dt$$

su ogni tratto regolare della curva  $\gamma$ . Ricordando che le curvatures sono invarianti per riparametrazioni ed isometrie orientate, possiamo concludere che lo stesso vale per il numero di rotazioni. Raccogliamo le osservazioni nella seguente

**2.6 Proposizione.** Sia  $\gamma : [0, \omega] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva chiusa, liscia e regolare a tratti. Allora il numero di rotazioni di  $\gamma$  è un intero e si ha

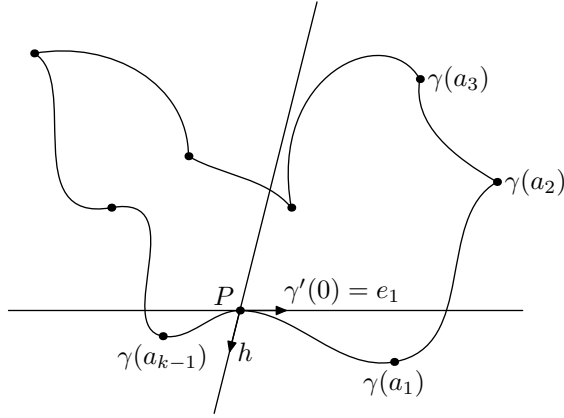
$$n_\gamma = \frac{1}{2\pi} \left[ \sum_{j=0}^k \int_{a_j}^{b_j} \kappa(t) \|\gamma'(t)\| dt + \sum_{j=0}^k \alpha_j \right].$$

In particolare,  $n_\gamma$  è invariante per riparametrazioni ed isometrie che conservino l'orientamento.

Possiamo quindi enunciare e dimostrare il risultato fondamentale di questa sezione, che afferma che una curva chiusa e semplice, liscia e regolare a tratti ha numero di rotazioni uguale a  $\pm 1$ . Questo teorema prende il nome di Umlaufsatz, dal Tedesco, *Umlaufzahl* = "numero di rotazioni" e *Satz* = "teorema".

**2.7 Teorema.** [Umlaufsatz] Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva chiusa e semplice, liscia e regolare a tratti. Se nessuno degli angoli esterni è uguale a  $\pi$  in valore assoluto, allora  $n_\gamma = \pm 1$ .

*dim.* Dividiamo la dimostrazione in vari passi.



**Passo 1.** Sia  $r$  una retta che interseca  $\gamma$ , poiché  $\gamma$  è un compatto, c'è almeno un punto  $P$  di  $r \cap \gamma$  tale che una delle due semirette uscenti da  $P$  non intersechi  $\gamma$  in altri punti e non è restrittivo supporre che  $P$  non sia uno dei punti angolosi di  $\gamma$ . Indichiamo con  $h$  il versore della semiretta in questione.

Possiamo supporre di aver riparametrizzato  $\gamma$  con la lunghezza d'arco e ponendo  $\gamma(0) = \gamma(\omega) = P$ . Con una rototraslazione, possiamo ulteriormente supporre che  $P$  sia l'origine del piano e che  $\gamma'(0) = e_1(0) = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

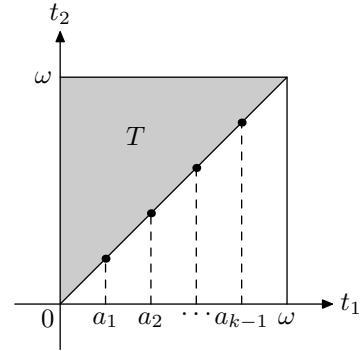
**Passo 2.** Sia  $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{k-1} < a_k = \omega$  una suddivisione di  $[0, \omega]$  tale che  $\gamma$  sia liscia e regolare sugli intervalli  $[a_{i-1}, a_i]$ , per  $i = 2, \dots, k$ .

Consideriamo il sottoinsieme  $T = \{ (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \omega \} \setminus \{ (a_j, a_j) \mid j = 1, \dots, k-1 \}$ .

L'insieme  $T$  è stellato rispetto al punto  $(0, \omega)$  e si definisce la funzione  $e : T \rightarrow S^1$ , ponendo

$$e(t_1, t_2) = \begin{cases} \gamma'(t_1) & \text{se } t_1 = t_2 \neq a_j \\ -\gamma'(0) & \text{se } (t_1, t_2) = (0, \omega) \\ \frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{\|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\|} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In base al Lemma I.2.3 esiste una funzione continua,  $\vartheta : T \rightarrow \mathbb{R}$ , tale che  $e(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta(t_1, t_2) \\ \sin \vartheta(t_1, t_2) \end{pmatrix}$  e questa funzione è definita a meno di multipli interi di  $2\pi$ . Possiamo fissarla ponendo  $\vartheta(0, \omega) = \pi$ , essendo  $e(0, \omega) = -\gamma'(0) = -e_1$ .



**Passo 3.** Se  $t$  appartiene all'intervallo  $(0, \omega)$ , allora  $\vartheta(t, \omega) - \vartheta(0, \omega)$  è l'angolo tra  $-e_1$  ed  $e(t, \omega) = \frac{\gamma(\omega) - \gamma(t)}{\|\gamma(\omega) - \gamma(t)\|}$ , con  $\gamma(\omega) = \gamma(0) = P$ . Poiché  $e(t, \omega)$  non può mai essere uguale a  $-h$ , si conclude che  $\vartheta(t, \omega) - \vartheta(0, \omega)$  è sempre minore di  $2\pi$  e, per  $t = \omega$ , si ha  $\vartheta(\omega, \omega) - \vartheta(0, \omega) = \pm\pi$ .

Analogamente,  $\vartheta(0, t) - \vartheta(0, 0)$  è uguale a 0 per  $t = 0$  e non può superare  $2\pi$  e, per  $t$  tendente ad  $\omega$ , la differenza tende a  $\pm\pi$  con lo stesso segno del caso precedente.

Quindi, si ha  $\vartheta(\omega, \omega) - \vartheta(0, 0) = \vartheta(\omega, \omega) - \vartheta(0, \omega) + \vartheta(0, \omega) - \vartheta(0, 0) = \pm 2\pi$ .

**Passo 4.** Consideriamo un punto angoloso  $\gamma(a_j)$  e sia  $\alpha_j$  l'angolo esterno in tal punto. Poniamo

$$\vartheta(a_j, a_j)^+ := \lim_{t \rightarrow a_j^+} \vartheta(t, t) \quad \text{e} \quad \vartheta(a_j, a_j)^- := \lim_{t \rightarrow a_j^-} \vartheta(t, t).$$

Assumiamo che si abbia

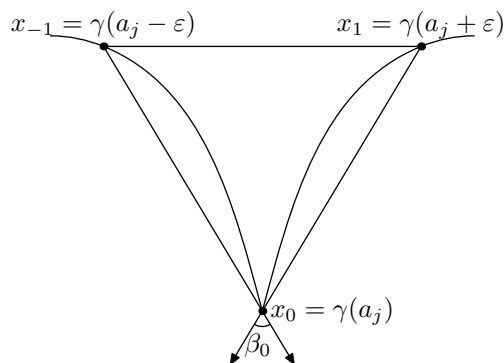
$$(2.8) \quad \alpha_j = \vartheta(a_j, a_j)^+ - \vartheta(a_j, a_j)^-.$$

Se ciò è vero, si ha

$$\pm 2\pi = \vartheta(\omega, \omega) - \vartheta(0, 0) = \vartheta(\omega, \omega) - \sum_{j=1}^{k-1} \vartheta(a_j, a_j)^+ + \sum_{j=1}^{k-1} \vartheta(a_j, a_j)^- + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j - \vartheta(0, 0).$$

Osservando che  $\vartheta(a_j, a_j)^\pm = \vartheta(a_j)^\pm$ , la somma a destra è proprio  $2\pi n_\gamma$ , che è quanto dovevamo dimostrare.

**Passo 5.** [dim. di (I.2.8)] Consideriamo il triangolo di vertici  $x_{-1} = \gamma(a_j - \varepsilon)$ ,  $x_0 = \gamma(a_j)$ ,  $x_1 = \gamma(a_j + \varepsilon)$  (cf. la figura a fianco) ove  $\varepsilon$  è scelto in modo che il triangolo non degeneri e  $a_{j-1} < a_j - \varepsilon < a_j < a_j + \varepsilon < a_{j+1}$ . Supponiamo inoltre che i punti  $x_{-1}$ ,  $x_0$ ,  $x_1$  siano ordinati nel verso positivo di rotazione ed indichiamo con  $\beta_{-1}$ ,  $\beta_0$  e  $\beta_1$  l'angolo opposto al vertice nei punti  $x_{-1}$ ,  $x_0$  ed  $x_1$  (cf. disegno a fianco). Si ha  $\vartheta(a_j, a_j + \varepsilon) - \vartheta(a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon) = \beta_1 + 2k_1\pi$  per qualche intero  $k_1$  e, se  $\varepsilon$  è scelto sufficientemente piccolo, la differenza tra i due angoli non può superare  $2\pi$  e quindi si ha  $k_1 = 0$ .



Analogamente,  $\vartheta(a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon) - \vartheta(a_j - \varepsilon, a_j) = \beta_{-1}$  e quindi

$$\vartheta(a_j, a_j + \varepsilon) - \vartheta(a_j - \varepsilon, a_j) = \beta_1 + \beta_{-1} = \pi - \beta_0.$$

Quando  $\varepsilon$  tende a 0,  $\pi - \beta_0$  tende all'angolo esterno alla curva e ciò è quanto volevamo. **CVD**  $\square$

Alla luce della *Proposizione I.2.6*, si può concludere con il seguente

**2.9 Corollario.** *Data una curva,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , liscia, regolare, chiusa e semplice, con  $\|\gamma'(t)\| = 1$  per ogni  $t$ , si ha*

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa(t) dt = \pm 1.$$

### 3. Appendice. Curve di Peano

All'inizio di questo capitolo abbiamo definito un cammino in  $\mathbb{R}^n$  come un'applicazione continua  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , ma nel seguito abbiamo ristretto la nostra attenzione a curve di classe almeno  $\mathcal{C}^1$  o addirittura a curve regolari. I cammini continui sono una classe forse troppo ampia che contiene esempi "patologici", molto lontani dall'idea intuitiva di curva. Uno di questi esempi è dato dalle cosiddette *curve di Peano*, ovvero applicazioni continue e suriettive dell'intervallo  $[0, 1]$  nel cubo  $[0, 1]^n$ . In questa sezione diamo una rapida descrizione di come si possa costruire la curva di Peano che ha come immagine il quadrato unitario in  $\mathbb{R}^2$ .

Per prima cosa definiamo un sottoinsieme dell'intervallo  $[0, 1]$  che sarà essenziale nella costruzione delle curve di Peano.

**3.1 Definizione.** Si chiama *insieme di Cantor* il sottoinsieme  $C$  della retta reale così definito

$$C = \left\{ \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{3^n} \mid a_n \in \{0, 2\} \right\}.$$

Per definizione, l'insieme  $C$  è in corrispondenza biunivoca con l'insieme  $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$  delle successioni a valori in  $\{0, 2\}$ , definita associando ad  $x = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{3^n}$  la successione delle cifre dello sviluppo in base 3,  $(a_n)_{n \geq 1}$ . In questa corrispondenza, la topologia di  $C$  come sottospazio di  $\mathbb{R}$  coincide con la topologia prodotto su  $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$  [cf. *Definizione II.3.5*].

Tutte le serie in  $C$  hanno i termini positivi e sono maggiorate da  $\frac{2}{3} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{3^n}$  che converge ad 1 e quindi  $C \subseteq [0, 1]$ . Si tratta infatti dei numeri reali il cui sviluppo in base 3 contiene solo le cifre 0 e 2: sono quindi esclusi tutti i numeri compresi (strettamente) tra  $1/3$  e  $2/3$ , i numeri compresi tra  $1/9$  e  $2/9$  e quelli tra  $7/9$  ed  $8/9$ , e così via. Dunque l'insieme di Cantor si può ottenere come intersezione di una famiglia di unioni finite di intervalli chiusi; si tratta quindi di un insieme chiuso in  $[0, 1]$  e quindi di un compatto.

In particolare, c'è una corrispondenza biunivoca e continua  $\beta_2 : C \rightarrow C \times C$ , definita da

$$\beta_2 \left( \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{3^n} \right) = \left( \sum_{n \geq 1} \frac{a_{2n-1}}{3^n}, \sum_{n \geq 1} \frac{a_{2n}}{3^n} \right).$$

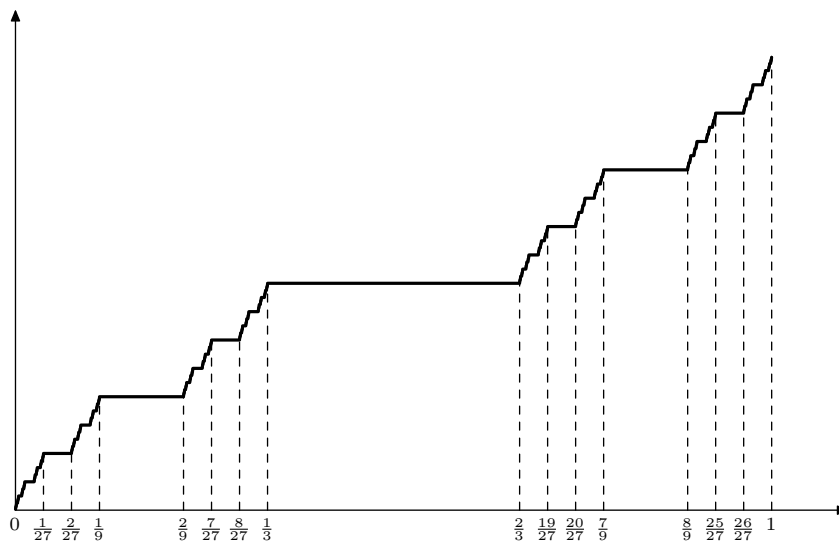
In particolare, anche l'inversa di  $\beta_2$  è continua, ovvero si tratta di un omeomorfismo. Lasciamo al lettore il compito di definire un'analogo omeomorfismo  $\beta_r : C \rightarrow C^r$ , per ogni intero  $r > 2$ .

Vi è un'applicazione continua e suriettiva,  $\psi : C \rightarrow [0, 1]$ , definita ponendo

$$\psi \left( \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{3^n} \right) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{2^{n+1}}$$

ovvero alla successione di cifre in base 3,  $(a_n)_{n \geq 1}$ , si associa la successione di cifre binarie  $(a_n/2)_{n \geq 1}$  ed è quindi chiara la continuità e la suriettività. In particolare, la funzione  $\psi$  si può prolungare all'intervallo  $[0, 1]$  in modo che, al di fuori dell'insieme di Cantor, il grafico sia costituito da segmenti orizzontali ed ha

un andamento del tipo



Questa funzione (continua, debolmente crescente) è anche detta la *scalinata del diavolo*.

Tramite  $\psi$  e  $\beta_2$  possiamo definire la curva di Peano. Infatti, si ha un'applicazione continua e suriettiva  $\rho : C \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ , componendo

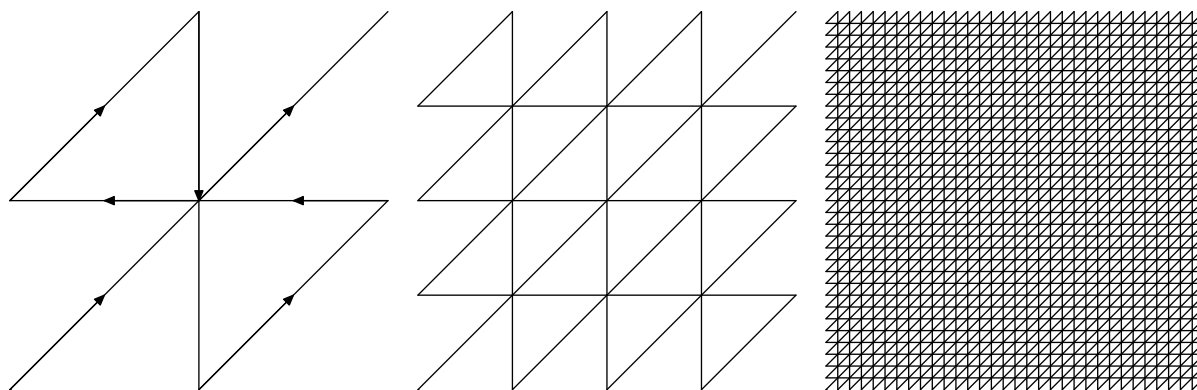
$$C \xrightarrow{\beta_2} C \times C \xrightarrow{\psi \times \psi} [0, 1] \times [0, 1],$$

questa applicazione si può prolungare ad un cammino continuo  $\rho : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ , congiungendo con segmenti di retta i valori agli estremi dell'insieme di Cantor. Ad esempio,

$$\rho\left(\frac{1}{3}\right) = \rho\left(\sum_{n \geq 2} \frac{2}{3^n}\right) = \left(\sum_{n \geq 2} \frac{1}{2^n}, \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n}\right) = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \quad \text{e} \quad \rho\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

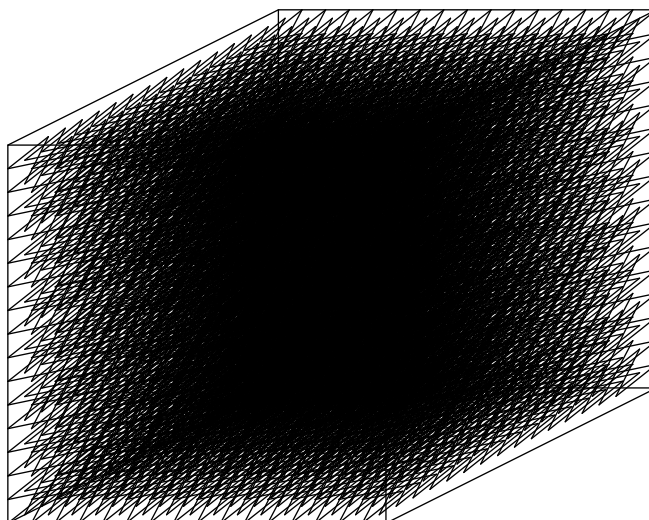
e quindi l'intervallo  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ , contenuto nel complementare dell'insieme di Cantor, viene mandato nel segmento verticale che congiunge i due punti scritti sopra. Si può verificare che, in questo modo, tutti gli intervalli nel complementare dell'insieme di Cantor vengono trasformati in segmenti orizzontali o verticali.

Usando gli omeomorfismi  $\beta_r : C \rightarrow C^r$ ,  $r \geq 2$ , si possono costruire in modo analogo curve di Peano che riempiono il cubo  $[0, 1]^r$ . Non è difficile disegnare delle approssimazioni della curva di Peano prendendo l'unione di intervallini di ampiezza  $1/3^n$  in luogo di  $C$ , calcolando  $\rho$  agli estremi degli intervallini (che sono punti di  $C$ ) ed approssimando con segmenti di retta i tratti mancanti della curva di Peano; si ottengono in questo modo le figure sottostanti, ove  $n = 2, 4, 10$ , rispettivamente.



Nelle figure, i tratti orizzontali e verticali sono parte della curva di Peano, mentre i tratti obliqui sono approssimazioni. Nella prima delle 3 è stato evidenziato il verso con cui si percorre il cammino. Si vede che, passando alle approssimazioni successive, i tratti obliqui vengono sostituiti dal “motivo” rappresentato dalla prima curva, riprodotto in dimensioni sempre più ridotte. La natura “frattale” di questa figura è dovuta alla natura stessa dell’insieme di Cantor che, come abbiamo visto, si costruisce suddividendo l’intervallo  $[0, 1]$  ed iterando la stessa suddivisione sugli intervallini così ottenuti.

Per concludere mostriamo un disegno di un’approssimazione della curva di Peano che riempie il cubo tridimensionale. La curva è costruita in modo analogo a quanto fatto nel caso del quadrato.





## II

# Superficie (teoria locale)

Nel capitolo precedente abbiamo visto rapidamente alcuni aspetti dello studio delle curve dal punto di vista della Geometria Differenziale. In questo capitolo vogliamo illustrare alcuni strumenti utili allo studio delle superficie immerse nello spazio tridimensionale e delle curve che giacciono su queste superficie.

### 1. Alcuni richiami sulle funzioni di più variabili

Richiamiamo alcune definizioni e qualche notazione.

**1.1 Definizione.** Siano  $A$  e  $B$  due aperti di  $\mathbb{R}^n$ . Un *omeomorfismo*  $f : A \rightarrow B$  è una biiezione continua tra i due aperti, la cui inversa sia pure continua. Un omeomorfismo  $f : A \rightarrow B$  è un *diffeomorfismo* di classe  $\mathcal{C}^k$  se  $f$  e la sua inversa sono funzioni di classe  $\mathcal{C}^k$ .

Data una funzione  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ , ove  $U$  è un aperto di  $\mathbb{R}^n$ , indichiamo con  $J_P f$  la *matrice Jacobiana* di  $f$  nel punto  $P \in U$ , ovvero

$$J_P f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(P) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(P) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P) & \dots & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P) \end{pmatrix}$$

e chiameremo *rango di  $f$*  nel punto  $P$ , il rango della sua matrice Jacobiana  $J_P f$ . Se  $x = (x_1, \dots, x_r)$  è un gruppo di variabili, talvolta scriveremo  $\frac{\partial f}{\partial x}$  per indicare la matrice Jacobiana di  $f$  rispetto a quel gruppo di variabili.

Enunciamo ora alcuni risultati sulle funzioni da aperti di  $\mathbb{R}^m$  ed a valori in  $\mathbb{R}^m$  che ci saranno utili nel seguito, la cui dimostrazione costituirà il contenuto di questa sezione.

**1.2 Teorema.** [Teorema della funzione inversa] Sia  $U$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un'applicazione di classe  $\mathcal{C}^k$ , ( $k \geq 1$ ). Se la matrice Jacobiana  $J_{P_0} f$  è invertibile nel punto  $P_0 \in U$ , allora esiste un intorno aperto  $V$  di  $P_0$  tale che  $W = f(V)$  sia aperto e l'applicazione ristretta  $f|_V : V \rightarrow W$  sia un diffeomorfismo di classe  $\mathcal{C}^k$ .

Ricordiamo che un *cubo aperto* di  $\mathbb{R}^n$  è il prodotto di  $n$  intervalli aperti.

**1.3 Corollario.** [Teorema del rango] Sia  $U$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  un'applicazione di classe  $\mathcal{C}^k$ , ( $k \geq 1$ ). Supponiamo che il rango di  $f$  sia costantemente uguale ad  $r$  su  $U$ . Allora, se  $P$  è un punto di  $U$ , esistono degli intorni aperti  $A$  di  $P$  e  $B$  di  $f(P)$  e dei diffeomorfismi di classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $\alpha : A \rightarrow C$  e  $\beta : B \rightarrow D$ , ove  $C$  e  $D$  sono cubi in  $\mathbb{R}^n$  ed  $\mathbb{R}^m$ , tali che  $\beta \circ f \circ \alpha^{-1}$  sia della forma

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

Si possono scegliere  $A = C$  ed  $\alpha = id_A$  quando  $r = n$ , oppure  $B = D$  e  $\beta = id_B$  quando  $r = m$  (ma non entrambi le cose contemporaneamente quando  $r = n = m$ ).

**1.4 Corollario.** [Teorema delle funzioni implicite] Sia  $U$  un aperto di  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  e sia  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un'applicazione di classe  $\mathcal{C}^k$ , ( $k \geq 1$ ). Indichiamo con  $x = (x_1, \dots, x_n)$  ed  $y = (y_1, \dots, y_m)$  le variabili in  $\mathbb{R}^n$  ed  $\mathbb{R}^m$ . Se in un punto  $(x_0, y_0) \in U$  la matrice  $\frac{\partial f}{\partial x}$  è invertibile allora esistono degli intorni aperti  $A$  di  $x_0$ ,  $B$  di  $y_0$  ed una funzione  $\phi : B \rightarrow A$ , di classe  $\mathcal{C}^k$ , tali che  $\{(x, y) \in A \times B \mid f(x, y) = f(x_0, y_0)\}$  coincide con il grafico di  $\phi$ , ovvero con  $\{(\phi(y), y) \mid y \in B\}$ .

Facciamo precedere la dimostrazione degli enunciati soprastanti da un Lemma elementare che ci servirà nel seguito.

**1.5 Lemma.** Sia  $U$  un aperto convesso di  $\mathbb{R}^n$  ed  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  un'applicazione di classe  $\mathcal{C}^k$ , con  $k \geq 1$ , tale che  $\left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\| < \varepsilon$  uniformemente su  $U$ . Allora dati  $P$  e  $Q$  in  $U$ , si ha

$$\|f(Q) - f(P)\| \leq \varepsilon \sqrt{n} \|Q - P\|.$$

*dim.* Consideriamo la restrizione di  $f$  sull'intervallo  $PQ$ , ovvero la funzione  $F(t) = f(t(Q - P) + P)$ . Si tratta di una funzione di classe almeno  $\mathcal{C}^1$  e quindi si ha

$$f(Q) - f(P) = F(1) - F(0) = \int_0^1 \frac{dF}{dt} dt = \sum_{i=1}^n (q_i - p_i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(t(Q - P) + P) dt.$$

Poiché le derivate parziali di  $f$  sono limitate in modulo dalla costante  $\varepsilon$ , si deduce che

$$\|f(Q) - f(P)\| \leq \sum_{i=1}^n |q_i - p_i| \int_0^1 \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(t(Q - P) + P) \right\| dt < \varepsilon \sum_{i=1}^n |q_i - p_i|.$$

Ricordiamo infine che, dati  $n$  numeri reali  $a_1, \dots, a_n$ , la media dei quadrati è sempre maggiore o uguale del quadrato della media, essendo

$$n(a_1^2 + \dots + a_n^2) = (a_1 + \dots + a_n)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2.$$

Si conclude così che

$$\left( \sum_{i=1}^n |q_i - p_i| \right)^2 \leq n \|Q - P\|^2$$

da cui si ottiene la tesi. **CVD** □

Passiamo quindi alla dimostrazione del primo dei Teoremi enunciati.

*dim.* (del Teorema II.1.2) Possiamo ridurci al caso in cui  $P_0 = O = f(P_0)$  e  $J_{P_0} f = \mathbf{1}_n$ . Infatti, posto

$$\phi(x) = (J_{P_0} f)^{-1}(f(x + P_0) - f(P_0)),$$

si ha che  $\phi$  soddisfa alle due ipotesi ulteriori e quindi, se la tesi è verificata in questo caso, esistono un intorno  $V'$  di  $O$  tale che la restrizione di  $\phi$  sia un diffeomorfismo di classe  $\mathcal{C}^k$  su  $\phi(V')$ . Posto quindi  $V = P_0 + V'$ , la restrizione di  $f$  a  $V$  è uguale a  $\tau_{f(P_0)} \circ J_{P_0} f \circ \phi|_{V'} \circ \tau_{-P_0}$  che è quindi un diffeomorfismo di classe  $\mathcal{C}^k$  su  $W = f(V) = \tau_{f(P_0)}(J_{P_0}(\phi(V')))$ .

Supponiamo quindi che  $P_0 = O = f(P_0)$  e  $J_{P_0} f = \mathbf{1}_n$  e si ponga  $T_y(x) = x - f(x) + y$ . Osserviamo che  $f(x) = y$  se, e solo se,  $T_y(x) = x$ . Le derivate parziali di  $T_y$  si annullano tutte in  $O$ , quindi, fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste una sfera chiusa  $\overline{B(O, r)}$ , su cui le derivate parziali di  $T_y$  hanno tutte norma minore di  $\varepsilon$  e possiamo supporre che in ogni punto di tale sfera la matrice Jacobiana di  $f$  sia invertibile. Per il Lemma II.1.5, si deduce che, per ogni coppia di punti,  $P, Q \in \overline{B(O, r)}$ , si ha

$$\|T_y(P) - T_y(Q)\| \leq \varepsilon \sqrt{n} \|P - Q\|.$$

In particolare, per  $\varepsilon \leq \frac{1}{4\sqrt{n}}$ , si ottiene  $\|T_y(P) - T_y(Q)\| \leq \frac{1}{4} \|P - Q\|$  e quindi, se  $\|y\| \leq \frac{r}{4}$ , per ogni  $P \in \overline{B(O, r)}$ , si ha

$$\|T_y(P)\| - \|y\| \leq \|T_y(P) - y\| = \|T_y(P) - T_y(O)\| \leq \frac{1}{4} \|P\| \quad \text{e quindi} \quad \|T_y(P)\| \leq \|y\| + \frac{1}{4} \|P\| \leq \frac{r}{2}.$$

Dunque  $T_y$  è una contrazione e manda i punti della sfera chiusa  $\overline{B(O, r)}$  su punti della sfera  $\overline{B(O, r/2)}$ . Ne consegue che  $T_y$  ha un solo punto fisso in  $\overline{B(O, r)}$  [cf. *Proposizione II.3.31*] e che tale punto appartiene a  $\overline{B(O, r/2)}$ . Si conclude che, per ogni  $y \in \overline{B(O, r/4)}$ , esiste un unico  $x \in \overline{B(O, r)}$  tale che  $f(x) = y$  e tale  $x$  appartiene a  $\overline{B(O, r/2)}$ . Quindi, la restrizione di  $f$  al sottoinsieme  $f^{-1}\overline{B(O, r/4)} \cap \overline{B(O, r/2)}$  è un'applicazione iniettiva e continua che ha come immagine  $\overline{B(O, r/4)}$ . Osservando che  $f^{-1}\overline{B(O, r/4)} \cap \overline{B(O, r/2)}$  è un compatto e  $\overline{B(O, r/4)}$  è uno spazio di Hausdorff, si conclude che  $f$  è chiusa e quindi è un omeomorfismo [cf. Appendice, *Corollario II.3.25*]. Posto  $V = f^{-1}B(O, r/4) \cap B(O, r/2)$  e  $W = f(V) = B(O, r/4)$ , la restrizione  $f|_V : V \rightarrow W$  è quindi un omeomorfismo tra i due aperti e la matrice Jacobiana è invertibile in ogni punto.

Resta quindi da verificare che l'applicazione inversa di  $f|_V$ , che indicheremo con  $g : W \rightarrow V$ , è un'applicazione di classe  $\mathcal{C}^k$ . Osserviamo dapprima che, per  $P, Q \in \overline{B(O, r)}$  ed  $y \in \overline{B(O, r/4)}$ , si ha

$$\|P - Q\| - \|f(P) - f(Q)\| \leq \|P - Q - f(P) + f(Q)\| = \|T_y(P) - T_y(Q)\| \leq \frac{1}{4}\|P - Q\|$$

e quindi  $\frac{3}{4}\|P - Q\| \leq \|f(P) - f(Q)\|$ . Dati  $P, Q$  appartenenti a  $W$ , e ricordando che  $f$  è differenziabile in  $g(Q)$ , si ha

$$\begin{aligned} \|g(P) - g(Q) - (J_{g(Q)}f)^{-1}(P - Q)\| &\leq \\ \|(J_{g(Q)}f)^{-1}\| \| (J_{g(Q)}f)(g(P) - g(Q)) - f(g(P)) + f(g(Q)) \| &= o(\|g(P) - g(Q)\|). \end{aligned}$$

Essendo, per quanto visto,  $\|g(P) - g(Q)\| = O(\|P - Q\|)$ , si conclude che  $g$  è differenziabile in  $Q$  e  $J_Qg = (J_{g(Q)}f)^{-1}$ . Per mostrare che  $g$  è di classe  $\mathcal{C}^k$  dobbiamo verificare che le entrate della matrice  $J_Qg$  sono funzioni di classe  $\mathcal{C}^{k-1}$  ovvero, essendo la matrice inversa, che  $(J_{g(Q)}f)$  è di classe  $\mathcal{C}^{k-1}$  e quindi è sufficiente verificare che  $f$  è di classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ . Ragionando allo stesso modo è quindi sufficiente verificare che  $g$  è di classe  $\mathcal{C}^{k-2}$  e così via. La tesi è quindi verificata perché  $g$  è continua. **CVD**  $\square$

Dimostriamo ora il Teorema del rango

*dim.* (del *Corollario II.1.3*) Scriviamo i punti di  $\mathbb{R}^n$  nella forma  $(x, y)$ , ove  $x \in \mathbb{R}^r$  ed  $y \in \mathbb{R}^{n-r}$  e scriviamo pure  $f(x, y) = (g(x, y), h(x, y))$  con  $g$  a valori in  $\mathbb{R}^r$  ed  $h$  a valori in  $\mathbb{R}^{m-r}$ . Consideriamo separatamente i vari casi.

- $r = n \leq m$ . A meno di cambiare l'ordine delle variabili e di restringere  $U$ , possiamo supporre che la matrice Jacobiana  $\frac{\partial g}{\partial x}$  sia invertibile su tutto  $U$ . Definiamo  $F : U \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^m$  ponendo  $F(x, \eta) = (g(x), h(x) + \eta)$ . La matrice Jacobiana di  $F$  è

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \mathbf{1}_{m-n} \end{pmatrix}$$

e quindi  $\det(JF) = \det\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) \neq 0$ . Per il *Teorema II.1.2* esiste un cubo  $D = A \times D'$ , con  $A$  e  $D'$  cubi in  $\mathbb{R}^n$  ed in  $\mathbb{R}^{m-n}$ , tale che  $B = F(D)$  sia aperto e l'applicazione ristretta  $F|_D : D \rightarrow B$  abbia un'inversa  $\beta$  di classe  $\mathcal{C}^k$ . In particolare, si ha  $\beta(g(x), h(x) + \eta) = (x, \eta)$  e, ponendo  $\eta = 0$ , si ottiene

$$\beta(f(x)) = \beta(g(x), h(x)) = (x, 0)$$

che è quanto volevamo.

- $r = m \leq n$ . A meno di cambiare l'ordine delle variabili e di restringere  $U$ , possiamo supporre che la matrice Jacobiana  $\frac{\partial f}{\partial x}$  sia invertibile su tutto  $U$ . Definiamo ora  $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , di classe  $\mathcal{C}^k$ , ponendo  $\alpha(x, y) = (f(x, y), y)$ . La matrice Jacobiana è

$$J\alpha = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ 0 & \mathbf{1}_{n-m} \end{pmatrix}$$

e  $\det J\alpha = \det\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \neq 0$ . Per il *Teorema II.1.2*, esiste un intorno aperto  $A$  di  $P$  tale che  $C = \alpha(A)$  sia un cubo e che  $\alpha : A \rightarrow C$  abbia un'inversa di classe  $\mathcal{C}^k$ . Scriviamo  $\alpha^{-1}(x, y) = (\gamma(x, y), \delta(x, y))$  con  $\gamma$  a valori in  $\mathbb{R}^m$  e  $\delta$  a valori in  $\mathbb{R}^{n-m}$ . Allora si ha

$$y = \delta(x, y), \quad x = f(\gamma(x, y), \delta(x, y)) \quad \text{e quindi} \quad x = f(\gamma(x, y), y).$$

Dunque  $f(\alpha^{-1}(x, y)) = x$  e  $B = f(A)$  è un cubo.

- *Caso generale.* A meno di cambiare l'ordine delle variabili e di restringere  $U$ , possiamo supporre che la matrice Jacobiana  $\frac{\partial g}{\partial x}$  sia invertibile su tutto  $U$ . Vi sono dunque un intorno  $A$  di  $P$ , un cubo  $C$  di  $\mathbb{R}^n$  ed un diffeomorfismo  $\alpha : A \rightarrow C$  tali che  $g(\alpha^{-1}(x, y)) = x$  per ogni  $(x, y) \in C$ . Dunque

$$f(\alpha^{-1}(x, y)) = (x, h(\alpha^{-1}(x, y))) \quad \text{e} \quad J(f \circ \alpha^{-1}) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ \frac{\partial(h \circ \alpha^{-1})}{\partial x} & \frac{\partial(h \circ \alpha^{-1})}{\partial y} \end{pmatrix}$$

per ogni  $(x, y) \in C$ . La matrice Jacobiana  $J(f \circ \alpha^{-1})$  ha rango  $r$  in ogni punto e quindi deve aversi  $\frac{\partial(h \circ \alpha^{-1})}{\partial y} = 0$ , ovvero  $h(\alpha^{-1}(x, y)) = \psi(x)$ , per un'opportuna funzione  $\psi$  di classe  $\mathcal{C}^k$ . Possiamo quindi scrivere  $f(\alpha^{-1}(x, y)) = (x, \psi(x))$ . Decomponendo il cubo  $C = C' \times C''$ , ove  $C'$  è un cubo di  $\mathbb{R}^r$  e  $C''$  è un cubo in  $\mathbb{R}^{n-r}$ , si può definire l'applicazione  $\beta : C' \times \mathbb{R}^{m-r} \rightarrow C' \times \mathbb{R}^{m-r}$ , ponendo  $\beta(\xi, \eta) = (\xi, \eta - \psi(\xi))$ , che è un diffeomorfismo di classe  $\mathcal{C}^k$ . Si ha inoltre

$$\beta(f(\alpha^{-1}(x, y))) = \beta(x, \psi(x)) = (x, 0).$$

Scelto un cubo  $D''$  in  $\mathbb{R}^{m-r}$ , contenente l'origine, e posto  $D = C' \times D''$ ,  $B = \beta^{-1}(D)$  la dimostrazione è conclusa. **CVD** □

*dim.* (del *Corollario II.1.4*). La dimostrazione è analoga alla precedente. Si definisce l'applicazione  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , ponendo  $F(x, y) = (f(x, y), y)$  e si ha

$$\det(J_{(x_0, y_0)}F) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ 0 & \mathbf{1}_m \end{pmatrix} = \det \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right) \neq 0.$$

Per il *Teorema II.1.2* esiste un intorno aperto di  $(x_0, y_0)$ , che possiamo supporre del tipo  $A \times B'$ , tale che la restrizione di  $F$  ad  $A \times B'$  sia un diffeomorfismo sull'immagine  $W = F(A \times B')$ . Scriviamo la funzione inversa di  $F|_{A \times B'}$  nella forma

$$x = G(\xi, \eta), \quad y = H(\xi, \eta) \quad \text{ovvero} \quad \xi = f(G(\xi, \eta), H(\xi, \eta)), \quad \eta = H(\xi, \eta).$$

Si ha quindi  $\xi = f(G(\xi, \eta), \eta)$  e

$$\begin{aligned} \{ (x, y) \in A \times B' \mid f(x, y) = f(x_0, y_0) \} &= F^{-1}(\{ (x, y) \in W \mid x = f(x_0, y_0) \}) = \\ &= \{ (G(f(x_0, y_0), y), y) \mid (f(x_0, y_0), y) \in W \}. \end{aligned}$$

Si può trovare un intorno  $B$  di  $y_0$  tale che  $\{f(x_0, y_0)\} \times B \subseteq W$  e si ha quindi

$$\{ (x, y) \in A \times B \mid f(x, y) = f(x_0, y_0) \} = \{ (G(f(x_0, y_0), y), y) \mid y \in B \}.$$

Posto  $\phi(y) = G(f(x_0, y_0), y)$ , si ha la tesi. **CVD** □

## 2. Superficie

**2.1 Definizione.** Chiamiamo *superficie parametrizzata* ogni applicazione  $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  di classe  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 1$ ), ove  $U$  è un aperto di  $\mathbb{R}^2$  e

- $\alpha$  è un omeomorfismo di  $U$  su  $\alpha(U)$ ;
- $J\alpha$  ha rango 2 su tutto  $U$ .

Nel seguito supporremo sempre che  $k$  sia abbastanza grande perché abbiano senso tutte le operazioni di derivazione necessarie, ovvero come se tutte le funzioni coinvolte fossero  $\mathcal{C}^\infty$ . Indicheremo con  $(u_1, u_2)$  le coordinate su  $U$ .

Sia  $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie di classe  $\mathcal{C}^k$ . Diremo che un cammino  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  è *tracciato sulla superficie*  $S = \alpha(U)$  se  $\gamma([a, b]) \subset S$ . Possiamo scrivere  $\gamma(t) = \alpha(u_1(t), u_2(t))$ , perché  $\alpha$  è un omeomorfismo di  $U$  su  $S$ . Le funzioni  $u_1(t)$  ed  $u_2(t)$  sono continue e, se  $\gamma$  è una curva di classe  $\mathcal{C}^{k'}$ , ( $k' \leq k$ ), anche  $u_1(t)$  ed  $u_2(t)$  sono di classe  $\mathcal{C}^{k'}$  (cf. *Corollario II.1.3*).

**2.2 Definizione.** Sia  $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie di classe  $\mathcal{C}^k$  e  $P \in S = \alpha(U)$  un punto. Un *vettore tangente* ad  $S$  in  $P$  è il vettore  $\gamma'(t_0)$  per una qualche curva  $\gamma$ , tracciata su  $S$  e passante per  $P = \gamma(t_0)$ . L'insieme dei vettori tangenti alla superficie in  $P$  si indica con  $T_P(S)$ .

Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una curva tracciata su  $S$  e passante per  $P = \gamma(t_0)$ , allora  $\gamma(t) = \alpha(u_1(t), u_2(t))$  e

$$\gamma'(t_0) = u_1'(t_0) \frac{\partial \alpha}{\partial u_1}(p_1, p_2) + u_2'(t_0) \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}(p_1, p_2),$$

ove  $(u_1(t_0), u_2(t_0)) = (p_1, p_2)$ ; quindi ogni vettore tangente è combinazione lineare di  $\frac{\partial \alpha}{\partial u_1}$  e  $\frac{\partial \alpha}{\partial u_2}$ . D'altra parte, data una combinazione lineare  $v = a \frac{\partial \alpha}{\partial u_1} + b \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}$ , si ha che  $v = \gamma'(0)$  ove  $\gamma(t) = \alpha(p_1 + at, p_2 + bt)$ . Poiché  $J\alpha$  ha rango 2 su tutto  $U$ , i due vettori  $\frac{\partial \alpha}{\partial u_1}$  e  $\frac{\partial \alpha}{\partial u_2}$  sono una base di  $T_P(S)$  che ha quindi dimensione 2 su tutti i punti di  $S$ .

I vettori tangenti ad  $S$  si possono interpretare come derivate direzionali. Dato un vettore tangente  $X \in T_P(S)$  ed una funzione  $f$ , definita in un intorno di  $P$  in  $S$  e tale che  $f \circ \alpha$  sia almeno di classe  $\mathcal{C}^1$ , se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una curva tracciata su  $S$  e passante per  $P = \gamma(t_0)$  tale che  $X = \gamma'(t_0)$ , allora si pone

$$X(f) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t_0).$$

Posto come sopra  $\gamma(t) = \alpha(u_1(t), u_2(t))$ , si ha

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t_0) = u_1'(t_0) \frac{\partial (f \circ \alpha)}{\partial u_1}(p_1, p_2) + u_2'(t_0) \frac{\partial (f \circ \alpha)}{\partial u_2}(p_1, p_2).$$

Quindi  $X(f)$  dipende solo dal vettore  $X$  e non dalla scelta di  $\gamma$  e l'operazione così descritta è lineare in  $X$  ed in  $f$  e soddisfa alla Regola di Leibniz

$$X(fg) = fX(g) + gX(f).$$

**2.3 Definizione.** Sia  $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie di classe  $\mathcal{C}^k$  e  $P \in S = \alpha(U)$  un punto. Si chiama *prima forma fondamentale* l'applicazione bilineare indotta su  $T_P(S)$  dalla restrizione del prodotto scalare di  $\mathbb{R}^3$ . In particolare si indicherà con  $G = (g_{ij})$  la sua matrice rispetto alla base  $\left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial u_1}, \frac{\partial \alpha}{\partial u_2} \right\}$ , ovvero si pone

$$g_{ij} = \frac{\partial \alpha}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial u_j}.$$

La superficie  $S$  è immersa in  $\mathbb{R}^3$  e quindi, a partire dai (campi di) vettori tangenti possiamo definire il campo vettoriale normale alla superficie, ovvero, per ogni punto  $P = \alpha(u_1, u_2)$ , considerare il vettore (unitario)

$$N_P := \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial u_1} \times \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}}{\left\| \frac{\partial \alpha}{\partial u_1} \times \frac{\partial \alpha}{\partial u_2} \right\|} (u_1, u_2).$$

**2.4 Definizione.** Grazie al vettore normale possiamo definire l'applicazione di Weingarten  $L : T_P(S) \rightarrow T_P(S)$ . Per ogni vettore tangente  $X \in T_P(S)$ , si pone  $LX = -\nabla_X N$ , ovvero l'opposto del vettore che si ottiene derivando le componenti del vettore  $N$  rispetto ad  $X$ . Il vettore  $LX \in T_P(S)$ , perché

$$2LX \cdot N = (-\nabla_X N) \cdot N + N \cdot (-\nabla_X N) = -X(N \cdot N) = 0$$

essendo  $N \cdot N = 1$ .

$L$  è un'applicazione lineare ed un'altra proprietà fondamentale dell'applicazione di Weingarten è il fatto di essere autoaggiunta rispetto alla prima forma fondamentale, ovvero  $LX \cdot Y = X \cdot LY$  per ogni coppia di vettori  $X, Y \in T_P(S)$ . Infatti, si ha

$$L \frac{\partial \alpha}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial u_j} = -\frac{\partial N}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial u_j} = -\frac{\partial}{\partial u_i} \left( N \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial u_j} \right) + N \cdot \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u_i \partial u_j} = N \cdot \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u_i \partial u_j}$$

perché  $N$  è ortogonale a  $\frac{\partial \alpha}{\partial u_j}$ . Quest'ultima espressione è chiaramente invariante rispetto allo scambio di  $i$  con  $j$ . Abbiamo quindi una nuova applicazione bilineare simmetrica sullo spazio tangente ad  $S$ , ovvero

**2.5 Definizione.** Sia  $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie di classe  $\mathcal{C}^k$  e  $P \in S = \alpha(U)$  un punto. Si chiama *seconda forma fondamentale* l'applicazione bilineare simmetrica su  $T_P(S)$  definita ponendo  $h(X, Y) = LX \cdot Y$  per ogni coppia di vettori  $X, Y \in T_P(S)$ . Si indicherà con  $H = (h_{ij})$  la sua matrice rispetto alla base  $\left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial u_1}, \frac{\partial \alpha}{\partial u_2} \right\}$ , ovvero si pone

$$h_{ij} = -\frac{\partial N}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial u_j}.$$

Ricordiamo infine che un vettore tangente,  $X$ , si dice *asintotico* se è isotropo rispetto alla seconda forma fondamentale, ovvero se  $LX \cdot X = 0$ .

**2.6 Osservazione.** L'applicazione di Weingarten può essere considerata una generalizzazione alle superficie (in  $\mathbb{R}^3$ ) di ciò che la curvatura è per le curve piane. Dato un cammino regolare  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , possiamo considerare il vettore normale unitario  $n$  a  $\gamma$ . Dato un punto  $P = \gamma(t_0)$ , un vettore tangente a  $\gamma$  in  $P$  altro non è che un multiplo  $c\gamma'(t_0)$  del vettore unitario,  $T$ , tangente alla curva in  $P$ . Allora, in perfetta analogia con quanto fatto sulle superficie, si può definire  $LX = -\nabla_X(n)$ ; e si ha

$$LX = \nabla_X(n) = -c \frac{dn}{dt} = -c \frac{ds}{dt} \frac{dn}{ds} = c \frac{ds}{dt} \kappa T = \kappa X$$

ovvero l'analogo della mappa di Weingarten per le curve piane coincide con la moltiplicazione dei vettori tangenti alla curva per la curvatura.

Tornando alla superficie  $S$ , osserviamo che, poiché l'applicazione di Weingarten è autoaggiunta, esiste una base ortonormale,  $X, Y$ , di  $T_P(S)$  costituita da autovettori per  $L$ , gli autovalori corrispondenti si indicano con  $h$  e  $k$  e sono chiamati le *curvature principali* di  $S$  in  $P$ . Se  $h \neq k$ , i due autovettori  $X$  ed  $Y$  sono univocamente determinati a meno del segno ed i sottospazi generati da  $X$  ed  $Y$  sono le *direzioni principali di curvatura* in  $P$ . Se le curvature principali coincidono in  $P$ , ogni vettore tangente è un autovettore ed il punto  $P$  viene detto un *ombelico*.

**2.7 Osservazione.** Osserviamo che, se ogni punto di una superficie  $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  è un ombelico, allora la superficie  $S = \alpha(U)$  è una porzione di piano oppure una porzione di sfera.

Infatti, dire che tutti i punti sono ombelichi, significa dire che la mappa di Weingarten coincide con la moltiplicazione per una grandezza scalare  $k$ . Sia  $N$  il vettore normale ed osserviamo che si ha

$$-\frac{\partial N}{\partial u_i} \cdot X = L \frac{\partial}{\partial u_i} \cdot X = k \frac{\partial}{\partial u_i} \cdot X \quad \text{per ogni } X \in T_P(S)$$

e quindi  $\frac{\partial N}{\partial u_i} = -k \frac{\partial \alpha}{\partial u_i}$  per  $i = 1, 2$ . Da ciò si deduce

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 N}{\partial u_i \partial u_j} &= \frac{\partial}{\partial u_i} \left( -k \frac{\partial \alpha}{\partial u_j} \right) = -\frac{\partial k}{\partial u_i} \frac{\partial \alpha}{\partial u_j} - k \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u_i \partial u_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial u_j} \left( -k \frac{\partial \alpha}{\partial u_i} \right) = -\frac{\partial k}{\partial u_j} \frac{\partial \alpha}{\partial u_i} - k \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u_j \partial u_i} \end{aligned}$$

e, per l'indipendenza lineare di  $\frac{\partial \alpha}{\partial u_i}, \frac{\partial \alpha}{\partial u_j}$ , si conclude che  $\frac{\partial k}{\partial u_i} = 0 = \frac{\partial k}{\partial u_j}$  e quindi che  $k$  è una costante.

Se  $k = 0$ , allora  $\frac{\partial N}{\partial u_i} = 0 = \frac{\partial N}{\partial u_j}$ , e quindi  $N$  è costante e dunque la superficie  $S$  è contenuta in un piano.

Se  $k \neq 0$ , allora

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \left( \frac{N}{k} + \alpha \right) = 0 \quad \text{per } i = 1, 2;$$

quindi  $\frac{N}{k} + \alpha$  è uguale ad un vettore costante  $x_0$ . Si conclude perciò che  $\|\alpha - x_0\| = \left\| \frac{N}{k} \right\| = \frac{1}{|k|}$  e quindi  $S$  è contenuta nella superficie della sfera di centro  $x_0$  e raggio  $\frac{1}{|k|}$ .

**2.8 Definizione.** Su una superficie  $S$ , si definiscono la *curvatura media*,  $H(P)$ , e la *curvatura gaussiana*,  $K(P)$ , ponendo

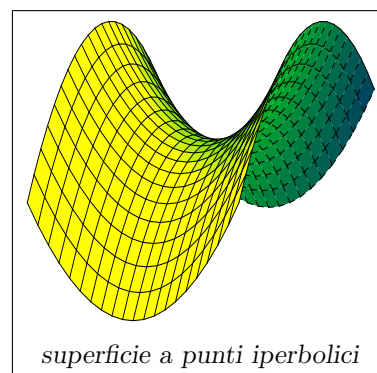
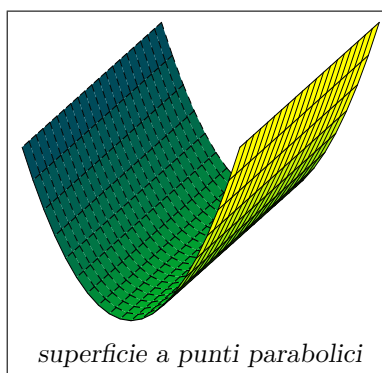
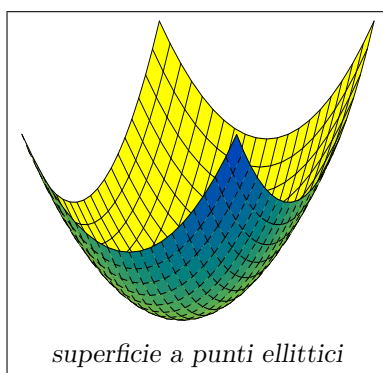
$$H(P) = \frac{1}{2} \text{tr} L \quad \text{e} \quad K(P) = \det L$$

ove  $L$  è l'applicazione di Weingarten.

A differenza del segno della curvatura media, il segno di  $K(P)$  non dipende dal verso del vettore normale alla superficie ed un punto  $P$  si dice

$$\textit{ellittico}, \text{ se } K(P) > 0; \quad \textit{parabolico}, \text{ se } K(P) = 0; \quad \textit{iperbolico}, \text{ se } K(P) < 0.$$

Diamo una rappresentazione grafica della differenza tra superficie a punti ellittici, parabolici o iperbolici, disegnando delle porzioni di tali superficie



Vogliamo mettere in evidenza le relazioni esistenti tra la seconda forma fondamentale e la geometria delle curve tracciate sulla superficie. Sia  $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie e  $\gamma(s) = \alpha(u_1(s), u_2(s))$  una curva tracciata sulla superficie, dove  $s$  è la lunghezza d'arco. Possiamo associare alla curva  $\gamma$  un riferimento mobile ortonormale (cf. *Definizione I.1.4*) nel modo seguente. Il primo vettore  $v_1 = \frac{d\gamma}{ds}$  è il vettore

tangente alla curva ( $\|v_1(s)\| = 1$  perché  $s$  è la lunghezza d'arco). Il vettore  $v_2$  è ortogonale a  $v_1$ , tangente alla superficie, di norma 1 e tale che  $v_1 \times v_2$  coincida con il vettore normale alla superficie nei punti di  $\gamma$ . Infine,  $v_3(s) = N(u_1(s), u_2(s))$ , ove  $N$  indica il vettore normale alla superficie. I tre vettori così definiti costituiscono il *riferimento di Darboux* associato alla curva  $\gamma$  sulla superficie  $s$ . Come per il riferimento mobile di Frenét, resta determinato un sistema di equazioni differenziali, della forma

$$\left( \frac{dv_1}{ds}, \frac{dv_2}{ds}, \frac{dv_3}{ds} \right) = (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{21} & -\omega_{31} \\ \omega_{21} & 0 & -\omega_{32} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{pmatrix},$$

i cui coefficienti prendono il nome di

$$\boxed{\omega_{21} = \text{curvatura geodetica} \quad \omega_{31} = \text{curvatura normale} \quad \omega_{32} = \text{torsione geodetica}}$$

della curva  $\gamma$ . Vogliamo dimostrare la seguente affermazione

**2.9 Proposizione.** *Sia  $\gamma$  una curva sulla superficie  $S$  e sia  $\{v_1, v_2, v_3\}$  il riferimento di Darboux associato a  $\gamma$  in un punto  $P$ . Detta  $h : T_P(S) \times T_P(S) \rightarrow \mathbb{R}$  la seconda forma fondamentale su  $S$ , si ha*

$$\omega_{31} = h(v_1, v_1) \quad e \quad \omega_{32} = h(v_1, v_2).$$

*dim.* Essendo  $\gamma(s) = \alpha(u_1(s), u_2(s))$ , si ha  $v_1 = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{du_1}{ds} \frac{\partial \alpha}{\partial u_1} + \frac{du_2}{ds} \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}$  e quindi

$$Lv_1 = -\nabla_{v_1} N = \frac{du_1}{ds} \frac{\partial N}{\partial u_1} + \frac{du_2}{ds} \frac{\partial N}{\partial u_2} = -\frac{d}{ds} N(u_1(s), u_2(s)) = -\frac{dv_3}{ds} = \omega_{31} v_1 + \omega_{32} v_2,$$

e si conclude ricordando che  $h(X, Y) = (LX) \cdot Y$  per ogni coppia di vettori tangenti,  $X, Y$ . **CVD**  $\square$

In particolare, il risultato precedente ci dice che la curvatura normale e la torsione geodetica di una curva su una superficie dipendono solo dal vettore tangente e non dalla curva stessa, ovvero che due curve sulla superficie, che abbiano lo stesso vettore tangente in un punto  $P$ , hanno la stessa curvatura normale e la stessa torsione geodetica in quel punto.

Le tre funzioni  $\omega_{21}, \omega_{31}, \omega_{32}$  ci permettono di caratterizzare alcune importanti famiglie di curve su una superficie. Ricordiamo che un vettore tangente in  $P$  è una direzione principale se, e solo se, è un autovettore per l'applicazione di Weingarten. In particolare, ciò accade per il vettore  $v_1$  del riferimento di Darboux di una curva,  $\gamma$ , se, e solo se,  $\omega_{32} = 0$ . Le linee di curvatura su una superficie sono caratterizzate dall'annullarsi in tutti i punti della funzione  $\omega_{32}$ .

Ricordiamo che un vettore tangente in  $P$  è una direzione asintotica se, e solo se, è un vettore isotropo per la seconda forma fondamentale. In particolare, ciò accade per il vettore  $v_1$  del riferimento di Darboux di una curva,  $\gamma$ , se, e solo se,  $\omega_{31} = 0$ . Le linee asintotiche su una superficie sono caratterizzate dall'annullarsi in tutti i punti della funzione  $\omega_{31}$ .

Infine, possiamo dare la seguente

**2.10 Definizione.** Un cammino,  $\gamma$ , tracciato sulla superficie  $S$ , è una *geodetica* se la sua curvatura geodetica,  $\omega_{21}$ , è identicamente nulla ed il vettore  $\gamma'$  ha norma costante.

Una curva,  $\gamma$ , su una superficie,  $S$ , è una *sezione normale* alla superficie se, in ogni punto il vettore normale alla curva,  $e_2$  nel riferimento di Frenét, è parallelo al vettore,  $N$ , normale alla superficie. Lasciamo al lettore la verifica che le sezioni normali a una superficie sono geodetiche.

**Esercizio 2.1.** Sia  $S$  una superficie parametrizzata da  $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Sia  $\gamma$  una sezione normale alla superficie in un punto  $P$  e  $v$  il vettore tangente ( $\|v\| = 1$ ) alla curva.

- (a) Si mostri che la curvatura di  $v$  coincide con  $h(v, v)$ , ove  $h : T_P(S) \times T_P(S) \rightarrow \mathbb{R}$  è la seconda forma fondamentale su  $S$ .



(b) Per ogni vettore  $x \in T_P(S) \setminus \{0\}$ , si consideri il numero  $k(x) = \frac{h(x,x)}{x \cdot x}$ . Si mostri che gli autovalori dell'applicazione di Weingarten,  $L$ , coincidono con il massimo ed il minimo della funzione  $k(x)$ .  $\square$

**2.11 Esempi.** (a) Consideriamo la sfera,

$$\alpha(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} \cos u_1 \cos u_2 \\ \cos u_1 \sin u_2 \\ \sin u_1 \end{pmatrix}, \quad (u_1, u_2) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi)$$

Lo spazio tangente è generato dai due vettori

$$v_1 = \frac{\partial \alpha}{\partial u_1} = \begin{pmatrix} -\sin u_1 \cos u_2 \\ -\sin u_1 \sin u_2 \\ \cos u_1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{\partial \alpha}{\partial u_2} = \begin{pmatrix} -\cos u_1 \sin u_2 \\ \cos u_1 \cos u_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e la matrice della I forma fondamentale in questa base è

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u_1 \end{pmatrix}.$$

Il vettore normale è

$$N(u_1, u_2) = \frac{v_1 \times v_2}{\|v_1 \times v_2\|} = \begin{pmatrix} -\cos u_1 \cos u_2 \\ -\cos u_1 \sin u_2 \\ -\sin u_1 \end{pmatrix} = -\alpha(u_1, u_2).$$

Quindi la II forma fondamentale ha matrice

$$H = \begin{pmatrix} N \cdot \frac{\partial v_1}{\partial u_1} & N \cdot \frac{\partial v_2}{\partial u_1} \\ N \cdot \frac{\partial v_1}{\partial u_2} & N \cdot \frac{\partial v_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial N}{\partial u_1} \cdot v_1 & -\frac{\partial N}{\partial u_1} \cdot v_2 \\ -\frac{\partial N}{\partial u_2} \cdot v_1 & -\frac{\partial N}{\partial u_2} \cdot v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 \end{pmatrix} = G.$$

Consideriamo ora due famiglie di curve sulla superficie della sfera.

*Meridiani.* Sia

$$c(u) = c_{(\alpha, \beta)}(u) = \begin{pmatrix} \alpha \cos u \\ \beta \cos u \\ \sin u \end{pmatrix} \quad \text{con } \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

Si ha

$$\frac{dc}{du} = \begin{pmatrix} -\alpha \sin u \\ -\beta \sin u \\ \cos u \end{pmatrix} = e_1, \quad \frac{de_1}{du} = \begin{pmatrix} -\alpha \cos u \\ -\beta \cos u \\ -\sin u \end{pmatrix} = e_2$$

e quindi le curve hanno tutte curvatura costante ed uguale ad 1, ovvero si tratta di cerchi (di raggio 1). Infatti

$e_3 = e_1 \times e_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$  e quindi la curva ha torsione  $\tau = 0$  (ovvero il piano osculatore è costante e si tratta quindi

di una curva piana). In particolare, si può verificare che  $N = e_2$  e quindi che si tratta di una *sezione normale* della superficie della sfera.

*Paralleli.* Sia

$$c(u) = c_{(\lambda, \mu)}(u) = \begin{pmatrix} \lambda \cos u \\ \lambda \sin u \\ \mu \end{pmatrix}, \quad \text{con } \lambda^2 + \mu^2 = 1.$$

La curva non è parametrizzata dalla lunghezza d'arco, essendo

$$\frac{dc}{du} = \begin{pmatrix} -\lambda \sin u \\ \lambda \cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e quindi } \left\| \frac{dc}{du} \right\| = |\lambda|.$$

Comunque, la norma del vettore tangente è costante e si ha

$$e_1(s) = \begin{pmatrix} -\sin \frac{s}{|\lambda|} \\ \cos \frac{s}{|\lambda|} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \frac{de_1}{ds} = \frac{1}{|\lambda|} \begin{pmatrix} -\cos \frac{s}{|\lambda|} \\ -\sin \frac{s}{|\lambda|} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\lambda|} e_2(s).$$

Dunque si tratta di una curva a curvatura costante,  $\kappa(s) = \frac{1}{|\lambda|}$ , ovvero di un cerchio, ed infatti il vettore binormale è  $e_3 = e_1 \times e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  costante, e la torsione è nulla e quindi la curva è una curva piana. Non è però una sezione normale perché

$$N(s) = \begin{pmatrix} -\lambda \cos \frac{s}{b+a\lambda} \\ -\lambda \sin \frac{s}{b+a\lambda} \\ -\mu \end{pmatrix} \notin \langle e_1(s), e_2(s) \rangle, \quad \text{se } \delta \neq 0.$$

Quindi l'unico parallelo che sia una sezione normale è l'equatore della sfera.

(b) Consideriamo ora il toro, ovvero la superficie

$$T(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} \cos u_1 (b + a \cos u_2) \\ \sin u_1 (b + a \cos u_2) \\ a \sin u_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{con } 0 < a < b \text{ ed } (u_1, u_2) \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)).$$

Lo spazio tangente è generato dai due vettori

$$v_1 = \frac{\partial T}{\partial u_1} = \begin{pmatrix} -\sin u_1 (b + a \cos u_2) \\ \cos u_1 (b + a \cos u_2) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{\partial T}{\partial u_2} = \begin{pmatrix} -a \cos u_1 \sin u_2 \\ -a \sin u_1 \sin u_2 \\ a \cos u_2 \end{pmatrix},$$

e la matrice della I forma fondamentale in questa base è

$$G = \begin{pmatrix} (b + a \cos u_2)^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}.$$

Il vettore normale è

$$N(u_1, u_2) = \frac{v_1 \times v_2}{\|v_1 \times v_2\|} = \begin{pmatrix} \cos u_1 \cos u_2 \\ \sin u_1 \cos u_2 \\ \sin u_2 \end{pmatrix},$$

e la II forma fondamentale ha matrice

$$H = \begin{pmatrix} N \cdot \frac{\partial v_1}{\partial u_1} & N \cdot \frac{\partial v_2}{\partial u_1} \\ N \cdot \frac{\partial v_1}{\partial u_2} & N \cdot \frac{\partial v_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial N}{\partial u_1} \cdot v_1 & -\frac{\partial N}{\partial u_1} \cdot v_2 \\ -\frac{\partial N}{\partial u_2} \cdot v_1 & -\frac{\partial N}{\partial u_2} \cdot v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos u_2 (b + a \cos u_2) & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix},$$

essendo

$$\frac{\partial N}{\partial u_1} = \begin{pmatrix} -\sin u_1 \cos u_2 \\ \cos u_1 \cos u_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial N}{\partial u_2} = \begin{pmatrix} -\cos u_1 \sin u_2 \\ -\sin u_1 \sin u_2 \\ \cos u_2 \end{pmatrix}.$$

Analogamente a quanto fatto sulla sfera, consideriamo ora due famiglie di curve sulla superficie del toro.

*Meridiani.* Sia

$$c(u) = c_{(\alpha, \beta)}(u) = \begin{pmatrix} \alpha(b + a \cos u) \\ \beta(b + a \cos u) \\ a \sin u \end{pmatrix} \quad \text{con } \alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Si ha

$$\frac{dc}{du} = \begin{pmatrix} -a\alpha \sin u \\ -a\beta \sin u \\ a \cos u \end{pmatrix} = ae_1(u);$$

e quindi si può riparametrizzare la curva con la lunghezza d'arco e scrivere:

$$c(s) = \begin{pmatrix} \alpha(b + a \cos \frac{s}{a}) \\ \beta(b + a \cos \frac{s}{a}) \\ a \sin \frac{s}{a} \end{pmatrix}, \quad e_1(s) = \begin{pmatrix} -\alpha \sin \frac{s}{a} \\ -\beta \sin \frac{s}{a} \\ \cos \frac{s}{a} \end{pmatrix}; \quad \frac{de_1}{ds} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} -\alpha \cos \frac{s}{a} \\ -\beta \cos \frac{s}{a} \\ -\sin \frac{s}{a} \end{pmatrix} = \frac{1}{a} e_2$$

e quindi le curve hanno tutte curvatura costante ed uguale ad  $1/a$ , ovvero si tratta di cerchi (di raggio  $a$ ). Infatti  $e_3 = e_1 \times e_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$  e quindi la curva ha torsione  $\tau = 0$  (ovvero il piano osculatore è costante e si tratta quindi di una curva piana). In particolare, si può verificare che si tratta di una *sezione normale* della superficie del toro, essendo

$$N(s) = \begin{pmatrix} \alpha \cos \frac{s}{a} \\ \beta \cos \frac{s}{a} \\ \sin \frac{s}{a} \end{pmatrix} \in \langle e_1, e_2 \rangle.$$

*Paralleli.* Sia

$$c(u) = c_{(\lambda, \mu)}(u) = \begin{pmatrix} (b + a\lambda) \cos u \\ (b + a\lambda) \sin u \\ a\mu \end{pmatrix}, \quad \text{con } \lambda^2 + \mu^2 = 1.$$

La curva non è parametrizzata dalla lunghezza d'arco, essendo

$$\frac{dc}{du} = \begin{pmatrix} -(b + a\lambda) \sin u \\ (b + a\lambda) \cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e quindi } \left\| \frac{dc}{du} \right\| = b + a\lambda.$$

ma la norma del vettore tangente è costante e si ha

$$c(s) = \begin{pmatrix} (b + a\lambda) \cos \frac{s}{b+a\lambda} \\ (b + a\lambda) \sin \frac{s}{b+a\lambda} \\ a\mu \end{pmatrix} \quad \text{con } s \in [0, 2(b + a\lambda)\pi];$$

$$e_1(s) = \begin{pmatrix} -\sin \frac{s}{b+a\lambda} \\ \cos \frac{s}{b+a\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \frac{de_1}{ds} = \frac{1}{b + a\lambda} \begin{pmatrix} -\cos \frac{s}{b+a\lambda} \\ -\sin \frac{s}{b+a\lambda} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{b+a\lambda} e_2(s).$$

Dunque si tratta di nuovo di una curva a curvatura costante,  $\kappa(s) = \frac{1}{b+a\lambda}$ , ovvero di un cerchio, ed infatti il vettore binormale è  $e_3 = e_1 \times e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  costante, e la torsione è nulla e quindi la curva è una curva piana. Non è però una sezione normale perché

$$N(s) = \begin{pmatrix} -\lambda \cos \frac{s}{b+a\lambda} \\ -\lambda \sin \frac{s}{b+a\lambda} \\ -\mu \end{pmatrix} \notin \langle e_1(s), e_2(s) \rangle, \quad \text{se } \mu \neq 0.$$

Quindi vi sono due paralleli che sono una sezione normale che possiamo chiamare gli *equatori* del toro.

Applichiamo ora le tecniche introdotte per fare qualche calcolo su curve e superficie.

**2.12 Osservazione.** Si verifichino le seguenti affermazioni.

- (a) Se tutte le rette tangenti ad una curva passano per uno stesso punto allora la curva è piana.
- (b) Se tutti i piani osculatori ad una curva passano per uno stesso punto allora la curva è piana.
- (c) Le geodetiche di una sfera sono i cerchi massimi.

*dim.* (a) Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  la curva in questione e supponiamo che il punto comune a tutte le rette tangenti a  $\gamma$  sia l'origine. Allora, se  $\gamma(t) \neq 0$ , si ha  $\gamma'(t) = \alpha(t)\gamma(t)$  per un'opportuna funzione scalare  $\alpha$ . Si deduce da ciò che la componente  $i$ -esima del vettore  $\gamma$  è uguale a

$$\gamma_i(t) = c_i e^{p(t)} \quad \text{ove } p(t) = \int_a^t \alpha(t) dt.$$

Si conclude che  $\gamma(t) = v_0 e^{p(t)}$  e quindi che la curva  $\gamma$  è un segmento di retta parallelo al vettore (costante)  $v_0$ , che ha come componenti i valori iniziali  $c_i$ .

(b) Sia sempre  $\gamma$  la curva in questione e, anche in questo caso, supponiamo che il punto comune a tutti i piani osculatori sia l'origine. Si ha quindi  $\gamma = ae_1 + be_2$ , ove  $e_1$  ed  $e_2$  sono il vettore tangente ed il vettore normale alla curva  $\gamma$ . Se  $b$  è identicamente nulla, si ricade nel caso descritto nel punto precedente e la tesi è verificata. Supponiamo che ciò non accada ed applichiamo le equazioni di Frenet alla relazione scritta sopra, supponendo che  $\gamma$  sia parametrizzata dalla lunghezza d'arco. Si ha quindi

$$e_1 = \frac{d\gamma}{ds} = a \frac{de_1}{ds} + b \frac{de_2}{ds} + \frac{da}{ds} e_1 + \frac{db}{ds} e_2 = \left( \frac{da}{ds} - b\kappa \right) e_1 + \left( \frac{db}{ds} + a\kappa \right) e_2 + b\tau e_3.$$

In particolare, da ciò si deduce che  $b\tau = 0$  che, per  $b \neq 0$ , implica l'annullarsi della torsione e quindi che  $\gamma$  è una curva piana.

(c) Se  $\gamma$  è una geodetica per la superficie della sfera, allora, in ogni suo punto, il vettore normale alla curva è parallelo al vettore normale alla superficie e quindi, nel caso di una sfera, ciò implica che tutti i piani osculatori passano per il centro della sfera. Per il punto precedente, ciò implica che  $\gamma$  è una sezione piana della sfera e precisamente una circonferenza tagliata da un piano passante per il centro, ovvero un cerchio massimo. **CVD**  $\square$

### 3. Appendice. Richiami di Topologia generale

Ricordiamo rapidamente alcuni fatti di topologia generale.

**3.1 Definizione.** Sia  $X$  un insieme (non vuoto), una *topologia* su  $X$  è una famiglia  $\mathcal{T}$  di sottoinsiemi di  $X$  soddisfacente alle seguenti condizioni

- $\emptyset$  e  $X$  appartengono a  $\mathcal{T}$ ;
- se  $U, V \in \mathcal{T}$ , allora  $U \cap V \in \mathcal{T}$ ;
- se  $U_i \in \mathcal{T}$  per ogni  $i \in I$ , allora  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ .

Si chiama *spazio topologico* una coppia  $(X, \mathcal{T})$ , ove  $X$  è un insieme e  $\mathcal{T}$  è una topologia su  $X$ . Gli elementi di  $\mathcal{T}$  sono gli *aperti* dello spazio topologico, mentre si chiamano *chiusi* i complementari degli aperti.

Su un insieme possono essere poste diverse topologie. Se  $\mathcal{T}$  ed  $\mathcal{T}'$  sono topologie su  $X$ , si dice che  $\mathcal{T}$  è *più fine* di  $\mathcal{T}'$  se  $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ . È immediato osservare che, su ogni insieme  $X$ , la *topologia banale*  $\mathcal{B} = \{\emptyset, X\}$  è la meno fine tra tutte le topologie, mentre la *topologia discreta*, che ha come aperti tutti i sottoinsiemi di  $X$ , è la più fine tra tutte le topologie.

**3.2 Osservazione.** [interno, chiusura, frontiera] Abbiamo definito la topologia dando le proprietà dell'insieme degli aperti dello spazio. Si poteva, equivalentemente, definire le proprietà della famiglia dei chiusi dello spazio, ovvero le proprietà dei complementari degli aperti. Queste sono

- $\emptyset$  e  $X$  sono chiusi;
- se  $F, G$  sono chiusi, allora  $F \cup G$  è chiuso;
- se  $F_i$  è chiuso per ogni  $i \in I$ , allora  $\bigcap_{i \in I} F_i$  è chiuso.

Naturalmente, in uno spazio topologico ci possono essere insiemi che non sono né aperti né chiusi, ma per ogni sottoinsieme  $A$  si definiscono

- l'*interno* di  $A$ , ovvero il massimo aperto  $A^\circ$  contenuto in  $A$ ;
- la *chiusura* di  $A$ , ovvero il minimo chiuso  $\bar{A}$  contenente  $A$ ;
- la *frontiera* di  $A$ , ovvero il sottoinsieme  $\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$ .

Si ha

$$\bigcup_{\substack{U \text{ aperto} \\ U \subseteq A}} U = A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ chiuso} \\ A \subseteq F}} F.$$

È facile verificare che, se  $A$  è aperto, allora  $A^\circ = A$ ; se  $A$  è chiuso, allora  $\bar{A} = A$ ; infine, ogni aperto  $U$ , contenente un punto di frontiera di  $A$ , interseca sia  $A$  che il complementare di  $A$  (questa condizione caratterizza i punti di frontiera).

**Base per una topologia.** Spesso, è preferibile definire una topologia dando solo degli aperti sufficienti a generare ogni altro aperto.

**3.3 Definizione.** Sia  $(X, \mathcal{T})$  uno spazio topologico. Un sottoinsieme  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$  è una base per  $\mathcal{T}$  se ogni aperto  $A \in \mathcal{T}$  si scrive come unione di elementi di  $\mathcal{B}$ .

Possiamo caratterizzare le basi con la seguente osservazione, la cui dimostrazione è lasciata come esercizio.

**3.4 Osservazione.** Siano  $(X, \mathcal{T})$  uno spazio topologico e  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ . Allora  $\mathcal{B}$  è una base se, e solo se, per ogni  $A \in \mathcal{T}$  e per ogni  $x \in A$  esiste  $U \in \mathcal{B}$  tale che  $x \in U \subseteq A$ .

A titolo di esempio osserviamo che

- (a) Una base per la topologia discreta su  $X$  è data dall'insieme  $\mathcal{B} = \{ \{x\} \mid x \in X \}$ .
- (b) L'usuale topologia di  $\mathbb{R}^n$  ha una base numerabile data da tutte le palle  $B(\xi, r) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - \xi\| < r \}$ , ove  $\xi \in \mathbb{Q}^n$  ed  $r$  varia tra i numeri razionali positivi.

Chiudiamo osservando che, data una base  $\mathcal{B}$ , un sottoinsieme  $U$  è aperto nella topologia generata da  $\mathcal{B}$  se, e solo se, per ogni  $x \in U$  esiste un aperto di base  $B \in \mathcal{B}$  tale che  $x \in B \subseteq U$ .

Se  $(X, \mathcal{T})$  è uno spazio topologico ed  $Y$  è un sottoinsieme non vuoto di  $X$ , possiamo porre su  $Y$  la topologia indotta ovvero quella per cui gli aperti di  $Y$  sono tutti e soli i sottoinsiemi  $Y \cap U$  al variare di  $U$  in  $\mathcal{T}$ . Il sottoinsieme  $Y$  dotato della topologia indotta è detto un sottospazio topologico di  $X$ .

**3.5 Definizione.** Sia  $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$  una famiglia di spazi topologici e consideriamo il prodotto cartesiano  $X = \prod_{i \in I} X_i$  con le proiezioni canoniche  $p_i : X \rightarrow X_i$ . Si chiama topologia prodotto la topologia su  $X$  che ha come aperti, oltre al vuoto ed a  $X$ , tutte le unioni di intersezioni finite di sottoinsiemi del tipo  $p_i^{-1}(U_i)$  al variare di  $U_i$  in  $\mathcal{T}_i$  e di  $i \in I$ .

Sia  $I$  un insieme finito, ovvero  $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ . È facile verificare che, se  $U_1, \dots, U_n$  sono sottoinsiemi di  $X_i$  ed indichiamo con  $p_i : X \rightarrow X_i$ , per  $i = 1, \dots, n$ , le proiezioni canoniche allora

$$p_1^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap p_n^{-1}(U_n) = U_1 \times \cdots \times U_n.$$

In questo caso, la topologia prodotto è determinata dal prodotto delle topologie dei singoli fattori.

**3.6 Definizione.** Siano  $(X, \mathcal{T})$  ed  $(X', \mathcal{T}')$  due spazi topologici. Una funzione  $f : X \rightarrow X'$  si dice continua se la controimmagine di ogni aperto (risp. chiuso) di  $X'$  è un aperto (risp. chiuso) di  $X$ .

Dato un punto  $x_0$  di uno spazio topologico  $(X, \mathcal{T})$  un sottoinsieme  $A$  di  $X$  è un intorno di  $x_0$  se esiste un aperto  $U \in \mathcal{T}$  tale che  $x_0 \in U \subseteq A$ . È facile verificare che l'intersezione di due intorni di uno stesso punto  $x_0$  è ancora un intorno di  $x_0$  e che, se  $A$  è un intorno di  $x_0$  allora ogni insieme  $B$  contenente  $A$  è anch'esso un intorno di  $x_0$ . L'insieme di tutti gli intorni del punto  $x_0$  è detto il filtro degli intorni di  $x_0$ , che indicheremo con  $\mathcal{F}_{x_0}$ .

**3.7 Definizione.** [continuità locale] Siano  $(X, \mathcal{T})$  ed  $(X', \mathcal{T}')$  due spazi topologici ed  $f : X \rightarrow X'$  un'applicazione. Diremo che  $f$  è continua nel punto  $x_0 \in X$  se, per ogni intorno  $V$  di  $f(x_0)$ , la controimmagine  $f^{-1}(V)$  è un intorno di  $x_0$  (ovvero  $V \in \mathcal{F}_{f(x_0)} \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{F}_{x_0}$ ).

La nozione di filtro è legata al concetto di limite.

**3.8 Definizione.** Sia  $X$  un insieme. Un *filtro* su  $X$  è una famiglia  $\mathcal{F}$  di sottoinsiemi di  $X$  soddisfacente alle seguenti condizioni

- (F1) se  $F_1$  ed  $F_2$  appartengono ad  $\mathcal{F}$ , allora  $F_1 \cap F_2$  appartiene ad  $\mathcal{F}$ ;
- (F2) se  $F \in \mathcal{F}$  e  $G \supseteq F$ , allora  $G \in \mathcal{F}$ ;
- (F3)  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ .

**3.9 Definizione.** Siano  $X$  un insieme ed  $\mathcal{F}$  un filtro su  $X$ ,  $(Y, \mathcal{T})$  uno spazio topologico ed  $f : X \rightarrow Y$  un'applicazione. Si scriverà  $\lim_{\mathcal{F}} f(x) = y_0$  se, per ogni intorno  $V$  di  $y_0$ , l'insieme  $f^{-1}(V)$  appartiene ad  $\mathcal{F}$ .

Lasciamo al lettore il compito di verificare che le applicazioni continue “rispettano” i limiti; ovvero che vale la proprietà seguente. Siano  $X$  un insieme,  $\mathcal{F}$  un filtro su  $X$ ,  $(Y, \mathcal{T})$  ed  $(Y', \mathcal{T}')$  spazi topologici ed  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Y'$  applicazioni. Se  $\lim_{\mathcal{F}} f(x) = y_0$  e  $g$  è continua in  $y_0$ , allora  $\lim_{\mathcal{F}} (g \circ f)(x) = g(y_0)$ .

**3.10 Osservazione.** La definizione data generalizza le note definizioni di limite. Ad esempio, sull'insieme  $\mathbb{N}$  dei numeri naturali possiamo considerare il filtro  $n \rightarrow \infty$ , ove un sottoinsieme  $T$  appartiene al filtro se, e solo se, esiste un  $k \in \mathbb{N}$  tale che  $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\} \subseteq T$ . Possiamo quindi dare la seguente

**3.11 Definizione.** Data una successione,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , di punti di uno spazio topologico  $X$ , ovvero una funzione  $\mathbb{N} \rightarrow X$ ,  $n \mapsto x_n$ , diremo che la successione *converge* ad un punto  $x_0 \in X$  se  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .

Ciò significa che, preso comunque un  $V$  intorno di  $x_0$  la controimmagine di  $V$  appartiene al filtro  $n \rightarrow \infty$ , ovvero esiste un numero naturale  $k$  tale che per ogni  $n \geq k$   $x_n \in V$ .

Vedremo nel seguito come la definizione di limite lungo un filtro sia una generalizzazione dell'usuale nozione di limite di funzioni del Calcolo. Come giustificazione di una definizione così generale, vogliamo dare un esempio in cui questa generalità si rivela necessaria per una trattazione rigorosa.

Dato un intervallo chiuso  $[a, b]$  della retta reale, una *suddivisione a punti marcati* dell'intervallo  $[a, b]$ ,  $\sigma = \{x_0, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n\}$ , è la scelta di una suddivisione dell'intervallo,  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , e la scelta in ciascun intervallino di un punto  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , per  $i = 1, \dots, n$ . Chiameremo *massima ampiezza* della suddivisione  $\sigma$  il numero reale  $\mu(\sigma) = \max \{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, \dots, n\}$ . Indicheremo con  $\Sigma_{[a,b]}$  l'insieme di tutte le suddivisioni a punti marcati dell'intervallo  $[a, b]$  e, fissato un numero reale positivo  $\delta$ , indicheremo con  $F_\delta$  il sottoinsieme formato dalle suddivisioni di massima ampiezza minore o uguale a  $\delta$ . I sottoinsiemi  $F_\delta$  sono tutti non vuoti e se  $\delta < \eta$ , allora  $F_\delta \subset F_\eta$ . Dunque la famiglia  $\mathcal{F} = \{A \subseteq \Sigma_{[a,b]} \mid \exists \delta (\delta > 0, F_\delta \subseteq A)\}$  dei sottoinsiemi di  $\Sigma_{[a,b]}$  che contengono qualcuno tra gli  $F_\delta$  è un filtro su  $\Sigma_{[a,b]}$ .

Data una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , resta definita la funzione  $S_f : \Sigma_{[a,b]} \rightarrow \mathbb{R}$  ponendo per ogni suddivisione a punti marcati  $\sigma = \{x_0, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n\}$

$$S_f(\sigma) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad [\text{somme integrali}]$$

Lo studio del limite  $\lim_{\mathcal{F}} S_f(\sigma)$  è lo studio dell'integrabilità secondo Riemann della funzione  $f$  (per una trattazione dettagliata –in italiano– di questo punto, si veda ad esempio il Cap. IX di G. E. Šilov, *Analisi Matematica 1*, Mir 1978).

**3.12 Definizione.** Dato uno spazio topologico  $(X, \mathcal{T})$  ed un suo punto  $x_0$ , la famiglia degli *intorni puntati* di  $x_0$  è l'insieme formato da tutti gli intorni di  $x_0$  in  $X$  e da tutti gli insiemi  $A \setminus \{x_0\}$ , al variare di  $A$  tra gli intorni di  $x_0$  in  $X$ .

Si dice che  $x_0$  è un *punto isolato* se la famiglia degli intorni puntati non è un filtro, (e ciò accade solo se  $\{x_0\}$  è un intorno di  $x_0$ ). Se  $x_0$  non è un punto isolato, si indica col simbolo  $x \rightarrow x_0$  il *filtro degli intorni puntati* di  $x_0$ .

Enunciamo le relazioni tra la continuità (locale e globale) e la nozione di limite.

**3.13 Proposizione.** Siano  $(X, \mathcal{F})$  ed  $(X', \mathcal{F}')$  due spazi topologici ed  $f : X \rightarrow X'$  un'applicazione.

- (a) La funzione  $f$  è continua se, e solo se,  $f$  è continua in ogni punto  $x \in X$ .  
 (b) La funzione  $f$  è continua in  $x_0 \in X$  se, e solo se,  $x_0$  è un punto isolato, oppure  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

*dim.* (a) Supponiamo che  $f$  sia continua e fissiamo un punto  $x_0 \in X$ . Sia  $B$  un intorno di  $f(x_0)$  e Sia  $V$  un aperto di  $X'$  tale che  $f(x_0) \in V \subseteq B$ ; allora si ha  $x_0 \in f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(B)$  ed  $f^{-1}(V)$  è aperto perché  $f$  è continua. Dunque  $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_{x_0}$  ed  $f$  è continua in  $x_0$ .

Viceversa, supponiamo che  $f$  sia continua in ogni punto  $x \in X$  e sia  $V$  un aperto di  $X'$ . Vogliamo verificare che  $f^{-1}(V)$  è aperto in  $X$ . Se  $f^{-1}(V) = \emptyset$  siamo a posto; altrimenti, dato  $x \in f^{-1}(V)$ , osserviamo che  $V$  è un intorno di  $f(x)$  e quindi, essendo  $f$  continua in  $x$ ,  $f^{-1}(V)$  è un intorno di  $x$  e perciò esiste un aperto  $U_x$  tale che  $x \in U_x \subseteq f^{-1}(V)$ . Si ha quindi  $f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x$  e dunque  $f^{-1}(V)$  è aperto perché unione di aperti.

(b) Sia dunque  $f$  una funzione continua nel punto  $x_0 \in X$  e supponiamo che  $x_0$  non sia un punto isolato. Preso un intorno  $V$  di  $f(x_0)$ , l'insieme  $f^{-1}(V)$  è un intorno di  $x_0$  e quindi  $\emptyset \neq f^{-1}(V) \setminus \{x_0\}$  appartiene al filtro degli intorni puntati di  $x_0$ .

Viceversa, sia  $V$  un intorno di  $f(x_0)$ . Se  $x_0$  è un punto isolato, allora  $\{x_0\}$  è un intorno di  $x_0$  e  $\{x_0\} \subseteq f^{-1}(V)$  e quindi  $f$  è continua in  $x_0$ . Se  $x_0$  non è un punto isolato e  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , allora  $f^{-1}(V)$  appartiene al filtro degli intorni puntati e contiene il punto  $x_0$ , dunque  $f^{-1}(V) \in \mathcal{F}_{x_0}$  ovvero  $f$  è continua in  $x_0$ . **CVD**  $\square$

Se  $f : X \rightarrow Y$  è un'applicazione tra due spazi topologici ed  $x_0 \in X$  non è un punto isolato, non è detto che esista  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  e, in generale, non è detto che tale limite, quando esiste, sia unico.

**3.14 Definizione.** Uno spazio topologico  $Y$  si dice *separato* o *Spazio di Hausdorff* se, presi comunque due punti distinti  $y_1 \neq y_2$  in  $Y$ , esistono due intorni  $U_1 \in \mathcal{F}_{y_1}$  ed  $U_2 \in \mathcal{F}_{y_2}$  tali che  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ .

**3.15 Proposizione.** [Unicità del limite] Siano  $X$  un insieme ed  $\mathcal{F}$  un filtro su  $X$ ,  $(Y, \mathcal{T})$  uno spazio di Hausdorff ed  $f : X \rightarrow Y$  un'applicazione. Allora, se esiste il limite  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , tale limite è unico.

*dim.* Se fosse  $\lim_{\mathcal{F}} f(x) = y_1$  e  $\lim_{\mathcal{F}} f(x) = y_2$  con  $y_1 \neq y_2$ , presi due intorni  $U_1$  di  $y_1$  ed  $U_2$  di  $y_2$ , con  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ , si avrebbe che  $f^{-1}(U_1)$  ed  $f^{-1}(U_2)$  apparterrebbero entrambi al filtro  $\mathcal{F}$ , ma la loro intersezione sarebbe vuota, contro l'ipotesi che  $\mathcal{F}$  sia un filtro. **CVD**  $\square$

Esempi naturali di spazi topologici (di Hausdorff) sono gli spazi metrici.

**3.16 Definizione.** Sia  $X$  un insieme. Una *metrica* su  $X$  è una funzione  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  soddisfacente alle seguenti condizioni

- (a)  $d(x, y) = 0$  se, e solo se,  $x = y$ ;  
 (b)  $d(x, y) = d(y, x)$ ;  
 (c) presi comunque tre punti  $x, y, z$ , si ha  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Si chiama *spazio metrico* una coppia  $(X, d)$ , ove  $X$  è un insieme e  $d$  è una metrica su  $X$ .

**3.17 Definizione.** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Si chiama *palla aperta* di centro  $x_0 \in X$  e raggio  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  il sottoinsieme

$$B(x_0, r) = \{ x \in X \mid d(x_0, x) < r \}.$$

Si chiama *topologia indotta dalla metrica* la topologia  $\mathcal{T}_d$  su  $X$  per cui gli aperti sono i sottoinsiemi  $U$  che soddisfano alla seguente condizione: per ogni punto  $x \in U$  esiste un numero reale  $r_x > 0$  tale che  $B(x, r_x) \subseteq U$ .

In uno spazio metrico si possono definire le distanze di un punto  $x_0$  da un sottoinsieme  $Y (\neq \emptyset)$  e la distanza reciproca di due sottoinsiemi non vuoti,  $Y_1, Y_2$ , come

$$d(x_0, Y) = \inf \{ d(x_0, y) \mid y \in Y \} \quad \text{e} \quad d(Y_1, Y_2) = \inf \{ d(y_1, y_2) \mid y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2 \}.$$

Lasciamo al lettore il compito di verificare che la chiusura di un sottoinsieme (non vuoto)  $A$  di uno spazio metrico  $X$  è l'insieme dei punti che hanno distanza 0 da  $A$ ; ovvero  $\bar{A} = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$ . In particolare, la chiusura della palla aperta  $B(x_0, r)$  è  $\bar{B}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x_0, x) \leq r\}$ .

Metriche diverse possono indurre la stessa topologia ed, in tal caso si dice che le metriche sono *topologicamente equivalenti* tra loro.

La topologia usuale di  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) è quella indotta dalla metrica euclidea, ove le palle aperte sono i sottoinsiemi  $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\}$  al variare di  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e di  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ . Si può verificare che la topologia usuale di  $\mathbb{R}^n$  coincide con la topologia prodotto della topologia usuale su ogni copia di  $\mathbb{R}$ . Lasciamo come esercizio per il lettore la verifica che, nel caso di funzioni reali di una variabile reale, la nozione di limite definita sopra coincide con l'usuale nozione del calcolo. Ovvero, dato un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{R}$ , una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  ed un punto  $x_0 \in A$  che non sia un punto isolato, allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ , nel senso della *Definizione II.3.9* se, e solo se, fissato comunque  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che  $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$ .

Ci occuperemo ora di un importante tipo di spazi topologici, gli spazi compatti.

**3.18 Definizione.** Sia  $X$  un insieme. Un *ricoprimento* di  $X$  è una famiglia di sottoinsiemi  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  di  $X$  tale che  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ . Si chiama *sottoricoprimento* ogni famiglia  $(U_j)_{j \in J}$  di elementi di  $\mathcal{U}$ , con  $J \subseteq I$ , che sia ancora un ricoprimento di  $X$ .

**3.19 Definizione.** Uno spazio topologico  $X$  si dice *compatto* se da ogni ricoprimento aperto  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  di  $X$  si può estrarre un sottoricoprimento finito, ovvero se esistono  $n$  aperti  $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$  del ricoprimento  $\mathcal{U}$  tali che  $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ .

Un sottoinsieme  $K$  di uno spazio topologico  $X$  si dice *compatto* se il sottospazio topologico  $K$  (con la topologia indotta) è uno spazio compatto.

Vogliamo dimostrare alcuni fatti generali sugli spazi compatti ed i loro sottospazi.

**3.20 Proposizione.** Sia  $X$  uno spazio topologico compatto ed  $Y$  un sottospazio chiuso. Allora  $Y$  è un sottospazio compatto.

*dim.* Sia  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  un ricoprimento aperto di  $Y$ . Allora, se aggiungiamo ad  $\mathcal{U}$  l'aperto  $X \setminus Y$ , otteniamo un ricoprimento aperto di  $X$  e quindi si può estrarre da questo un sottoricoprimento finito di  $X$ , perché  $X$  è compatto. Eliminando eventualmente da questo sottoricoprimento l'aperto  $X \setminus Y$ , si ottiene un ricoprimento finito di  $Y$  fatto con aperti di  $\mathcal{U}$ . **CVD**  $\square$

**3.21 Proposizione.** Sia  $X$  uno spazio di Hausdorff ed  $Y$  un sottospazio compatto. Allora  $Y$  è un sottospazio chiuso.

*dim.* Sia  $x_0$  un punto del complementare  $X \setminus Y$  di  $Y$  e mostriamo che esiste un intorno di  $x_0$  contenuto in  $X \setminus Y$ ; quindi, per l'arbitrarietà del punto  $x_0$ ,  $X \setminus Y$  è aperto. Essendo  $X$  uno spazio di Hausdorff, preso comunque un punto  $y \in Y$ , esistono un intorno aperto  $U_y$  di  $x_0$  ed un intorno aperto  $V_y$  di  $y$  tali che  $U_y \cap V_y = \emptyset$ . La famiglia dei  $(V_y)_{y \in Y}$  è un ricoprimento aperto del compatto  $Y$  e quindi esistono dei punti  $y_1, \dots, y_n$  tali che  $Y \subseteq V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$ . Allora l'insieme  $U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$  è un intorno aperto di  $x_0$  che non interseca  $V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$  ed è quindi contenuto in  $X \setminus Y$ . **CVD**  $\square$

Non diamo la dimostrazione del seguente

**3.22 Teorema.** [Tychonoff] Sia  $(K_i)_{i \in I}$  una famiglia di spazi topologici e si ponga su  $K = \prod_{i \in I} K_i$  la topologia prodotto. Allora  $K$  è compatto se, e solo se, lo sono tutti gli spazi  $K_i$ .

**3.23 Osservazione.** [sottoinsiemi compatti di  $\mathbb{R}^n$ ] Gli intervalli chiusi della retta reale (con la topologia indotta) sono spazi compatti; infatti, dato un ricoprimento aperto,  $(U_i)_{i \in I}$ , dell'intervallo  $[a, b]$ , consideriamo il sottoinsieme (non vuoto)

$$A = \{x \in [a, b] \mid [a, x] \text{ è ricoperto da un numero finito di } U_i\}$$



e sia  $c$  il suo estremo superiore. Se  $c = b$  si ha tesi; se fosse  $c < b$ , dato un aperto  $U_{i_0}$  del ricoprimento contenente  $c$ , si ha  $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subseteq U_{i_0}$  per un opportuno  $\varepsilon > 0$ , e quindi si potrebbe ricoprire con un numero finito di aperti l'intervallo  $[a, c + \varepsilon/2]$  contro l'ipotesi che  $c$  sia l'estremo superiore.

Ricordiamo che in uno spazio metrico  $X$  un sottoinsieme  $A$  si dice *limitato* se è contenuto in una palla aperta, ovvero se  $A \subseteq B(x, r)$  per un opportuno punto  $x \in X$  ed un opportuno raggio  $r$ .

Osserviamo che un sottospazio compatto  $K$  di uno spazio metrico  $X$  è necessariamente limitato. Infatti, fissato arbitrariamente un punto  $x_0 \in X$ , le sfere  $B(x_0, r)$ , per  $r > 0$  formano un ricoprimento aperto di  $K$  e quindi, poiché  $K$  è compatto, è contenuto in una almeno di queste sfere.

Da quanto visto sugli intervalli chiusi di  $\mathbb{R}$  e dal Teorema di Tychonoff (cf. Teorema II.3.22) si conclude che i sottoinsiemi chiusi e limitati di  $\mathbb{R}^n$  sono (tutti e soli i) sottospazi compatti. Infatti, se  $K$  è un sottoinsieme chiuso e limitato di  $\mathbb{R}^n$ , allora  $K$  è contenuto in una palla aperta  $B(x, r)$ , per un opportuno punto  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e quindi  $K$  è un sottoinsieme chiuso del compatto  $\prod_{i=1}^n [x_i - r, x_i + r]$  ed è perciò un compatto.

In uno spazio metrico qualsiasi, i sottospazi compatti sono chiusi e limitati, ma non è in generale vero che ogni sottoinsieme chiuso e limitato sia un sottospazio compatto.

L'immagine continua di un compatto è un compatto; ovvero vale la seguente

**3.24 Proposizione.** *Sia  $f : X \rightarrow Y$  un'applicazione continua tra spazi topologici. Se  $X$  è compatto, allora la sua immagine  $f(X)$  è un sottospazio compatto di  $Y$ .*

*dim.* Sia  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  un ricoprimento aperto di  $f(X)$ . Allora, essendo  $f$  continua,  $f^{-1}\mathcal{U} = (f^{-1}(U_i))_{i \in I}$  è un ricoprimento aperto di  $X$ ; ed, essendo  $X$  compatto, esistono  $n$  aperti  $f^{-1}(U_{i_1}), \dots, f^{-1}(U_{i_n})$  tali che

$$X = f^{-1}(U_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(U_{i_n}).$$

Dunque  $f(X) \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$  ed  $f(X)$  è compatto. **CVD** □

Ricordiamo che un'applicazione tra spazi topologici  $f : X \rightarrow Y$  si dice *chiusa* (risp. *aperta*) se l'immagine di ogni chiuso (risp. aperto) di  $X$  è un chiuso (risp. aperto) di  $Y$ .

**3.25 Corollario.** *Siano  $X$  uno spazio topologico compatto,  $Y$  uno spazio di Hausdorff ed  $f : X \rightarrow Y$  un'applicazione continua.*

(a)  *$f$  è un'applicazione chiusa.*

(b) *Se  $f$  è biettiva allora la sua inversa è continua, e quindi  $f$  è un omeomorfismo.*

*dim.* È sufficiente dimostrare che  $f$  è un'applicazione chiusa. Se  $F$  è un chiuso di  $X$ , allora  $F$  è un sottospazio compatto e quindi  $f(F)$  è anch'esso compatto in  $Y$ . Poiché  $Y$  è uno spazio di Hausdorff, ne consegue che  $f(F)$  è chiuso, che è quanto volevamo verificare. **CVD** □

Ricordiamo qui un risultato sugli spazi compatti.

**3.26 Corollario.** [Teorema di Weierstrass] *Sia  $X$  uno spazio topologico compatto ed  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  un'applicazione continua. Allora  $f$  ha un valore massimo ed un valore minimo su  $X$ .*

*dim.* L'immagine di  $f$  è un compatto  $K$  e quindi è un sottoinsieme chiuso e limitato di  $\mathbb{R}$  (cf. Osservazione II.3.23). Dunque esistono  $m = \inf K$  ed  $M = \sup K$  e, poiché  $K$  è chiuso,  $m$  ed  $M$  appartengono entrambi a  $K$ . Infatti se, ad esempio,  $M$  appartenesse al complementare, dovrebbe esistere un intervallo  $(M - \varepsilon, M + \varepsilon)$ , con  $\varepsilon > 0$ , tutto contenuto in  $\mathbb{R} \setminus K$ , contro l'ipotesi che  $K$  sia l'estremo superiore (e quindi ci sia qualche elemento di  $K$  in  $(M - \varepsilon, M]$ ). **CVD** □

**3.27 Osservazione.** [sottospazi compatti di uno spazio metrico e successioni] Vogliamo ricordare una caratterizzazione dei sottospazi compatti di uno spazio metrico in termini di successioni, che a volte si rivela utile in Analisi Matematica. Ricordiamo che, data una successione  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  di punti di un insieme  $X$ , ovvero una funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ ,  $n \mapsto x_n$ , si chiama *sottosuccessione* estratta dalla successione data la composizione di  $f$  con una funzione crescente  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $k \mapsto n(k)$ , e la sottosuccessione si indica con  $(x_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ .

Vogliamo mostrare la seguente

**3.28 Proposizione.** Sia  $X$  uno spazio metrico. Sono equivalenti

(a)  $X$  è compatto.

(b) [Condizione di Bolzano e Weierstrass] da ogni successione di punti di  $X$  si può estrarre una sottosuccessione convergente.

*dim.* (a)  $\Rightarrow$  (b). Sia  $X$  uno spazio metrico compatto e sia  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di punti di  $X$ . Se l'immagine della successione, ovvero l'insieme  $I = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  è un sottoinsieme finito, allora esiste una sottosuccessione costante e perciò convergente. Supponiamo quindi che  $I$  sia un insieme infinito. Poiché  $X$  è compatto, per ogni numero reale  $\varepsilon > 0$ ,  $X$  è ricoperto da un numero finito di palle di raggio  $\varepsilon$  ed usiamo questo fatto per costruire una sottosuccessione convergente. Fissato il numero reale 1,  $X$  è ricoperto da un numero finito di palle di raggio 1 e quindi una almeno di queste deve contenere infiniti punti di  $I$ . Sia  $B_1 = B(y_1, 1)$  una tale palla ed indichiamo con  $n(1)$  il minimo numero naturale  $n$  tale che  $x_n \in B_1 \cap I$ . La palla chiusa  $\overline{B_1}$  è contenuta nel compatto  $X$  e quindi è a sua volta compatta; possiamo perciò ricoprire  $\overline{B_1}$  con un numero finito di palle di raggio  $\frac{1}{2}$  ed una almeno tra queste, sia  $B_2 = B(y_2, \frac{1}{2})$ , deve contenere infiniti punti di  $I$ . Indichiamo con  $n(2)$  il minimo numero naturale  $n > n(1)$  tale che  $x_n \in B_2 \cap I$ . Proseguendo in questo modo possiamo definire una famiglia di palle  $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ove  $B_k$  ha raggio  $\frac{1}{k}$  e contiene infiniti punti di  $I$  e, per ogni  $k > 1$ ,  $B_k \subset B_{k-1}$ . Inoltre si è costruita una sottosuccessione  $(x_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  tale che, fissato comunque  $k_0$ , si ha  $x_{n(k)} \in B_{k_0}$ , per ogni  $k > k_0$ . Vogliamo mostrare che

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{B_k} = \{x_0\} \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n(k)} = x_0.$$

Poiché il raggio delle palle  $B_k$  tende a 0, la loro intersezione contiene al più un punto. Se  $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{B_k}$  fosse vuoto allora

la famiglia dei complementari  $(X \setminus \overline{B_k})_{k \in \mathbb{N}}$  sarebbe un ricoprimento aperto del compatto  $X$  e quindi esisterebbe un indice  $k_0$  per cui  $X = X \setminus \overline{B_{k_0}}$ , ma questo è assurdo perché in  $B_{k_0}$  ci sono infiniti punti di  $I$  e quindi infiniti punti di  $X$ .

Sia dunque  $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{B_k} = \{x_0\}$  e sia fissato comunque un numero reale  $\varepsilon > 0$ . Consideriamo la palla aperta  $B(x_0, \varepsilon)$  ed osserviamo che, se  $1/k_0 < \varepsilon/2$ , allora  $x_{n(k)} \in B_{k_0} \subseteq B(x_0, \varepsilon)$ , per ogni  $k > k_0$  e quindi la sottosuccessione converge ad  $x_0$ .

(b)  $\Rightarrow$  (a). Dimostriamo dapprima che vale il seguente fatto: *fissato comunque un numero reale  $\varepsilon > 0$ ,  $X$  può essere ricoperto da un numero finito di palle di raggio  $\varepsilon$ .*

Fissato ad arbitrio un punto  $x_1$ , se  $X \neq B(x_1, \varepsilon)$  esiste almeno un punto  $x_2$  con  $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$ . Se  $X \neq B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)$ , allora esiste un punto  $x_3$  tale che  $d(x_1, x_3) \geq \varepsilon$  e  $d(x_2, x_3) \geq \varepsilon$ . Proseguendo in questo modo, si determinano i punti  $x_1, \dots, x_n$ , soddisfacenti alle condizioni  $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$  per ogni  $i \neq j$ . Se questo processo non si arresta dopo un numero finito di passi si costruisce la successione  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  da cui non si può estrarre nessuna sottosuccessione convergente perché  $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$  per ogni  $i \neq j$ .

Supponiamo ora che vi sia un ricoprimento aperto  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  di  $X$  da cui non si possa estrarre un sottoricoprimento finito. Per quanto visto sopra, fissato comunque un numero reale  $\varepsilon > 0$ ,  $X$  può essere ricoperto da un numero finito di palle di raggio  $\varepsilon$  e quindi una almeno di queste palle non può essere ricoperta da un numero finito di aperti del ricoprimento  $\mathcal{U}$ . In corrispondenza ai numeri reali  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$  esistono quindi le palle  $B(x_n, \frac{1}{n})$  che non possono essere ricoperte da un numero finito di aperti di  $\mathcal{U}$ . La successione dei centri  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ammette quindi una sottosuccessione convergente ad un punto  $x_0 \in X$ . Allora, preso un aperto  $U_{i_0}$  del ricoprimento  $\mathcal{U}$ , contenente  $x_0$ ; esiste un numero reale positivo  $r$  tale che  $B(x_0, r) \subseteq U_{i_0}$ . Esistono quindi infiniti punti  $x_{n(k)}$  della sottosuccessione convergente ad  $x_0$  che stanno in  $B(x_0, r)$  e con  $n(k) > \frac{2}{r}$ , per questi punti si ha  $B(x_{n(k)}, \frac{1}{n(k)}) \subseteq B(x_0, r) \subseteq U_{i_0}$  e questo è assurdo perché le palle  $B(x_{n(k)}, \frac{1}{n(k)})$ , per costruzione, non possono essere ricoperte da un numero finito di aperti del ricoprimento  $\mathcal{U}$ . Dunque un tale ricoprimento aperto non può esistere ed  $X$  è quindi compatto. **CVD**  $\square$

Ricordiamo ora alcune definizioni

**3.29 Definizione.** Sia  $X$  uno spazio metrico. Una successione  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  di punti di  $X$  è una *successione di Cauchy* se, fissato comunque un numero reale  $\varepsilon > 0$ , esiste un indice  $n_0$  tale che  $n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$ .

Uno spazio metrico  $X$  si dice *completo* se ogni successione di Cauchy converge in  $X$ .

Lasciamo al lettore il compito di dimostrare il fatto seguente. *Se una successione di Cauchy  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  di punti di uno spazio metrico  $X$  ammette una sottosuccessione convergente ad un punto  $x_0$  di  $X$ , allora  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .*

Da ciò e dalla condizione di Bolzano e Weierstrass si conclude che uno spazio metrico compatto è anche completo.

Concludiamo con un risultato sui punti uniti delle contrazioni.

**3.30 Definizione.** Sia  $X$  uno spazio metrico. Un'applicazione  $f : X \rightarrow X$  si dice una *contrazione* se esiste un numero reale  $c \in (0, 1)$  tale che  $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$ , per ogni coppia di punti  $x, y \in X$ .

**3.31 Proposizione.** Sia  $X$  uno spazio metrico completo ed  $f : X \rightarrow X$  una contrazione. Allora esiste un unico punto  $x_0 \in X$  tale che  $f(x_0) = x_0$ .

*dim.* È chiaro che, se esiste un punto unito  $x_0$ , questi è unico. Infatti, se ce ne fossero due distinti  $x_0, x_1$ , si dovrebbe avere  $d(x_0, x_1) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq cd(x_0, x_1)$ , che è palesemente assurdo ( $c < 1$ ).

Sia ora  $x \in X$ . Se  $f(x) \neq x$ , possiamo considerare la successione  $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ , e verifichiamo che si tratta di una successione di Cauchy. Infatti, presi due numeri interi,  $n \geq m$ , si ha

$$\begin{aligned} d(f^n(x), f^m(x)) &\leq c^m d(f^{n-m}(x), x) \leq \\ &\leq c^m (d(f^{n-m}(x), f^{n-m-1}(x)) + d(f^{n-m-1}(x), f^{n-m-2}(x)) + \cdots + d(f(x), x)) \leq \\ &\leq c^m (c^{n-m-1} + c^{n-m-2} + \cdots + 1) d(f(x), x) \leq \\ &\leq \frac{c^m}{1-c} d(f(x), x). \end{aligned}$$

Quindi, fissato comunque  $\varepsilon > 0$ , possiamo determinare un numero naturale  $n_0$  tale che  $d(f^n(x), f^m(x)) < \varepsilon$  per  $n, m \geq n_0$ . Posto  $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)$ , si verifica facilmente che  $f$  è continua e quindi

$$f(x_0) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x) = x_0.$$

CVD

□



# III

## Varietà differenziabili

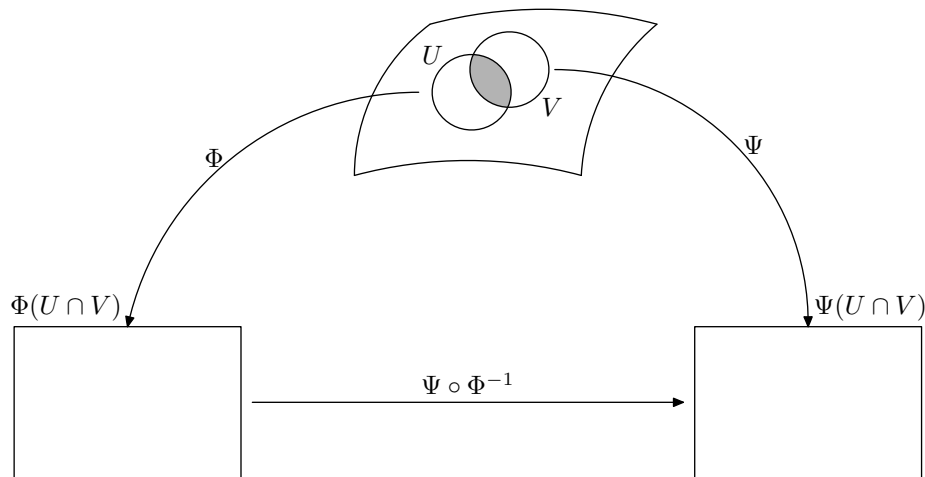
Per meglio comprendere la teoria delle superficie ed in vista di una sua generalizzazione a dimensioni superiori, abbiamo bisogno di introdurre la nozione di varietà differenziabile.

### 1. Varietà differenziabile.

**1.1 Definizione.** Sia  $X$  uno spazio topologico. Una *carta locale di dimensione  $n$*  su  $X$  è una coppia  $(U, \Phi)$ , ove  $U$  è un aperto di  $X$ , detto *aperto coordinato* e  $\Phi : U \rightarrow U'$  è un omeomorfismo su un aperto  $U'$  di  $\mathbb{R}^n$ , detto un *sistema di coordinate locali* su  $U$ . Un *atlante di classe  $\mathcal{C}^k$*  su  $X$  è una famiglia di carte locali su  $X$ , tale che gli aperti coordinati formino un ricoprimento di  $X$  e, per ogni coppia di carte  $(U, \Phi)$  e  $(V, \Psi)$ , l'applicazione

$$\Psi \circ \Phi^{-1} : \Phi(U \cap V) \rightarrow \Psi(U \cap V) \quad [\text{cambiamento di coordinate}]$$

sia (un diffeomorfismo) di classe  $\mathcal{C}^k$ .



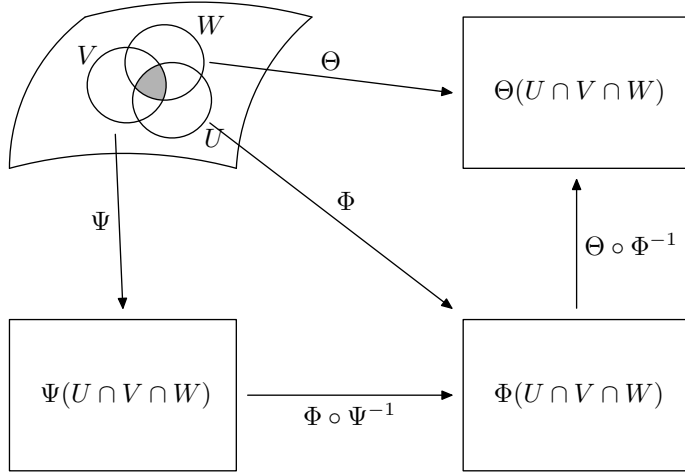
Su uno spazio topologico  $X$  possono essere posti diversi atlanti, che possono essere ordinati (parzialmente) per inclusione. Potremo quindi parlare di *atlanti massimali* di classe  $\mathcal{C}^k$  su  $X$ , ovvero non contenuti propriamente in nessun altro atlante della stessa classe. Possiamo già dare una prima definizione di varietà anche se, nel seguito, porremo delle condizioni un po' più restrittive sulla topologia dello spazio per escludere degli esempi "patologici" di varietà.

**1.2 Definizione.** Una *varietà differenziabile di classe  $\mathcal{C}^k$*  è uno spazio topologico  $X$  dotato di un atlante massimale di classe  $\mathcal{C}^k$ .

Dati una varietà  $X$  di classe  $\mathcal{C}^k$  ( $k > 0$ ) ed un suo punto  $x$ , è ben definita la nozione di *dimensione* di  $X$  in  $x$ . Se  $(U, \Phi)$  è una carta locale di dimensione  $n$  ed  $x \in U$ , si pone  $\dim_x X = n$  e la definizione è ben posta, perché se  $(V, \Psi)$  fosse una carta locale di dimensione  $m$  ed  $x \in V$ , si avrebbe che il cambiamento di coordinate  $\Psi \circ \Phi^{-1}$  sarebbe un diffeomorfismo, avente  $\Phi \circ \Psi^{-1}$  come inversa e quindi le corrispondenti matrici Jacobiane dovrebbero essere l'una l'inversa dell'altra e quindi matrici quadrate, ovvero deve aversi  $n = m$ .

In particolare, da ciò discende che la funzione  $x \mapsto \dim_x(X)$  è una funzione localmente costante su  $X$  e quindi ogni componente connessa di  $X$  avrà dimensione costante.

**1.3 Osservazione.** Sia  $\mathcal{A}$  un atlante di classe  $\mathcal{C}^k$  su uno spazio topologico  $X$ . Allora  $\mathcal{A}$  è contenuto in un unico atlante massimale di classe  $\mathcal{C}^k$ .



*dim.* Sia  $\mathcal{B}$  l'insieme delle carte locali  $(V, \Psi)$  su  $X$  tali che  $\Psi \circ \Phi^{-1}$  sia un diffeomorfismo di classe  $\mathcal{C}^k$ , per ogni carta locale  $(U, \Phi)$  dell'atlante  $\mathcal{A}$ . È chiaro che, se  $\mathcal{B}$  è un atlante  $\mathcal{C}^k$ , allora è massimale e contiene ogni atlante  $\mathcal{C}^k$  contenente  $\mathcal{A}$ . Siano quindi  $(V, \Psi)$  e  $(W, \Theta)$  in  $\mathcal{B}$  e consideriamo  $\Theta \circ \Psi^{-1} : \Psi(V \cap W) \rightarrow \Theta(V \cap W)$ . Preso comunque un punto  $x \in V \cap W$ , esiste una carta locale  $(U, \Phi)$  in  $\mathcal{A}$  tale che  $x \in U$  e quindi, restringendo le funzioni a  $\Psi(U \cap V \cap W)$  si ha  $\Theta \circ \Psi^{-1} = (\Theta \circ \Phi^{-1}) \circ (\Phi \circ \Psi^{-1})$ .

Dunque  $\Theta \circ \Psi^{-1}$  è di classe  $\mathcal{C}^k$  in quanto composizione di funzioni di classe  $\mathcal{C}^k$  e questo è sufficiente per concludere. **CVD**  $\square$

Ciò significa che la conoscenza di un atlante su uno spazio topologico  $X$  è sufficiente a caratterizzare una struttura di varietà differenziabile sullo stesso. In particolare, dati un atlante  $\mathcal{A}$  su  $X$  ed un aperto  $A$  di  $X$ , resta individuata su  $A$  una struttura di varietà differenziabile, prendendo come atlante

$$\mathcal{A}_A = \{ (U \cap A, \Phi_{U \cap A}) \mid (U, \Phi) \in \mathcal{A} \}$$

ed osservando che la struttura di varietà così definita non dipende dalla scelta dell'atlante (compatibile) su  $X$ .

**1.4 Definizione.** Siano  $M$  ed  $N$  varietà differenziabili di classe  $\mathcal{C}^k$ . Un'applicazione  $f : M \rightarrow N$  è di classe  $\mathcal{C}^h$  ( $h \leq k$ ) in un punto  $x \in M$ , se esistono carte  $(U, \Phi)$  su  $M$ ,  $(V, \Psi)$  su  $N$  tali che  $x \in U$ ,  $f(x) \in V$  e l'applicazione composta  $\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}$  sia di classe  $\mathcal{C}^h$ . Diremo che  $f$  è di classe  $\mathcal{C}^h$  (su  $M$ ) se lo è in ogni punto  $x \in M$ .

Osserviamo che, se  $f : M \rightarrow N$  è di classe  $\mathcal{C}^h$  in un punto  $x$  allora, per ogni carta locale  $(A, \Xi)$ ,  $(B, \Theta)$ , tali che  $x \in A \cap f^{-1}B$ , l'applicazione composta  $\Theta \circ f \circ \Xi^{-1}$  è di classe  $\mathcal{C}^h$  in un intorno di  $\Xi(x)$ . In particolare, da ciò discende che la composizione di due applicazioni  $\mathcal{C}^h$  è ancora di classe  $\mathcal{C}^h$ .

Un *diffeomorfismo*  $\mathcal{C}^h$  tra due varietà  $M$  ed  $N$ , è un'applicazione biettiva  $f : M \rightarrow N$ , di classe  $\mathcal{C}^h$  assieme con la sua inversa.

**1.5 Definizione.** Sia  $f : M \rightarrow N$  un'applicazione di classe  $\mathcal{C}^h$  tra due varietà di classe  $\mathcal{C}^k$ . Dato un punto  $x \in M$ , definiamo il *rango di  $f$  in  $x$*  come il rango della matrice Jacobiana  $J(\Psi \circ f \circ \Phi^{-1})$  nel punto  $\Phi(x)$ , ove  $(U, \Phi)$  è una carta su  $M$ ,  $(V, \Psi)$  è una carta su  $N$  ed  $x \in U \cap f^{-1}(V)$ .

Diremo che  $f$  è un'*immersione locale* se  $\text{rk}_x f = \dim_x M$  per ogni punto  $x \in M$ .

Diremo che  $f$  è un *diffeomorfismo locale* se ogni punto  $x \in M$  ha un intorno aperto  $W_x$  tale che  $f(W_x)$  sia aperto e la restrizione  $f : W_x \rightarrow f(W_x)$  sia un diffeomorfismo. Per il *Teorema II.1.2*,  $f$  è un diffeomorfismo locale se, e solo se,

$$\text{rk}_x f = \dim_x M = \dim_{f(x)} N, \quad \text{per ogni } x \in M.$$

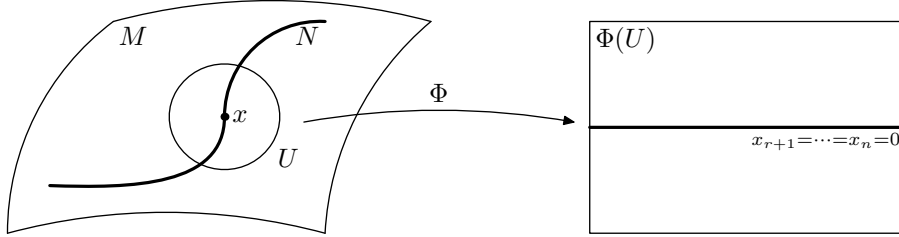
Si osservi che un diffeomorfismo è un diffeomorfismo locale biunivoco.

D'ora in poi supporremo sempre di lavorare con varietà e morfismi  $\mathcal{C}^\infty$ , cioè con varietà e morfismi *lisci*. Nel seguito passeremo in rassegna una serie di procedimenti tramite i quali si possono costruire varietà differenziabili a partire da varietà date.

**1.6 Sottovarietà.** Un sottoinsieme  $N$  di una varietà differenziabile  $M$  è una *sottovarietà differenziabile* se, per ogni punto  $x \in N$ , esiste una carta locale  $(U, \Phi)$  tale che

$$U \cap N = \Phi^{-1} \left( \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_{r+1} = \cdots = x_n = 0 \right\} \right)$$

per qualche  $r$ ,  $1 \leq r \leq n$ . In particolare,  $N$  è localmente chiuso in  $M$ ; ovvero, per ogni punto  $x \in N$  esiste un intorno  $U$  di  $x$  in  $M$  tale che  $U \cap N$  sia chiuso in  $U$ .



**1.7 Lemma.** Se  $N$  è una sottovarietà differenziabile di una varietà  $M$ , allora vi è un'unica struttura di varietà differenziabile su  $N$  che renda l'inclusione  $j : N \rightarrow M$  un'immersione.

*dim.* Data una carta  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  di  $M$ , indichiamo con  $\phi_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  la composizione di  $\Phi$  con l' $i$ -esima proiezione  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , per  $1 \leq i \leq n$ . Consideriamo le carte  $(U, \Phi)$  su  $M$  tali che

$$U \cap N = \{ P \in U \mid \phi_{r+1}(p) = \cdots = \phi_n(p) = 0 \}$$

e definiamo carte su  $N$  prendendo  $(U \cap N, \phi_1|_{U \cap N}, \dots, \phi_r|_{U \cap N})$ . L'insieme di queste carte è un atlante,  $\mathcal{A}$ , su  $N$  ed è chiaro che l'inclusione  $j$  è un'immersione, perché, in coordinate locali, ha la forma  $(x_1, \dots, x_r) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$ .

Sia data su  $N$  una struttura differenziale tale che  $j$  sia un'immersione e sia  $(V, \Psi)$  è una carta locale relativa a tale struttura. L'applicazione  $j \circ \Psi^{-1} : \Psi(V) \rightarrow M$  ha rango costante uguale ad  $r$  e quindi, a meno di restringere  $V$ , esiste un aperto coordinato  $U$  di  $M$  tale che  $V = U \cap N$  e, per il *Corollario II.1.3*, delle coordinate locali  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  tali che  $\Phi \circ j \circ \Psi^{-1}$  sia della forma  $(x_1, \dots, x_r) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$ . Ciò significa che  $V$  è il sottoinsieme di  $U$  ove si annullano  $\phi_{r+1}, \dots, \phi_n$  e che  $\psi_i = \phi_i|_V$  per  $i = 1, \dots, r$ . Dunque  $(V, \Psi)$  appartiene ad  $\mathcal{A}$ . **CVD**  $\square$

D'ora in poi supporremo sempre che le sottovarietà di  $M$  siano dotate della struttura differenziale definita sopra. Un'importante classe di sottovarietà sono le fibre dei morfismi lisci.

**1.8 Proposizione.** Siano  $M$  ed  $N$  varietà differenziabili ed  $f : M \rightarrow N$  un morfismo liscio. Sia  $x$  un punto di  $N$  e supponiamo che  $f$  abbia rango costante in un intorno di  $f^{-1}(x)$ . Allora la fibra  $f^{-1}(x)$  è una sottovarietà differenziabile di  $M$  e, se  $\dim M = m$  e  $\text{rk } f = r$  in un intorno di  $f^{-1}(x)$ , allora  $\dim f^{-1}(x) = m - r$ .

*dim.* Sostituendo  $M$  con un intorno della fibra  $f^{-1}(x)$ , possiamo supporre che il rango di  $f$  sia costante. Applicando il teorema del rango (cf. *Corollario II.1.3*), fissato un punto  $y \in f^{-1}(x)$ , esistono carte  $(U, \Phi)$  su  $M$ ,  $(V, \Psi)$  su  $N$  tali che  $y \in U$ ,  $x = f(y) \in V$ ,  $\Psi(y) = 0$  e l'applicazione composta  $\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}$  sia della forma  $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$ . In particolare, indicate con  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  le componenti di  $\Phi$ , si ha

$$f^{-1}(x) \cap U = \{ P \in U \mid \varphi_1(P) = \cdots = \varphi_r(P) = 0 \};$$

e quindi la fibra  $f^{-1}(x)$  è una sottovarietà differenziabile di  $M$  e la sua dimensione è  $m - r$ . **CVD**  $\square$

Enunciamo esplicitamente una conseguenza della Proposizione precedente

**1.9 Corollario.** Siano  $M$  ed  $N$  varietà differenziabili di dimensioni  $m$  ed  $n$  e sia  $f : M \rightarrow N$  un'applicazione liscia. Sia  $x$  un punto di  $N$  e supponiamo che  $f$  abbia rango  $n$  su  $f^{-1}(x)$ ; allora la fibra  $f^{-1}(x)$  è una sottovarietà differenziabile di  $M$  di dimensione  $m - n$ .

La dimostrazione discende dall'osservazione che il rango è una funzione *semicontinua inferiormente*<sup>(\*)</sup> e quindi il rango di  $f$  deve essere maggiore od uguale ad  $n$  su un intorno  $A$  della fibra  $f^{-1}(x)$ . Non potendo essere maggiore di  $n = \dim N$ , il rango è costante su  $A$  e si può applicare la Proposizione precedente.

**1.10 Unione disgiunta.** Se  $\{M_i\}_{i \in I}$  è una famiglia di varietà differenziabili, vi è una struttura naturale di varietà differenziabile sull'unione disgiunta  $M = \coprod_{i \in I} M_i$  che ha come atlante l'unione disgiunta degli atlanti delle singole varietà  $M_i$ . Ciascuno degli  $M_i$  è aperto in  $M$ .

**1.11 Prodotto.** Se  $M$  ed  $N$  sono varietà differenziabili, vi è una struttura naturale di varietà sul prodotto  $M \times N$ . L'atlante è costituito dalle applicazioni  $\Phi \times \Psi : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ , ove  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $\Psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  sono carte locali per  $M$  ed  $N$ . In particolare le proiezioni  $\pi_M : M \times N \rightarrow M$  e  $\pi_N : M \times N \rightarrow N$  sono lisce ed un'applicazione  $f : L \rightarrow M \times N$  è liscia se, e solo se, lo sono  $\pi_M \circ f$  e  $\pi_N \circ f$ .

**1.12 Incollamento.** Sia  $M$  una varietà differenziabile e siano  $A$  e  $B$  due aperti di  $M$  le cui chiusure siano disgiunte. Dato un diffeomorfismo  $f : A \rightarrow B$ , possiamo considerare lo spazio topologico  $X$  ottenuto da  $M$  identificando ogni punto  $x$  di  $A$  con  $f(x) \in B$ ; ovvero il quoziente di  $M$  per la relazione di equivalenza

$$P \sim Q \Leftrightarrow P = Q \text{ oppure } Q = f(P) \text{ oppure } P = f(Q).$$

Indicata con  $\pi : M \rightarrow X$  l'applicazione naturale, osserviamo che si tratta di un'applicazione aperta e che le restrizioni di  $\pi$  ad  $M \setminus \bar{A}$  e ad  $M \setminus \bar{B}$  sono omeomorfismi sulle rispettive immagini; in particolare, la restrizione ad  $A \subset M \setminus \bar{B}$  di  $\pi_{|M \setminus \bar{A}}^{-1} \circ \pi_{|M \setminus \bar{B}}$  coincide con  $f$ . Le carte su  $X$  sono definite a partire da carte  $(U, \Phi)$ ,  $(V, \Psi)$  su  $M$ , prendendo le coppie  $(U, \Phi \circ \pi_{|M \setminus \bar{A}}^{-1})$ , se  $U \cap \bar{A} = \emptyset$ , e le coppie  $(V, \Psi \circ \pi_{|M \setminus \bar{B}}^{-1})$ , se  $V \cap \bar{B} = \emptyset$ . Le carte sono compatibili sulle intersezioni perché  $\pi_{|M \setminus \bar{A}}^{-1} \circ \pi_{|M \setminus \bar{B}}$  è definita su  $A \cup (M \setminus \bar{A})$  e coincide con l'identità su  $M \setminus \bar{A}$  e con  $f$  su  $A$ .

**1.13 Rivestimento.** Sia  $X$  una varietà differenziabile, un *rivestimento* di  $X$  è un'applicazione suriettiva  $\pi : M \rightarrow X$ , da uno spazio topologico  $M$ , tale che, per ogni punto  $x \in X$  esista un aperto (detto *aperto ammissibile*) tale che  $\pi^{-1}(U) = \coprod U_i$ , unione disgiunta di aperti di  $M$  tali che  $\pi_{|U_i} : U_i \rightarrow U$  sia un omeomorfismo, per ogni  $i$ . La varietà  $X$  è ricoperta da aperti coordinati ammissibili e quindi le coppie  $(U_i, \Phi \circ \pi_{|U_i})$ , formano un atlante su  $M$ .

**1.14 Quoziente per l'azione di un gruppo propriamente discontinuo, senza punti fissi.** Siano dati una varietà differenziabile,  $M$ , ed un gruppo,  $G$ , che agisce su  $M$  in modo liscio, ovvero, per ogni  $g \in G$  l'applicazione  $x \mapsto gx$  è liscia su  $M$ . Supponiamo inoltre che  $G$  agisca in modo *propriamente discontinuo e senza punti fissi*, ovvero, per ogni punto  $x \in M$ , esiste un intorno aperto  $A$  di  $x$  in  $M$  tale che  $A \cap gA \neq \emptyset$  se, e solo se,  $g$  è l'elemento neutro di  $G$ . Diremo che un tale aperto  $A$  è un *aperto buono* di  $M$ . L'insieme delle orbite  $X = M/G$  è quindi uno spazio topologico e l'applicazione canonica  $\pi : M \rightarrow X$  è un omeomorfismo locale. In particolare, se  $U$  è un aperto buono di  $M$ ,

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \coprod_{g \in G} gU$$

e  $\pi$  induce un omeomorfismo tra  $\pi(U)$  e ciascuno dei  $gU$ . Le carte su  $X$  del tipo  $(\pi(U), \Phi \circ \pi_{|U}^{-1})$ , al variare di  $U$  tra gli aperti buoni di  $M$ , formano un atlante e  $\pi$  viene ad essere un diffeomorfismo locale ed un rivestimento di  $X$ .

<sup>(\*)</sup> Sia  $X$  uno spazio topologico. Una funzione  $r : X \rightarrow \mathbb{R}$  è *semicontinua inferiormente* se la controimmagine  $r^{-1}(b, +\infty)$  è aperta per ogni  $b \in \mathbb{R}$ .



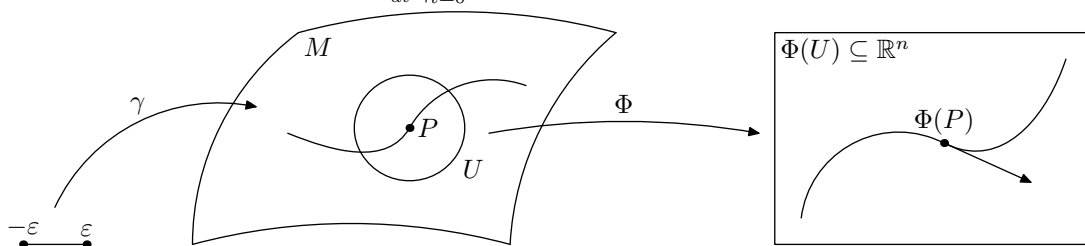
## 2. Spazio tangente

Sia  $M$  una varietà differenziabile ed indichiamo con  $\gamma : I \rightarrow M$  un *cammino liscio* su  $M$ , ovvero un'applicazione liscia da un intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$  (non necessariamente aperto o chiuso o limitato) su  $M$ . Fissato un punto  $P \in M$ , consideriamo l'insieme di cammini lisci

$$\mathcal{V}_P = \{ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \mid \gamma(0) = P \}.$$

Fissato un sistema di coordinate locali  $(U, \Phi)$  in un intorno di  $P$ , resta definita un'applicazione  $\alpha : \mathcal{V}_P \rightarrow \mathbb{R}^n$  che associa a  $\gamma$  il vettore

$$\frac{d(\Phi \circ \gamma)}{dt} \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \Big|_{t=0} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \Big|_{t=0} \end{pmatrix}, \quad \text{ove } \Phi(\gamma(t)) = (x_1(t), \dots, x_n(t)).$$



**2.1 Proposizione.** L'applicazione  $\alpha : \mathcal{V}_P \rightarrow \mathbb{R}^n$  definita sopra è suriettiva e determina una relazione di equivalenza su  $\mathcal{V}_P$ . L'insieme quoziente di  $\mathcal{V}_P$  rispetto a questa relazione di equivalenza si indica con  $T_P M$  ed è uno spazio vettoriale reale di dimensione  $n$ . La struttura di spazio vettoriale su  $T_P M$  è indipendente dalla scelta delle coordinate  $(U, \Phi)$ .

*dim.* Dato un vettore  $a \in \mathbb{R}^n$ , sia  $\Phi(P) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$  e consideriamo la curva  $\gamma_a : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ , definita da  $\gamma_a(t) = \Phi^{-1}(b + ta)$ , ove  $\varepsilon$  è sufficientemente piccolo. È chiaro che il vettore tangente è

$$\alpha(\gamma_a) = \frac{d(\Phi \circ \gamma_a)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d(b + ta)}{dt} \Big|_{t=0} = a;$$

e quindi  $\alpha$  è suriettiva.

Due cammini,  $\gamma$  e  $\gamma'$ , sono equivalenti in  $\mathcal{V}_P$  se, e solo se,  $\alpha(\gamma) = \alpha(\gamma')$  e quindi, poiché  $\alpha$  è suriettiva, l'insieme quoziente coincide con  $\mathbb{R}^n$ .

È chiaro infine che, scelte diverse delle coordinate in  $P$ , danno luogo a isomorfismi di  $\mathbb{R}^n$ , di matrice, la matrice jacobiana del cambiamento di coordinate. Sia  $[\gamma] \in T_P M$  e consideriamo due sistemi di coordinate  $\Phi$  e  $\Psi$  su un intorno  $U$  di  $P$ . Si ha  $\Phi(\gamma(t)) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  e  $\Psi(\gamma(t)) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$  ed

$$\alpha_\Phi(\gamma) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \alpha_\Psi(\gamma) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \text{ove } a_j = \frac{dx_j}{dt} \Big|_{t=0}, \quad j = 1, \dots, n \quad b_i = \frac{dy_i}{dt} \Big|_{t=0}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Si ha

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \Psi \circ \Phi^{-1} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{e quindi} \quad \frac{dy_i}{dt} \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\pi_i \circ \Psi \circ \Phi^{-1})}{\partial x_j}(\Phi(P)) \frac{dx_j}{dt} \Big|_{t=0},$$

ove  $\pi_i$  è l' $i$ -esima proiezione di  $\mathbb{R}^n$ . Si conclude che  $b = Ja$ , ove  $J = J_{\Phi(P)}(\Psi \circ \Phi^{-1})$  è la matrice jacobiana del cambiamento di coordinate in  $P$ . **CVD**  $\square$

Lo spazio vettoriale  $T_P M$  è lo *spazio tangente* alla varietà  $M$  nel punto  $P$ . La struttura di spazio vettoriale è indipendente dalla scelta delle coordinate locali, a ciascuna delle quali resta associata una base dello spazio tangente. Come nel caso dello spazio  $\mathbb{R}^n$ , i vettori tangenti si possono rappresentare come derivate direzionali. Se  $X = [\gamma] \in T_P M$ , ed  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione differenziabile, definita in un intorno  $U$  di  $P$  ed è fissato un sistema di coordinate locali in  $P$ , con  $\Phi(\gamma(t)) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ , si pone

$$X(f) := \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \left. \frac{dx_i}{dt} \right|_{t=0},$$

ove  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P)$  indica l' $i$ -esima derivata parziale di  $f \circ \Phi^{-1}$  calcolata in  $\Phi(P)$ . Quindi, posto  $a_i = \left. \frac{dx_i}{dt} \right|_{t=0}$ , scriveremo  $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , osservando che il vettore tangente  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  corrisponde alla curva  $\gamma_i(t) = \Phi^{-1}(te_i + \Phi(P))$ , ove  $e_1, \dots, e_n$  è la base canonica di  $\mathbb{R}^n$ .

I vettori tangenti agiscono come derivazioni sulle funzioni; infatti, se  $f$  e  $g$  sono funzioni definite in un intorno di  $P$ , ed  $X \in T_P M$ , si ha

$$(2.2) \quad \begin{cases} X(f) = 0 & \text{se } f \text{ è costante} \\ X(f+g) = X(f) + X(g) \\ X(fg) = f(P)X(g) + g(P)X(f) \end{cases}$$

ed osserviamo che se  $\xi$  è una derivazione sulle funzioni in  $P$  che gode delle proprietà (III.2.2), allora, fissato un sistema di coordinate locali  $(x_1, \dots, x_n)$  e posto  $a_i = \xi(x_i)$ , il vettore tangente  $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  coincide con  $\xi$ . Ricordiamo che ogni funzione liscia,  $f$ , si può scrivere come

$$f = f(P) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_i(P))h_i$$

ove  $h_1, \dots, h_n$  sono funzioni lisce. Applicando  $\xi$  e ricordando le proprietà (III.2.2), si ottiene

$$\xi(f) = \xi(f(P)) + \sum_{i=1}^n h_i(P)\xi(x_i - x_i(P)) + \sum_{i=1}^n \xi(h_i)(x_i(P) - x_i(P)) = \sum_{i=1}^n a_i h_i(P) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = X(f),$$

essendo  $h_i(P) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)$ .

Osserviamo che se  $(x_1, \dots, x_n)$  sono coordinate locali in un intorno  $U$  di  $P$ , allora gli elementi  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$  formano una base dello spazio tangente  $T_Q M$  in ogni punto  $Q \in U$ . Chiameremo *campo di vettori tangenti* su  $U$  ogni applicazione  $s : U \rightarrow \coprod_{P \in M} T_P M$  tale che  $s(P) \in T_P M$  per ogni  $P \in U$ . Ogni campo di vettori tangenti,  $X$ , si scrive in modo unico come  $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$  ove  $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  sono funzioni. Diremo che il campo di vettori è *liscio* (risp. *di classe  $\mathcal{C}^k$* ) su  $U$ , se le funzioni  $a_i$  lo sono. I campi possono essere definiti su aperti qualsiasi, imponendo che coincidano nell'intersezione di aperti coordinati. D'ora in poi con il termine campo di vettori indicheremo, salvo diverso avviso, un campo di vettori tangenti liscio.

È chiaro che i campi di vettori si possono sommare tra loro e si possono moltiplicare per funzioni (scalari) su  $U$ . Se  $X$  è un campo di vettori su  $U$  ed  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione, indichiamo con  $X(f)$  la funzione che in ogni punto  $P \in U$  ha il valore del vettore tangente  $X_P$  calcolato su  $f$ , cioè  $X(f)(P) = X_P(f)$ .

**2.3 Definizione.** Se  $X$  ed  $Y$  sono due campi di vettori tangenti su  $U$ , la *parentesi di Lie*,  $[X, Y]$ , è il campo di vettori che, per ogni punto  $P \in U$  e per ogni  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , è uguale a  $[X, Y]_P(f) = X_P(Y(f)) - Y_P(X(f))$ .

Osserviamo che la definizione è ben posta, ovvero che  $[X, Y]_P \in T_P M$ , per ogni  $P \in U$ , ovvero che si tratta di una derivazione centrata in  $P$ . Infatti, date due funzioni  $f$  e  $g$  su  $U$ , si ha

$$\begin{aligned} [X, Y]_P(fg) &= X_P(Y(fg)) - Y_P(X(fg)) = X_P(fY(g) + gY(f)) - Y_P(fX(g) + gX(f)) = \\ &= f(P)X_P(Y(g)) + X_P(f)Y_P(g) + g(P)X_P(Y(f)) + X_P(g)Y_P(f) - \\ &\quad - f(P)Y_P(X(g)) - Y_P(f)X_P(g) - g(P)Y_P(X(f)) - Y_P(g)X_P(f) = \\ &= f(P)[X, Y]_P(g) + g(P)[X, Y]_P(f). \end{aligned}$$

In coordinate locali, se  $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  ed  $Y = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ , si ha

$$[X, Y] = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left( a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (2.4)$$

Con calcoli diretti si verificano le seguenti proprietà delle parentesi di Lie, l'ultima delle quali è detta *l'identità di Jacobi*.

$$\begin{aligned} [X, Y] &= -[Y, X] \\ [X + Z, Y] &= [X, Y] + [Z, Y] \\ [X, fY] &= X(f)Y + f[X, Y] \\ [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] &= 0. \end{aligned}$$

Le applicazioni (lisce) tra varietà inducono applicazioni lineari tra spazi tangenti.

**2.5 Definizione.** Sia  $f : M \rightarrow N$  un'applicazione liscia tra varietà differenziabili. L'applicazione tangente  $df_P : T_P M \rightarrow T_{f(P)} N$  manda il vettore  $X = [\gamma]$  nella classe del cammino  $f \circ \gamma$ .

In coordinate locali,  $(x_1, \dots, x_n)$  in un intorno di  $P$  ed  $(y_1, \dots, y_m)$  in un intorno di  $f(P)$ , sia  $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , ove  $a_i = \left. \frac{d(x_i \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0}$ . Allora,  $df_P(X) = \sum_{j=1}^m b_j \frac{\partial}{\partial y_j}$ , ove

$$b_j = \left. \frac{d(y_j \circ f \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial(y_j \circ f)}{\partial x_i} \right|_P \left. \frac{d(x_i \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial(y_j \circ f)}{\partial x_i} \right|_P a_i.$$

Dunque, l'applicazione tangente  $df_P$  non dipende dalla scelta del cammino  $\gamma$  ed è un'applicazione lineare avente matrice rispetto alle basi  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$  e  $\left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m} \right\}$ , la matrice jacobiana  $J_{\Phi(P)}(\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}) = \left( \left. \frac{\partial(y_j \circ f)}{\partial x_i} \right|_P \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ .

In particolare, osserviamo che l'applicazione tangente è compatibile con la composizione di applicazioni, ovvero  $d(g \circ f) = dg \circ df$ .

Nelle notazioni precedenti, sia  $g : N \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione liscia. A  $g$  si può associare una funzione liscia,  $f^*(g)$ , su  $M$ , data dalla composizione di  $g$  con  $f$ . Se  $X$  è un vettore tangente ad  $M$  in  $P$ , si ha

$$X(f^*(g)) = df_P(X)(g), \quad (2.6)$$

come si verifica con un calcolo diretto.

**Fibrato Tangente.** Ciascuno degli spazi tangenti  $T_P M$  ad una varietà differenziabile  $M$ , ha una naturale struttura di varietà (essendo isomorfo ad  $\mathbb{R}^n$ , per un opportuno  $n$ ), e quindi il *fibrato tangente*  $TM = \coprod_{P \in M} T_P M$  è una varietà differenziabile ed è ben definita l'applicazione  $\pi : TM \rightarrow M$  che associa ad ogni vettore  $X \in T_P M$  il punto  $P$ . Se  $(U, \Phi)$  è una carta locale su  $M$ , di coordinate locali  $(x_1, \dots, x_n)$ , si ha un omeomorfismo  $\zeta_U : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$  che manda la coppia  $(P, a)$  nel vettore tangente  $\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_P \in T_P M$ . Se indichiamo con  $p_U : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow U$  la proiezione sul primo fattore del prodotto, si ha  $p_U = \pi \circ \zeta_U$ ; ovvero si ha il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\zeta_U} & \pi^{-1}(U) \\ p_U \downarrow & & \downarrow \pi \\ U & \xlongequal{\quad} & U \end{array} \cdot$$

Inoltre, per ogni coppia di aperti coordinati  $(U, \Phi)$  e  $(V, \Psi)$ , si ha il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} (V \cap U) \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\zeta_U} & \pi^{-1}(U \cap V) \\ \lambda \uparrow & & \parallel \\ (V \cap U) \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\zeta_V} & \pi^{-1}(U \cap V) \end{array}$$

ove  $\lambda(P, a) = (P, \varphi_P(a))$  e  $\varphi_P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è un'applicazione lineare invertibile per ogni  $P \in U \cap V$  (la sua matrice è la matrice jacobiana  $J_P(\Psi \circ \Phi^{-1})$ ).

I campi vettoriali sono le sezioni (lisce) del fibrato tangente, ovvero le applicazioni (lisce),  $s : U \rightarrow TM$ , definite su un aperto  $U$  di  $M$ , tali che  $\pi(s(P)) = P$  per ogni punto  $P \in U$ .

### 3. Appendice. Prodotto tensoriale, prodotto esterno.

In questa sezione illustreremo alcune costruzioni algebriche su uno spazio vettoriale di dimensione finita. Queste costruzioni, in seguito, potranno essere applicate alle fibre del fibrato tangente e cotangente, dando luogo ad ulteriori fibrati le cui sezioni (lisce) saranno importanti nello studio successivo delle varietà differenziabili. La presentazione che viene fatta non ha né particolare originalità né particolare generalità; serve solamente a raccogliere una serie di definizioni e costruzioni usate nel seguito, per facilitare la lettura a chi le incontra per la prima volta. Chi conosce già queste costruzioni è invitato a saltare queste pagine ed a consultarle solo nel caso di eventuali differenze nelle notazioni che incontrerà nel seguito.

Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  sul corpo  $\mathbb{R}^{(\dagger)}$ . Ricordiamo che lo *spazio duale* è lo spazio vettoriale  $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$  ed i suoi elementi sono detti le *forme lineari* su  $V$ . Vi è un'applicazione bilineare, non degenere, canonica,  $\circ : V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , definita ponendo  $\xi \circ v = \xi(v)$ , per ogni  $\xi \in V^*$  e per ogni  $v \in V$ . Si ha quindi

$$\begin{aligned} (a\xi + b\eta) \circ v &= a(\xi \circ v) + b(\eta \circ v) & \xi \circ (av + bw) &= a(\xi \circ v) + b(\xi \circ w) \\ \xi \circ v &= 0 \quad \forall v \in V \Leftrightarrow \xi = 0, & \xi \circ v &= 0 \quad \forall \xi \in V^* \Leftrightarrow v = 0. \end{aligned}$$

Da ciò discende un isomorfismo canonico tra  $V$  e  $V^{**} = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V^*, \mathbb{R})$ , definito associando ad ogni vettore  $v \in V$  l'applicazione  $\xi \mapsto \xi \circ v$ , che è un elemento di  $V^{**}$ . In questo modo si costruisce un'applicazione lineare ed iniettiva,  $V \rightarrow V^{**}$ , che è un isomorfismo, perché  $n = \dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$ .

(†) Gran parte delle affermazioni che faremo saranno valide per spazi vettoriali su corpi qualunque. L'ipotesi di lavorare sul corpo reale è posta solo per uniformità con le ipotesi dei capitoli precedenti.

Data una base  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$  di  $V$ , le si può associare una base di  $V^*$ ,  $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ , detta la *base duale*, definita dalle condizioni  $v_i^* \circ v_j = \delta_{ij}$  (simbolo di Kronecker). Se  $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$  e  $\xi = a_1 v_1^* + \dots + a_n v_n^*$ , allora

$$\xi \circ v = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = ax, \quad \text{ove } a = (a_1, \dots, a_n) \text{ e } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

**3.1 Definizione.** Siano  $V$  e  $W$  due spazi vettoriali su  $\mathbb{R}$ . Date due forme lineari  $\xi \in V^*$  ed  $\eta \in W^*$ , il loro *prodotto tensoriale* è l'applicazione  $\mathbb{R}$ -bilinare  $\xi \otimes \eta : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $\xi \otimes \eta(v, w) = (\xi \circ v)(\eta \circ w)$ , per ogni  $v \in V$  ed ogni  $w \in W$ . Indicheremo con  $V^* \otimes_{\mathbb{R}} W^*$  il sottospazio vettoriale dello spazio delle applicazioni  $\mathbb{R}$ -bilinari, generato dai prodotti tensoriali degli elementi di  $V^*$  con quelli di  $W^*$ .

Dalle definizioni discende che il prodotto tensoriale di due forme lineari, anche appartenenti ad un medesimo spazio, non è commutativo e che distribuisce rispetto alla somma di forme lineari. Inoltre, è compatibile col prodotto per costanti reali, ovvero si ha

$$(\xi + \eta) \otimes \lambda = \xi \otimes \lambda + \eta \otimes \lambda, \quad \xi \otimes (\lambda + \mu) = \xi \otimes \lambda + \xi \otimes \mu, \quad (a\xi) \otimes \eta = a(\xi \otimes \eta) = \xi \otimes (a\eta).$$

Dato l'isomorfismo tra  $V$  e  $V^{**}$ , possiamo pensare gli elementi di  $V$  come forme lineari sullo spazio duale  $V^*$  e quindi ha senso parlare del prodotto tensoriale di vettori,  $v \otimes w$ , ove  $v \in V$  e  $w \in W$ , e dello spazio vettoriale  $V \otimes_{\mathbb{R}} W$ . Data una base  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$  di  $V$  ed una base  $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$  di  $W$ , i prodotti  $v_i \otimes w_j$ , per  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, m$ , sono una base di  $V \otimes W$ , e quindi  $\dim V \otimes W = (\dim V)(\dim W)$ .

Per ogni coppia di spazi vettoriali  $V, W$ , si ha un'applicazione naturale  $\tau : V \times W \rightarrow V \otimes_{\mathbb{R}} W$ , definita da  $\tau(v, w) = v \otimes w$ ; si può verificare che si tratta di un'applicazione bilinare. Il prodotto tensoriale gode della seguente proprietà universale.

**3.2 Proposizione.** [proprietà universale del prodotto tensoriale] *Siano  $V$  e  $W$  due spazi vettoriali reali e sia  $\tau : V \times W \rightarrow V \otimes_{\mathbb{R}} W$ , l'applicazione bilinare definita da  $\tau(v, w) = v \otimes w$ . Allora, per ogni spazio vettoriale reale  $Z$  ed ogni applicazione bilinare,  $g : V \times W \rightarrow Z$ , esiste un unico omomorfismo  $\phi : V \otimes W \rightarrow Z$  tale che  $g = \phi \circ \tau$ .*

*dim.* Siano  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base di  $V$  e  $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$  una base di  $W$ , ponendo  $\phi(v_i \otimes w_j) = g(v_i, w_j)$ , per ogni  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, m$ , si definisce un unico omomorfismo  $\phi : V \otimes W \rightarrow Z$  e, per la bilinearità di  $\tau$  e  $g$ , si conclude che  $g = \phi \circ \tau$ , perché ciò è vero per ogni coppia di elementi di base. **CVD** □

Osserviamo a margine che, dare un'applicazione bilinare,  $g : V \times W \rightarrow Z$ , è equivalente a dare l'omomorfismo,  $V \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(W, Z)$ , che associa al vettore  $v \in V$  l'applicazione  $w \mapsto g(v, w)$ , e che questa corrispondenza determina un isomorfismo tra lo spazio vettoriale delle applicazioni bilineari di  $V \times W$  su  $Z$  e lo spazio degli omomorfismi di  $V$  su  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(W, Z)$ . Quindi la proprietà universale del prodotto tensoriale è equivalente all'isomorfismo

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V \otimes_{\mathbb{R}} W, Z) \cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \text{Hom}_{\mathbb{R}}(W, Z)) \cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(W, \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, Z)). \quad (3.3)$$

Osserviamo infine che questo isomorfismo determina, a meno di un unico isomorfismo, il prodotto tensoriale  $V \otimes_{\mathbb{R}} W$  e l'applicazione bilinare  $\tau : V \times W \rightarrow V \otimes_{\mathbb{R}} W$ ; e inoltre implica l'esistenza dell'isomorfismo canonico  $V \otimes W \rightarrow W \otimes V$ , definito da  $v \otimes w \mapsto w \otimes v$ .

Vogliamo dimostrare ora alcune proprietà del prodotto tensoriale. Osserviamo subito che la dualità tra spazi vettoriali si trasporta ai prodotti tensoriali, ovvero che, dati due spazi vettoriali,  $V$  e  $W$ , ed i loro duali,  $V^*$  e  $W^*$ , si ha che  $V \otimes W$  e  $V^* \otimes W^*$  sono in dualità, tramite l'applicazione bilinare, non

degenerare, definita da  $(v \otimes w, v^* \otimes w^*) \mapsto (v \circ v^*)(w \circ w^*)$ . Mettendo insieme questo isomorfismo e (III.3.3), nel caso in cui lo spazio  $Z$  sia il corpo di base,  $\mathbb{R}$ , si ottengono gli isomorfismi

$$V^* \otimes W^* \cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V \otimes_{\mathbb{R}} W, \mathbb{R}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \text{Hom}_{\mathbb{R}}(W, \mathbb{R})) \cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W^*),$$

e, ponendo lo spazio vettoriale  $W$  in luogo di  $W^*$ , possiamo concludere con l'isomorfismo

$$V^* \otimes_{\mathbb{R}} W \cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W). \quad (3.4)$$

L'isomorfismo precedente si può esplicitare, osservando che al prodotto tensoriale  $v^* \otimes w$  corrisponde l'omomorfismo  $x \mapsto (v^* \circ x)w$  ed estendendo questa corrispondenza per linearità.

Mettendo insieme (III.3.4) e (III.3.3), possiamo ottenere la cosiddetta *proprietà associativa del prodotto tensoriale*, ovvero l'isomorfismo

$$\begin{aligned} (V \otimes_{\mathbb{R}} W) \otimes_{\mathbb{R}} Z &\cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V^* \otimes_{\mathbb{R}} W^*, Z) \cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V^*, \text{Hom}_{\mathbb{R}}(W^*, Z)) \cong \\ &\cong V \otimes_{\mathbb{R}} \text{Hom}_{\mathbb{R}}(W^*, Z) \cong V \otimes_{\mathbb{R}} (W \otimes_{\mathbb{R}} Z). \end{aligned}$$

Grazie a questo isomorfismo scriveremo  $V \otimes_{\mathbb{R}} W \otimes_{\mathbb{R}} Z$ , senza preoccuparci di specificare quale dei due prodotti venga eseguito per primo. Più in generale, scriveremo  $V^{\otimes r}$  per indicare il prodotto tensoriale di  $r$  copie dello spazio vettoriale  $V$ .

Oltre al prodotto tensoriale di spazi vettoriali, si può definire anche il prodotto tensoriale di omomorfismi, nel modo seguente. Dati  $\phi_1 \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V_1, W_1)$  e  $\phi_2 \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V_2, W_2)$ , consideriamo le due applicazioni bilineari canoniche  $\sigma : V_1 \times V_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2$  e  $\tau : W_1 \times W_2 \rightarrow W_1 \otimes W_2$ . L'applicazione composta,  $\tau \circ (\phi_1 \times \phi_2)$ , definita da  $(v_1, v_2) \mapsto \tau(\phi_1(v_1), \phi_2(v_2)) = \phi_1(v_1) \otimes \phi_2(v_2)$ , è un'applicazione bilineare e quindi, per la proprietà universale del prodotto tensoriale, esiste un'unico omomorfismo  $\phi_1 \otimes \phi_2 : V_1 \otimes V_2 \rightarrow W_1 \otimes W_2$  tale che  $(\phi_1 \otimes \phi_2) \circ \sigma(v_1, v_2) = \tau(\phi_1(v_1), \phi_2(v_2))$  per ogni coppia di vettori  $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ ; questo omomorfismo è il *prodotto tensoriale dei due omomorfismi*  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , e si ha  $\phi_1 \otimes \phi_2(v_1 \otimes v_2) = \phi_1(v_1) \otimes \phi_2(v_2)$ .

Lasciamo al lettore il compito di verificare che la definizione data del prodotto tensoriale di due omomorfismi è compatibile con gli isomorfismi

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V_1, W_1) \otimes \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V_2, W_2) &\cong V_1^* \otimes W_1 \otimes V_2^* \otimes W_2 \cong \\ &\cong V_1^* \otimes V_2^* \otimes W_1 \otimes W_2 \cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2), \end{aligned}$$

dedotti da (III.3.4) e dalla proprietà associativa del prodotto tensoriale.

Osserviamo da ultimo che, come lo spazio vettoriale delle applicazioni bilineari da  $V_1 \times V_2$  su  $Z$  coincide con  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V_1 \otimes V_2, Z)$ , così lo spazio delle applicazioni  $r$ -lineari da  $V_1 \times \cdots \times V_r$  su  $Z$  coincide con  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_r, Z)$ . La verifica si può fare per induzione, ricordando che l'affermazione è vera per  $r = 1, 2$  ed osservando che, dare un'applicazione  $(r+1)$ -lineare da  $V_1 \times \cdots \times V_{r+1}$  su  $Z$ , significa dare un omomorfismo da  $V_1$  nello spazio delle applicazioni  $r$ -lineari da  $V_2 \times \cdots \times V_{r+1}$  su  $Z$ . Applicando (III.3.3), l'ipotesi induttiva e la proprietà associativa del prodotto tensoriale, si conclude che l'insieme delle applicazioni  $(r+1)$ -lineari è

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V_1, \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V_2 \otimes \cdots \otimes V_{r+1}, Z)) \cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_{r+1}, Z),$$

che completa la verifica per induzione.

**3.5 Definizione.** Consideriamo ora uno spazio vettoriale reale  $V$  ed il suo duale  $V^*$ . Dati due numeri interi non negativi,  $i$  e  $j$ , chiamiamo *tensore di tipo  $(i, j)$*  qualsiasi elemento (non nullo) dello spazio vettoriale  $T_j^i(V) = V^{\otimes i} \otimes V^{*\otimes j}$ . Si porrà inoltre,  $T_0^0(V) = \mathbb{R}$ ,  $T_0^i(V) = V^{\otimes i}$  e  $T_j^0(V) = V^{*\otimes j}$ .

Si chiama *Algebra tensoriale* su  $V$  la somma diretta

$$T(V) = \bigoplus_{i,j \geq 0} T_j^i(V),$$

ove il prodotto è il prodotto tensoriale degli elementi.

Qualsiasi elemento di  $T(V)$  sarà detto un *tensore* e si scriverà come somma finita di elementi dei sottospazi  $T_j^i(V)$ ; tali elementi saranno le *componenti omogenee* del tensore dato.

Un tensore omogeneo  $\alpha \in T_s^r(V)$  si può pensare come un'applicazione  $(r+s)$ -lineare

$$\alpha : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r\text{-copie}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s\text{-copie}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Fissata una base,  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ , di  $V$  e la base duale,  $\mathcal{V}^* = \{v^1, \dots, v^n\}$ , di  $V^*$ , il tensore  $\alpha$  si scriverà come

$$\sum a_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} \otimes v^{j_1} \otimes \cdots \otimes v^{j_s},$$

ove gli indici  $i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_s$  variano tra 1 ed  $n$ . L'applicazione multilineare corrispondente è

$$(x_1^*, \dots, x_r^*, y_1, \dots, y_s) \mapsto \sum a_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} (v_{i_1} \circ x_1^*) \cdots (v_{i_r} \circ x_r^*) (v^{j_1} \circ y_1) \cdots (v^{j_s} \circ y_s).$$

Ad esempio, un'applicazione bilineare  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  corrisponde al tensore  $g = \sum_{1 \leq i, j \leq n} g_{ij} v^i \otimes v^j \in T_2^0(V)$ , ove  $g_{ij} = g(v_i, v_j)$ . In particolare,  $g \in V^* \otimes V^* \cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V^*)$  (cf. III.3.4) e quindi  $g$  può essere identificato con l'omomorfismo  $\phi_g : V \rightarrow V^*$ , definito da  $\phi_g(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} g_{ij} (v^i \circ x) v^j$ , ovvero l'applicazione che manda il vettore  $x \in V$  nella forma lineare  $y \mapsto g(x, y)$ . Osserviamo che  $g$  è non degenere se, e solo se,  $\phi_g$  è un isomorfismo.

Supponiamo ora di aver fissato un'applicazione bilineare non degenere  $g$  su  $V$  ed osserviamo che possiamo usare  $\phi_g$  per modificare i tensori omogenei, "innalzando ed abbassando gli indici". Sia  $g$  come sopra e consideriamo, ad esempio, il tensore

$$\alpha = \sum_{1 \leq i, j, r \leq n} a_{ij}^r v^i \otimes v^j \otimes v_r \in T_2^1(V).$$

Il tensore

$$\alpha' = \sum_{1 \leq i, j, r \leq n} a_{ij}^r v^i \otimes v^j \otimes \phi_g(v_r) \in T_3^0(V),$$

è ottenuto da  $\alpha$  per *abbassamento dell'indice  $r$* . Infatti, si ha

$$\begin{aligned} \alpha' &= \sum_{1 \leq i, j, r \leq n} a_{ij}^r v^i \otimes v^j \otimes \phi_g(v_r) = \\ &= \sum_{1 \leq i, j, r \leq n} a_{ij}^r v^i \otimes v^j \otimes \sum_s g_{rs} v^s = \\ &= \sum_{1 \leq i, j, s \leq n} \left( \sum_r a_{ij}^r g_{rs} \right) v^i \otimes v^j \otimes v^s = \\ &= \sum_{1 \leq i, j, s \leq n} b_{ijs} v^i \otimes v^j \otimes v^s, \end{aligned}$$

ove  $b_{ijs} = \sum_r a_{ij}^r g_{rs}$ .

Analogamente, diremo che il tensore

$$\alpha'' = \sum_{1 \leq i, j, r \leq n} a_{ij}^r v^i \otimes \phi_g^{-1}(v^j) \otimes v_r \in T_1^2(V),$$

è ottenuto da  $\alpha$  per *innalzamento dell'indice*  $j$ . Infatti, se  $g^{-1} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} g^{ij} v_i \otimes v_j$  è il tensore corrispondente a  $\phi_g^{-1} \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V^*, V) \cong V \otimes V$ , e quindi i coefficienti  $g^{ij}$  sono le entrate dell'inversa della matrice  $(g_{hk})_{1 \leq h, k \leq n}$ , si ha

$$\begin{aligned} \alpha'' &= \sum_{1 \leq i, j, r \leq n} a_{ij}^r v^i \otimes \phi_g^{-1}(v^j) \otimes v_r = \\ &= \sum_{1 \leq i, j, r \leq n} a_{ij}^r v^i \otimes \left( \sum_t g^{jt} v_t \right) \otimes v_r = \\ &= \sum_{1 \leq i, t, r \leq n} \left( \sum_j a_{ij}^r g^{jt} \right) v^i \otimes v_t \otimes v_r \\ &= \sum_{1 \leq i, t, r \leq n} c_i^{tr} v^i \otimes v_t \otimes v_r, \end{aligned}$$

ove  $c_i^{tr} = \sum_j a_{ij}^r g^{jt}$ .

Due tensori si dicono *fisicamente equivalenti* se sono uguali, oppure si ottengono l'uno dall'altro con un numero finito di operazioni di innalzamento e abbassamento di indici.

Nello studio delle varietà differenziabili è utile considerare l'algebra tensoriale costruita sullo spazio tangente. Per poter confrontare le diverse scritture di un tensore rispetto a diversi sistemi di coordinate locali è utile conoscere come si modifica l'espressione di un tensore attraverso i cambiamenti di base dello spazio vettoriale.

Fissata una base,  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ , di  $V$  e la base duale,  $\mathcal{V}^* = \{v^1, \dots, v^n\}$ , di  $V^*$ , il tensore  $\alpha \in T_s^r(V)$  si scriverà come

$$\alpha = \sum a_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_r} \otimes v^{j_1} \otimes \dots \otimes v^{j_s},$$

ove gli indici  $i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_s$  variano tra 1 ed  $n$ . Siano  $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ , una base di  $V$  e  $\mathcal{W}^* = \{w^1, \dots, w^n\}$  la base duale di  $V^*$ ; lo stesso tensore  $\alpha \in T_s^r(V)$  si scriverà come

$$\sum b_{k_1 \dots k_s}^{h_1 \dots h_r} w_{h_1} \otimes \dots \otimes w_{h_r} \otimes w^{k_1} \otimes \dots \otimes w^{k_s}.$$

Vogliamo scrivere le relazioni esistenti tra i coefficienti  $a_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$  e  $b_{k_1 \dots k_s}^{h_1 \dots h_r}$ . Per fare ciò, consideriamo la matrice di cambiamento di base  $P = (p_j^i)_{1 \leq i, j \leq n} = \alpha_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}(\mathbf{1})$ . Ciò significa che  $v_j = \sum_i p_j^i w_i$ , per  $j = 1, \dots, n$ . Passando alle basi duali, consideriamo la matrice  $P^{-1} = (q_j^i)_{1 \leq i, j \leq n} = {}^t \alpha_{\mathcal{V}^*, \mathcal{W}^*}(\mathbf{1})$ , essendo  $w^j = \sum_i q_j^i v^i$ , per  $j = 1, \dots, n$ .

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum a_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_r} \otimes v^{j_1} \otimes \dots \otimes v^{j_s} \\ &= \sum a_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \sum_{h_1} p_{i_1}^{h_1} w_{h_1} \otimes \dots \otimes \sum_{h_r} p_{i_r}^{h_r} w_{h_r} \otimes \sum_{k_1} q_{k_1}^{j_1} w^{k_1} \otimes \dots \otimes \sum_{k_s} q_{k_s}^{j_s} w^{k_s} \\ &= \sum b_{k_1 \dots k_s}^{h_1 \dots h_r} w_{h_1} \otimes \dots \otimes w_{h_r} \otimes w^{k_1} \otimes \dots \otimes w^{k_s}, \end{aligned}$$

ove

$$b_{k_1 \dots k_s}^{h_1 \dots h_r} = \sum_{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_s} a_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} p_{i_1}^{h_1} \dots p_{i_r}^{h_r} q_{k_1}^{j_1} \dots q_{k_s}^{j_s}.$$



Per questo motivo si dice anche che un tensore di tipo  $(i, j)$  ha  $i$  componenti *covarianti* e  $j$  componenti *contravarianti* e si capisce perché si siano differenziati gli indici posti in basso da quelli posti in alto nella scrittura del tensore.

Ci occuperemo ora dell'algebra esterna associata ad uno spazio vettoriale  $V$ . Prima di dare le opportune definizioni, introduciamo alcune notazioni sui multiindici che ci serviranno nel seguito.

Siano  $A$  e  $B$  due insiemi ed indichiamo con  $A^k$  il prodotto cartesiano  $A \times \cdots \times A$  ( $k$  fattori). Dati una funzione  $f : A^k \rightarrow B$ , un elemento  $x = (x_1, \dots, x_n)$  di  $A^n$  ed una funzione  $I : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ , scriveremo  $f(x_I)$  per indicare  $f(x_{I(1)}, \dots, x_{I(k)})$  e diremo che  $I$  è un multiindice di ordine  $k$ .

Introduciamo ora un po' di notazioni relative ai multiindici.

Se  $n$  è un numero naturale, indicheremo con  $\Sigma_n$  l'insieme delle *permutazioni su  $n$  oggetti*, ovvero l'insieme delle funzioni biunivoche  $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ . Questo insieme è un gruppo rispetto alla composizione di funzioni. Per ogni  $\sigma \in \Sigma_n$  indicheremo con  $\text{sgn } \sigma$  la *segnatura* di  $\sigma$ , ovvero  $-1$  elevato al numero di scambi necessario a porre gli elementi  $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$  nell'ordine naturale.

Dati due numeri naturali  $n \geq k$ , indicheremo con  $\mathcal{I}_n^k$  l'insieme delle funzioni (strettamente) crescenti  $I : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ . Se  $r \geq n \geq k$ , ed  $I \in \mathcal{I}_n^k$  ed  $I' \in \mathcal{I}_r^n$ , la funzione composta  $I' \circ I$  appartiene ad  $\mathcal{I}_r^k$ .

Date due funzioni  $I : \{1, \dots, h\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  e  $J : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  (non necessariamente crescenti) si definisce la funzione

$$I \vee J : \{1, \dots, h+k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}, \quad \text{ponendo } I \vee J(x) = \begin{cases} I(x) & \text{se } 1 \leq x \leq h \\ J(x-h) & \text{se } h+1 \leq x \leq h+k \end{cases}$$

Se  $I \in \mathcal{I}_n^h$ ,  $J \in \mathcal{I}_n^k$  e  $\text{im } I \cap \text{im } J = \emptyset$  (e quindi  $n \geq h+k$ ), esiste un'unica permutazione,  $\sigma \in \Sigma_{h+k}$ , tale che  $(I \vee J) \circ \sigma \in \mathcal{I}_n^{h+k}$ . In tal caso, scriveremo  $\text{sgn}(I \vee J)$  per indicare  $\text{sgn } \sigma$ . In particolare, se  $n = h+k$ , allora  $I \vee J \in \Sigma_{h+k}$  e le due definizioni della segnatura coincidono. Si può verificare che si ha

$$\text{sgn}(I \vee J) = (-1)^{hk} \text{sgn}(J \vee I). \quad (3.6)$$

Date  $I \in \mathcal{I}_{h+k}^h$ ,  $J \in \mathcal{I}_{h+k}^k$ ,  $I' \in \mathcal{I}_{h+k+l}^{h+k}$ ,  $K \in \mathcal{I}_{h+k+l}^l$ , con  $\text{im } I' \cap \text{im } K = \emptyset$  ed  $\text{im } I \cap \text{im } J = \emptyset$  si ha

$$\text{sgn}((I' \circ I) \vee (I' \circ J) \vee K) = \text{sgn}(I \vee J) \text{sgn}(I' \vee K).$$

Data  $I \in \mathcal{I}_{h+k}^h$  esiste un'unica funzione  $cI \in \mathcal{I}_{h+k}^k$ , tale che  $I \vee cI \in \Sigma_{h+k}$ . La corrispondenza  $c : \mathcal{I}_{h+k}^h \rightarrow \mathcal{I}_{h+k}^k$  è biunivoca e si ha  $ccI = I^{(\dagger)}$ .

Infine, date  $I_0 \in \mathcal{I}_{h+k}^h$  ed  $I_1 \in \mathcal{I}_{h+k+l}^{h+k}$ , si ha che  $(I_1 \circ I_0) \vee (I_1 \circ cI_0) \vee cI_1 \in \Sigma_{h+k+l}$ , e

$$\text{sgn}((I_1 \circ I_0) \vee (I_1 \circ cI_0) \vee cI_1) = \text{sgn}(I_0 \vee cI_0) \text{sgn}(I_1 \vee cI_1). \quad (3.7)$$

**3.8 Definizione.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  su  $\mathbb{R}$ . Per ogni intero  $k$ ,  $2 \leq k \leq n$ , indicheremo con  $\Lambda^k(V^*)$  l'insieme delle applicazioni multilineari, alternanti,  $\lambda : V^k \rightarrow \mathbb{R}$ . Porremo inoltre,  $\Lambda^0(V^*) = \mathbb{R}$ ,  $\Lambda^1(V^*) = V^*$  e Diremo che  $\lambda \in \Lambda^k(V^*)$  è una  $k$ -*forma alternante* su  $V$ .

Ciascuno degli insiemi  $\Lambda^k(V^*)$ ,  $k = 0, \dots, n$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ , di dimensione  $\binom{n}{k}$ , perché, fissata una base  $v_1, \dots, v_n$  di  $V$ , un'elemento  $\lambda \in \Lambda^k(V^*)$  è completamente determinato dai suoi valori sulle  $k$ -uple,  $v_I = (v_{I(1)}, \dots, v_{I(k)})$ , al variare di  $I \in \mathcal{I}_n^k$ , e tali valori, fissati ad arbitrio, determinano una ed una sola  $\lambda$ .

---

(†) Lasciamo al lettore il compito di verificare che  $\text{sgn}(I \vee cI) = (-1)^{\sum_{j=1}^k I(j)-j}$ .

**3.9 Definizione.** Date due forme alternanti,  $\lambda \in \Lambda^h(V^*)$  e  $\mu \in \Lambda^k(V^*)$ , si definisce il loro *prodotto esterno*,  $\lambda \wedge \mu$  ponendo

$$\lambda \wedge \mu(x_1, \dots, x_{h+k}) = \sum_{I \in \mathcal{I}_{h+k}^h} \text{sgn}(I \vee cI) \lambda(x_I) \mu(x_{cI}).$$

Osserviamo che  $\lambda \wedge \mu \in \Lambda^{h+k}(V^*)$  ed il prodotto esterno gode delle seguenti proprietà

- $\mu \wedge \lambda = (-1)^{hk} \lambda \wedge \mu$  per ogni  $\lambda \in \Lambda^h(V^*)$ , e  $\mu \in \Lambda^k(V^*)$ ;
- $(\lambda + \lambda') \wedge \mu = \lambda \wedge \mu + \lambda' \wedge \mu$ , per ogni  $\lambda, \lambda' \in \Lambda^h(V^*)$  e  $\mu \in \Lambda^k(V^*)$ ;
- $(a\lambda) \wedge \mu = \lambda \wedge (a\mu) = a(\lambda \wedge \mu)$ , per ogni  $\lambda \in \Lambda^h(V^*)$ ,  $\mu \in \Lambda^k(V^*)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ;
- $(\lambda \wedge \mu) \wedge \nu = \lambda \wedge (\mu \wedge \nu)$ , per ogni  $\lambda \in \Lambda^h(V^*)$ ,  $\mu \in \Lambda^k(V^*)$ ,  $\nu \in \Lambda^l(V^*)$ .

Cominciamo col verificare che  $\lambda \wedge \mu \in \Lambda^{h+k}(V^*)$ . Sia  $x = (x_1, \dots, x_{h+k})$  e, fissata una permutazione  $\sigma \in \Sigma_{h+k}$ , sia  $x_\sigma = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(h+k)})$ . Allora

$$\lambda \wedge \mu(x_\sigma) = \sum_{I \in \mathcal{I}_{h+k}^h} \text{sgn}(I \vee cI) \lambda(x_{\sigma \circ I}) \mu(x_{\sigma \circ cI}).$$

Detto  $I'$  l'unico elemento di  $\mathcal{I}_{h+k}^h$  tale che  $\text{im } I' = \text{im}(\sigma \circ I)$ , allora  $\text{im } cI' = \text{im}(\sigma \circ cI)$  e ci sono due permutazioni,  $\alpha_1$  ed  $\alpha_2$  che riordinano l'immagine di  $\sigma \circ I$  e di  $\sigma \circ cI$ . Dunque  $(\text{sgn } \alpha_1)(\text{sgn } \alpha_2) \text{sgn}(I' \vee cI') = (\text{sgn } \sigma) \text{sgn}(I \vee cI)$  perché entrambe queste permutazioni riordinano  $(\sigma \circ I) \vee (\sigma \circ cI)$ ; e inoltre,  $\lambda(x_{\sigma \circ I}) = (\text{sgn } \alpha_1) \lambda(x_{I'})$  e  $\mu(x_{\sigma \circ cI}) = (\text{sgn } \alpha_2) \mu(x_{cI'})$ . Si conclude che

$$\lambda \wedge \mu(x_\sigma) = \text{sgn } \sigma \sum_{I' \in \mathcal{I}_{h+k}^h} \text{sgn}(I' \vee cI') \lambda(x_{I'}) \mu(x_{cI'}) = \text{sgn } \sigma \lambda \wedge \mu(x).$$

Passiamo ora a verificare le proprietà del prodotto esterno. Per quanto visto in (III.3.6),  $\text{sgn}(cI \vee I) = (-1)^{hk} \text{sgn}(I \vee cI)$ , qualunque sia  $I \in \mathcal{I}_{h+k}^h$ . Quindi si ha

$$\mu \wedge \lambda(x) = \sum_{J \in \mathcal{I}_{h+k}^k} \text{sgn}(J \vee cJ) \mu(x_J) \lambda(x_{cJ}) = \sum_{I \in \mathcal{I}_{h+k}^h} \text{sgn}(cI \vee I) \lambda(x_I) \mu(x_{cI}) = (-1)^{hk} \lambda \wedge \mu(x).$$

La distributività del prodotto esterno rispetto alla somma e la sua compatibilità col prodotto per costanti è immediata. Resta da verificare la proprietà associativa.

Ricordando la (III.3.7), si ha

$$\begin{aligned} (\lambda \wedge \mu) \wedge \nu(x) &= \sum_{I \in \mathcal{I}_{h+k+l}^{h+k}} \text{sgn}(I \vee cI) (\lambda \wedge \mu)(x_I) \nu(x_{cI}) = \\ &= \sum_{I \in \mathcal{I}_{h+k+l}^{h+k}} \sum_{J \in \mathcal{I}_{h+k}^h} \text{sgn}(I \vee cI) \text{sgn}(J \vee cJ) \lambda(x_{I \circ J}) \mu(x_{I \circ cJ}) \nu(x_{cI}) = \\ &= \sum_{I \in \mathcal{I}_{h+k+l}^{h+k}} \sum_{J \in \mathcal{I}_{h+k}^h} \text{sgn}((I \circ J) \vee (I \circ cJ) \vee cI) \lambda(x_{I \circ J}) \mu(x_{I \circ cJ}) \nu(x_{cI}). \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} \lambda \wedge (\mu \wedge \nu)(x) &= \sum_{I' \in \mathcal{I}_{h+k+l}^h} \text{sgn}(I' \vee cI') \lambda(x_{I'}) (\mu \wedge \nu)(x_{cI'}) = \\ &= \sum_{I' \in \mathcal{I}_{h+k+l}^h} \sum_{J' \in \mathcal{I}_{k+l}^k} \text{sgn}(I' \vee cI') \text{sgn}(J' \vee cJ') \lambda(x_{I'}) \mu(x_{cI' \circ J'}) \nu(x_{cI' \circ cJ'}) = \\ &= \sum_{I' \in \mathcal{I}_{h+k+l}^h} \sum_{J' \in \mathcal{I}_{k+l}^k} \text{sgn}(I' \vee (cI' \circ J') \vee (cI' \circ cJ')) \lambda(x_{I'}) \mu(x_{cI' \circ J'}) \nu(x_{cI' \circ cJ'}). \end{aligned}$$

Il numero degli addendi nelle due somme è lo stesso e, fissata una coppia di indici  $I, J$  come sopra, esiste un'unica coppia  $(I', J')$  tale che  $I' = I \circ J$  e  $I \circ cJ = cI' \circ J'$ ; in tal caso, necessariamente si ha  $cI = cI' \circ cJ'$  e quindi le due somme coincidono.

Sono così dimostrate le proprietà del prodotto esterno.

Sia data una base  $v_1^*, \dots, v_n^*$  di  $V^*$ . Osserviamo che, in base alle definizioni date,  $v_i^* \wedge v_j^* : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  è l'applicazione bilineare alternante che manda la coppia  $(x_1, x_2)$  su  $(v_i^* \circ x_1)(v_j^* \circ x_2) - (v_i^* \circ x_2)(v_j^* \circ x_1)$  e quindi si tratta di un'applicazione non nulla [vale 1 sulla coppia  $(v_i, v_j)$ ]. Se consideriamo le coppie  $v_i^* \wedge v_j^*$  per  $1 \leq i < j \leq n$ , è facile verificare che si tratta di una base di  $\Lambda^2(V)$ . Infatti, data un'applicazione bilineare alternante,  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , e posto  $g_{ij} = g(v_i, v_j)$ , per  $1 \leq i < j \leq n$ , si ha che

$$g(x, y) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} g_{ij} v_i^* \wedge v_j^*(x, y)$$

per ogni coppia  $(x, y) \in V \times V$  e inoltre, i prodotti  $v_i^* \wedge v_j^*$  per  $1 \leq i < j \leq n$ , sono linearmente indipendenti, perché

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij} v_i^* \wedge v_j^* = 0 \quad \text{implica} \quad 0 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij} v_i^* \wedge v_j^*(v_{i_0}, v_{j_0}) = b_{i_0 j_0}$$

qualunque siano  $1 \leq i_0 < j_0 \leq n$ .

Analogamente, se consideriamo le forme  $v_I^* = v_{I(1)}^* \wedge \dots \wedge v_{I(k)}^*$ , al variare di  $I \in \mathcal{I}_n^k$ , si verifica che, presa una  $k$ -upla di vettori  $x = (x_1, \dots, x_k)$  in  $V^k$ , si ha

$$v_I^*(x) = \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sgn } \sigma (v_{I(1)}^* \circ x_{\sigma(1)}) \cdots (v_{I(k)}^* \circ x_{\sigma(k)}).$$

Lasciamo quindi al lettore il compito di dimostrare

**3.10 Proposizione.** *Notazioni come sopra. Le forme  $v_I^* = v_{I(1)}^* \wedge \dots \wedge v_{I(k)}^*$ , al variare di  $I \in \mathcal{I}_n^k$ , formano una base di  $\Lambda^k(V^*)$ .*

Possiamo quindi dare la seguente

**3.11 Definizione.** Lo spazio vettoriale

$$\Lambda(V^*) = \bigoplus_{i=0}^n \Lambda^i(V^*),$$

dotato del prodotto esterno, è un'algebra (associativa) su  $\mathbb{R}$ , detta l'algebra esterna su  $V^*$ .

Dato l'isomorfismo canonico,  $V \cong V^{**}$ , possiamo considerare l'algebra esterna  $\Lambda(V)$ , fatta dalle applicazioni multilineari alternanti su  $V^*$ . Osserviamo che c'è un'applicazione  $k$ -lineare, alternante, canonica  $\pi_k : V \times \dots \times V \rightarrow \Lambda^k(V)$ , che manda  $(x_1, \dots, x_k)$  su  $x_1 \wedge \dots \wedge x_k$  (per  $k = 1$ ,  $\pi_1$  è l'identità di  $V$ ). Vogliamo dimostrare la seguente

**3.12 Proposizione.** [Proprietà universale del prodotto esterno] *Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  e  $k$  un intero compreso tra 1 ed  $n$ . Per ogni spazio vettoriale  $W$ , ed ogni applicazione  $k$ -lineare, alternante,  $D : V \times \dots \times V \rightarrow W$ , esiste un unico omomorfismo  $\phi : \Lambda^k(V) \rightarrow W$  tale che  $D = \phi \circ \pi_k$ , ovvero sia commutativo il diagramma*

$$\begin{array}{ccc} V \times \dots \times V & \xrightarrow{D} & W \\ \pi_k \downarrow & \nearrow \phi & \\ \Lambda^k(V) & & \end{array}$$

*dim.* Fissata una base  $v_1, \dots, v_n$  di  $V$ , si pone  $\phi(v_{I(1)} \wedge \dots \wedge v_{I(k)}) = D(v_{I(1)}, \dots, v_{I(k)})$ , al variare di  $I \in \mathcal{I}_n^k$ . In tal modo è definito univocamente l'omomorfismo  $\phi$  [cf. *Proposizione III.3.10*]. Le due applicazioni  $k$ -lineari alternanti,  $D$  e  $\phi \circ \pi_k$ , coincidono sulle  $k$ -uple  $v_I$ , al variare di  $I \in \mathcal{I}_n^k$ , e quindi coincidono su tutti gli elementi di  $V \times \dots \times V$ . **CVD**  $\square$

Da questa Proposizione discende che l'insieme delle applicazioni  $k$ -lineari alternanti di  $V \times \dots \times V$  su  $W$  coincide con lo spazio vettoriale  $\text{Hom}(\Lambda^k(V), W)$ . In particolare, si conclude che  $\Lambda^k(V^*) = \text{Hom}(\Lambda^k(V), \mathbb{R})$  e quindi c'è una dualità canonica tra  $\Lambda^k(V)$  e  $\Lambda^k(V^*)$ . In tale dualità, se  $x_1^*, \dots, x_k^*$  sono vettori di  $V^*$  ed  $y_1, \dots, y_k$  sono vettori di  $V$ , si ha

$$(3.13) \quad \begin{aligned} (x_1^* \wedge \dots \wedge x_k^*) \circ (y_1 \wedge \dots \wedge y_k) &= (x_1^* \wedge \dots \wedge x_k^*)(y_1, \dots, y_k) = \\ &= \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sgn } \sigma (x_1^* \circ y_{\sigma(1)}) \cdots (x_k^* \circ y_{\sigma(k)}) = \det(x_i^* \circ y_j). \end{aligned}$$

In particolare, se  $v_1, \dots, v_n$  e  $v_1^*, \dots, v_n^*$  sono basi duali di  $V$  e  $V^*$ , le forme  $v_{I(1)} \wedge \dots \wedge v_{I(k)}$  e  $v_{J(1)}^* \wedge \dots \wedge v_{J(k)}^*$ , al variare di  $I, J \in \mathcal{I}_n^k$ , sono basi duali di  $\Lambda^k(V)$  e  $\Lambda^k(V^*)$ , rispettivamente. Conseguenza di ciò, possiamo affermare che i vettori  $x_1, \dots, x_k$  sono linearmente indipendenti se, e solo se,  $x_1 \wedge \dots \wedge x_k \neq 0$ .

Vediamo ora un'altra conseguenza della proprietà universale.

**3.14 Proposizione.** *Sia  $\phi : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. per ogni  $k = 0, \dots, n$  esiste un unico omomorfismo  $\Lambda^k(\phi) : \Lambda^k(V) \rightarrow \Lambda^k(W)$  tale che, per ogni  $k = 1, \dots, n$ , sia commutativo il diagramma*

$$\begin{array}{ccc} V \times \dots \times V & \xrightarrow{\phi \times \dots \times \phi} & W \times \dots \times W \\ \pi_k \downarrow & & \downarrow \pi_k \\ \Lambda^k(V) & \xrightarrow{\Lambda^k(\phi)} & \Lambda^k(W) \end{array}$$

e l'applicazione  $\Lambda(\phi) : \Lambda(V) \rightarrow \Lambda(W)$ , ottenuta sommando gli omomorfismi  $\Lambda^k(\phi)$ , sia un omomorfismo di algebre.

Inoltre, dati due omomorfismi,  $\psi : U \rightarrow V$  e  $\phi : V \rightarrow W$ , si ha  $\Lambda^k(\phi \circ \psi) = \Lambda^k(\phi) \circ \Lambda^k(\psi)$ , per ogni  $k = 0, \dots, n$ .

*dim.* Se  $k = 0$ , si pone  $\Lambda^0(\phi)$  uguale all'identità sul corpo di base.  $\Lambda^1(\phi)$  è necessariamente uguale a  $\phi$ . Inoltre, se  $k \geq 2$ , l'applicazione composta  $V \times \dots \times V \xrightarrow{\phi \times \dots \times \phi} W \times \dots \times W \xrightarrow{\pi_k} \Lambda^k(W)$  è  $k$ -lineare ed alternante. Quindi, per la proprietà universale, esiste un unico omomorfismo  $\Lambda^k(\phi) : \Lambda^k(V) \rightarrow \Lambda^k(W)$  che renda commutativo il diagramma. Le rimanenti affermazioni discendono direttamente da quanto visto. **CVD**  $\square$

Sia  $\phi : V \rightarrow W$  un omomorfismo e fissiamo le basi  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$  di  $V$  e  $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$  di  $W$ . Sia  $\phi(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$ , per  $j = 1, \dots, n$ , ed indichiamo con  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \alpha_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}(\phi)$ , la matrice di  $\phi$

rispetto alle basi date. Data  $J \in \mathcal{I}_n^k$ , si ha

$$\begin{aligned} \Lambda^k(\phi)(v_{J(1)} \wedge \dots \wedge v_{J(k)}) &= \phi(v_{J(1)}) \wedge \dots \wedge \phi(v_{J(k)}) = \\ &= \sum_{i_1=1}^m a_{i_1, J(1)} w_{i_1} \wedge \dots \wedge \sum_{i_k=1}^m a_{i_k, J(k)} w_{i_k} = \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1, J(1)} \cdots a_{i_k, J(k)} w_{i_1} \wedge \dots \wedge w_{i_k} \end{aligned}$$

Ricordando che il prodotto esterno di vettori cambia di segno scambiando l'ordine di due fattori e che si annulla se i fattori sono linearmente dipendenti, si conclude che

$$\Lambda^k(\phi)(v_{J(1)} \wedge \cdots \wedge v_{J(k)}) = \sum_{I \in \mathcal{I}_n^k} \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_k} (\text{sgn } \sigma) a_{I(\sigma(1)), J(1)} \cdots a_{I(\sigma(k)), J(k)} \right) w_{I(1)} \wedge \cdots \wedge w_{I(k)}.$$

Dunque, rispetto alle basi  $\{v_{J(1)} \wedge \cdots \wedge v_{J(k)} \mid J \in \mathcal{I}_n^k\}$  di  $\Lambda^k(V)$  e  $\{w_{I(1)} \wedge \cdots \wedge w_{I(k)} \mid I \in \mathcal{I}_n^k\}$  di  $\Lambda^k(W)$ , la matrice di  $\Lambda^k(\phi)$  ha come entrate i minori di ordine  $k$  della matrice  $A$ .

In particolare, se  $\phi : V \rightarrow V$  è un endomorfismo, si ha

$$\Lambda^n(\phi)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = (\det \phi) v_1 \wedge \cdots \wedge v_n. \quad (3.15)$$

Ricordando la dualità tra  $\Lambda^k(V)$  e  $\Lambda^k(V^*)$ , data un'applicazione lineare  $\phi : V \rightarrow W$  e la sua trasposta  $\phi^* : W^* \rightarrow V^*$ , si ha  $\Lambda^k(\phi)^* = \Lambda^k(\phi^*)$ . Infatti, l'applicazione trasposta,  $\phi^*$ , è determinata dalla condizione  $\phi^*(x^*) \circ y = x^* \circ \phi(y)$ , per ogni  $x^* \in V^*$  e per ogni  $y \in V$ . Dati  $x_1, \dots, x_k \in V^*$  ed  $y_1, \dots, y_k$  in  $V$ , si ha (cf. III.3.13)

$$\begin{aligned} \Lambda^k(\phi^*)(x_1^* \wedge \cdots \wedge x_k^*) \circ (y_1 \wedge \cdots \wedge y_k) &= \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sgn } \sigma (\phi^*(x_1^*) \circ y_{\sigma(1)}) \cdots (\phi^*(x_k^*) \circ y_{\sigma(k)}) = \\ &= \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sgn } \sigma (x_1^* \circ \phi(y_{\sigma(1)})) \cdots (x_k^* \circ \phi(y_{\sigma(k)})) = \\ &= (x_1^* \wedge \cdots \wedge x_k^*) \circ \Lambda^k(\phi)(y_1 \wedge \cdots \wedge y_k). \end{aligned}$$

Ricordando la formula (III.3.15), si deduce da quanto visto che  $\det \phi^* = \det \phi$  per ogni endomorfismo  $\phi : V \rightarrow V$ .

Ricordiamo che, fissare un'applicazione bilineare non degenere,  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  (ad esempio il prodotto scalare su  $\mathbb{R}^n$ ) determina un isomorfismo tra  $V$  e  $V^*$  e quindi tra  $\Lambda^k(V)$  e  $\Lambda^k(V^*)$ . In particolare, si ottiene così un'applicazione bilineare non degenere  $\Lambda^k(V) \times \Lambda^k(V) \rightarrow \mathbb{R}$ , definita dalla posizione

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k, w_1 \wedge \cdots \wedge w_k) \mapsto \det(g(v_i, w_j))_{1 \leq i, j \leq k}.$$

Se  $V = \mathbb{R}^n$  e  $g$  è il prodotto scalare (che rende ortonormale la base canonica,  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ ), la base  $e_I = e_{I(1)} \wedge \cdots \wedge e_{I(k)}$  di  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$  diviene una base ortonormale per questa applicazione e si può definire la *norma* degli elementi di  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ . Quindi, se  $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = \sum_{I \in \mathcal{I}_n^k} a_I e_I$ , il coefficiente  $a_I$  è il minore estratto dalle righe  $I(1), \dots, I(k)$  della matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori  $v_1, \dots, v_k$  (rispetto alla base canonica) e si ottiene l'identità

$$\|v_1 \wedge \cdots \wedge v_k\|^2 = \det(v_i \cdot v_j)_{1 \leq i, j \leq k} = \sum_{I \in \mathcal{I}_n^k} a_I^2$$

che generalizza l'identità di Lagrange in dimensione 3.

Sia ora fissata una base  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$  dello spazio  $V$ . In tal modo resta fissato l'isomorfismo  $\nu : \Lambda^n(V) \rightarrow \mathbb{R}$ , che manda  $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$  su 1. Quindi, per ogni  $k$  tra 0 ed  $n$ , possiamo definire un'applicazione bilineare

$$\Lambda^k(V) \times \Lambda^{n-k}(V) \longrightarrow \Lambda^n(V) \xrightarrow{\nu} \mathbb{R}$$

componendo  $\nu$  col prodotto esterno,  $(\lambda, \mu) \mapsto \nu(\lambda \wedge \mu)$ . Si tratta di una dualità, ovvero di un'applicazione bilineare non-degenere, tra i due spazi; infatti, ogni elemento  $\lambda \in \Lambda^k(V)$  si scrive come

$$\lambda = \sum_{I \in \mathcal{I}_n^k} a_I v_{I(1)} \wedge \cdots \wedge v_{I(k)}$$

e, se uno dei coefficienti è diverso da 0, sia  $a_{I_0}$ , allora si ha

$$\nu(\lambda \wedge v_{cI_0(1)} \wedge \cdots \wedge v_{cI_0(n-k)}) = \text{sgn}(I_0 \vee cI_0) a_{I_0} \neq 0.$$

Dunque, lo spazio vettoriale  $\Lambda^k(V)$  è in dualità sia con  $\Lambda^k(V^*)$  (cf. III.3.13) che con  $\Lambda^{n-k}(V)$ . Si ottiene in questo modo un isomorfismo  $\delta : \Lambda^k(V^*) \rightarrow \Lambda^{n-k}(V)$  che manda  $v_{I(1)}^* \wedge \cdots \wedge v_{I(k)}^*$  sull'elemento  $\text{sgn}(I \vee cI) v_{cI(1)} \wedge \cdots \wedge v_{cI(n-k)}$ , al variare di  $I$  in  $\mathcal{I}_n^k$ .

Se si fissa su  $V$  un'applicazione bilineare, simmetrica, non degenere,  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , resta associata a questa un isomorfismo,  $\phi_g : V \rightarrow V^*$ , che abbiamo già considerato quando parlavamo di innalzamento ed abbassamento degli indici di un tensore. Resta così definito l'isomorfismo composto

$$(3.16) \quad \Lambda^k(V) \xrightarrow{\Lambda^k(\phi_g)} \Lambda^k(V^*) \xrightarrow{\delta} \Lambda^{n-k}(V)$$

che prende il nome di *operatore \* di Hodge* e si indica con  $*\mu$  l'immagine di una forma  $\mu \in \Lambda^k(V)$ . In particolare, se esiste una base ortonormale,  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ , per  $g$ , si ha

$$*v_{I(1)} \wedge \cdots \wedge v_{I(k)} = \text{sgn}(I \vee cI) v_{cI(1)} \wedge \cdots \wedge v_{cI(n-k)},$$

al variare di  $I$  in  $\mathcal{I}_n^k$ , e  $**\mu = (-1)^{k(n-k)}\mu$ , per ogni  $\mu \in \Lambda^k(V)$ .

Consideriamo il caso particolare in cui  $n = 3$  e la base data è ortonormale per un prodotto scalare fissato su  $V$ . Questo prodotto scalare determina l'isomorfismo,  $\phi_g : V \rightarrow V^*$ , che manda ordinatamente la base data sugli elementi della base duale. Considerando gli isomorfismi definiti sopra, si ottiene, per composizione con l'applicazione bilineare alternante canonica,

$$V \times V \xrightarrow{\pi_2} \Lambda^2(V) \xrightarrow{*} \Lambda^1(V) = V$$

un prodotto  $V \times V \rightarrow V$  che coincide con il *prodotto vettoriale*  $(v, w) \mapsto v \times w$ . Lasciamo al lettore la verifica di quest'ultima affermazione e le sue possibili estensioni a dimensioni maggiori. Il lettore particolarmente interessato alle applicazioni alla Fisica, dovrebbe imparare a calcolare l'operatore di Hodge nel caso in cui  $(V, g)$  sia lo spazio di Minkovsky (esercizio!).

**3.17 Prodotto Contratto.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita. Tramite il prodotto esterno e la dualità tra le algebre  $\Lambda(V)$  e  $\Lambda(V^*)$ , possiamo definire un'azione degli elementi di un'algebra sull'algebra duale. Siano  $\lambda^* \in \Lambda^h(V^*)$  e  $\mu \in \Lambda^k(V)$ , con  $k \geq h$ , il loro *prodotto contratto* (a sinistra) è l'elemento  $\lambda^* \times \mu \in \Lambda^{k-h}(V)$ , definito dalle condizioni<sup>(†)</sup>

$$\alpha^* \circ (\lambda^* \times \mu) = (\alpha^* \wedge \lambda^*) \circ \mu \quad \text{per ogni } \alpha^* \in \Lambda^{k-h}(V^*).$$

Se, invece  $h > k$ , si pone  $\lambda^* \times \mu = 0$ .

Distribuendo le somme dei termini omogenei (o ricordando che la dualità tra le componenti omogenee si estende ad una dualità tra  $\Lambda(V)$  e  $\Lambda(V^*)$ ) si definisce il prodotto contratto (a sinistra),  $\xi^* \times \eta \in \Lambda(V)$ , tra  $\xi^* \in \Lambda(V^*)$  ed  $\eta \in \Lambda(V)$ , per cui vale ancora la relazione  $\alpha^* \circ (\xi^* \times \eta) = (\alpha^* \wedge \xi^*) \circ \eta$ , per ogni  $\alpha^* \in \Lambda(V^*)$ .

Si può dare un'analogia definizione del prodotto contratto (a destra)  $\xi^* \times \eta \in \Lambda(V^*)$ , tra  $\xi^* \in \Lambda(V^*)$  ed  $\eta \in \Lambda(V)$ , imponendo le condizioni  $(\xi^* \times \eta) \circ \alpha = \xi^* \circ (\eta \wedge \alpha)$ , per ogni  $\alpha \in \Lambda(V)$ .

Fissata una base,  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ , di  $V$  e la corrispondente base duale di  $V^*$  restano determinate le basi  $\mathcal{V}_k = \{v_I = v_{I(1)} \wedge \cdots \wedge v_{I(k)} \mid I \in \mathcal{I}_n^k\}$ ,  $\mathcal{V}_k^* = \{v_I^* \mid I \in \mathcal{I}_n^k\}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , di tutte le componenti omogenee dell'algebra esterna  $\Lambda(V)$  e della sua duale  $\Lambda(V^*)$ . Per descrivere il prodotto contratto degli

<sup>(†)</sup> La definizione è quella di Bourbaki, ma non sono riuscito a trovare tra i molti simboli del  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ , quello ivi usato per il prodotto contratto. Il simbolo che uso permette comunque di affermare in modo analogo che il fattore posto nel lato "aperto" del simbolo di prodotto agisce sugli elementi dell'algebra duale.

elementi di queste basi, introduciamo una nuova notazione sui multiindici. Siano  $H \in \mathcal{S}_n^h$  e  $K \in \mathcal{S}_n^k$ , con  $\text{im } H \subseteq \text{im } K$ , ed indichiamo con  $K \setminus H$  l'unico elemento di  $\mathcal{S}_n^{k-h}$  tale che  $\text{im}(H \vee (K \setminus H)) = \text{im } K$  (ad esempio, data  $I \in \mathcal{S}_n^k$ , si ha  $cI = id \setminus I$ , ove  $id : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  indica l'applicazione identica).

Dati quindi gli elementi di base  $v_H^* \in \Lambda^h(V^*)$  e  $v_K \in \Lambda^k(V)$ , si ha

$$(3.18) \quad v_H^* \times v_K = \begin{cases} 0 & \text{se } \text{im } H \not\subseteq \text{im } K \\ \text{sgn}((K \setminus H) \vee H) v_{K \setminus H} & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Dato un elemento  $z \in \Lambda(V)$ , indichiamo con  $\lambda_z : \Lambda(V^*) \rightarrow \Lambda(V)$  l'applicazione definita da  $\lambda_z(\omega^*) = \omega^* \times z$ , per ogni  $\omega^* \in \Lambda(V^*)$ .

**3.19 Elementi puri.** Un elemento  $\omega \in \Lambda^k(V)$  si dice *puro* se esistono  $k$  vettori  $x_1, \dots, x_k \in V$  tali che  $\omega = x_1 \wedge \dots \wedge x_k$ . Ovviamente, ogni elemento di  $\Lambda^1(V)$  o di  $\Lambda^n(V)$  (se  $n = \dim V$ ) è puro. La domanda se un elemento sia puro diventa interessante per le altre componenti omogenee dell'algebra esterna.

Sia  $W$  un sottospazio di dimensione  $k$  di  $V$  e sia  $w_1, \dots, w_k$  una sua base. Al sottospazio  $W$  possiamo associare l'elemento (puro)  $w_1 \wedge \dots \wedge w_k \in \Lambda^k(V)$  ed osservare che il sottospazio  $\langle w_1 \wedge \dots \wedge w_k \rangle$  non dipende dalla scelta della base di  $W$ ; infatti, se  $y_1, \dots, y_k$  è un'altra base di  $W$  i due elementi  $w_1 \wedge \dots \wedge w_k$  ed  $y_1 \wedge \dots \wedge y_k$  si ottengono l'uno dall'altro moltiplicando per il determinante della matrice di cambiamento di base e quindi generano lo stesso sottospazio di  $\Lambda^k(V)$ . In questo modo, ad ogni sottospazio di dimensione  $k$  di  $V$ , possiamo associare un punto dello spazio proiettivo  $\mathbb{P}(\Lambda^k(V))$ . Mostreremo che c'è una corrispondenza biunivoca tra sottospazi di dimensione  $k$  di  $V$  e sottospazi generati da elementi puri di  $\Lambda^k(V)$  e che i punti corrispondenti dello spazio proiettivo sono le soluzioni di opportune equazioni algebriche (omogenee).

Andiamo quindi a caratterizzare gli elementi puri di  $\Lambda^k(V)$ . Dato un elemento  $\omega \in \Lambda^k(V)$ , chiamiamo  $W_\omega$  il minimo sottospazio,  $W$ , di  $V$  tale che  $\omega \in \Lambda^k(W)$  (esiste, perché  $\Lambda^k(W_1) \cap \Lambda^k(W_2) = \Lambda^k(W_1 \cap W_2)$  per ogni coppia di sottospazi) ed osserviamo che  $\dim W_\omega \geq k$  e  $\omega$  è puro se, e solo se,  $\dim W_\omega = k$ . La seguente Proposizione caratterizza gli elementi puri.

**3.20 Proposizione.** Sia  $0 \neq \omega \in \Lambda^k(V)$ .

- (a)  $W_\omega^\perp = \{v^* \in V^* \mid v^* \times \omega = 0\}$ .
- (b) Sia  $\lambda_\omega : \Lambda(V^*) \rightarrow \Lambda(V)$  l'applicazione definita da  $\lambda_\omega(\zeta^*) = \zeta^* \times \omega$ , per ogni  $\zeta^* \in \Lambda(V^*)$ . Allora  $W_\omega = \lambda_\omega(\Lambda^{k-1}(V^*))$ .
- (c)  $\omega$  è puro se, e solo se,  $(\zeta^* \times \omega) \wedge \omega = 0$  per ogni  $\zeta^* \in \Lambda^{k-1}(V^*)$ .

*dim.* (a) Sia  $v_1, \dots, v_\ell$  una base di  $W_\omega$ ,  $v_{\ell+1}, \dots, v_n$  dei vettori che la completano ad una base di  $V$ , a cui corrisponde la base duale  $v_1^*, \dots, v_n^*$  di  $V^*$ . Per la definizione di prodotto contratto, se  $j = \ell + 1, \dots, n$ , si ha  $v_j^* \times \omega = 0$  e quindi  $W_\omega^\perp \subseteq \{v^* \in V^* \mid v^* \times \omega = 0\}$ . L'altra inclusione è una conseguenza di (b); infatti, supponendola vera, dato  $v^* \in V^*$  con  $v^* \times \omega = 0$ , e preso comunque  $\zeta^* \in \Lambda^{k-1}(V^*)$ , si ha

$$v^* \circ (\zeta^* \times \omega) = (v^* \wedge \zeta^*) \circ \omega = (-1)^{k-1} (\zeta^* \wedge v^*) \circ \omega = (-1)^{k-1} \zeta^* \circ (v^* \times \omega) = 0$$

e quindi  $v^* \in W_\omega^\perp$ , data l'arbitrarietà di  $\zeta^*$ .

(b) Dato  $v_j^*$ , con  $j = \ell + 1, \dots, n$ , e preso comunque  $\zeta^* \in \Lambda^{k-1}(V^*)$ , si ha  $v_j^* \circ (\zeta^* \times \omega) = (v_j^* \wedge \zeta^*) \circ \omega = 0$ , perché  $\omega \in \Lambda^k(\langle v_1, \dots, v_\ell \rangle)$ . Se ne deduce che  $\lambda_\omega(\Lambda^{k-1}(V^*)) \subseteq W_\omega$ . Per concludere è sufficiente dimostrare che  $\langle v_1^*, \dots, v_\ell^* \rangle \cap \lambda_\omega(\Lambda^{k-1}(V^*))^\perp = \langle 0 \rangle$ , perché ciò implica  $\dim(\lambda_\omega(\Lambda^{k-1}(V^*))^\perp) \leq n - \ell$  e quindi  $\dim \lambda_\omega(\Lambda^{k-1}(V^*)) \geq \ell = \dim W_\omega$ .

Sia dunque  $v^* = a_1 v_1^* + \dots + a_\ell v_\ell^* \neq 0$ . Per il Lemma di Scambio, possiamo sostituire il vettore  $v^*$  ad uno dei vettori della base di  $\langle v_1^*, \dots, v_\ell^* \rangle$ , e supponiamo, per fissare le idee, che sia  $v_1^*$ . Consideriamo quindi la nuova base  $w_1^*, \dots, w_n^*$  di  $V^*$  e la sua base duale  $w_1, \dots, w_n$  di  $V$  ed osserviamo che si ha ancora  $W_\omega = \langle w_1, \dots, w_\ell \rangle$  e  $W_\omega^\perp = \langle w_{\ell+1}^*, \dots, w_n^* \rangle$ . Per la minimalità del sottospazio  $W_\omega$ , esiste un multiindice,  $I \in \mathcal{S}_\ell^k$ , tale che  $I(1) = 1$  e  $w_I^* \circ \omega \neq 0$ . Preso il multiindice  $J \in \mathcal{S}_\ell^{k-1}$ , definito da  $J(x) = I(x+1)$ , per  $x = 1, \dots, k-1$ , si ha

$$v^* \circ (w_J^* \times \omega) = w_1^* \circ (w_J^* \times \omega) = (w_1^* \wedge w_J^*) \circ \omega = w_I \circ \omega \neq 0;$$

e quindi  $v^* \notin \lambda_\omega(\Lambda^{k-1}(V^*))^\perp$ . L'arbitrarietà della scelta di  $v^*$  permette di concludere la dimostrazione di (b).

(c) Se  $\omega$  è puro,  $\dim W_\omega = k$  e  $\Lambda^{k+1}(W_\omega) = \langle 0 \rangle$  per cui, qualunque sia  $\zeta^* \in \Lambda^{k-1}(V^*)$ , in base a ((b)), si ha  $(\zeta^* \times \omega) \wedge \omega \in \Lambda^{k+1}(W_\omega)$  e si conclude. Viceversa, se  $\ell > k$ , si ha una dualità (non-degenere)  $\Lambda^{\ell-k}(W_\omega) \times \Lambda^k(W_\omega) \rightarrow \Lambda^\ell(W_\omega)$  che manda  $(\alpha, \beta)$  in  $\alpha \wedge \beta$ . Quindi  $w \wedge \omega = 0$  per ogni  $w \in W_\omega$ , implica  $\alpha \wedge \omega = 0$  per ogni  $\alpha \in \Lambda^{\ell-k}(V)$  da cui si deduce  $\omega = 0$ , contro le ipotesi. Quindi la condizione data può valere se, e solo se,  $\omega$  è puro. **CVD**  $\square$

Sia fissata una base qualunque,  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ , di  $V$  e la base duale,  $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ , di  $V^*$ . Un elemento  $\omega \in \Lambda^k(V)$  ( $2 \leq k \leq n-1$ ) è puro se, e solo se, per ogni  $K \in \mathcal{J}_n^{k+1}$  ed ogni  $J \in \mathcal{J}_n^{k-1}$ , si ha

$$(3.21) \quad v_K^* \circ ((v_J^* \times \omega) \wedge \omega) = 0. \quad (\text{relazioni di Grassmann-Plücker})$$

Utilizzando le coordinate plückeriane in  $\mathbb{P}(\Lambda^k(V))$ , si verifica che le condizioni precedenti determinano delle equazioni omogenee di secondo grado nelle coordinate di  $\langle \omega \rangle$ .



# IV

## Gruppi ed Algebre di Lie

In questo capitolo daremo le definizioni e qualche esempio di gruppi di Lie e delle algebre di Lie ad essi associati. Non sarà certo una trattazione completa dei molti risultati relativi a questo soggetto. Daremo solo un'idea introduttiva delle proprietà fondamentali di questi oggetti e di come la struttura geometrica di varietà differenziabile e la struttura algebrica di gruppo interagiscano tra loro per dare origine a alle caratteristiche rilevanti di questi oggetti.

### 1. Definizioni ed esempi

Cominciamo con la definizione e qualche esempio di gruppo di Lie.

**1.1 Definizione.** Un *gruppo di Lie* è una varietà differenziabile liscia ( $\mathcal{C}^\infty$ ) con una legge di gruppo, tale che le applicazioni

$$\mu : G \times G \rightarrow G \quad \text{e} \quad \rho : G \rightarrow G \\ (x, y) \mapsto xy \quad \quad \quad x \mapsto x^{-1}$$

siano applicazioni lisce di varietà differenziabili.

Morfismi di gruppi di Lie sono omomorfismi di gruppi  $\varphi : G \rightarrow H$  che siano anche applicazioni lisce.

Osserviamo che è sufficiente verificare che l'applicazione  $(x, y) \mapsto xy^{-1}$  sia liscia perché il gruppo sia un gruppo di Lie.

Chiameremo *sottogruppo di Lie* di un gruppo di Lie,  $G$ , ogni sottogruppo che sia una sottovarietà chiusa di  $G$ . Non prenderemo in considerazione sottogruppi che siano sottovarietà immerse in  $G$  quale, ad esempio, l'immagine di una retta con pendenza irrazionale nel toro.

**1.2 Esempi.** (a) Sia  $n \geq 1$  un intero e consideriamo il gruppo  $GL_n\mathbb{R}$  delle matrici invertibili di ordine  $n$ . Si tratta di una varietà differenziabile (un aperto dello spazio vettoriale,  $M_n(\mathbb{R})$ , delle matrici di ordine  $n$ ) e le operazioni di gruppo sono definite da funzioni razionali invertibili delle coordinate e sono quindi lisce. Analogamente, il gruppo  $GL_n\mathbb{C}$  è un gruppo di Lie complesso.

(b) Il gruppo  $SL_n\mathbb{R}$  delle matrici con determinante 1, è un gruppo di Lie ed è un sottogruppo di Lie di  $GL_n\mathbb{R}$ . Sono pure sottogruppi di Lie di  $GL_n$ , il gruppo  $B_n$  delle matrici (invertibili) triangolari superiori ed il gruppo  $N_n$  delle matrici triangolari superiori unipotenti (ovvero con la diagonale principale fatta di 1). Per ognuno di questi gruppi c'è l'analogo gruppo di Lie complesso.

(c) Più in generale, dato uno spazio vettoriale,  $V$ , di dimensione finita su  $\mathbb{R}$  o su  $\mathbb{C}$ , possiamo considerare il gruppo  $GL(V)$  degli endomorfismi invertibili di  $V$ , ed il sottogruppo  $SL(V)$  degli endomorfismi di determinante 1. Fissata una base,  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ , di  $V$ , possiamo considerare il sottogruppo  $B(\mathcal{V})$  di  $GL(V)$ , costituito dagli endomorfismi invertibili che rispettano la filtrazione  $0 \subseteq \langle v_1 \rangle \subseteq \langle v_1, v_2 \rangle \subseteq \dots \subseteq \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ , ovvero  $\phi(v_i) \in \langle v_1, \dots, v_i \rangle$ . Analogamente si ha il sottogruppo dei morfismi unipotenti che rispettano la filtrazione, ovvero  $\phi(v_i) - v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1} \rangle$ , per  $i = 1, \dots, n$ . Generalizzando questa costruzione, si può considerare una filtrazione  $W_1 \subseteq W_2 \subseteq \dots \subseteq W_m$  fatta da sottospazi di  $V$  e considerare il sottogruppo degli endomorfismi invertibili che rispettano la filtrazione, ovvero tali che  $\phi(W_i) \subseteq W_i$ , per  $i = 1, \dots, m$ . Si tratta, in ogni caso, di gruppi di Lie.

(d) Sia  $Q; V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  un'applicazione bilineare non-degenere e consideriamo il gruppo  $SI_Q$  delle isometrie di  $V$  con determinante 1, ovvero le applicazioni lineari  $\phi : V \rightarrow V$  tali che  $Q(\phi(v), \phi(w)) = Q(v, w)$  per ogni  $v, w \in V$  e  $\det \phi = 1$ . Anche in questo caso si ha un gruppo di Lie, perché, fissata una base di  $V$  e detta  $M$  la matrice dell'applicazione bilineare  $Q$ , un endomorfismo appartiene ad  $SI_Q$  se la sua matrice  $P$  soddisfa all'equazione  ${}^tPMP = M$  e  $\det P = 1$ . Si ha quindi un sottogruppo chiuso di  $GL_n\mathbb{R}$ .

In particolare,

- se  $Q$  è definita positiva indicheremo con  $SO_n$  il gruppo delle isometrie (*Gruppo Ortogonale speciale*;

- se  $Q$  ha segnatura  $(k, l)$  indicheremo con  $SO_{k,l}$  il corrispondente gruppo di isometrie;
- se  $Q$  è alternante (non degenera), indicheremo con  $Sp_{2m}$  il corrispondente gruppo di isometrie;
- se  $Q$  è degenera, indicato con  $N = \{v \in V \mid Q(v, w) = 0 \forall w \in V\}$  il nucleo di  $Q$ , le isometrie di  $Q$  sono endomorfismi invertibili che rispettano la filtrazione  $0 \subseteq N \subseteq V$  ed inducono un'isometria sul quoziente  $V/N$ .

(e) Su  $\mathbb{C}$  troviamo analogamente i gruppi  $Sp_{2n}$  ed  $SO_n$  (tutte le applicazioni bilineari simmetriche non degeneri sono isometriche). Data una forma hermitiana  $h : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ , possiamo considerare i gruppi di isometrie corrispondenti ( $SU_n$  o  $SU_{k,l}$ ), ma non sono sottogruppi di Lie complessi di  $SL_n\mathbb{C}$  (perché?).

Il gruppo  $GL_n\mathbb{R}$  non è connesso, perché la funzione determinante lo separa in due aperti disgiunti, la cui unione è tutto  $GL_n\mathbb{R}$ . Vogliamo mostrare che questi due aperti sono entrambi connessi. È chiaro che i due aperti sono diffeomorfi (la moltiplicazione per la matrice  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{n-1} \end{pmatrix}$  realizza questo diffeomorfismo) e quindi è sufficiente verificare che  $GL_n^+\mathbb{R} = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A > 0\}$  è connesso (per archi).

Sia  $B$  una matrice di  $GL_n^+\mathbb{R}$ . Le sue colonne sono una base di  $\mathbb{R}^n$  e quindi, per il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, esiste una matrice triangolare superiore,  $T$ , con elementi positivi sulla diagonale, tale che  $BT$  sia una matrice ortogonale, ovvero le cui colonne siano una base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$ . Se consideriamo il cammino  $B_t = B((1-t)\mathbf{1}_n + tT)$ ,  $t \in [0, 1]$ , si ha  $B_0 = B$ ,  $B_1 = BT \in SO_n$  e tutte le matrici  $B_t$  appartengono a  $GL_n^+\mathbb{R}$ .

Per quanto visto, è quindi sufficiente mostrare che il gruppo  $SO_n\mathbb{R}$  è connesso (per archi) ovvero che date due matrici ortogonali,  $A$  e  $B$ , esiste un cammino  $\gamma : [0, 1] \rightarrow SO_n\mathbb{R}$  tale che  $\gamma(0) = A$  e  $\gamma(1) = B$ . Lo dimostriamo per induzione su  $n$ . Se  $n = 1$  la tesi è banalmente vera. Sia  $n > 1$  e supponiamo vera la tesi per ogni  $k < n$ . Date due matrici ortogonali,  $A$  e  $B$ , distinguiamo alcuni casi:

- Se la prima colonna di  $A$  è uguale alla prima colonna di  $B$ , la matrice  $A^{-1}B$  è del tipo  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$ , con  $P \in SO_{n-1}$ . Per l'ipotesi induttiva esiste un cammino  $t \mapsto P_t \in SO_{n-1}$  tale che  $P_0 = \mathbf{1}_{n-1}$  e  $P_1 = P$ , Dunque il cammino  $t \mapsto A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_t \end{pmatrix}$  congiunge  $A$  con  $B$ .
- Supponiamo ora che la prima colonna di  $B$  sia l'opposto della prima colonna di  $A$  e consideriamo il cammino

$$t \mapsto A_t = A \begin{pmatrix} \cos(\pi t) & -\sin(\pi t) & 0 \\ \sin(\pi t) & \cos(\pi t) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1}_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Si tratta di un cammino in  $SO_n\mathbb{R}$  e la matrice  $A_1$  ha la prima colonna uguale alla prima colonna di  $B$  e quindi possiamo concludere per quanto visto nel caso precedente.

- Mettiamoci ora nel caso rimanente in cui la prima colonna,  $a_1$ , di  $A$  e la prima colonna,  $b_1$ , di  $B$  sono linearmente indipendenti. Consideriamo un vettore  $a'_2 \in \langle a_1, b_1 \rangle \cap \langle a_1 \rangle^\perp$ , con  $\|a'_2\| = 1$ , siano  $a'_3, \dots, a'_n$  una base ortonormale di  $\langle a_1, a'_2 \rangle^\perp$  e scegliamo il segno di  $a'_2$  in modo che la matrice  $A'$ , che ha come colonne i vettori  $a_1, a'_2, a'_3, \dots, a'_n$  appartenga ad  $SO_n\mathbb{R}$ . La matrice  $A'$  ha la prima colonna uguale ad  $A$ , quindi possiamo congiungere queste due matrici con un cammino. Il vettore  $b_1 \in \langle a_1, a'_2 \rangle$  e quindi esiste un numero reale  $\theta \in (0, 2\pi)$  tale che  $b_1 = \cos\theta a_1 + \sin\theta a'_2$ . Il cammino

$$t \mapsto A'_t = A' \begin{pmatrix} \cos(\theta t) & -\sin(\theta t) & 0 \\ \sin(\theta t) & \cos(\theta t) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1}_{n-2} \end{pmatrix}$$

congiunge  $A' = A'_0$  con la matrice  $A'_1$  che ha  $b_1$  come prima colonna. Per quanto visto sopra, possiamo trovare un cammino che congiunge  $A'_1$  con  $B$  e concludere la dimostrazione.

Per quanto riguarda il gruppo  $SO_{k,l}\mathbb{R}$ , con  $k > 0 < l$ , possiamo scrivere i suoi elementi come matrici a blocchi  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  ed osservare che  $A$  e  $D$  devono essere matrici invertibili (perché?). Dunque questo gruppo non può essere connesso, essendo disgiunti i due aperti  $\det A > 0 < \det D$  e  $\det A < 0 > \det D$ . Lasciamo al lettore il compito di dimostrare che  $SO_{k,l}^+\mathbb{R} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mid \det A > 0, \det D > 0 \right\}$  è la componente connessa dell'identità. Lasciamo al lettore anche la facile verifica che l'applicazione

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_l \\ \mathbf{1}_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_k \\ \mathbf{1}_l & 0 \end{pmatrix}$$

è un isomorfismo di gruppi di Lie tra  $SO_{k,l}$  ed  $SO_{l,k}$ .

Sia  $K$  il corpo reale o quello complesso. Il gruppo  $GL_n K$  è un aperto dello spazio vettoriale  $M_n(K)$  delle matrici di ordine  $n$ , quindi il suo spazio tangente in ogni punto è isomorfo ad  $M_n(K)$ . In particolare, dato un cammino  $t \mapsto P(t)$ , definito su un intervallo  $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$  e con  $P(0) = \mathbf{1}_n$ , il vettore tangente ad esso associato  $X = \frac{d}{dt}|_{t=0} P(t)$  è quindi una generica matrice di ordine  $n$ . Identificheremo quindi  $M_n(K)$  con lo spazio tangente a  $GL_n K$  nell'identità. D'altra parte, fissato un altro punto  $B \in GL_n$ , il cammino  $t \mapsto BP(t)$ , passa per  $B$  quando  $t = 0$  e si ha  $BX = \frac{d}{dt}|_{t=0} BP(t)$ . Quindi la moltiplicazione a sinistra per  $B$  è l'isomorfismo indotto tra  $T_1(GL_n K)$  e  $T_B(GL_n K)$ , ovvero l'applicazione tangente alla mappa  $X \mapsto BX$ . In particolare,  $GL_n K$  è una varietà di dimensione  $n^2$  su  $K$ .

L'isomorfismo tra gli spazi tangenti in punti diversi di un gruppo di Lie si verifica per qualsiasi gruppo e quindi la dimensione di queste varietà è costante e possiamo sempre calcolarla determinando lo spazio tangente nell'elemento neutro,  $e$ .

Vediamo qualche esempio. Consideriamo il gruppo  $SL_n K$  ed un cammino  $t \mapsto P(t)$ , con  $P(0) = \mathbf{1}_n$ . Per ogni valore di  $t$  si ha  $\det P(t) = 1$ ; quindi, indicate con  $x_{ij}$  le entrate del vettore tangente  $X = \frac{d}{dt}|_{t=0} P(t)$ , si ottiene la relazione  $x_{11} + x_{22} + \dots + x_{nn} = 0$ , ovvero lo spazio tangente  $T_1(SL_n K)$  coincide con il sottospazio di  $M_n K$  formato dalle matrici di traccia nulla. Da cui si deduce, in particolare, che  $\dim_K SL_n K = n^2 - 1$ .

Consideriamo il gruppo  $SI_Q$  delle isometrie di un'applicazione bilineare  $Q$ . Dato un cammino  $t \mapsto P(t)$ , con  $P(0) = \mathbf{1}_n$ . Per ogni valore di  $t$  si ha  ${}^t P(t) M P(t) = M$ , ove  $M$  è la matrice (costante) della forma  $Q$ . Detto  $X = \frac{d}{dt}|_{t=0} P(t)$  il vettore tangente, derivando la relazione scritta sopra, si ottiene  ${}^t X M + M X = 0$ , da cui si deducono le equazioni soddisfatte dalle matrici appartenenti a  $T_1(SI_Q)$ . Da ciò si deduce che lo spazio tangente  $T_1(SO_n)$  coincide con il sottospazio di  $M_n$  formato dalle matrici antisimmetriche ( ${}^t X = -X$ ). In particolare, che  $\dim SO_n = \binom{n}{2}$ .

Lasciamo al lettore il compito di svolgere calcoli analoghi e verificare che  $\dim SO_{k,l} = \binom{n}{2}$ ,  $\dim B_n = \binom{n+1}{2}$ ,  $\dim N_n = \binom{n}{2}$ ,  $\dim Sp_{2n} = 2n^2 + n$ . Come esercizio, lo invitiamo a provare che  $SO_n \mathbb{R}$  è compatto, mentre  $SO_n \mathbb{C}$ , per  $n \geq 2$ , non lo è. Calcoli inoltre le dimensioni (su  $\mathbb{R}$ ) dei gruppi,  $SU_n$  ed  $SU_{k,l}$ , di isometrie di forme hermitiane (si noti che non sono gruppi di Lie complessi... perché?).

**1.3 Alcuni omomorfismi notevoli.** Sia  $H$  il sottospazio di  $M_2(\mathbb{C})$  formato dalle matrici a traccia nulla e dotato della forma quadratica non-degenere  $A \mapsto \frac{1}{2} \operatorname{tr} A^2 = -\det A$ . Il gruppo  $SL_2 \mathbb{C}$  agisce su  $H$  tramite  $(g, A) \mapsto gAg^{-1}$  e, per ogni  $g$  fissato, questa azione è un'isometria. Si definisce così un omomorfismo  $\rho : SL_2 \mathbb{C} \rightarrow SO_3 \mathbb{C}$ . Il nucleo di  $\rho$  contiene il sottogruppo  $\{\pm \mathbf{1}_2\}$  ed esattamente uguale a questo, come si vede studiando l'azione di un generico elemento di  $SL_2 \mathbb{C}$  sui generatori  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , di  $H$ . Poiché i due gruppi hanno la stessa dimensione, l'applicazione è anche suriettiva.

Osserviamo infine che  $SL_2 \mathbb{C}$  è semplicemente connesso e quindi questa applicazione è il rivestimento universale del gruppo  $SO_3 \mathbb{C}$ .

Un calcolo analogo può essere fatto per il gruppo  $SO_3 \mathbb{R}$ . Tracciamo il percorso per il lettore interessato. Sia  $V$  lo spazio vettoriale reale delle matrici  $A \in M_2(\mathbb{C})$  anti-hermitiane ( ${}^t \bar{A} = -A$ ) e di traccia nulla<sup>(\*)</sup>, dotato della forma quadratica definita positiva  $A \mapsto \det A = \frac{1}{2} \operatorname{tr} ({}^t \bar{A} A)$ . Una base ortonormale di  $V$  è data dalle matrici  $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ . Il gruppo  $SU_2 = \{ g \in M_2(\mathbb{C}) \mid {}^t \bar{g} g = \mathbf{1}_2, \det g = 1 \}$  agisce su  $V$  tramite  $(g, A) \mapsto gAg^{-1}$  e, per ogni  $g$  fissato, questa azione è un'isometria. Si definisce così un omomorfismo  $\rho : SU_2 \rightarrow SO_3 \mathbb{R}$ . Anche in questo caso il nucleo è uguale al sottogruppo  $\{\pm \mathbf{1}_2\}$  e l'omomorfismo è suriettivo.

Il gruppo  $SU_2$  è formato dalle matrici  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ , con  $a, b \in \mathbb{C}$  ed  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . È quindi diffeomorfo alla sfera  $S_3$  in  $\mathbb{R}^4$  ed è perciò semplicemente connesso. Si tratta quindi del rivestimento universale di  $SO_3 \mathbb{R}$ . Questo gruppo prende talvolta il nome di *gruppo degli spin*, perché i suoi elementi sono identificati da una rotazione e da un segno.

Facciamo ora un'osservazione che ci sarà utile nel seguito.

(\*) Ovvero lo spazio tangente nell'identità di  $SU_2$ .

**1.4 Proposizione.** *Sia  $G$  un gruppo di Lie connesso ed  $U \subseteq G$  un intorno dell'elemento neutro,  $e$ . Il gruppo generato da  $U$  coincide con  $G$ .*

*dim.* Il gruppo generato da  $G$  è unione di traslati di  $U$  e quindi è un sottogruppo aperto,  $H$ , di  $G$ . Poiché  $G$  è connesso, deve aversi  $G = H$  perché, altrimenti,  $G = H \cup (\bigcup_{x \notin H} Hx)$  sarebbe unione di due aperti disgiunti. **CVD** □

Vogliamo mostrare che, non solo un intorno dell'elemento neutro determina un gruppo di Lie connesso, ma che, in realtà un tale gruppo è quasi completamente determinato dal suo spazio tangente nell'elemento neutro. A questo scopo, data un'applicazione liscia  $\rho : G \rightarrow H$  tra due gruppi di Lie, che mandi l'elemento neutro di  $G$  nell'elemento neutro di  $H$ , cerchiamo di caratterizzare tramite l'applicazione tangente  $d\rho_e : T_e(G) \rightarrow T_e(H)$  gli omomorfismi di gruppo.

Cominciamo osservando che il gruppo  $G$  agisce su se stesso per coniugazione, tramite le applicazioni

$$\Psi_g : \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & G \\ x & \mapsto & gxg^{-1} \end{array} \quad \text{al variare di } g \text{ in } G.$$

Per ogni applicazione  $\Psi_g$  possiamo considerare la sua applicazione tangente nell'identità e definire la *rappresentazione aggiunta* di  $G$

$$Ad : G \rightarrow \text{GL}(T_e(G)), \quad \text{ponendo } Ad(g) = (d\Psi_g)_e : T_e(G) \rightarrow T_e(G)$$

per ogni  $g \in G$ . L'applicazione tangente alla rappresentazione aggiunta è dunque  $ad : T_e(G) \rightarrow \text{End}T_e(G)$  e permette di definire l'applicazione bilineare

$$[\ , \ ] : \begin{array}{ccc} T_e(G) \times T_e(G) & \rightarrow & T_e(G) \\ (X, Y) & \mapsto & [X, Y] = ad(X)Y \end{array} \quad \text{[Lie bracket].}$$

Anche sullo spazio  $T_e(H)$  si ha un analogo applicazione. Se  $\rho : G \rightarrow H$  è anche un omomorfismo di gruppi – e quindi commuta con la rappresentazione aggiunta – si hanno i diagrammi commutativi

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{\rho} & H & & T_e(G) & \xrightarrow{(d\rho)_e} & T_e(H) & & T_e(G) & \xrightarrow{(d\rho)_e} & T_e(H) \\ \Psi_g \downarrow & & \downarrow \Psi_{\rho(g)} & & Ad(g) \downarrow & & \downarrow Ad(\rho(g)) & & ad(X) \downarrow & & \downarrow ad(d\rho_e(X)) \\ G & \xrightarrow{\rho} & H & & T_e(G) & \xrightarrow{(d\rho)_e} & T_e(H) & & T_e(G) & \xrightarrow{(d\rho)_e} & T_e(H) \end{array}$$

In termini delle parentesi di Lie la commutatività dell'ultimo diagramma si riscrive come

$$d\rho_e([X, Y]) = [d\rho_e(X), d\rho_e(Y)]$$

e quindi ci dice che le applicazioni tangenti agli omomorfismi di gruppo sono applicazioni lineari che rispettano le parentesi di Lie.

**1.5 Esempio importante.** Facciamo il calcolo esplicito delle parentesi di Lie per il gruppo  $\text{GL}_n$ , seguendo le costruzioni descritte sopra. Lo spazio tangente nell'identità è lo spazio vettoriale  $M_n$  e siano  $X, Y$ , due suoi elementi. Prendiamo inoltre un cammino  $P(t)$  tale che  $P(0) = \mathbf{1}$  e  $\frac{d}{dt}|_{t=0} P(t) = X$ . Allora, in base alle definizioni date, si ha

$$\begin{aligned} [X, Y] &= ad(X)Y = \frac{d}{dt}|_{t=0} (P(t)YP(t)^{-1}) = \\ &= P'(0)YP(0)^{-1} + P(0)Y(-P(0)^{-1}P'(0)P(0)^{-1}) = \\ &= XY - YX. \end{aligned}$$

E quindi il bracket coincide con il commutatore delle due matrici  $X$  ed  $Y$ , e questo vale per ogni sottogruppo di  $GL_n$ . Osserviamo però che, per due elementi,  $X, Y$ , dello spazio tangente la composizione  $XY$  non ha alcun significato intrinseco e, per un sottogruppo di  $GL_n$ , spesso dipende dall'immersione dello stesso nel gruppo lineare, mentre il commutatore  $XY - YX$ , per quanto visto, ha un significato intrinseco che dipende solo dal gruppo in questione.

Osserviamo inoltre che la realizzazione delle parentesi di Lie come un commutatore ci permette di dedurre due proprietà fondamentali di questa applicazione bilineare:

- $[X, Y] = -[Y, X]$ , (antisimmetria);
- $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ , (Identità di Jacobi).

Vedremo più avanti che queste proprietà non dipendono dalla realizzazione del bracket, ma sono sue caratteristiche intrinseche

Possiamo quindi dare la seguente definizione

**1.6 Definizione.** Un'algebra di Lie è uno spazio vettoriale,  $\mathfrak{g}$ , dotato di un'applicazione bilineare, antisimmetrica,  $[\ , \ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , soddisfacente all'identità di Jacobi.

Un omomorfismo di algebre di Lie è un'applicazione lineare  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  tale che  $\phi([v, w]) = [\phi(v), \phi(w)]$ , per ogni  $v, w \in \mathfrak{g}$ .

Torniamo a discutere la costruzione delineata sopra e mostriamo come le proprietà della parentesi di Lie (antisimmetria ed identità di Jacobi) siano intrinseche e non dipendano dalla scelta di una rappresentazione lineare del gruppo  $G$ . Nella dimostrazione ci servirà un risultato che sarà pienamente giustificato quando introdurremo l'applicazione esponenziale (cf. gruppi ad un parametro).

**1.7 Claim.** Preso comunque  $X \in T_e G$  esiste un omomorfismo di gruppi di Lie  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow G$  tale che  $d\rho_e(1) = X$ .

In base a questa affermazione, osservando che  $[1, 1] = 0$  in  $\mathbb{R}$  (non ci sono commutatori in  $\text{End } \mathbb{R} = \mathbb{R}$ ), si conclude che

$$[X, X] = [d\rho_e(1), d\rho_e(1)] = d\rho_e([1, 1]) = 0,$$

qualunque sia  $X \in T_e G$  e quindi le parentesi di Lie sono antisimmetriche.

Per verificare l'identità di Jacobi ripercorriamo la costruzione del bracket. Dato un gruppo di Lie,  $G$ , si ha l'omomorfismo naturale  $\Psi : G \rightarrow \text{Aut } G$ , che manda  $g$  nell'applicazione  $\Psi_g$ . Per ogni  $g \in G$ , si definisce  $Ad(g) = (d\Psi_g)_e : T_e G \rightarrow T_e G$ , e si costruisce in tal modo la rappresentazione aggiunta  $Ad : G \rightarrow GL(T_e G)$ . Quest'ultimo è un omomorfismo di gruppi di Lie e la sua applicazione tangente nell'identità è

$$d(Ad)_e = ad : \begin{array}{ccc} T_e G & \rightarrow & \text{End } T_e G \\ X & \mapsto & (Y \mapsto ad(X)Y = [X, Y]) \end{array}$$

Come applicazione tangente di un omomorfismo di gruppi,  $ad$  rispetta le parentesi di Lie e ciò significa che, presi comunque  $X, Y$  in  $T_e G$ , si ha

$$ad([X, Y]) = [adX, adY] = adX adY - adY adX$$

perché la parentesi di Lie in  $\text{End}$  è il commutatore. Dunque, preso un qualunque vettore  $Z \in T_e G$ , deve aversi

$$[[X, Y], Z] = ad([X, Y])Z = (adX adY - adY adX)Z = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]]$$

e, per la bilinearità e l'antisimmetria del bracket, si ottiene l'identità di Jacobi.

Abbiamo quindi dimostrato la seguente

**1.8 Proposizione.** Lo spazio tangente nell'origine di un gruppo di Lie,  $G$ , ha una struttura naturale di algebra di Lie, che usualmente si indica con  $\mathfrak{g}$ . Ogni omomorfismo di gruppi di Lie,  $\rho : G \rightarrow H$ , induce un omomorfismo di algebre di Lie,  $(d\rho)_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ .

È universalmente usata la convenzione tipografica di dare lo stesso nome al gruppo di Lie ed alla sua algebra, mutando il carattere di stampa. Quindi, le algebre di Lie di  $GL_n \mathbb{R}$ ,  $SL_n \mathbb{R}$ ,  $SO_n \mathbb{R}$ , si indicheranno con  $\mathfrak{gl}_n \mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{so}_n \mathbb{R}$ , e così via.

**1.9 Campi vettoriali invarianti.** Sia  $G$  un gruppo di Lie. Gli elementi di  $G$  operano per moltiplicazione a destra o a sinistra sul gruppo  $G$ , dando luogo alle due famiglie di applicazioni

$$\begin{array}{ccc} \lambda_g : G & \rightarrow & G \\ x & \mapsto & gx \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} \rho_g : G & \rightarrow & G \\ x & \mapsto & xg \end{array}$$

al variare di  $g$  in  $G$ .

Ad ogni vettore tangente  $X \in T_e G$ , si può quindi associare un campo vettoriale  $\tau_X$ , definito su tutto  $G$ , ponendo  $(\tau_X)_x = (d\lambda_x)_e X$ . Il campo  $\tau_X$  è *invariante a sinistra*, ovvero, per ogni  $x \in G$ , si ha

$$\begin{aligned} (\lambda_{g*} \tau_X)_x &= (d\lambda_g)_{g^{-1}x} (\tau_X)_{g^{-1}x} = \\ &= (d\lambda_g)_{g^{-1}x} (d\lambda_{g^{-1}x})_e X = \\ &= (d\lambda_x)_e X = (\tau_X)_x. \end{aligned}$$

Il campo agisce come derivazione sulle funzioni  $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$ , e precisamente, dato un cammino  $P(t)$  in  $G$ , tale che  $P(0) = e$  e  $P'(0) = X$ , si ha

$$(\tau_X f)(x) = (\tau_X)_x f = ((d\lambda_x)_e X) f = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(xP(t)).$$

Analogamente, a partire dal vettore tangente  $X$ , si può costruire un campo vettoriale invariante a destra, usando le applicazioni  $\rho_x$ , ma non ci occuperemo di questo.

Data un'applicazione  $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$  e l'applicazione  $\rho_g$ , possiamo considerare la funzione  $\rho_g^* f$ , definita da  $(\rho_g^* f)(x) = f(xg)$ , al variare di  $x$  in  $G$ . La funzione  $\rho_g^* f$  appartiene a  $\mathcal{C}^\infty(G)$  e si ha  $\rho_{gh}^* f = (\rho_h \circ \rho_g)^* f = \rho_g^* (\rho_h^* f)$ , qualunque siano  $g, h \in G$ . Si definisce così l'omomorfismo di gruppi

$$\begin{array}{ccc} \rho : G & \rightarrow & \text{Aut}(\mathcal{C}^\infty(G)) \\ g & \mapsto & \rho_g^* \end{array}$$

e verifichiamo che l'applicazione tangente nell'origine,  $(d\rho)_e : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End} \mathcal{C}^\infty(G)$ , associa al vettore  $X$  proprio la derivazione associata al campo invariante  $\tau_X$ . Sia  $P(t)$  come sopra ed osserviamo che, qualunque siano  $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$  ed  $x \in G$ , si ha

$$\begin{aligned} ((d\rho)_e X)(f)(x) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\rho^* P(t) f)(x) = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(xP(t)) = (\tau_X f)(x). \end{aligned}$$

Poiché  $\rho$  è un omomorfismo di gruppi di Lie, la sua applicazione tangente rispetta le parentesi di Lie e si ha dunque

$$\tau_{[X, Y]} = (d\rho)_e([X, Y]) = [(d\rho)_e X, (d\rho)_e Y] = [\tau_X, \tau_Y] = \tau_X \tau_Y - \tau_Y \tau_X.$$

Abbiamo quindi visto che relazioni ci sono tra le parentesi di Lie di  $T_e G$  e quelle definite per campi vettoriali alla fine del capitolo precedente (cf. *Definizione III.2.3*).

## 2. Esponenziale

In questa sezione vogliamo mostrare che un gruppo di Lie e la sua algebra di Lie hanno intorno delle rispettive origini diffeomorfi e che questi diffeomorfismi scambiano gli omomorfismi di gruppi e gli omomorfismi corrispondenti delle algebre di Lie. La nozione fondamentale per la costruzione dell'applicazione esponenziale è la definizione di sottogruppo ad un parametro di un gruppo di Lie.

Sia  $v$  un campo vettoriale (liscio) su una varietà differenziabile (liscia)  $M$ . Fissato un punto  $x \in M$ , per il teorema di esistenza ed unicità per equazioni differenziali ordinarie, esiste una curva  $\varphi : I \rightarrow M$ , tale che  $0 \in I$ ,  $\varphi(0) = x$  e  $\varphi'(t) = v_{\varphi(t)}$ , per ogni  $t \in I$ . Supponiamo ora che  $M = G$  sia un gruppo di Lie, che  $x = e$  sia l'elemento neutro del gruppo e che, infine,  $v = \tau_X$  sia un campo invariante a sinistra. Vogliamo vedere che, in tal caso, la curva  $\varphi : I \rightarrow G$  è un omomorfismo di gruppi e quindi si estende ad un'applicazione  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$ . Verifichiamo che si ha  $\varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t)$ , non appena  $t, s, s+t$  appartengono tutti ad  $I$ . Fissato  $s$ , consideriamo  $t$  variabile e confrontiamo le due curve  $\alpha(t) = \varphi(s+t)$  e  $\beta(t) = \varphi(s)\varphi(t)$ . Si ha  $\alpha(0) = \varphi(s) = \beta(0)$ ,

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \varphi'(s+t) = & \beta'(t) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\lambda_{\varphi(s)}\varphi(t)) = (d\lambda_{\varphi(s)})_{\varphi(t)}\varphi'(t) = \\ &= (\tau_X)_{\varphi(s+t)} =, & &= (d\lambda_{\varphi(s)})_{\varphi(t)}(\tau_X)_{\varphi(t)} = \\ &= (\tau_X)_{\alpha(t)} & &= (\tau_X)_{\varphi(s)\varphi(t)} = (\tau_X)_{\beta(t)} \end{aligned}$$

e, infine,  $\alpha'(0) = (\tau_X)_{\varphi(s)} = \beta'(0)$ . Dunque, per il teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni di un'equazione differenziale ordinaria, deve aversi  $\alpha(t) = \beta(t)$  per ogni  $t$ . Avendosi  $\varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t)$  in un opportuno intorno,  $I$ , di 0, l'applicazione si estende ad un omomorfismo  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$ , ove, per un generico  $x \in \mathbb{R}$ , si fissi un intero  $n$  tale che  $x/n \in I$ , e si ponga  $\varphi(x) := \varphi(x/n)^n$  (la definizione non dipende dalla scelta di  $n$ , perché?). In particolare, possiamo concludere che  $\varphi$  dipende in modo biunivoco dal vettore tangente  $X = \varphi'(0) = (\tau_X)_e$  e scriveremo quindi  $\varphi_X$ . L'omomorfismo  $\varphi_X : \mathbb{R} \rightarrow G$  è detto il *gruppo ad un parametro* associato ad  $X$ . Si osservi che, in particolare, quanto visto dimostra il claim fatto nella sezione precedente (cf. *Claim IV.1.7*).

Osserviamo che l'applicazione  $\varphi_X : \mathbb{R} \rightarrow G$  è univocamente determinata dal fatto di essere un omomorfismo di gruppi e dalla condizione  $\varphi_X'(0) = X$  infatti se  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow G$  è un omomorfismo di gruppi con  $\psi'(0) = X$ , si ha

$$\psi'(s) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \psi(s)\psi(t) = (d\lambda_{\psi(s)})_e X = (\tau_X)_{\psi(s)}.$$

quindi  $\psi$  e  $\varphi_X$  soddisfano alla stessa equazione differenziale, con le medesime condizioni iniziali, per cui coincidono. Possiamo quindi dare la definizione della mappa esponenziale.

**2.1 Definizione.** Sia  $G$  un gruppo di Lie e  $\mathfrak{g}$  la sua algebra di Lie, si definisce l'applicazione esponenziale  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ , ponendo  $\exp(X) = \varphi_X(1)$ , ove  $\varphi_X$  è il gruppo ad un parametro associato al vettore tangente  $X$ .

Utilizzando ancora il teorema di esistenza ed unicità, si conclude che  $\varphi_{\lambda X}(t) = \varphi_X(\lambda t)$  per ogni numero reale  $\lambda$ , e quindi che

$$\exp(\lambda X) = \varphi_{\lambda X}(1) = \varphi_X(\lambda),$$

per cui l'applicazione esponenziale ristretta al sottospazio  $\langle X \rangle \subseteq \mathfrak{g}$  coincide con il gruppo ad un parametro associato ad  $X$ . Osserviamo inoltre che l'applicazione tangente in  $0 \in \mathfrak{g}$  alla mappa esponenziale è  $(d\exp)_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , che manda il vettore tangente  $X$  in  $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tX) = \varphi_X'(0) = X$  ovvero coincide con l'identità di  $\mathfrak{g}$ . Per il Teorema del rango (cf. *Corollario II.1.3*) possiamo affermare che  $\exp$  è un diffeomorfismo tra un intorno di zero in  $\mathfrak{g}$  ed un intorno dell'elemento neutro  $e$  in  $G$ , in particolare, se  $G$  è un gruppo connesso, ciò significa che l'immagine dell'applicazione esponenziale genera il gruppo  $G$  (cf. *Proposizione IV.1.4*).

Riassumiamo quindi una parte delle osservazioni nella seguente

**2.2 Proposizione.** Sia  $G$  un gruppo di Lie. L'applicazione  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  è l'unica mappa che mandi  $0$  su  $e$ , per cui si abbia  $(d\exp)_e = 1 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , e la cui restrizione alle rette per l'origine in  $\mathfrak{g}$  è un gruppo ad un parametro. In particolare, se  $\psi : G \rightarrow H$  è un omomorfismo di gruppi di Lie, si ha il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{(d\psi)_e} & \mathfrak{h} \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{\psi} & H \end{array}$$

Per la commutatività del diagramma si osservi che, dato un vettore tangente  $X$ ,  $\exp(t(d\psi)_e X)$  e  $\psi(\exp(tX))$  sono due gruppi ad un parametro su  $H$  associati allo stesso vettore tangente e quindi coincidono.

**2.3 Esempio.** Cerchiamo di descrivere in modo esplicito  $\exp X$  nel caso in cui il gruppo  $G$  è il gruppo lineare  $GL_n$ . Sia dunque  $X \in \mathfrak{gl}_n$  e calcoliamo  $\varphi_X(1)$  per mezzo della formula di McLaurin. A tale scopo, ci serve conoscere:  $\varphi_X(0)$ ,  $\varphi'_X(0)$ ,  $\varphi''_X(0)$ , etc. Per costruzione,  $\varphi_X(0) = \mathbf{1}$  e  $\varphi'_X(0) = X$ . Inoltre,  $\varphi'_X(t) = (\tau_X)_{\varphi_X(t)} = \varphi_X(t)X$  (il prodotto è fatto in  $\mathfrak{gl}_n = \text{End}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^n$ ). Dunque,  $\varphi''_X(t) = \varphi'_X(t)X$  e quindi,  $\varphi''_X(0) = X^2$  e  $\varphi''_X(t) = \varphi_X(t)X^2$ . Analogamente si vede che  $\varphi_X^{(n)}(t) = \varphi_X(t)X^n$  per ogni  $n$  e quindi  $\varphi_X^{(n)}(0) = X^n$ . Si conclude quindi che

$$\exp X = \mathbf{1} + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \dots$$

e la serie converge ad una matrice invertibile, la cui inversa è  $\exp(-X)$ . In particolare, se  $XY = YX$  (ovvero  $[X, Y] = 0$ ), si ha  $\exp(X + Y) = (\exp X)(\exp Y)$ . Osserviamo infine che la serie

$$\exp(tX) = \sum_{n \geq 0} \frac{X^n t^n}{n!}$$

converge uniformemente sui compatti di  $\mathbb{R}$  (o di  $\mathbb{C}$ ).

In un intorno di  $\mathbf{1}$  in  $G$  l'applicazione inversa esiste ed è uguale a

$$\log g = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(g - \mathbf{1})^n}{n}$$

(le somme finite ed il loro limite da farsi in  $\mathfrak{gl}_n = \text{End}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^n$ ).

Dati due vettori tangenti  $X, Y$  in  $\mathfrak{gl}_n$ , si pone

$$X * Y := \log((\exp X)(\exp Y)).$$

Osservando che

$$(\exp X)(\exp Y) = \mathbf{1} + (X + Y) + \frac{1}{2!} (X^2 + 2XY + Y^2) + \dots + \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} X^j Y^{n-j} + \dots$$

e sostituendo formalmente nella serie del logaritmo, si ricava

$$(2.4) \quad X * Y = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}([X, [X, Y]] + [Y, [Y, X]]) + \dots$$

che sono i primi termini della famosa *Formula di Campbell-Hausdorff* che ci fornisce una serie per  $X * Y$ , i cui termini si ottengono tutti da  $X, Y$  ed opportune iterazioni delle parentesi di Lie (cf. ad esempio Wulf Rossmann, *Lie Groups. An introduction through linear groups*, Oxford Univ. Press, p. 23, per una descrizione esplicita dei termini della serie)<sup>(\*)</sup>.

<sup>(\*)</sup> Come indica anche Rossmann, pur essendo noto a Campbell (1897) ed Hausdorff (1906) che i termini della serie sono ottenibili dai vettori  $X$  ed  $Y$  e da iterazioni del bracket, la formula esplicita per tali termini è dovuta a Dynkin (1947).



Vediamo ora qualche calcolo esplicito. Data una matrice  $A \in M_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{gl}_n \mathbb{C}$ , sappiamo dall'Algebra Lineare che  $A$  è simile ad una matrice di Jordan  $J$ , ovvero esiste una matrice invertibile  $P$  tale che  $A = PJP^{-1}$ , ove  $J = D + N$  con  $D$  matrice diagonale, avente sulla diagonale gli autovalori di  $A$  contati secondo la loro molteplicità (algebrica), ed  $N$  matrice nilpotente che commuta con  $D$ , ovvero  $[D, N] = DN - ND = 0$ . Dunque, per la continuità delle operazioni di gruppo, si ha

$$\exp A = P(\exp J)P^{-1} = P(\exp D)(\exp N)P^{-1},$$

ove  $\exp D$  è ancora una matrice diagonale, avente sulla diagonale l'esponenziale degli autovalori ed  $\exp N$  è un polinomio (di grado minore o uguale ad  $n$ ) nella matrice  $N$ , essendo quest'ultima una matrice nilpotente. Ricordiamo infine che la matrice  $P$  può essere scelta in modo che le sue colonne siano una base di autovettori generalizzati per  $A$ . Si ottengono così delle espressioni esplicite per il calcolo dell'esponenziale di una qualsiasi matrice complessa.

Possiamo fare un ragionamento simile per calcolare il logaritmo di una matrice invertibile  $A$ . Possiamo sempre passare alla sua forma di Jordan,  $J = D + N = D(1 + D^{-1}N)$ , osservando che, essendo  $A$  invertibile, non può avere autovalori nulli e quindi  $D$  è invertibile. Poiché  $D$  ed  $N$  commutano, la matrice  $D^{-1}N$  è ancora nilpotente e quindi esiste la somma finita

$$U = \log(1 + D^{-1}N) = \sum_{j \geq 1} (-1)^{j+1} \frac{D^{-j}N^j}{j}.$$

D'altro canto, possiamo fissare una determinazione del logaritmo complesso e scrivere la matrice diagonale,  $\Delta$ , che ha sulla diagonale il logaritmo degli autovalori di  $A$ , contati con le opportune molteplicità, in modo che  $\exp \Delta = D$ . Le matrici  $\Delta$  ed  $U$  commutano tra loro come  $D$  ed  $N$  e quindi si ha  $\exp(\Delta + U) = D + N = J$ .

Da ciò si conclude che l'esponenziale  $\exp : \mathfrak{gl}_n \mathbb{C} \rightarrow \mathrm{GL}_n \mathbb{C}$  è suriettivo. La cosa cambia nel caso matrici reali, perché, se una matrice ha qualche autovalore negativo, per quanto visto, non può certo essere l'esponenziale di una matrice reale.

La mancata suriettività dell'esponenziale non è solo un problema legato al corpo reale. Mostriamo che anche l'applicazione  $\exp : \mathfrak{sl}_2 \mathbb{C} \rightarrow \mathrm{SL}_2 \mathbb{C}$  non è suriettivo (e quindi non lo è nemmeno per  $\mathrm{SL}_n \mathbb{C}$  con  $n \geq 2$ ). L'algebra di Lie del gruppo lineare speciale è formata dalle matrici a traccia nulla ed una matrice complessa  $2 \times 2$ , a traccia nulla, o è diagonalizzabile o è nilpotente (necessariamente di periodo 2). L'esponenziale di una matrice  $2 \times 2$ , nilpotente,  $N$ , è la matrice  $1 + N$  che ha l'unico autovalore 1, mentre l'esponenziale di una matrice diagonale è diagonale. Dunque la matrice  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  appartiene al gruppo lineare speciale, ma non può essere l'esponenziale di una matrice di traccia nulla.

Vediamo ancora qualche fatto sull'esponenziale del gruppo lineare. Per prima cosa verifichiamo una formula classica

$$\exp X = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{X}{n}\right)^n.$$

Infatti,  $\exp X = \left(\exp \frac{X}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{X}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{X}{n}\right)^n + o(1)$ .

Utilizzando la Formula di Campbell-Hausdorff, si ricavano le seguenti espressioni

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\exp \frac{X}{n} \exp \frac{Y}{n}\right)^n &= \exp(X + Y) && \text{[Formula di Trotter];} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\exp \frac{X}{n} \exp \frac{Y}{n} \exp\left(-\frac{X}{n}\right) \exp\left(-\frac{Y}{n}\right)\right)^{n^2} &= \exp[X, Y]. \end{aligned}$$

Infatti, dalla formula detta, si ricava

$$\exp \frac{X}{n} \exp \frac{Y}{n} = \exp\left(\frac{1}{n}(X + Y) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

e quindi elevando alla  $n$  e passando al limite, dalla continuità dell'esponenziale si ricava la Formula di Trotter.

Analogamente, si ha che

$$\left(\exp \frac{X}{n} \exp \frac{Y}{n} \exp\left(-\frac{X}{n}\right) \exp\left(-\frac{Y}{n}\right)\right)^{n^2} = \exp\left(\frac{1}{n^2}[X, Y] + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{n^2}$$

e si conclude in modo analogo al caso precedente.

Vogliamo dare un esempio di come la struttura di varietà e la struttura di gruppo siano fortemente correlate, come si vede dalla seguente

**2.5 Proposizione.** *Sia  $G$  un gruppo di Lie connesso e compatto sul corpo  $\mathbb{C}$ . Allora  $G$  è un toro, ovvero è il quoziente di uno spazio vettoriale rispetto al sottogruppo discreto generato da una sua base su  $\mathbb{R}$ .*

*dim.* Osserviamo dapprima che la rappresentazione aggiunta  $Ad : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ , ove  $Ad(x) = (d\Psi_x)_e$ , è un omomorfismo di gruppi di Lie complessi e, in particolare, è un'applicazione olomorfa. Poiché  $G$  è compatto e connesso, l'immagine deve essere una costante e quindi  $(d\Psi_x)_e = 1$  per ogni  $x$  in  $G$ .

Ricordando i diagrammi commutativi,

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{(d\Psi_x)_e} & \mathfrak{g} \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{\Psi_x} & G \end{array}$$

si deduce che, per ogni  $x \in G$  e per ogni  $X \in \mathfrak{g}$ , si ha  $\Psi_x(\exp X) = \exp((d\Psi_x)_e X) = \exp X$ , per quanto visto sopra. Quindi  $\Psi_x$  è l'identità sull'immagine dell'esponenziale, ovvero su un intorno di  $e$  in  $G$ . Poiché  $G$  è un gruppo connesso, è generato da un qualsiasi intorno di  $e$  e quindi  $\Psi_x = 1_G$  qualunque sia  $x$ , ovvero  $G$  è un gruppo abeliano.

Ciò significa che le parentesi di Lie in  $G$  sono sempre nulle e quindi l'immagine dell'applicazione esponenziale è un sottogruppo aperto di  $G$ . Poiché  $G$  è connesso, ciò significa che l'esponenziale è suriettivo. Il nucleo,  $\Gamma$ , dell'applicazione esponenziale è un sottogruppo discreto di  $\mathfrak{g}$ , perché esiste un intorno,  $U$  di  $0$  in  $\mathfrak{g}$ , diffeomorfo ad un intorno di  $e$  in  $G$  e quindi  $\Gamma \cap U = \{0\}$ .

Vogliamo mostrare che esiste una  $\mathbb{R}$ -base di  $\mathfrak{g}$ ,  $v_1, \dots, v_{2g}$  tale che  $\Gamma = \mathbb{Z}v_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}v_n$ . Ciò discende dalla compattezza di  $G$  e dal seguente Lemma. **CVD**  $\square$

**2.6 Lemma.** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale e  $\Gamma \subset V$  un sottogruppo discreto. Allora esiste una base  $v_1, \dots, v_n$  di  $V$  tale che  $\Gamma = \mathbb{Z}v_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}v_r$ , per un opportuno  $r \leq n$ .*

Mostriamo che esiste un sottospazio di dimensione  $m$ ,  $W$ , ed una sua base  $v_1, \dots, v_m$  tali che  $\Gamma \cap W = \mathbb{Z}v_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}v_m$ , e facciamo induzione su  $m$ .

Per  $m = 1$  basta prendere un elemento  $u \in \Gamma$ , diverso da  $0$ , e sia  $W = \mathbb{R}u$ . Fissata su  $V$  una forma quadratica definita positiva, si scelga in  $W$  un elemento  $v_1 \in \Gamma$ , diverso da  $0$  e di norma minima. Ogni altro elemento di  $W \cap \Gamma$  è un multiplo intero di  $v_1$ . Infatti, sia  $v_1 = \lambda u$  e sia  $\mu u$  un generico elemento di  $\Gamma \cap W$ . Presa la parte intera  $k = \lfloor \mu/\lambda \rfloor$ , si ha che  $\mu u - kv_1 \in \Gamma \cap W$  ed ha norma minore di  $v_1$ , ( $0 \leq \mu - k\lambda < \lambda$ ). Per le ipotesi fatte su  $v_1$ , deve essere  $\mu u = kv_1$ .

Sia ora  $W$  come nelle ipotesi. Se  $\Gamma \cap W = \Gamma$ , allora abbiamo finito, completando in modo arbitrario la base di  $W$  ad una base di  $V$ . Altrimenti, esiste un elemento  $u \in \Gamma \setminus W$  e consideriamo il sottoinsieme

$$P = \{ \xi_1 v_1 + \dots + \xi_m v_m + \xi u \mid \xi_i, \xi \in [0, 1], i = 1, \dots, m \}.$$

$P$  è un sottoinsieme compatto di  $V$  e quindi, essendo  $\Gamma$  discreto,  $\Gamma \cap P$  è un insieme finito per cui esiste un elemento  $v_{m+1} \in \Gamma \cap P$  tale che il coefficiente  $\xi$  di  $u$  sia *positivo* e *minimo*. Posto  $W' = W \oplus \mathbb{R}u$ , verifichiamo che ogni elemento di  $\Gamma \cap W'$  è della forma  $n_1 v_1 + \dots + n_{m+1} v_{m+1}$  con  $n_1, \dots, n_{m+1}$  in  $\mathbb{Z}$ . Infatti, se  $x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m + \gamma u$  appartiene a  $\Gamma \cap W'$ , posto  $k = \lfloor \gamma/\xi \rfloor$ , si ha che

$$x - kv_{m+1} = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m + (\gamma - k\xi)u$$

con  $0 \leq \gamma - k\xi < \xi$  e, sottraendo un opportuno elemento  $w \in \Gamma \cap W$ , si ha che  $x - kv_{m+1} - w$  appartiene a  $\Gamma \cap P$ . Quindi, dalla minimalità di  $\xi$  discende che  $x = w + kv_{m+1}$ , che è quanto dovevamo dimostrare. **CVD**  $\square$

# V

## Varietà Riemanniane

In questo capitolo riprenderemo la teoria delle superficie da un punto di vista un po' più generale su cui si modellerà la definizione di varietà riemanniana.

### 1. Equazioni strutturali delle superficie

Nel seguito chiameremo *superficie liscia* ogni varietà differenziabile di dimensione 2. In particolare, le *superficie lisce in  $\mathbb{R}^3$*  sono le sottovarietà di  $\mathbb{R}^3$  di dimensione 2. A tale proposito ricordiamo la seguente

**1.1 Osservazione.** *Siano  $M$  ed  $N$  due varietà differenziabili ed  $f : M \rightarrow N$  un'immersione. Allora l'immagine  $f(M)$  è una sottovarietà di  $N$ .*

*dim.* Sia  $P$  un punto di  $M$ . Per il Teorema del Rango (cf. *Corollario II.1.3*), esistono un intorno aperto  $A$  di  $P$  e  $B$  di  $f(P)$  tali che  $f(A) \subseteq B$  e, per opportune coordinate, la restrizione di  $f$  coincide con

l'applicazione  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ . A meno di restringere  $A$  e  $B$ , possiamo supporre che  $f^{-1}(B) = A$  e che

$f(A) = \{ y \in B \mid y_{m+1} = \dots = y_n = 0 \}$ . Dunque,  $f(A) = B \cap f(M)$  e quindi, per quanto detto,  $f(M)$  è sottovarietà di  $N$ . **CVD** □

Sia ora  $Y$  un campo di vettori definito sull'aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^3$ , sia  $P \in A$  e sia  $X \in T_P(\mathbb{R}^3)$ . Possiamo quindi definire  $\nabla_X(Y)$  come il vettore tangente in  $P$  ottenuto applicando  $X$  alle componenti di  $Y$  e tale definizione ha senso anche se  $Y$  è definito unicamente su una curva passante per  $P$  e tangente ad  $X$ . L'operazione così definita gode delle seguenti proprietà, tutte di verifica immediata. Dati i campi  $Y, Z$  ed il vettore  $X$ , si ha

- $\nabla_X Y$  è lineare in  $X$ ;
- $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ ;
- $\nabla_X(fY) = f(P)\nabla_X Y + X(f)Y_P$ ;
- $X(Y \cdot Z) = (\nabla_X Y) \cdot Z + Y \cdot (\nabla_X Z)$ ;
- $\nabla_Y(Z) - \nabla_Z(Y) = [Y, Z]$ .

Data una superficie  $S$  in  $\mathbb{R}^3$  e presi comunque un campo di vettori  $Y$  su un aperto di  $S$  ed un vettore  $X$ , tangente in  $P$  ad  $S$ , non possiamo concludere che il vettore  $\nabla_X Y$  appartenga a  $T_P(S)$ ; fissato un campo di vettori  $N$ , normale ad  $S$  e di lunghezza 1, definito in un intorno di  $P$ , possiamo considerare la proiezione ortogonale di  $\nabla_X Y$  sullo spazio tangente, ovvero porre

$$D_X Y = \nabla_X Y - (N_P \cdot \nabla_X Y)N_P. \quad (1.2)$$

Ricordando la definizione dell'applicazione di Weingarten,  $LX = -\nabla_X N$  (cf. *Definizione II.2.4*), ed il fatto che  $N \cdot Y = 0$ , si ottiene

$$0 = X(N \cdot Y) = (\nabla_X N) \cdot Y + N \cdot (\nabla_X Y) = -LX \cdot Y + N \cdot (\nabla_X Y).$$

Possiamo quindi scrivere l'Equazione di Gauss

$$D_X Y = \nabla_X Y - (LX \cdot Y)N_P. \quad (1.3)$$

**1.4 Definizione.** Si chiama *derivata covariante di Y rispetto ad X* il vettore  $D_X Y$  definito in (V.1.2).

Analogamente a quanto visto per  $\nabla_X$ , la derivata covariante su  $S$  gode delle seguenti proprietà, che si deducono dalle analoghe proprietà di  $\nabla_X$  e dalla linearità dell'applicazione di Weingarten.

- $D_X Y$  è lineare in  $X$ ;
- $D_X(Y + Z) = D_X Y + D_X Z$ ;
- $D_X(fY) = f(P)D_X Y + X(f)Y_P$ ;
- $X(Y \cdot Z) = (D_X Y) \cdot Z + Y \cdot (D_X Z)$ ;
- $D_Y(Z) - D_Z(Y) = [Y, Z]$ ; ove, come sopra,  $Y, Z$  sono campi ed  $X$  è un vettore, tutti tangenti ad  $S$ .

Osserviamo che, dati tre campi,  $X, Y, Z$ , in  $\mathbb{R}^3$ , si ha

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z = 0.$$

Se, in particolare,  $X, Y, Z$  sono campi tangenti ad  $S$ , possiamo ricavare da questa relazione l'annullarsi delle componenti tangenziale e normale del vettore in questione e, ricordando l'equazione di Gauss, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z &= \nabla_X(D_Y Z + (LY \cdot Z)N) = D_X D_Y Z + (LX \cdot D_Y Z)N + X(LY \cdot Z)N - (LY \cdot Z)LX \\ \nabla_Y \nabla_X Z &= \nabla_Y(D_X Z + (LX \cdot Z)N) = D_Y D_X Z + (LY \cdot D_X Z)N + Y(LX \cdot Z)N - (LX \cdot Z)LY \\ \nabla_{[X, Y]} Z &= D_{[X, Y]} Z + (L[X, Y] \cdot Z)N. \end{aligned}$$

Considerando separatamente le componenti tangenziale e normale del vettore, si ottiene

$$D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]} Z - (LY \cdot Z)LX + (LX \cdot Z)LY = 0$$

per la componente tangenziale e

$$LX \cdot D_Y Z - LY \cdot D_X Z + X(LY \cdot Z) - Y(LX \cdot Z) - L[X, Y] \cdot Z = 0$$

per la componente normale.

Prendendo in considerazione la componente normale ed osservando che

$$X(LY \cdot Z) = (D_X LY) \cdot Z + LY \cdot D_X Z, \quad Y(LX \cdot Z) = (D_Y LX) \cdot Z + LX \cdot D_Y Z;$$

si conclude che  $(D_X LY) \cdot Z - (D_Y LX) \cdot Z - L[X, Y] \cdot Z = 0$  e, per l'arbitrarietà del campo  $Z$ , si conclude che

$$(1.5) \quad D_X LY - D_Y LX - L[X, Y] = 0 \quad [\text{Equazione di Codazzi-Mainardi.}]$$

L'equazione ottenuta per la componente tangenziale si può riscrivere in un'altra forma, ponendo

$$(1.6) \quad R(X, Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]} Z \quad \text{e scrivendo} \quad R(X, Y)Z = (LY \cdot Z)LX - (LX \cdot Z)LY$$

ed osservando che l'espressione così definita è  $\mathbb{R}$ -lineare nei tre argomenti e cambia di segno scambiando  $X$  ed  $Y$ . Vogliamo mostrare che, presa una funzione (scalare)  $f$  sulla superficie, definita in un intorno di  $P$ , si ha

$$(1.7) \quad R(fX, Y)Z = R(X, fY)Z = R(X, Y)(fZ) = fR(X, Y)Z.$$

Infatti

$$\begin{aligned}
 R(fX, Y)Z &= D_{fX}D_Y Z - D_Y D_{fX} Z - D_{[fX, Y]} Z = \\
 &= fD_X D_Y Z - D_Y (fD_X Z) - D_{f[X, Y] - Y(f)X} Z = \\
 &= fD_X D_Y Z - fD_Y D_X Z - Y(f)D_X Z - fD_{[X, Y]} Z + Y(f)D_X Z = \\
 &= fR(X, Y)Z;
 \end{aligned}$$

ed essendo  $R(Y, X)Z = -R(X, Y)Z$ , si deduce che  $R(X, fY)Z = fR(X, Y)Z$ . Inoltre

$$\begin{aligned}
 R(X, Y)(fZ) &= D_X D_Y (fZ) - D_Y D_X (fZ) - D_{[X, Y]}(fZ) = \\
 &= D_X (fD_Y Z + Y(f)Z) - D_Y (fD_X Z + X(f)Z) - fD_{[X, Y]} Z - [X, Y](f)Z = \\
 &= fR(X, Y)Z + X(f)D_Y Z + XY(f)Z + Y(f)D_X Z - Y(f)D_X Z - YX(f)Z - \\
 &\quad - X(f)D_Y Z - [X, Y](f)Z = \\
 &= fR(X, Y)Z.
 \end{aligned}$$

Una prima conseguenza della (V.1.7) è il fatto che il valore di  $R(X, Y)Z$  in un punto  $P$  dipende solo dai valori di  $X, Y$  e  $Z$  in  $P$ . Ovvero che  $R(X, Y)Z$  si annulla in  $P$  se una almeno tra le tre variabili si annulla in  $P$ . Sia quindi  $X_P = 0$ , scegliamo delle coordinate locali  $x_1, x_2$ , in un intorno di  $P$ , e scriviamo  $X = u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ , ove  $u_1$  ed  $u_2$  sono due funzioni che si annullano in  $P$ . Per quanto visto, si ha  $R(X, Y)Z = u_1 R(\frac{\partial}{\partial x_1}, Y)Z + u_2 R(\frac{\partial}{\partial x_2}, Y)Z$ , che si annulla quindi in  $P$ .

Se si ha  $Y_P = 0$  o  $Z_P = 0$ , la dimostrazione procede in modo analogo. Dunque, possiamo affermare che, se  $X_P = \tilde{X}_P, Y_P = \tilde{Y}_P, Z_P = \tilde{Z}_P$ , allora  $R(X, Y)Z = R(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z}$  e considerare  $X, Y, Z$  dei vettori tangenti in  $P$ .

Enunciamo quindi la seguente

**1.8 Proposizione.** [Teorema Egregium di Gauss] *Sia  $S$  una superficie immersa in  $\mathbb{R}^3$  e siano dati un punto  $P$  di  $S$  e due vettori tangenti  $X, Y \in T_P S$ , linearmente indipendenti. Allora, detta  $K : S \rightarrow \mathbb{R}$  la curvatura gaussiana (cf. Definizione II.2.8) della superficie  $S$ , si ha*

$$K(P) = \frac{R(X, Y)Y \cdot X}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - (X \cdot Y)^2}.$$

*dim.* In base alla formula (V.1.6), si ha

$$R(X, Y)Y \cdot X = (LY \cdot Y)(LX \cdot X) - (LX \cdot Y)(LY \cdot X) = \det \begin{pmatrix} LX \cdot X & LX \cdot Y \\ LY \cdot X & LY \cdot Y \end{pmatrix}.$$

Fissiamo una base di  $T_P S$  ed indichiamo con  $P$  la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori  $X$  ed  $Y$  e con  $L$  la matrice dell'applicazione di Weingarten. Dal Teorema di Binet si ricava che

$$\det \begin{pmatrix} LX \cdot X & LX \cdot Y \\ LY \cdot X & LY \cdot Y \end{pmatrix} = \det({}^t P L P) = (\det L)(\det {}^t P P) = (\det L)(\|X\|^2 \|Y\|^2 - (X \cdot Y)^2)$$

che è quanto dovevamo dimostrare, in quanto la curvatura di Gauss coincide col determinante dell'applicazione di Weingarten. **CVD** □

Introduciamo delle notazioni che generalizzano quanto visto per le superficie in  $\mathbb{R}^3$ .

**1.9 Definizione.** Sia  $M$  una varietà differenziabile. Una *metrica riemanniana* su  $M$  è il dato di un'applicazione bilineare simmetrica, definita positiva,  $g_P : T_P M \times T_P M \rightarrow \mathbb{R}$ , che varia in modo liscio al variare di  $P$ . Ovvero, se  $X, Y$  sono due campi lisci su (un aperto di)  $M$  la funzione  $P \mapsto g_P(X_P, Y_P)$  è liscia.

Una *varietà riemanniana* è una varietà differenziabile dotata di una metrica riemanniana.

Se  $g$  è una varietà riemanniana, indicheremo con  $g$  il *tenore metrico riemanniano*, ovvero la collezione di applicazioni bilineari sugli spazi tangenti. Fissato un sistema di coordinate locali  $x_1, \dots, x_n$  su  $M$ , scriveremo  $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$  ed indicheremo con  $g^{ij}$  la matrice inversa.

Osserviamo che le superficie in  $\mathbb{R}^3$  sono esempi di varietà riemanniane.

Supponiamo fissata una *connessione* su  $M$  ovvero il dato di una derivazione covariante che goda delle proprietà descritte dopo la *Definizione V.1.4*. In coordinate locali possiamo scrivere

$$D_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

ove  $\Gamma_{ij}^k$  sono i *simboli di Christoffel* di seconda specie. Osserviamo che la conoscenza di tali simboli permette di calcolare la derivazione covariante per qualsiasi argomento. Siano infatti  $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  ed  $Y = \sum b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$  due campi tangenti ad  $M$  ed osserviamo che si ha

$$D_X Y = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i D_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\left(b_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{1 \leq i, j, k \leq n} a_i b_j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

A fianco dei simboli di Christoffel appena introdotti, possiamo parlare dei *simboli di Christoffel di prima specie*, ovvero

$$\Gamma_{ijk} = \sum_{\ell} g_{k\ell} \Gamma_{ij}^{\ell}.$$

È chiaro quindi che  $\Gamma_{ij}^k = \sum_{\ell} g^{k\ell} \Gamma_{ij\ell}$ .

Ribadiamo ora che la connessione, analogamente a quanto visto per le superficie, è compatibile con la metrica e simmetrica, ovvero valgono le seguenti proprietà.

- $Xg(Y, Z) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z)$ ;
- $D_Y(Z) - D_Z(Y) = [Y, Z]$ .

In particolare, la simmetria della connessione significa che

$$\sum_k (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \frac{\partial}{\partial x_k} = D_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - D_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0;$$

quindi  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ , qualunque siano  $i, j, k$ , e lo stesso vale per i simboli di Christoffel di prima specie, ovvero  $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}$ .

Il fatto che  $D$  sia compatibile con la metrica implica che

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = g\left(D_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right), \frac{\partial}{\partial x_j}\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, D_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) = \\ &= \sum_{\ell} \Gamma_{ki}^{\ell} g\left(\frac{\partial}{\partial x_{\ell}}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{\ell} \Gamma_{kj}^{\ell} g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_{\ell}}\right) = \sum_{\ell} \Gamma_{ki}^{\ell} g_{\ell j} + \sum_{\ell} \Gamma_{kj}^{\ell} g_{i\ell} = \\ &= \Gamma_{kij} + \Gamma_{kji}. \end{aligned}$$

Possiamo quindi scrivere

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} = \Gamma_{jik} + \Gamma_{jki}, \quad \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{ikj}, \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = \Gamma_{kij} + \Gamma_{kji};$$

e, sommando i tre termini e ricordando la simmetria dei simboli di Christoffel, concludere che

$$(1.10) \quad \Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right).$$

Ciò significa, in particolare che la connessione su  $M$  dipende unicamente dalla metrica, ovvero dalla sua struttura di varietà riemanniana e possiamo enunciare la seguente

**1.11 Proposizione.** *Su una varietà riemanniana  $M$  esiste una ed un'unica connessione  $D$ , compatibile con la metrica,  $g$ , e simmetrica; ovvero tale che*

$$Xg(Y, Z) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z) \quad e \quad D_Y(Z) - D_Z(Y) = [Y, Z]$$

per ogni vettore tangente  $X$  ed ogni coppia di campi vettoriali  $Y, Z$ .

*dim.* Su ogni aperto coordinato la connessione è univocamente determinata in base a (V.1.10) ed è quindi unica. Grazie all'unicità la connessione si incolla nell'intersezione di aperti coordinati. **CVD**  $\square$

Vedremo nel seguito che sotto opportune ipotesi (cf. Osservazione V.3.6) ogni varietà differenziabile ammette una metrica riemanniana (cf. Teorema V.3.13) e quindi una connessione, che chiameremo la *connessione metrica riemanniana*, Analogamente a quanto visto per le superficie in  $\mathbb{R}^3$ , molte proprietà geometriche della varietà possono essere dedotte da tale struttura come, ad esempio, la curvatura gaussiana per le superficie.

Concludiamo questa sezione occupandoci della *curvatura*,  $R(X, Y)Z$ , associata alla connessione e delle sue simmetrie.

**1.12 Proposizione.** *Siano  $X, Y, Z, W$  campi vettoriali su una varietà riemanniana,  $M$ , e sia*

$$R(X, Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]}Z$$

la curvatura della connessione metrica riemanniana. Allora si ha

- (a)  $R(X, Y)Z + R(Y, X)Z = 0$ ;
- (b)  $g(R(X, Y)Z, W) + g(R(X, Y)W, Z) = 0$ ;
- (c)  $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ ;
- (d)  $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$ .

*dim.* (a) è conseguenza immediata della definizione di  $R(X, Y)Z$ . Poiché il valore di  $R(X, Y)Z$  in un punto  $P$  dipende solo dal valore di  $X, Y, Z$  nello stesso punto, possiamo supporre nel seguito della dimostrazione che tutte le parentesi di Lie tra i campi in questione siano nulle.

(c) Con un calcolo diretto, si ha

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= \\ &= D_X D_Y Z - D_Y D_X Z + D_Y D_Z X - D_Z D_Y X + D_Z D_X Y - D_X D_Z Y = \\ &= D_X(D_Y Z - D_Z Y) + D_Y(D_Z X - D_X Z) + D_Z(D_X Y - D_Y X) = \\ &= D_X[Y, Z] + D_Y[Z, X] + D_Z[X, Y] = 0 \end{aligned}$$

per le ipotesi fatte sulle parentesi di Lie.

(b) Dato che l'espressione è lineare in  $Z$  e  $W$ , è sufficiente dimostrare che  $g(R(X, Y)Z, Z) = 0$  per ogni campo  $Z$ . Infatti, ricordando che la connessione è compatibile con la metrica, si ha

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)Z, Z) &= g(D_X D_Y Z, Z) - g(D_Y D_X Z, Z) = \\ &= Xg(D_Y Z, Z) - g(D_Y Z, D_X Z) - Yg(D_X Z, Z) + g(D_X Z, D_Y Z) = \\ &= \frac{1}{2}XYg(Z, Z) - \frac{1}{2}YXg(Z, Z) = [X, Y]g(Z, Z) = 0. \end{aligned}$$

(d) In base a (c), possiamo scrivere, (i)  $g(R(X, Y)Z, W) + g(R(Y, Z)X, W) + g(R(Z, X)Y, W) = 0$ . Dalla identità analoga,  $R(X, W)Y + R(W, Y)X + R(Y, X)W = 0$ , e dall'uguaglianza  $g(R(Y, W)Z, X) = g(R(W, Y)X, Z)$  (cf. (a) e (b)), si deduce (ii)  $g(R(X, Y)Z, W) + g(R(Y, W)Z, X) + g(R(X, W)Y, Z) = 0$ .

Analogamente, si ottengono le uguaglianze

- (iii)  $g(R(Y, W)Z, X) + g(R(Y, Z)X, W) + g(R(Z, W)X, Y) = 0$ .
- (iv)  $g(R(X, W)Y, Z) + g(R(Z, X)Y, W) + g(R(Z, W)X, Y) = 0$ .

Calcolando (i) + (ii) - (iii) - (iv) si ottiene  $2(g(R(X, Y)Z, W) - g(R(Z, W)X, Y)) = 0$ , che è quanto volevamo. **CVD**  $\square$

Come i simboli di Christoffel sono stati introdotti per descrivere la derivazione covariante in coordinate locali, così si introducono i *Simboli di Riemann*,  $R_{ijh}^k$ , per descrivere la curvatura della connessione in coordinate locali. Si pone quindi

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_h} = \sum_k R_{ijh}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Analogamente a quanto visto per i simboli di Christoffel, per abbassamento degli indici, si pone

$$R_{ijhk} = \sum_\ell g_{k\ell} R_{ijh}^\ell.$$

Si possono scrivere delle relazioni esplicite tra i simboli di Riemann e quelli di Christoffel, ovvero si può scrivere

$$\begin{aligned} R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_h} &= D_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left( \sum_\ell \Gamma_{jh}^\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell} \right) - D_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \left( \sum_\ell \Gamma_{ih}^\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell} \right) = \\ &= \sum_\ell \frac{\partial \Gamma_{jh}^\ell}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_\ell} - \sum_\ell \frac{\partial \Gamma_{ih}^\ell}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_\ell} + \sum_{\ell, r} \Gamma_{jh}^\ell \Gamma_{i\ell}^r \frac{\partial}{\partial x_r} - \sum_{\ell, r} \Gamma_{ih}^\ell \Gamma_{j\ell}^r \frac{\partial}{\partial x_r} \end{aligned}$$

e concludere che

$$R_{ijh}^k = \frac{\partial \Gamma_{jh}^k}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{ih}^k}{\partial x_j} - \sum_\ell (\Gamma_{ih}^\ell \Gamma_{\ell j}^k - \Gamma_{jh}^\ell \Gamma_{\ell i}^k).$$

## 2. Geodetiche

Cominciamo con alcune definizioni.

**2.1 Definizione.** Sia  $f : N \rightarrow M$  un morfismo liscio di varietà lisce, di dimensioni  $n$  ed  $m$  rispettivamente. Un *campo di vettori tangenti ad  $M$  lungo  $f$*  è un morfismo liscio  $V : N \rightarrow TM$  tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{V} & TM \\ f \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xlongequal{\quad} & M \end{array}$$

sia commutativo.

Due casi particolari si hanno quando si considera la restrizione,  $f^*X = X|_{f(N)}$ , di un campo  $X$  su  $M$  e quando si considera  $df(Y)$ , ove  $df$  è l'applicazione tangente ad  $f$  (cf. *Definizione III.2.5*) ed  $Y$  è un campo su  $N$ .

Siano  $M$  ed  $N$  due varietà riemanniane e vogliamo estendere la derivazione covariante di  $M$  per derivare campi tangenti ad  $M$  lungo  $f$  rispetto a vettori tangenti ad  $N$ . Chiediamo quindi che valgano le seguenti proprietà: siano  $X \in T_P N$ ,  $A$  un intorno aperto di  $P$  in  $N$ ,  $V, W$  campi tangenti ad  $M$  lungo  $f|_A$ ,  $\alpha : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione liscia; allora, per ogni  $Q \in A$ , deve aversi  $(D_X V)_Q \in T_{f(Q)} M$  e

- $D_X V$  è lineare in  $X$ ;
- $D_X(V + W) = D_X V + D_X W$ ;
- $D_X(\alpha V) = \alpha(Q) D_X V + X(\alpha) V_Q$ ;



- se  $Q \in B \subseteq A$ , allora  $(D_X V)_Q = (D_X(V_B))_Q$  [carattere locale];
- se  $Y$  è un campo su  $M$ , definito in un intorno di  $f(A)$ , allora  $D_X(f^*Y) = D_{df(X)}(Y)$  [compatibilità].

Queste condizioni determinano univocamente l'operazione. Siano infatti  $(y_1, \dots, y_m)$  coordinate locali su  $M$  in un intorno del punto  $f(P)$  e sia  $V = \sum_{i=1}^m a_i f^* \frac{\partial}{\partial y_i}$ , ove le funzioni  $a_i$  sono lisce su un intorno  $A$  di  $P$  in  $N$ . Allora deve aversi

$$(2.2) \quad D_X V = \sum_{i=1}^m X(a_i) \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^m a_i D_{df(X)} \left( \frac{\partial}{\partial y_i} \right).$$

Inoltre, valgono le seguenti proprietà

$$Xg(V, W) = g(D_X V, W) + g(V, D_X W) \quad \text{e} \quad D_X(df(Y)) - D_Y(df(X)) = df[X, Y].$$

Verifichiamo la prima delle due identità. Siano  $V = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial y_i}$ , e  $W = \sum_{j=1}^m b_j \frac{\partial}{\partial y_j}$ , due campi di vettori tangenti lungo  $f$ , dove scriviamo  $\frac{\partial}{\partial y_i}$  in luogo di  $f^* \frac{\partial}{\partial y_i}$ . Allora, dato un vettore,  $X$ , tangente ad  $N$ , si ha

$$Xg(V, W) = \sum_{1 \leq i, j \leq m} X(a_i b_j f^*(g_{ij}) + a_i X(b_j) f^*(g_{ij}) + a_i b_j X(f^*(g_{ij}))).$$

D'altra parte, dalla (V.2.2) e dalla compatibilità della derivata covariante di  $M$  con il prodotto scalare  $g$ , si ricava

$$\begin{aligned} g(D_X V, W) + g(V, D_X W) &= \\ &= g \left( \sum_{i=1}^m X(a_i) \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^m a_i D_{df(X)} \frac{\partial}{\partial y_i}, W \right) + g \left( V, \sum_{j=1}^m X(b_j) \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{j=1}^m b_j D_{df(X)} \frac{\partial}{\partial y_j} \right) = \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq m} X(a_i) b_j f^*(g_{ij}) + a_i X(b_j) f^*(g_{ij}) + a_i b_j df(X)(g_{ij}) \end{aligned}$$

che permette di concludere, data la (III.2.6).

Verifichiamo la seconda identità e, per far ciò, fissiamo anche delle coordinate  $(x_1, \dots, x_n)$  in un intorno di  $P$  in  $N$ . Siano

$$Y = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad X = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \text{e sia quindi} \quad df(Y) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq m}} a_i \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_k}.$$

Allora si ha

$$D_X(df(Y)) = \sum_{i,k} X(a_i) \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_k} + a_i X \left( \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial y_k} + a_i \frac{\partial f_k}{\partial x_i} D_{df(X)} \left( \frac{\partial}{\partial y_k} \right);$$

ed analogamente

$$D_Y(df(X)) = \sum_{j,k} Y(b_j) \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_k} + b_j Y \left( \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial y_k} + b_j \frac{\partial f_k}{\partial x_j} D_{df(Y)} \left( \frac{\partial}{\partial y_k} \right);$$

Osserviamo che si ha

$$\sum_{i,k} a_i X \left( \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{i,j,k} a_i b_j \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_k} =$$

e

$$\sum_{i,k} a_i \frac{\partial f_k}{\partial x_i} D_{df(X)} \left( \frac{\partial}{\partial y_k} \right) = \sum_{i,j,h,k} a_i b_j \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{\partial f_h}{\partial x_j} D_{\frac{\partial}{\partial y_h}} \left( \frac{\partial}{\partial y_k} \right);$$

e quindi (cf. III.2.4)

$$D_X(df(Y)) - D_Y(df(X)) = \sum_{i,k} (X(a_i) - Y(b_i)) \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_k} = df[X, Y].$$

**2.3 Definizione.** Un campo  $V$ , tangente ad  $M$  lungo  $f$  è *parallelo* se  $D_X V = 0$  per ogni  $X$  tangente ad  $N$ .

Se  $V$  ed  $W$  sono due campi paralleli, ed  $X$  è tangente ad  $N$ , si ha

$$Xg(V, W) = g(D_X V, W) + g(V, D_X W) = 0.$$

Dunque il prodotto scalare  $g(V, W)$  è (localmente) costante su  $N$  e, se  $V$  e  $W$  sono campi unitari, possiamo quindi affermare che l'angolo tra i due è costante su  $N$ .

Supponiamo ora che, in luogo di  $f$ , ci sia una curva liscia  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ . I campi tangenti ad  $[a, b]$  sono tutti del tipo  $X = \alpha \frac{d}{dt}$  e dunque  $V(t) \in T_{\gamma(t)} M$  è un campo parallelo lungo  $\gamma$  se, e solo se,  $D_{\frac{d}{dt}} V = 0$ .

Il vettore tangente a  $\gamma$ ,  $V(t) = \gamma'(t)$  è un campo tangente ad  $S$  lungo  $\gamma$  ed è parallelo se, e solo se,  $D_{\frac{d}{dt}} \gamma' = 0$ . Ricordando la costruzione della derivazione covariante sulle superficie in  $\mathbb{R}^3$ , possiamo scrivere  $D_{\frac{d}{dt}} \gamma' = \gamma'' - (\gamma'' \cdot N)N$ , ove  $N$  è il vettore normale alla superficie  $S$ . Dunque,  $\gamma'$  è parallelo se, e solo se,  $\gamma'' = \frac{d^2 \gamma}{dt^2}$  è normale alla superficie. Ciò implica che  $\frac{d}{dt}(\gamma' \cdot \gamma') = 2\gamma' \cdot \gamma'' = 0$  ovvero che  $\|\gamma'\|$  è costante. In particolare, ciò significa che il vettore  $\gamma'' = \frac{d^2 \gamma}{dt^2}$  è parallelo al vettore normale alla curva e dunque, essendo ortogonale alla superficie, ciò significa che  $\gamma$  ha curvatura geodetica nulla (cf. *Definizione II.2.10*). Dunque  $\gamma$  è una *geodetica* su  $S$  se, e solo se, il campo tangente a  $\gamma$  è parallelo.

Prenderemo questa come definizione generale di geodetica.

**2.4 Definizione.** Sia  $M$  una varietà differenziabile e  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  una curva liscia. Diremo che  $\gamma$  è una *geodetica* su  $M$  se  $D_{\frac{d}{dt}} \gamma' = 0$

Siano  $(x_1, \dots, x_m)$  coordinate locali su  $M$  e siano  $y_i(t) = x_i(\gamma(t))$ , ove  $i = 1, \dots, m$  e  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  è una curva liscia. Si ha

$$\gamma' = \sum_{i=1}^m \frac{dy_i}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} = d\gamma \left( \frac{d}{dt} \right)$$

e quindi

$$\begin{aligned} D_{\frac{d}{dt}} \gamma' &= \sum_{i=1}^m \frac{d^2 y_i}{dt^2} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^m \frac{dy_i}{dt} D_{d\gamma(\frac{d}{dt})} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{d^2 y_i}{dt^2} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j} \frac{dy_i}{dt} \frac{dy_j}{dt} D_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{d^2 y_k}{dt^2} \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{i,j,k} \frac{dy_i}{dt} \frac{dy_j}{dt} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

Dunque il campo  $\gamma'$  è parallelo se, e solo se,

$$(2.5) \quad \frac{d^2 y_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \frac{dy_i}{dt} \frac{dy_j}{dt} \Gamma_{ij}^k = 0 \quad \text{per } k = 1, \dots, m.$$

Quello appena scritto è un sistema di equazioni differenziali ordinarie del second'ordine, che definisce le geodetiche.

**Esempi.** (a) A parte casi speciali, il sistema che definisce le geodetiche non è integrabile elementarmente. Un caso speciale particolarmente semplice si ha quando  $M = \mathbb{R}^n$ . In tal caso, i simboli di Christoffel,  $\Gamma_{ij}^k$ , sono tutti nulli e quindi le geodetiche su  $\mathbb{R}^n$  sono precisamente le rette, parametrizzate linearmente.

(b) Consideriamo ora il caso di una sfera  $S$ , immersa in  $\mathbb{R}^3$ , ed utilizziamo l'approccio descritto sopra per le superficie immerse. Una curva  $\gamma$  sarà quindi una geodetica se, e solo se, il vettore  $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$  è parallelo alla normale alla superficie, ovvero se, e solo se,  $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$  è parallelo al raggio  $\gamma$ . Ciò significa che

$$\frac{d}{dt}(\gamma' \times \gamma) = \gamma'' \times \gamma + \gamma' \times \gamma' = 0$$

e perciò  $v = \gamma' \times \gamma$  è un vettore costante e inoltre,  $\gamma$  giace nel piano passante per il centro ed ortogonale a  $v$  e quindi le geodetiche della sfera sono archi di cerchio massimo, come avevamo già visto nel Capitolo II.

(c) [geodetiche su superficie di rotazione]. Sia  $S$  una superficie di rotazione immersa in  $\mathbb{R}^3$  e sia  $\gamma$  una curva su  $S$ , e siano

$$S(u, \vartheta) = \begin{pmatrix} a(u) \cos \vartheta \\ a(u) \sin \vartheta \\ b(u) \end{pmatrix}, \quad \text{ed} \quad X = \frac{\partial S}{\partial \vartheta} = a(u) \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \\ \cos \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Restringendo il vettore  $X$  a  $\gamma$  e considerando quindi  $u$  e  $\vartheta$  come funzioni del parametro  $t$ , si ha  $\frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{dX}{dt} = 0$ . Infatti, possiamo scrivere

$$\frac{d\gamma}{dt} = v_1 + v_2 \quad \text{ove} \quad v_1 = \begin{pmatrix} a' \cos \vartheta \\ a' \sin \vartheta \\ b' \end{pmatrix}, \quad v_2 = a\vartheta' \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \\ \cos \vartheta \\ 0 \end{pmatrix},$$

e

$$\frac{dX}{dt} = w_1 + w_2 \quad \text{ove} \quad w_1 = a' \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \\ \cos \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = -a\vartheta' \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix},$$

e, con un calcolo diretto, si ha  $v_1 \cdot w_1 = 0 = v_2 \cdot w_2$  e  $v_2 \cdot w_1 = aa'\vartheta' = -v_1 \cdot w_2$ . Se la curva  $\gamma$  è una geodetica, il vettore  $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$  è normale alla superficie  $S$  e quindi si ha

$$\frac{d}{dt}(\gamma' \cdot X) = \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{dX}{dt} + \frac{d^2\gamma}{dt^2} \cdot X = 0.$$

In un punto  $P$  di  $S$ , il vettore  $X_P$  è diretto lungo il parallelo passante per  $P$  e la sua lunghezza è uguale al raggio del parallelo. Dunque, detti  $r(t) = a(u(t))$  il raggio del parallelo nel punto  $\gamma(t)$  ed  $\alpha(t)$  l'angolo formato dalla retta tangente a  $\gamma$  con il parallelo, l'uguaglianza appena dimostrata, permette di concludere che *lungo una geodetica la quantità  $r(t) \cos \alpha(t)$  è costante* [Teorema di Clairaut]. Questa condizione, però non caratterizza le geodetiche delle superficie di rotazione (ad esempio è soddisfatta anche dai paralleli che, come abbiamo visto nella sfera, in generale, non sono geodetiche).

Torniamo ora a discutere in generale sulle geodetiche e consideriamo il sistema di equazioni differenziali, (V.2.5), che le definisce. Dal Teorema di esistenza ed unicità per le soluzioni di equazioni differenziali ordinarie, discende il seguente

**2.6 Lemma.** *Sia  $M$  una varietà riemanniana e  $P$  un punto di  $M$ . Esistono un intorno  $U$  di  $P$  ed un numero reale  $\varepsilon > 0$  tali che, per ogni  $Q$  in  $U$  e per ogni  $X \in T_Q(M)$ , con  $\|X\| < \varepsilon$ , esiste un numero  $\delta > 0$  ed una geodetica  $\gamma_X : (-\delta, \delta) \rightarrow M$  tali che  $\gamma_X(0) = Q$  e  $\gamma_X'(0) = X$  e  $\gamma_X(t)$  è una funzione liscia di  $X$  e  $t$ .*

Per prima cosa osserviamo che l'ampiezza  $\delta$  può essere scelta ad arbitrio, modificando opportunamente  $\varepsilon$ , perché, se  $\gamma(t)$  è geodetica, anche  $\xi(t) = \gamma(ct)$ , lo è, qualunque sia la costante  $c$ . Quindi, fissato  $c > \delta$ , si pone  $\eta = \frac{\delta\varepsilon}{c}$  e preso  $v \in T_Q(M)$ , con  $\|v\| < \eta$ , si ha che  $\|\frac{c}{\delta}v\| < \varepsilon$ , e quindi la geodetica  $\rho(t) := \gamma_{\frac{c}{\delta}v}(\frac{\delta}{c}t)$ , è definita per  $|\frac{\delta}{c}t| < \delta$ , ovvero per  $|t| < c$ , e si ha  $\rho(0) = Q$  e  $\rho'(0) = v$ . Supporremo quindi che le geodetiche siano definite sull'intervallo  $(-2, 2)$ , ovvero  $\delta = 2$ .

**2.7 Definizione.** Sia quindi  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  una geodetica con  $\gamma(0) = P$  e  $\gamma'(0) = X \in T_P M$ . L'applicazione esponenziale  $\exp_P : T_P M_{(<\varepsilon)} \rightarrow M$  è definita ponendo  $\exp(X) = \gamma(1)$ .

In particolare, preso  $t_0 \in [0, 1]$ , la curva  $\tilde{\gamma}(\tau) := \gamma(\tau t_0)$ , al variare di  $\tau \in [0, 1]$ , è una geodetica con  $\tilde{\gamma}(0) = P$  e  $\tilde{\gamma}'(0) = t_0 X$ , e quindi  $\exp_P(t_0 X) = \tilde{\gamma}(1) = \gamma(t_0)$ . Inoltre, essendo  $\|\gamma'\|$  costante, si ha

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \|\gamma'(0)\| = \|X\|.$$

Quindi l'applicazione esponenziale  $\exp_P : T_P M_{(<\varepsilon)} \rightarrow M$  è ben definita e manda segmenti uscenti dall'origine in archi di geodetiche. Vi è quindi un intorno  $A$  della sezione nulla del fibrato tangente tale che  $\exp_P(X)$  sia definita per ogni  $X$  in  $A$  e sia liscia su  $A$ . Fissiamo un punto  $P \in M$  e delle coordinate locali  $(x_1, \dots, x_n)$  in un intorno  $U$  di  $P$ . In questo intorno ogni vettore tangente ad  $M$  si scrive come  $\sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  e quindi, indicata con  $\pi : TM \rightarrow M$  la proiezione canonica, si ha  $\pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{R}^n$  ed un sistema di coordinate locali su tale aperto di  $TM$  è  $(x_1, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n)$ . Ricordando che, per ogni punto  $Q$  e vettore  $X \in T_Q M$ , sufficientemente piccolo, si ha  $\exp_Q(0) = Q$  e  $\frac{d}{dt} \exp_Q(tX)|_{t=0} = X$ , possiamo affermare che la matrice jacobiana di  $\exp$  in un intorno di  $0 \in T_P M$  è  $(\mathbf{1}_n, \mathbf{1}_n)$ .

Sia  $A$  l'intorno definito sopra e consideriamo ora l'applicazione  $F : A \rightarrow M \times M$ , definita da  $F(X) = (\pi(X), \exp_{\pi(X)}(X))$ . La matrice jacobiana di  $F$  in  $(P, 0)$  è  $J_{(P,0)}(F) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ , e quindi  $F$  è un diffeomorfismo locale in un intorno della sezione nulla  $\Sigma$  di  $TM$ .

Conseguenza di queste affermazioni

**2.8 Lemma.** *Sia  $M$  una varietà riemanniana. Per ogni  $P \in M$  esiste un intorno  $U$  ed un numero reale positivo  $\varepsilon$  tali che*

- (a) *per ogni  $Q \in U$  l'applicazione  $\exp_Q$  è un diffeomorfismo tra la palla  $B(0, \varepsilon)$  in  $T_Q M$  ed un aperto contenente  $Q$ ;*
- (b) *due punti,  $Q_1, Q_2$ , in  $U$  sono congiunti da un'unica geodetica di lunghezza minore di  $\varepsilon$ . Scritta tale geodetica nella forma  $\exp_{Q_1}(tX)$ , il vettore  $X$  è una funzione liscia di  $Q_1$  e  $Q_2$ .*

Osserviamo che esiste in  $TM$  un intorno  $V$  di  $0 \in T_P M$  tale che  $F|_V$  sia un diffeomorfismo su un aperto di  $M \times M$  e possiamo supporre che  $V$  sia della forma  $V = \{X \in T_Q M \mid Q \in W, \|X\| < \varepsilon\}$ , per un opportuno intorno  $W$  di  $P$  ed un opportuno numero reale  $\varepsilon > 0$ . Esiste un intorno  $U$  di  $P$  tale che  $U \times U \subseteq F(V)$  e quindi, presi  $Q_1, Q_2$  in  $U$ , esiste un vettore  $X \in T_{Q_1} M$ , con  $\|X\| < \varepsilon$  tale che  $Q_2 = \exp_{Q_1}(X)$ , (ovvero  $(Q_1, Q_2) = F(X)$ ) ed essendo  $F$  un diffeomorfismo su  $V$ , la scelta di  $X$  è unica e dipende in modo liscio da  $Q_1$  e  $Q_2$ .

**2.9 Definizione.** Sia  $M$  una varietà riemanniana e sia  $P \in M$ . Per un numero reale  $r > 0$ , sufficientemente piccolo,  $\exp_P$  induce un diffeomorfismo tra la palla chiusa  $B(0, r) \subset T_P M$  ed un intorno,  $B$ , di  $P$  in  $M$ . Tale intorno  $B$  è detto la *palla geodetica* di centro  $P$  e raggio  $r$  e la sua frontiera è la *sfera geodetica* di uguale raggio e centro.

Dimostriamo ora la seguente.

**2.10 Proposizione.** *Siano  $U$  ed  $\varepsilon$  come in Lemma V.2.8. Dati due punti di  $U$ , siano  $\eta : [a, b] \rightarrow M$  un cammino di classe  $\mathcal{C}^1$  a tratti tra i due punti e  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  la geodetica di lunghezza minore di  $\varepsilon$  tra gli stessi punti. Allora  $\ell(\gamma) \leq \ell(\eta)$  e vale l'uguaglianza se, e solo se,  $\eta = \gamma \circ r$  per una funzione  $r : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ , suriettiva e non decrescente.*

La dimostrazione si servirà del seguente

**2.11 Lemma.** [Gauss] *Sia  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$  un cammino di classe  $\mathcal{C}^1$  su  $M$  ed  $E(t)$  un campo di vettori tangente ad  $M$  lungo  $\alpha$  tale che  $\|E(t)\| = 1$  ed  $E(t) \cdot \alpha'(t) = 0$  per ogni  $t \in [0, 1]$ . Posto  $F(s, t) = \exp_{\alpha(t)}(sE(t))$ , per  $(s, t) \in [0, \varepsilon] \times [0, 1]$ , allora si ha  $\frac{\partial F}{\partial s} \cdot \frac{\partial F}{\partial t} = 0$  per ogni  $(s, t)$ .*

*dim.* Osserviamo che, per le proprietà dell'esponenziale, si ha

$$\frac{\partial F}{\partial s}(0, t) = E(t), \quad \frac{\partial F}{\partial t}(0, t) = \alpha'(t),$$

qualunque sia  $t$ , e quindi la tesi è vera per  $s = 0$ . Se dimostriamo che il prodotto scalare  $\frac{\partial F}{\partial s} \cdot \frac{\partial F}{\partial t}$  è indipendente da  $s$ , abbiamo concluso la dimostrazione. Si ha

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial F}{\partial s} \cdot \frac{\partial F}{\partial t} \right) = \left( D_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial F}{\partial s} \right) \cdot \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial s} \cdot \left( D_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial F}{\partial t} \right) = \frac{\partial F}{\partial s} \cdot \left( D_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial F}{\partial t} \right)$$

perché la curva  $s \mapsto F(s, t)$  è una geodetica per ogni  $t$  (cf. *Definizione V.2.4*). Ricordando che  $[\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}] = 0$  e le relazioni tra la derivata covariante e le parentesi di Lie, si ricava che

$$\frac{\partial F}{\partial s} \cdot \left( D_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial F}{\partial t} \right) = \frac{\partial F}{\partial s} \cdot \left( D_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial F}{\partial s} \right).$$

Infine, per la compatibilità della derivata covariante con la metrica, si conclude che

$$\frac{\partial F}{\partial s} \cdot \left( D_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial F}{\partial s} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial F}{\partial s} \cdot \frac{\partial F}{\partial s} \right).$$

Poiché le curve  $s \mapsto F(s, t)$  sono geodetiche per ogni  $t$ , i vettori tangenti  $\frac{\partial F}{\partial s}$  sono paralleli e quindi il prodotto scalare  $\frac{\partial F}{\partial s} \cdot \frac{\partial F}{\partial s}$  è indipendente da  $s$  e coincide con il suo valore per  $s = 0$ , ovvero  $E(t) \cdot E(t) = 1$ . Si conclude che

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial F}{\partial s} \cdot \frac{\partial F}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial F}{\partial s} \cdot \frac{\partial F}{\partial s} \right) = 0$$

e quindi che il prodotto scalare  $\frac{\partial F}{\partial s} \cdot \frac{\partial F}{\partial t}$  è indipendente da  $s$  e perciò identicamente nullo. **CVD**  $\square$

*dim.* (della *Proposizione V.2.10*). A meno di riparametrizzare  $\eta$ , supponiamo  $[a, b] = [0, 1]$  e siano  $Q = \eta(0)$ ,  $B$  la sfera geodetica di centro  $Q$  e raggio  $\varepsilon$ , e  $\rho = \ell(\gamma)$ .

Sia  $0 \leq t_0 < 1$  un numero reale tale che  $\eta(t_0) = Q$  ed  $\eta(t) \neq q$  per ogni  $t > t_0$ . Per  $t > t_0$ , se  $\eta(t) \in B$ , si può scrivere, in modo unico,  $\eta(t) = \exp_Q(r(t)X(t))$ , con  $\|X(t)\| = 1$  per ogni  $t$  ed  $r(t)$ ,  $X(t)$  funzioni  $\mathcal{C}^1$  a tratti. Sia  $t_2$  il minimo dei valori tale che  $t > t_0$  ed  $r(t) = \rho$ .

Fissato  $\delta$ , con  $0 < \delta < \rho$ , sia  $t_1$  il minimo  $t > t_0$  tale che  $r(t) = \delta$ . Si ha quindi  $t_0 < t_1 < t_2$ . Posto  $F(s, t) = \exp_Q(sX(t))$ , si può applicare il *Lemma V.2.11*, ove  $\alpha(t)$  è identicamente uguale a  $Q$  ed  $E$  coincide con il campo  $X$ , e ciò si può fare per tutti i valori di  $t$ , ad eccezione dei punti di discontinuità di  $X'$ . Preso  $t \in [t_0, t_2]$ , si ha  $\eta(t) = F(r(t), t)$  e quindi  $\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial F}{\partial s} r'(t) + \frac{\partial F}{\partial t}$ , e ricordando il *Lemma* citato, si ha

$$\left\| \frac{d\eta}{dt} \right\|^2 = r'(t)^2 \left\| \frac{\partial F}{\partial s} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial F}{\partial t} \right\|^2 \geq r'(t)^2$$

e vale l'uguaglianza se, e solo se,  $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ . Dunque, si ha

$$\ell_{t_1}^{t_2}(\eta) = \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{d\eta}{dt} \right\| dt \geq \int_{t_1}^{t_2} |r'(t)| dt \geq \int_{t_1}^{t_2} r'(t) dt = \rho - \delta. \quad (2.12)$$

Passando al limite per  $\delta \rightarrow 0$ , si conclude che  $\ell(\eta) \geq \ell_0^{t_2}(\eta) \geq \rho = \ell(\gamma)$  ed inoltre,  $\ell_0^{t_1}(\eta) \geq \delta$ .

Se  $\ell(\eta) = \ell(\gamma)$ , allora si ha

$$\ell_{t_1}^{t_2}(\eta) = \ell_0^{t_2}(\eta) - \ell_0^{t_1}(\eta) \leq \ell(\gamma) - \delta = \rho - \delta$$

e quindi tutti i termini in (V.2.12) sono uguali tra loro ed  $r(t)$  è non decrescente ed  $X(t)$  costante. Passando al limite per  $\delta \rightarrow 0$ , si ricava  $\ell(\gamma) = \ell_0^{t_2}(\eta)$  e quindi  $\eta$  è costante per  $t \leq t_0$  e per  $t \geq t_2$  per cui  $\eta(t) = \gamma(r(t))$  ed  $r$  è non decrescente. **CVD**  $\square$

Considerando una sequenza di palle geodetiche da un punto ad un altro della varietà si può ottenere il seguente

**2.13 Corollario.** Se  $Q_1, Q_2$  sono punti di una varietà riemanniana  $M$ , e tra tutti i cammini di classe  $\mathcal{C}^1$  a tratti tra  $Q_1$  e  $Q_2$  ve n'è uno di lunghezza minima, allora si tratta di una geodetica, eventualmente riparametrizzata.

Una varietà riemanniana connessa diventa uno spazio metrico (cf. *Definizione II.3.16*) tramite la seguente distanza.

**2.14 Definizione.** Sia  $M$  una varietà riemanniana connessa. La *distanza geodetica* su  $M$  è definita ponendo

$$\rho(P, Q) = \inf \{ \ell(\eta) \mid \eta \text{ cammino } \mathcal{C}^1 \text{ a tratti tra } P \text{ e } Q \}$$

Si può verificare che si tratta di una distanza e quanto visto sulle palle geodetiche ci permette di concludere che la topologia indotta dalla metrica coincide con la topologia originaria di  $M$ . Concludiamo questa sezione citando qualche risultato sulla struttura di spazio metrico della varietà  $M$ .

**2.15 Teorema.** [Hopf-Rinow] Sia  $M$  una varietà riemanniana connessa e sia  $P$  un punto di  $M$  tale che ogni geodetica avente  $P$  come estremo si estenda indefinitamente. Allora, per ogni  $Q \in M$  esiste una geodetica di estremi  $P$  e  $Q$  e lunghezza uguale alla distanza geodetica tra  $P$  e  $Q$  (geodetica minimale).

**2.16 Definizione.** Una varietà riemanniana  $M$  è *geodeticamente completa* se ogni geodetica  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  può essere estesa indefinitamente (ovvero esiste una geodetica  $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow M$  tale che  $\tilde{\gamma}|_{[a, b]} = \gamma$ ).

La completezza geodetica della varietà e la completezza come spazio metrico (cf. *Definizione II.3.29*) sono legate dalla seguente

**2.17 Proposizione.** Sia  $M$  una varietà riemanniana connessa. Sono equivalenti

- (a)  $M$ , con la distanza geodetica, è uno spazio metrico completo;
- (b)  $M$  è geodeticamente completa;
- (c) esiste un punto  $P$  di  $M$  tale che ogni geodetica avente  $P$  come estremo può essere indefinitamente estesa.

Il contenuto del *Lemma V.2.8* può essere precisato dal seguente

**2.18 Teorema.** [JCH Whitehead] Sia  $M$  una varietà riemanniana. Per ogni punto  $P$  di  $M$  esiste un numero reale  $\varepsilon > 0$  tale che

- (a) due qualsiasi punti della palla geodetica di centro  $P$  e raggio  $\varepsilon$  sono congiunti da una ed una sola geodetica minimale.
- (b) per ogni  $\delta$ ,  $0 < \delta < \varepsilon$ , dati due punti della palla geodetica  $B$ , di centro  $P$  e raggio  $\delta$ , la geodetica minimale che li congiunge è contenuta in  $B$ .

### 3. Appendice. Partizioni dell'unità

In questa sezione andiamo ad approfondire alcune proprietà della topologia delle varietà differenziabili da cui dedurremo, sotto opportune ipotesi l'esistenza di una metrica riemanniana su ogni varietà differenziabile.

**3.1 Definizione.** Sia  $X$  uno spazio topologico. Una famiglia di sottoinsiemi di  $X$ ,  $\mathcal{E} = (E_i)_{i \in I}$ , è *localmente finita* se per ogni punto  $P$  di  $X$  esiste un intorno  $U_P$  di  $P$  tale che l'insieme degli  $i \in I$  tali che  $E_i \cap U_P \neq \emptyset$  sia finito.

**3.2 Osservazioni.** Mettiamo in evidenza alcune proprietà delle famiglie di sottoinsiemi localmente finite.

- Se  $K \subset X$  è compatto ed  $\mathcal{E} = (E_i)_{i \in I}$ , è localmente finita, anche l'insieme degli  $i \in I$  tali che  $E_i \cap K \neq \emptyset$  è finito. Infatti, la famiglia di intorni  $U_P$  della definizione, al variare di  $P$  in  $K$ , è un ricoprimento aperto di  $K$  e quindi esiste un sottoricoprimento finito.
- Se  $\mathcal{E} = (E_i)_{i \in I}$ , è localmente finita ed ognuno degli insiemi  $E_i$  è chiuso, allora  $E = \bigcup_{i \in I} E_i$  è chiuso. Infatti, se  $P \notin E$ , esiste un intorno aperto  $U$  di  $P$  tale che  $E_{i_1}, \dots, E_{i_n}$  siano gli unici elementi di  $\mathcal{E}$  che intersecano  $U$ . Allora  $U \setminus (E_{i_1} \cup \dots \cup E_{i_n})$  è un aperto, contenente  $P$  e tutto contenuto nel complementare di  $E$ .
- Se la topologia di  $X$  ha una base numerabile (cf. Definizione II.3.3) ogni ricoprimento localmente finito,  $\mathcal{A}$ , di  $X$  è numerabile. Ogni punto di  $X$  ha un intorno  $U$  che interseca solo un numero finito di elementi del ricoprimento e non è restrittivo supporre che  $U$  appartenga alla base numerabile della topologia. Vi è quindi una famiglia numerabile di aperti che ricopre  $X$  e tale che ciascuno dei suoi elementi intersechi solo un numero finito di aperti di  $\mathcal{A}$  che perciò è al più numerabile.

**3.3 Definizione.** Sia  $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$  un ricoprimento di  $X$ . Un *raffinamento* di  $\mathcal{A}$  è il dato di un ricoprimento aperto  $\mathcal{B} = (B_j)_{j \in J}$  e di una funzione  $\tau : J \rightarrow I$  tali che, per ogni  $j \in J$ , si abbia  $B_j \subseteq A_{\tau(j)}$ .

**3.4 Definizione.** Uno spazio topologico,  $X$ , è *paracompatto* se è di Hausdorff ed ogni ricoprimento aperto di  $X$  ammette un raffinamento localmente finito.

Osserviamo che uno spazio topologico (di Hausdorff) compatto è naturalmente paracompatto, perché un sottoricoprimento finito è, in particolare, un raffinamento localmente finito del ricoprimento dato.

**3.5 Definizione.** Uno spazio topologico  $X$  è *localmente compatto* se ogni punto  $P$  di  $X$  ha un intorno compatto.

Osserviamo che ogni varietà differenziabile è localmente compatta, perché è localmente omeomorfa ad aperti di  $\mathbb{R}^n$  che sono spazi localmente compatti.

**3.6 Osservazione.** D'ora in poi, *col termine varietà indicheremo solo varietà differenziabili che siano spazi topologici di Hausdorff ed a base numerabile* (cf. Definizione II.3.3).

Vogliamo dimostrare alcune proprietà della topologia delle varietà differenziabili, che raccogliamo nella seguente proposizione.

**3.7 Proposizione.** Sia  $X$  uno spazio topologico a base numerabile.

L1. Se  $X$  è uno spazio di Hausdorff, localmente compatto allora  $X$  è paracompatto.

L2. Se  $X$  è paracompatto, allora ogni coppia di chiusi disgiunti ha intorni disgiunti ( $X$  è uno spazio normale).

L3. Se  $X$  è paracompatto, per ogni ricoprimento aperto, localmente finito,  $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$  di  $X$  esiste un ricoprimento aperto  $\mathcal{B} = (B_i)_{i \in I}$  tale che  $\bar{B}_i \subseteq A_i$  per ogni  $i \in I$  ( $\mathcal{B}$  è un restringimento di  $\mathcal{A}$ ).

*dim.* L1. Iniziamo dimostrando che la topologia di  $X$  ha una base numerabile fatta di aperti a chiusura compatta. Sia  $\mathcal{G}$  una base numerabile per la topologia di  $X$  e sia  $\mathcal{B} = \{ B \in \mathcal{G} \mid \bar{B} \text{ è compatto} \}$ . Se  $A$  è aperto in  $X$  ed  $x \in A$ , sia  $U_x$  un intorno compatto di  $x$  e sia  $U_x^\circ$  il suo interno. Allora esiste  $B \in \mathcal{B}$  tale

che  $x \in B \subseteq A \cap U_x^\circ$ ; dunque  $\overline{B} \subseteq U_x$  e quindi  $B$  è relativamente compatto (cf. *Proposizione II.3.20*) e perciò appartiene a  $\mathcal{B}$ . Per l'arbitrarietà del punto  $x$ , si conclude che  $A$  è unione di elementi di  $\mathcal{B}$  che perciò è una base della topologia di  $X$ .

Sia quindi  $\{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  una base numerabile per la topologia di  $X$  fatta di aperti a chiusura compatta e costruiamo una successione crescente di aperti a chiusura compatta che invada tutto  $X$ . Posto  $C_1 = U_1$ , sia  $n_1$  il più piccolo intero tale che  $\overline{C}_1 \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_{n_1}$  e poniamo  $C_2 = U_1 \cup \dots \cup U_{n_1}$ . Anche  $\overline{C}_2$  è compatto e quindi esiste un minimo intero  $n_2 > n_1$  tale che  $\overline{C}_2 \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_{n_2}$  e poniamo  $C_3 = U_1 \cup \dots \cup U_{n_2}$ . Proseguendo analogamente si costruisce una successione di interi  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$  ed una famiglia numerabile di aperti  $C_1, C_2, C_3, \dots$  tali che  $\overline{C}_i \subseteq C_{i+1}$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$  e  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i = X$ . Poniamo inoltre

$C_{-1} = C_0 = \emptyset$  ed andiamo a dimostrare che  $X$  è uno spazio paracompatto.

Sia  $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$  un ricoprimento aperto di  $X$ . Per ogni  $j \geq 1$  il compatto  $\overline{C}_j \setminus C_{j-2}$  è ricoperto da un numero finito di aperti  $A_{i(j,1)}, \dots, A_{i(j,m_j)}$  e poniamo  $B_{(j,l)} = A_{i(j,l)} \cap C_j \setminus \overline{C}_{j-2}$  per  $l = 1, \dots, m_j$  e  $j \in \mathbb{N}$ . La famiglia  $\mathcal{B} = (B_{(j,l)})$  è un raffinamento localmente finito di  $\mathcal{A}$ . Infatti, se  $x \in X$  esiste un indice  $j \in \mathbb{N}$  tale che  $x \in C_j \setminus C_{j-1} \subseteq B_{(j,l)}$  per qualche  $l$  e quindi  $\mathcal{B}$  è un ricoprimento aperto di  $X$ . Posto poi  $\tau(j,l) = i(j,l)$ , si ha per costruzione  $B_{(j,l)} \subseteq A_{i(j,l)}$  e quindi  $\mathcal{B}$  è un raffinamento di  $\mathcal{A}$ . Infine, si tratta di una famiglia localmente finita, perché, fissato  $x \in X$  e scelto  $j \in \mathbb{N}$  tale che  $x \in C_j$ , l'aperto  $C_j$  interseca solo un numero finito di aperti di  $\mathcal{B}$ , presi tra i  $B_{(h,l)}$  con  $h \leq j+1$ .

Ciò conclude la dimostrazione di *L1* e ci permette di affermare che, nelle ipotesi di *L1*, ogni ricoprimento aperto ha un raffinamento localmente finito fatto di aperti a chiusura compatta.

*L2.* Dividiamo la dimostrazione in due passi; prima dimostriamo che un chiuso ed un punto del complementare sono separati da intorni disgiunti (ovvero lo spazio è *regolare*) e poi dimostriamo che si possono separare due chiusi disgiunti.

Sia  $F$  un chiuso ed  $x \in X \setminus F$ . Poiché  $X$  è uno spazio di Hausdorff, per ogni  $y \in F$  esistono un intorno aperto  $U_y$  di  $x$  ed un intorno aperto  $V_y$  di  $y$  tali che  $U_y \cap V_y = \emptyset$ . La famiglia di aperti  $\mathcal{V} = \{X \setminus F\} \cup \{V_y \mid y \in F\}$  è un ricoprimento aperto di  $X$  ed esiste quindi un raffinamento localmente finito  $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ . Allora esiste un intorno  $U$  di  $x$  che interseca solo un numero finito di aperti  $A_i$  con  $A_i \cap F \neq \emptyset$ , aperti che saranno contenuti rispettivamente in  $V_{y_1}, \dots, V_{y_n}$ . Allora i due aperti  $U \cap U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$  ed  $\bigcup_{A_i \cap F \neq \emptyset} A_i$  sono intorni disgiunti di  $x$  ed  $F$ , rispettivamente.

Siano ora  $E$  ed  $F$  due chiusi di  $X$  con  $E \cap F = \emptyset$ . Per quanto visto sopra, per ogni  $y \in F$  esistono un intorno aperto  $U_y$  di  $E$  ed un intorno aperto  $V_y$  di  $y$  tali che  $U_y \cap V_y = \emptyset$ . La famiglia di aperti  $\mathcal{V} = \{X \setminus F\} \cup \{V_y \mid y \in F\}$  è un ricoprimento aperto di  $X$  ed esiste quindi un raffinamento localmente finito  $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ . Allora, per ogni  $x \in E$ , esiste un intorno  $B_x$  di  $x$  che interseca solo un numero finito di aperti  $A_i$  con  $A_i \cap F \neq \emptyset$ , aperti che saranno contenuti rispettivamente in  $V_{y_1}, \dots, V_{y_n}$ . Allora, posto

$W_x = B_x \cap U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$ , si ha  $W_x \cap \left( \bigcup_{A_i \cap F \neq \emptyset} A_i \right) = \emptyset$ . In conclusione,  $\bigcup_{x \in E} W_x$  e  $\bigcup_{A_i \cap F \neq \emptyset} A_i$  sono intorni disgiunti di  $E$  ed  $F$ , rispettivamente.

*L3.* Possiamo supporre che  $\mathcal{A}$  sia numerabile (cf. *Osservazioni V.3.2*). Sia quindi  $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  ed osserviamo che i complementari di  $A_1$  e di  $\bigcup_{i>1} A_i$  sono due chiusi disgiunti e quindi, per *L2*, esiste un aperto  $B_1$  tale che

$$X \setminus \bigcup_{i>1} A_i \subseteq B_1 \subseteq \overline{B_1} \subseteq A_1.$$

Dunque  $\{B_1, A_2, A_3, \dots\}$  è ancora un ricoprimento aperto di  $X$  ed analogamente esiste un aperto  $B_2$  tale che

$$X \setminus \left( B_1 \cup \bigcup_{i>2} A_i \right) \subseteq B_2 \subseteq \overline{B_2} \subseteq A_2$$



e  $\{B_1, B_2, A_3, \dots\}$  sia ancora un ricoprimento aperto di  $X$ . Procedendo in questo modo si costruisce la famiglia di aperti  $\mathcal{B} = (B_i)_{i \in \mathbb{N}}$  tali che  $\overline{B_i} \subseteq A_i$  e, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$X = B_1 \cup \dots \cup B_n \cup \bigcup_{i > n} A_i.$$

La dimostrazione è conclusa se verifichiamo che  $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ . Infatti, se  $x \in X$ , poiché  $\mathcal{A}$  è localmente finita, esiste un numero finito di aperti  $A_i$  che contengono  $x$  e quindi esiste un indice  $i_0$  tale che  $x \notin A_i$  per  $i > i_0$ . Dunque  $x \in B_1 \cup \dots \cup B_{i_0}$  e l'arbitrarietà di  $x$  permette di concludere. **CVD**  $\square$

Mettiamo in evidenza quanto osservato nel corso della dimostrazione precedente, ricordando che le ipotesi del seguente corollario sono verificate dalle varietà differenziabili.

**3.8 Corollario.** *Sia  $X$  uno spazio topologico di Hausdorff, localmente compatto ed a base numerabile. Allora ogni ricoprimento aperto di  $X$  ammette un raffinamento localmente finito e numerabile, fatto di aperti a chiusura compatta.*

Possiamo quindi parlare di partizioni dell'unità.

**3.9 Definizione.** Sia  $X$  uno spazio topologico ed  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  un ricoprimento aperto di  $X$ . Una *partizione dell'unità* subordinata ad  $\mathcal{U}$  è una famiglia di funzioni continue  $\chi_i : X \rightarrow [0, +\infty)$ , al variare di  $i$  in  $I$ , tali che

- (a) per ogni  $i \in I$ , si ha  $\text{supp } \chi_i = \overline{\{x \in X \mid \chi_i(x) \neq 0\}} \subseteq U_i$ ;
- (b) la famiglia  $(\text{supp } \chi_i)_{i \in I}$  è localmente finita;
- (c) per ogni  $x \in X$  si ha  $\sum_{i \in I} \chi_i(x) = 1$ .

Osserviamo che, in conseguenza di (c), le funzioni  $\chi_i$  hanno valori in  $[0, 1]$  ed inoltre, per ogni punto,  $x$ , fissato, tutti gli addendi della somma  $\sum_{i \in I} \chi_i(x) = 1$  ad eccezione di un numero finito sono nulli, per la condizione (b).

Se  $X$  è una varietà differenziabile, parleremo di *partizione dell'unità liscia* se tutte le funzioni  $\chi_i$  sono funzioni lisce. Vogliamo infatti dimostrare che sulle varietà differenziabili esistono partizioni dell'unità lisce.

**3.10 Lemma.** *Sia  $K$  un compatto di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $A$  un intorno aperto di  $K$ . Allora esiste una funzione liscia,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ , tale che  $\text{supp } f \subseteq A$  ed  $f(x) > 0$  per ogni  $x \in K$ .*

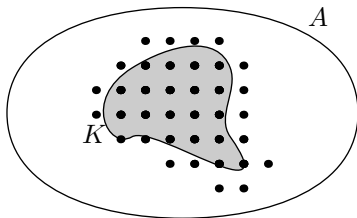
*dim.* Ricordiamo che

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ \exp(-1/t^2) & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

è una funzione  $\mathcal{C}^\infty$  su  $\mathbb{R}^{(*)}$ . Fissati un punto  $P \in \mathbb{R}^n$  ed un numero reale  $\varepsilon > 0$ , si pone

$$\chi_{P,\varepsilon}(x) = f\left(1 - 4 \left\| \frac{x-P}{\varepsilon} \right\|^2\right).$$

Dunque  $\chi_{P,\varepsilon}$  è una funzione liscia, non negativa ed il suo supporto è contenuto nella palla chiusa  $\overline{B(P, \varepsilon/2)}$ .



Sia  $\delta$  la distanza di  $K$  dal complementare di  $A$  e consideriamo l'insieme  $E = \left\{ \frac{\delta}{2\sqrt{n}}(k_1, \dots, k_n) \mid k_i \in \mathbb{Z} \right\}$ . La funzione cercata è quindi

$$\chi = \sum_{\substack{P \in E \\ d(P,K) < \frac{\delta}{2}}} \chi_{P,\delta}.$$

(\*) Si può infatti dimostrare, per induzione su  $i$ , che  $f^{(i)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ \frac{P_i(t)}{t^n} \exp(-1/t^2) & \text{se } t > 0 \end{cases}$ , per un opportuno  $P_i(t) \in \mathbb{R}[t]$  ed un opportuno esponente  $n$ .

Infatti, i punti di  $E$  che distano da  $K$  meno di  $\delta/2$  sono in numero finito e quindi la somma è una somma finita (cf. la dimostrazione della *Proposizione II.3.28*). Inoltre, i punti del supporto di  $\chi$  devono avere distanza minore o uguale a  $\delta/2$  da un punto di  $E$  che ha distanza minore di  $\delta/2$  da  $K$ ; quindi i punti del supporto hanno distanza minore di  $\delta$  da  $K$  e sono perciò contenuti in  $A$ . Infine, dato un punto  $x = (x_1, \dots, x_n)$  di  $\mathbb{R}^n$ , sia  $k_i$  la parte intera del numero reale  $\frac{2\sqrt{n}}{\delta}x_i$  per  $i = 1, \dots, n$ . Allora  $P = \frac{\delta}{2\sqrt{n}}(k_1, \dots, k_n)$  appartiene ad  $E$  ed ha distanza minore di  $\delta/2$  da  $x$ . Quindi, per ogni punto,  $x$ , di  $K$  c'è almeno un punto di  $E$  che ha distanza minore di  $\delta/2$  da  $x$  e perciò  $\chi$  ha valori positivi su ogni punto di  $K$ . **CVD**  $\square$

Possiamo quindi dimostrare la seguente

**3.11 Proposizione.** *Sia  $M$  una varietà differenziabile e sia  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  un ricoprimento aperto di  $M$ . Esiste una partizione dell'unità liscia subordinata ad  $\mathcal{U}$ .*

*dim.* Osserviamo dapprima che è sufficiente dimostrare l'esistenza di una partizione dell'unità liscia subordinata ad un raffinamento,  $\mathcal{B} = (B_j)_{j \in J}$  di  $\mathcal{U}$ . Infatti, se  $(\chi_j)_{j \in J}$  è una partizione dell'unità liscia subordinata a  $\mathcal{B}$ , e  $\tau : J \rightarrow I$  è la funzione associata al raffinamento, si pone  $\lambda_i = \sum_{\tau(j)=i} \chi_j$  se  $\tau^{-1}(i) \neq \emptyset$  e  $\lambda_i$  identicamente nulla, altrimenti. Le funzioni  $(\lambda_i)_{i \in I}$ , così definite sono una partizione dell'unità liscia subordinata ad  $\mathcal{U}$ .

Sia quindi  $\mathcal{B} = (B_j)_{j \in J}$  un raffinamento localmente finito di  $\mathcal{U}$ , costituito da aperti coordinati relativamente compatti (cf. *Corollario V.3.8*) e sia  $\mathcal{C} = (C_j)_{j \in J}$  un restringimento di  $\mathcal{B}$  (cf. *Proposizione V.3.7 L3*). Dunque  $\overline{C_j}$  è un compatto contenuto nell'aperto coordinato  $B_j$  e possiamo quindi applicare il *Lemma V.3.10* per dedurre che esiste una funzione liscia  $\psi_j : M \rightarrow \mathbb{R}$ , strettamente positiva su  $C_j$  e nulla al di fuori di un compatto contenuto in  $B_j$ . Il ricoprimento  $\mathcal{B}$  è localmente finito e quindi per ogni punto  $x \in M$  è ben definita  $\psi(x) = \sum_{j \in J} \psi_j(x)$  ed è una funzione strettamente positiva su  $M$ . Posto dunque  $\chi_j(x) = \psi_j(x)/\psi(x)$  si ottiene una partizione dell'unità subordinata a  $\mathcal{B}$ . **CVD**  $\square$

Ricordiamo qui una conseguenza degli argomenti svolti

**3.12 Corollario.** *Sia  $M$  una varietà differenziabile. Dati un compatto  $K \subset M$  ed un intorno aperto  $A$  di  $K$ , esiste una funzione liscia  $\psi : M \rightarrow [0, 1]$ , che vale identicamente 1 in un intorno di  $K$  ed il cui supporto è un compatto contenuto in  $A$ .*

*dim.* In base alla *Proposizione V.3.7 L2*, esiste un intorno aperto  $C$  di  $K$  ed un intorno  $D$  di  $M \setminus A$  che hanno intersezione vuota. Quindi  $\{C, M \setminus K\}$  è un ricoprimento aperto di  $M$  ed esiste una partizione dell'unità liscia ad esso subordinata, sia  $\{\psi, \mu\}$ . La funzione  $\psi$  è quanto cercato. **CVD**  $\square$

L'esistenza di partizioni dell'unità lisce si rivela uno strumento utile nello studio delle varietà differenziabili per incollare dati locali ed ottenere oggetti globali. A titolo di esempio, possiamo concludere dimostrando il seguente.

**3.13 Teorema.** *Su ogni varietà differenziabile,  $M$ , esiste una metrica riemanniana.*

*dim.* Consideriamo un ricoprimento  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  di  $M$  fatto con aperti coordinati e consideriamo su ogni  $U_i$  la restrizione della metrica di  $\mathbb{R}^n$ , che indichiamo con  $g_i$ . Presa una partizione dell'unità  $(\chi_i)_{i \in I}$  subordinata al ricoprimento  $\mathcal{U}$ , si pone  $g = \sum_{i \in I} \chi_i g_i$  e si ottiene così una forma bilineare simmetrica, definita positiva, su ogni spazio tangente ad  $M$ . **CVD**  $\square$

## VI

# Forme differenziali e Integrazione

In questo capitolo ci occuperemo di descrivere le forme differenziali e la loro integrazione sulle varietà differenziabili.

### 1. Forme differenziali

**1.1 Definizione.** Sia  $M$  una varietà differenziabile. Una *forma differenziale di grado  $k$  e classe  $\mathcal{C}^h$*  su  $M$  è una sezione  $\omega$  del fibrato  $\Lambda^k T^*(M)$ . Ovvero, per ogni  $P$  in  $M$ , è data una funzione  $k$ -lineare alternante  $\omega_P : T_P M \times \cdots \times T_P M \rightarrow \mathbb{R}$  e su un aperto coordinato,  $(U, x_1, \dots, x_n)$ , la forma si scriverà come

$$\omega|_U = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

ove i coefficienti  $a_{i_1, \dots, i_k}$  sono funzioni di classe  $\mathcal{C}^h$  su  $U$ .

Possiamo dire che la  $k$ -forma  $\omega$  è di classe  $\mathcal{C}^h$  se, e solo se, per ogni scelta di campi lisci  $X_1, \dots, X_k$  la funzione  $P \mapsto \omega(X_{1,P}, \dots, X_{k,P})$  è una funzione di classe  $\mathcal{C}^h$  su  $M$ . In particolare, sull'aperto coordinato  $U$ , si ha

$$a_{i_1, \dots, i_k} = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\right)$$

e quindi la definizione di forma liscia non dipende dalla scelta delle carte su  $M$ .

**1.2 Definizione.** Data una forma differenziale  $\omega$  su  $M$  si chiama *supporto* di  $M$  la chiusura del sottoinsieme di  $M$  formato dai punti ove  $\omega$  è diversa dalla forma nulla. Scriveremo  $\text{supp } \omega$  per indicare tale sottoinsieme.

Le applicazioni lisce tra varietà ci permettono di “trasportare” le forme differenziali da una varietà all'altra, generalizzando l'usuale formula di cambiamento di coordinate.

**1.3 Definizione.** Sia  $f : N \rightarrow M$  un'applicazione liscia tra varietà differenziabili. Data una  $k$ -forma,  $\omega$ , su  $M$ , si definisce la  $k$ -forma,  $f^*\omega$ , su  $N$ , ponendo

$$f^*\omega(X_1, \dots, X_k) = \omega(df(X_1), \dots, df(X_k)),$$

(cf. *Definizione III.2.5*) ove  $X_1, \dots, X_k$  sono campi tangenti lisci su  $N$ .

**Esempio.** Sia data un'applicazione liscia  $f : N \rightarrow M$  e fissiamo un punto  $P \in N$  ed un sistema di coordinate,  $y_1, \dots, y_n$ , in un intorno di  $P$  ed  $x_1, \dots, x_m$ , in un intorno di  $f(P)$ . Data una 1-forma differenziale,  $\omega = \sum_{i=1}^m a_i dx_i$ , definita in un intorno di  $f(P)$ , su  $M$ , vogliamo descrivere la sua immagine inversa,  $f^*\omega$ , in un intorno di  $P$ . Dato un campo vettoriale,  $X = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial y_j}$ , si ha

$$df(X) = \sum_{j,k} b_j \frac{\partial x_k}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \text{e quindi} \quad f^*\omega \cdot X = \omega \cdot df(X) = \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j}.$$

Ricordando la dualità tra spazio tangente e spazio cotangente, si ha

$$f^*\omega = \sum_h (f^*\omega \cdot \frac{\partial}{\partial y_h}) dy_h = \sum_{i,h} a_i \frac{\partial x_i}{\partial y_h} dy_h.$$

Con un calcolo analogo, se  $\eta = \sum_{i < j} a_{ij} dx_i \wedge dx_j$  è una 2-forma in un intorno di  $f(P)$ , si ricava che

$$f^* \eta = \sum_{\substack{j_1 < j_2 \\ h_1 < h_2}} a_{j_1, j_2} \left( \frac{\partial x_{j_1}}{\partial y_{h_1}} \frac{\partial x_{j_2}}{\partial y_{h_2}} - \frac{\partial x_{j_2}}{\partial y_{h_1}} \frac{\partial x_{j_1}}{\partial y_{h_2}} \right) dy_{h_1} \wedge dy_{h_2}.$$

Si scriva una formula analoga per le  $k$ -forme, ove compariranno i minori di ordine  $k$  della matrice Jacobiana di  $f$ .

La definizione di immagine inversa di una forma differenziale è compatibile con le operazioni nell'algebra esterna, ovvero

$$f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^* \omega_1 + f^* \omega_2, \quad \text{e} \quad f^*(\omega \wedge \eta) = f^* \omega \wedge f^* \eta.$$

Inoltre, se  $L \xrightarrow{g} N \xrightarrow{f} M$  sono applicazioni lisce, si ha  $g^* \circ f^* = (f \circ g)^*$ .

Si definisce la *derivazione esterna* di forme differenziali (lisce) tramite le coordinate locali, ponendo per una funzione,  $f$ , su  $M$ ,  $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$  e per una  $k$ -forma,  $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ ,  $d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} d(a_{i_1, \dots, i_k}) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ . Si può verificare che la definizione è ben posta e non dipende dalla scelta delle coordinate locali. Si ha

- $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$ , qualunque siano le  $k$ -forme,  $\omega$  ed  $\eta$ ;
- $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge (d\eta)$ , per ogni  $p$ -forma,  $\omega$ , ed ogni  $q$  forma,  $\eta$ ;
- $d(d\omega) = 0$ .

È chiaro che basta verificare le affermazioni quando le forme in questione sono del tipo  $adx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  e quindi le prime due uguaglianze sono di verifica immediata. Per quanto riguarda l'ultima, possiamo ragionare così:

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= d(da \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = \\ &= d\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}\right) = \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 a}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = 0. \end{aligned}$$

Osserviamo che, da queste proprietà, possiamo dedurre il fatto che la definizione non dipende dalla scelta delle coordinate locali. Infatti, se  $y_1, \dots, y_n$  sono coordinate locali, si ha  $d(dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}) = 0$  qualunque sia  $k$ . Infatti, per  $k = 1$ , il fatto discende dal Teorema di Schwarz, mentre, per  $k > 1$ , si ha

$$\begin{aligned} d(dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}) &= d((dy_{i_1}) \wedge (dy_{i_2} \wedge \dots \wedge dy_{i_k})) = \\ &= (d^2 y_{i_1}) \wedge (dy_{i_2} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}) - (dy_{i_1}) \wedge d((dy_{i_2} \wedge \dots \wedge dy_{i_k})) = 0, \end{aligned}$$

ove l'ultima uguaglianza discende dall'ipotesi induttiva. Dunque, data una forma  $ady_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}$ , si ha

$$ady_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k} = a \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} A_{j_1, \dots, j_k} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k},$$

ove gli  $A_{j_1, \dots, j_k}$  sono opportuni minori di ordine  $k$  della matrice Jacobiana del cambiamento di coordinate. Applicando la derivata esterna (rispetto alle coordinate  $x_1, \dots, x_n$ ) si ottiene

$$\begin{aligned} d\left(a \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} A_{j_1, \dots, j_k} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}\right) &= \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} A_{j_1, \dots, j_k} da \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} + a \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} dA_{j_1, \dots, j_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} = \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} A_{j_1, \dots, j_k} da \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} = da \wedge dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}, \end{aligned}$$

ove si è tenuto conto del fatto che

$$\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} dA_{j_1, \dots, j_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} = d(dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}) = 0.$$

Essendo sezioni del fibrato cotangente,  $T^*M$ , vi è un accoppiamento naturale tra 1-forme differenziali e campi vettoriali, ovvero sezioni del fibrato tangente e scriveremo  $\omega \cdot X$  (e ometteremo il punto se non ci sono ambiguità) per indicare tale accoppiamento, ove  $\omega$  è una 1-forma differenziale ed  $X$  è un campo tangente, definiti sullo sottoinsieme  $U$  di  $M$ . In particolare, se  $\phi$  è una funzione, si ha  $d\phi \cdot X = X(\phi)$ , per ogni campo vettoriale  $X$ .

**1.4 Definizione.** Diremo che una  $k$ -forma differenziale  $\omega$  è *chiusa* se  $d\omega = 0$ , mentre diremo che la  $k$ -forma differenziale  $\eta$  è *esatta* se esiste una  $(k-1)$ -forma  $\lambda$  tale che  $\eta = d\lambda$ .

Osserviamo che, per quanto visto sopra, ogni forma esatta è necessariamente chiusa ( $d(d\lambda) = 0$ ). In generale non è vero il viceversa.

La derivazione esterna “commuta” con l’immagine inversa, ovvero, se  $f : N \rightarrow M$  un’applicazione liscia tra varietà differenziabili, data una  $k$ -forma,  $\omega$ , su  $M$ , si ha  $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$ . Infatti, se abbiamo una 0-forma, ovvero una funzione  $\phi$  su  $M$ , si ha

$$d(f^*(\phi)) \cdot X = d(\phi \circ f) \cdot X = X(\phi \circ f) = df(X)(\phi) = d\phi \cdot df(X) = f^*d\phi \cdot X,$$

qualunque sia il campo vettoriale  $X$ . Se invece  $\omega$  è una forma di grado  $k$ , si ha

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

e quindi

$$f^*\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k} \circ f d(x_{i_1} \circ f) \wedge \dots \wedge d(x_{i_k} \circ f),$$

da cui si deduce, per quanto appena visto sulle funzioni,

$$\begin{aligned} d(f^*\omega) &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} d(a_{i_1, \dots, i_k} \circ f) \wedge d(x_{i_1} \circ f) \wedge \dots \wedge d(x_{i_k} \circ f) = \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} f^*(da_{i_1, \dots, i_k}) \wedge f^*dx_{i_1} \wedge \dots \wedge f^*dx_{i_k} = f^*(d\omega). \end{aligned}$$

**1.5 Applicazioni.** Diamo qualche esempio di calcoli elementari con le forme differenziali.

Siano  $\alpha$  e  $\beta$  due 1-forme su  $M$ , allora si ha

- $\alpha \wedge \beta(X, Y) = (\alpha X)(\beta Y) - (\alpha Y)(\beta X)$ .
- $d\alpha(X, Y) = X(\alpha Y) - Y(\alpha X) - \alpha[X, Y]$ .

L'affermazione (a) è la definizione di prodotto esterno (cf. *Definizione III.3.9*). Per quanto riguarda (b), è sufficiente verificarla per  $\alpha = adx_i$  ed in tal caso si ha

$$\begin{aligned} d\alpha(X, Y) &= d(adx_i)(X, Y) = da \wedge dx_i(X, Y) = \\ &= (daX)(dx_iY) - (daY)(dx_iX) = X(a)Y(x_i) - Y(a)X(x_i) = \\ &= X(a)Y(x_i) + aX(Y(x_i)) - Y(a)X(x_i) - aY(X(x_i)) - a(X(Y(x_i)) + aY(X(x_i))) = \\ &= X(aY(x_i)) - Y(aX(x_i)) - a[X, Y](x_i) = \\ &= X(\alpha Y) - Y(\alpha X) - \alpha[X, Y]. \end{aligned}$$

**1.6 Operazioni sui campi vettoriali di  $\mathbb{R}^n$ .** Consideriamo lo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$  con la base canonica,  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ , ortonormale rispetto al prodotto scalare. In ogni punto possiamo identificare  $\mathbb{R}^n$  con il suo spazio tangente e la base canonica con le derivate direzionali  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ , e la base duale dello spazio cotangente con le forme differenziali  $dx_1, \dots, dx_n$ . Dalla definizione di varietà riemanniana, possiamo pensare che tutte le costruzioni che qui faremo su  $\mathbb{R}^n$  siano realizzabili *localmente* in un intorno di ogni punto di una varietà (purché si possano esprimere in modo intrinseco, indipendente dalla scelta delle coordinate).

La scelta della base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$ , determina una  $n$ -forma differenziale (non nulla)  $\nu = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ . Dati  $n$  vettori tangenti  $v_1, \dots, v_n$  in un punto  $P$ , si ha  $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$ , per  $j = 1, \dots, n$ , e quindi, per la definizione del prodotto esterno (cf. III.3.13) e la definizione elementare di volume,

$$\begin{aligned} \nu(v_1, \dots, v_n) &= dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \text{sgn } \sigma (dx_1(v_{\sigma(1)}) \cdots (dx_n(v_{\sigma(n)})) = \\ &= \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \text{sgn } \sigma a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} = \det(a_{ij}) = \text{vol}^n(v_1, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Per questo motivo la forma  $\nu$  è detta la *forma-volume* di  $\mathbb{R}^n$ . Si può verificare che la forma non dipende dalla scelta del sistema di coordinate ortonormali su  $\mathbb{R}^n$ .

Il prodotto scalare permette di “alzare ed abbassare gli indici” nei tensori e nelle forme differenziali; in particolare, dato un campo vettoriale,  $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , possiamo considerare la *forma differenziale associata*  $\omega_X = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ , ovvero quell'unica forma differenziale,  $\omega_X$ , per cui  $\omega_X(Y) = X \cdot Y$ , per ogni campo vettoriale  $Y$ .

Possiamo inoltre definire l'*operatore \* di Hodge* (cf. III.3.16), definito da

$$* dx_{I(1)} \wedge \dots \wedge dx_{I(k)} = \text{sgn}(I \vee cI) dx_{cI(1)} \wedge \dots \wedge dx_{cI(n-k)}$$

per ogni  $I \in \mathcal{I}_n^k$  e per ogni  $k = 0, \dots, n$ . Si potrebbe mostrare che la definizione è indipendente dalla scelta della base ortonormale, ma non vogliamo appesantire troppo la trattazione.

Vediamo ora come si possano esprimere tramite questi dati e la derivazione esterna le usuali costruzioni associate ai campi vettoriali. Dato un campo vettoriale,  $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , indichiamo con  $\omega_X$  la forma differenziale ad esso associata (per spostamento degli indici) e consideriamo la  $n$ -forma  $d(*\omega_X)$ . Si chiama *divergenza* del campo  $X$  quella funzione scalare,  $\text{div}X$ , tale che

$$d(*\omega_X) = (\text{div}X)\nu$$

ove  $\nu$  è la forma-volume. Si verifica con un calcolo diretto che  $\text{div}X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$ .

Al campo  $X$  possiamo associare anche una  $n-2$ -forma detta il *rotore* di  $X$ , prendendo  $\text{rot}X = *(d\omega_X)$ . Se  $n = 3$ ,  $\text{rot}X$  è una 1-forma e quindi possiamo associarle, per spostamento degli indici, un campo vettoriale, che usualmente viene indicato con lo stesso nome e si ha

$$\text{rot}(u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3) = \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) e_1 + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) e_2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) e_3.$$

Data una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , il *gradiente* di  $f$  è il campo vettoriale che corrisponde, tramite spostamento degli indici, al differenziale  $df$  ovvero  $\text{grad} f \cdot X = df(X) = X(f)$  per ogni campo vettoriale  $X$ . Si ha quindi

$grad f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i$ . Infine, osserviamo che  $d(*df) = (\Delta f)\nu$ , ove  $\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$  è il *laplaciano* della funzione  $f$ .

**1.7 Equazioni di Maxwell.** Vogliamo mostrare come il formalismo introdotto permetta di scrivere in modo più compatto le note equazioni di Maxwell che descrivono in modo completo i fenomeni elettromagnetici. Lo spazio ambiente è lo spazio di Minkowsky,  $\mathbb{R}^4$ , con l'applicazione bilineare di matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , relativa alle coordinate,  $x_1, x_2, x_3, x_4 = t$ . Osserviamo che, in questo ambiente, l'operatore di Hodge (cf. III.3.16) subisce una piccola variazione rispetto a quanto visto in  $\mathbb{R}^n$  e si ha, per ogni  $I \in \mathcal{S}_4^k$ ,

$$*dx_I = \begin{cases} \operatorname{sgn}(I \vee cI) dx_{cI} & \text{se } I(k) < 4 \\ -\operatorname{sgn}(I \vee cI) dx_{cI} & \text{se } I(k) = 4 \end{cases}$$

perché è cambiata l'applicazione bilineare, ovvero, l'identificazione tra lo spazio ed il suo duale.

Le equazioni di Maxwell si scrivono classicamente nella forma (di Heaviside)

$$\begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbb{B} = 0 & \nabla \cdot \mathbb{E} = 4\pi\rho \\ \nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbb{B} = 4\pi\mathbb{J} + \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} \end{array}$$

ove  $\mathbb{E}$  e  $\mathbb{B}$  sono, rispettivamente il campo elettrico ed il campo magnetico e  $\mathbb{J}$  è il campo di correnti. La funzione scalare,  $\rho$ , è anche detta la densità di carica elettrica. Infine l'operatore  $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$  permette di scrivere formalmente, per ogni campo  $\mathbb{V}$ ,  $\nabla \cdot \mathbb{V} = \operatorname{div} \mathbb{V}$  e  $\nabla \times \mathbb{V} = \operatorname{rot} \mathbb{V}$ .

Nello spazio di Minkowsky, si consideri la 2-forma differenziale

$$F = B_3 dx_1 \wedge dx_2 - B_2 dx_1 \wedge dx_3 + B_1 dx_2 \wedge dx_3 + E_1 B_3 dx_1 \wedge dt + E_2 B_3 dx_2 \wedge dt + E_3 B_3 dx_3 \wedge dt$$

e la 1-forma

$$J = J_1 dx_1 + J_2 dx_2 + J_3 dx_3 + \rho dt$$

ove  $E_1, E_2, E_3, B_1, B_2, B_3$  e  $J_1, J_2, J_3$  sono le componenti dei tre campi  $\mathbb{E}$ ,  $\mathbb{B}$  e  $\mathbb{J}$ . Con un calcolo diretto, si può vedere che le equazioni di Maxwell sono equivalenti alle due equazioni

$$dF = 0 \quad \text{e} \quad d(*F) = 4\pi(*J).$$

Osserviamo che le forme bilineari alternanti, rappresentate da  $F$  e da  $*F$ , sono associate rispettivamente alle matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & E_3 \\ -E_1 & E_2 & -E_3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & -E_3 & E_2 & B_1 \\ E_3 & 0 & -E_1 & B_2 \\ -E_2 & E_1 & 0 & B_3 \\ -B_1 & B_2 & -B_3 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi l'operatore di Hodge induce lo "scambio"  $\mathbb{E} \mapsto \mathbb{B}, \mathbb{B} \mapsto -\mathbb{E}$ .

**1.8 Connessioni.** Vediamo ora come il formalismo introdotto permetta di descrivere in modo molto efficace la connessione su una varietà riemanniana. Sia  $M$  una varietà riemanniana di dimensione  $n$  e siano  $e_1, \dots, e_n$  dei campi vettoriali linearmente indipendenti su un aperto  $A$  di  $M$ . Indichiamo con  $\theta^1, \dots, \theta^n$  la base duale delle 1-forme (ovvero  $\theta^i \cdot e_j = \delta_j^i$ ). Dato un campo vettoriale  $X$ , si ha quindi  $X = \sum_{i=1}^n \theta^i(X) e_i$ . Poniamo quindi

$$D_X e_i = \sum_{j=1}^n \vartheta_i^j(X) e_j$$

ed osserviamo che, in base alle proprietà della connessione  $D$  (cf. *Definizione V.1.4*), la funzione  $X \mapsto \vartheta_i^j(X)$  è lineare e quindi i coefficienti  $\vartheta_i^j$  sono delle 1-forme su  $M$ .

Possiamo quindi scrivere la *I equazione strutturale* di Cartan:

$$d\theta^i = \sum_{\ell=1}^n \theta^\ell \wedge \vartheta_\ell^i. \quad (1.9)$$

Infatti, dalla relazione  $D_X Y - D_Y X - [X, Y] = 0$  (cf. *Definizione V.1.4*), si ricava (attenzione al cambio di indici!)

$$\begin{aligned} 0 &= D_X \left( \sum_{i=1}^n \theta^i(Y) e_i \right) - D_Y \left( \sum_{i=1}^n \theta^i(X) e_i \right) - \sum_{i=1}^n \theta^i([X, Y]) e_i = \\ &= \sum_{i=1}^n (X(\theta^i(Y)) - Y(\theta^i(X)) - \theta^i[X, Y]) e_i + \sum_{1 \leq i, \ell \leq n} (\theta^\ell(Y) \vartheta_\ell^i(X) - \theta^\ell(X) \vartheta_\ell^i(Y)) e_i \end{aligned}$$

e quindi, per l'indipendenza dei campi  $e_i$  ed utilizzando i calcoli fatti sopra [cf. *Applicazioni VI.1.5*], possiamo scrivere

$$d\theta^i(X, Y) - \sum_{\ell=1}^n \theta^\ell \wedge \vartheta_\ell^i(X, Y) = 0$$

per ogni  $i = 1, \dots, n$  e per ogni coppia di campi vettoriali  $X, Y$ , che è quanto volevamo.

Consideriamo ora il tensore di curvatura,  $R$  (cf. *Proposizione V.1.12*), e scriviamo  $R(X, Y)e_i = \sum_{j=1}^n \Omega_i^j(X, Y)e_j$ . Poiché  $R$  è bilineare ed antisimmetrico in  $(X, Y)$ , i coefficienti  $\Omega_i^j$  sono 2-forme su  $A$ .

Possiamo quindi scrivere la *II equazione strutturale* di Cartan:

$$(1.10) \quad \Omega_i^j = d\vartheta_i^j - \sum_{\ell=1}^n \vartheta_\ell^i \wedge \vartheta_\ell^j.$$

Si ha infatti, (attenzione di nuovo al cambio di indici!)

$$\begin{aligned} R(X, Y)e_i &= D_X D_Y e_i - D_Y D_X e_i - D[X, Y]e_i = \\ &= D_X \left( \sum_{j=1}^n \vartheta_i^j(Y) e_j \right) - D_Y \left( \sum_{j=1}^n \vartheta_i^j(X) e_j \right) - \sum_{j=1}^n \vartheta_i^j([X, Y]) e_j = \\ &= \sum_{j=1}^n (X(\vartheta_i^j(Y)) - Y(\vartheta_i^j(X)) - \vartheta_i^j[X, Y]) e_j - \sum_{1 \leq j, \ell \leq n} (\vartheta_i^\ell(X) \vartheta_\ell^j(Y) - \vartheta_i^\ell(Y) \vartheta_\ell^j(X)) e_j = \\ &= \sum_{j=1}^n d\vartheta_i^j(X, Y) e_j - \sum_{1 \leq \ell, j \leq n} \vartheta_\ell^i \wedge \vartheta_\ell^j(X, Y) e_j, \end{aligned}$$

che, per l'arbitrarietà di  $X$  ed  $Y$ , dimostra la seconda equazione di Cartan.



## 2. Integrazione. Formula di Stokes

Sia  $M$  una varietà differenziabile, orientata (cf. l'Appendice a questo capitolo), di dimensione  $n$  e sia  $\omega$  una  $n$ -forma su  $M$ . Vogliamo definire l'integrale di  $\omega$  su  $M$ , in simboli  $\int_M \omega$ , e facciamo dapprima l'ipotesi che  $\omega$  sia una forma a supporto compatto (cf. *Definizione VI.1.2*).

- Se  $\text{supp } \omega$  è contenuto in un aperto coordinato (concorde con l'orientamento)  $(U_\Phi)$ , allora su  $U$  si scriverà  $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$  e si pone

$$\int_M \omega = \int_{\Phi(U)} f \circ \Phi^{-1} d\mu,$$

ove  $d\mu$  indica la misura di Lebesgue su  $\mathbb{R}^n$ . Osserviamo che, se  $\Psi$  è un'altra carta locale concorde, di coordinate  $(y_1, \dots, y_n)$ , su un aperto contenente il supporto di  $\omega$ , si ha

$$\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = g dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$$

con  $g = f \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)$  e  $\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right) = \det J(\Phi \circ \Psi^{-1}) > 0$ . Si ha quindi

$$\begin{aligned} \int_{\Psi(\text{supp } \omega)} g \circ \Psi^{-1} d\mu &= \int_{\Psi \circ \Phi^{-1}(\Phi(\text{supp } \omega))} (f \circ \Phi^{-1}) \circ (\phi \circ \Psi^{-1}) \det(J(\Phi \circ \Psi^{-1})) d\mu = \\ &= \int_{\Psi \circ \Phi^{-1}(\Phi(\text{supp } \omega))} (f \circ \Phi^{-1}) \circ (\phi \circ \Psi^{-1}) |\det(J(\Phi \circ \Psi^{-1}))| d\mu = \int_{\Phi(\text{supp } \omega)} f \circ \Phi^{-1} d\mu \end{aligned}$$

in base alla formula di cambiamento di variabile in  $\mathbb{R}^n$ . Dunque il valore dell'integrale non dipende dalla scelta delle coordinate su un intorno del supporto di  $M$  ed è chiaro che, se  $\omega$  e  $\eta$  sono due forme con il supporto contenuto in uno stesso aperto coordinato, si ha

$$\int_M (\omega + \eta) = \int_M \omega + \int_M \eta \quad \text{e} \quad \int_M (a\omega + b\eta) = a \int_M \omega + b \int_M \eta$$

per ogni coppia di numeri reali  $a$  e  $b$ .

- Se  $\text{supp } \omega$  non è contenuto in un aperto coordinato, sia  $\{\chi_i \mid i \in I\}$  una partizione dell'unità subordinata ad un ricoprimento  $\{U_i \mid i \in I\}$ , fatto con aperti coordinati. Si pone

$$\int_M \omega = \sum_{i \in I} \int_M \chi_i \omega.$$

Per ogni  $i$ ,  $\text{supp}(\chi_i \omega)$  è un compatto in  $U_i$  e quindi ognuno degli addendi di destra è ben definito. Inoltre, essendo  $\text{supp } \omega$  un compatto, esiste solo un numero finito di indici  $i \in I$  tali che  $\text{supp } \omega \cap \text{supp } \chi_i \neq \emptyset$  perché la famiglia dei  $\text{supp } \chi_i$  è localmente finita (cf. *Osservazioni V.3.2*), e quindi la somma a destra del segno di uguale è ben definita. Inoltre, la definizione data è indipendente dalla scelta del ricoprimento e della partizione dell'unità ad esso subordinata. Infatti, se  $\{V_j \mid j \in J\}$  è un altro ricoprimento fatto con aperti coordinati e  $\{\lambda_j \mid j \in J\}$  è una partizione dell'unità ad esso subordinata, si ha

$$\sum_{i \in I} \int_{U_i} \chi_i \omega = \sum_{i \in I} \int_{U_i} \left( \sum_{j \in J} \lambda_j \right) \chi_i \omega = \sum_{i,j} \int_{U_i \cap V_j} \lambda_j \chi_i \omega = \sum_{j \in J} \int_{V_j} \left( \sum_{i \in I} \chi_i \right) \lambda_j \omega = \sum_{j \in J} \int_{V_j} \lambda_j \omega$$

che è quanto dovevamo verificare.

Se poi  $\omega$  non ha supporto compatto, si può associare ad  $\omega$  una misura  $d\mu_\omega$  ponendo per ogni funzione continua a supporto compatto  $f \in \mathcal{C}_c^0(M)$

$$\int_M f d\mu_\omega = \int_M f \omega.$$

Potremo quindi parlare di funzioni integrabili (o misurabili) rispetto alla misura  $d\mu_\omega$ . Usualmente, si sceglie una forma-volume,  $\omega$ , ovvero una  $n$ -forma liscia e mai nulla (cf. *Definizione VI.3.5*). In tal caso, ogni  $n$ -forma differenziale  $\eta$  si scrive come  $f\omega$  per un'opportuna funzione  $f$  e diremo che  $\eta$  è *integrabile* (o misurabile) se  $f$  lo è, e porremo

$$\int_M \lambda = \int_M f d\mu_\omega.$$

La definizione non dipende dalla scelta della forma  $\omega$ .

In particolare, se  $\eta$  è una  $n$ -forma integrabile e  $\{\chi_i \mid i \in I\}$  è una partizione dell'unità subordinata ad un ricoprimento con aperti coordinati, si ha ancora

$$\int_M \eta = \sum_{i \in I} \int_M \chi_i \eta,$$

ove la somma a destra è ora una serie (cf. *Osservazioni V.3.2* e *Osservazione V.3.6* per cui possiamo supporre  $I = \mathbb{N}$ ) che converge per il *Teorema della convergenza dominata*.

Osserviamo infine che vale anche la seguente forma della formula di cambiamento di variabile negli integrali. Se  $N$  ed  $M$  sono varietà della stessa dimensione,  $n$ , ed  $f : M \rightarrow N$  è un diffeomorfismo orientato, allora, se  $\omega$  è una  $n$ -forma integrabile su  $N$ , anche  $f^*\omega$  è integrabile su  $M$  e si ha

$$\int_M f^*\omega = \int_N \omega.$$

Se  $N$  è una sottovarietà propria di  $M$  ed  $\omega$  è una forma su  $M$ , allora  $\int_N \omega = \int_M \chi_N \omega = 0$ , ove  $\chi_N$  è la funzione caratteristica di  $N$ . Questo perché su ogni aperto coordinato  $N$  è una sottovarietà lineare propria di  $\mathbb{R}^n$  ed ha quindi misura di Lebesgue nulla.

Il seguito di questa sezione è dedicato alla dimostrazione della Formula di Stokes. Iniziamo introducendo le necessarie notazioni e la nozione di catena singolare.

Sia  $I$  l'intervallo chiuso  $[0, 1]$  e  $k \geq 1$  un numero intero. Scriveremo  $I^k$  per indicare il prodotto cartesiano di  $k$ -copie dell'intervallo  $I$  e chiameremo questo insieme il  $k$ -cubo standard. Fissato un intero  $i \in \{1, \dots, k\}$ , la  $i$ -esima faccia del cubo  $I^k$  è l'applicazione  $\varepsilon_{i,\alpha} : I^{k-1} \rightarrow I^k$ , con  $\alpha \in \{0, 1\}$  definita da

$$(2.1) \quad \varepsilon_{i,\alpha}(x_1, \dots, x_{k-1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha, x_i, \dots, x_{k-1}).$$

La definizione di faccia mantiene senso anche per il cubo 1-dimensionale (l'intervallo  $[0, 1]$ ) prendendo come facce i cubi 0-dimensionali, ovvero i punti 0 ed 1. Il cubo 0/dimensionale, ovvero il punto, è privo di facce.

**2.2 Definizione.** Un  $k$ -cubo singolare sulla varietà  $M$  è un'applicazione liscia  $\gamma : I^k \rightarrow M$ . Se  $F$  è un anello commutativo (usualmente  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ), una  $k$ -catena singolare a coefficienti in  $F$  è una combinazione lineare  $\sum_{i=1}^n r_i \gamma_i$ , ove  $r_i \in F$  e i  $\gamma_i$  sono  $k$ -cubi singolari su  $M$ . Indicheremo con  $\mathcal{C}^k(M, F)$  l'insieme delle  $k$ -catene singolari su  $M$  (tale insieme è un  $F$ -modulo).

Se  $\gamma$  è un  $k$ -cubo singolare, le sue  $i$ -esime facce ( $i = 1, \dots, k$ ) sono i  $(k-1)$ -cubi singolari  $\gamma \circ \varepsilon_{i,\alpha}$  al variare di  $\alpha \in \{0, 1\}$ . Il bordo del cubo  $\gamma$  è la  $(k-1)$ -catena singolare

$$\partial\gamma = \sum_{i,\alpha} (-1)^{i+\alpha} \gamma \circ \varepsilon_{i,\alpha}.$$

Estendendo per  $F$ -linearità questa applicazione si costruisce l'omomorfismo  $\partial : \mathcal{C}^k(M, F) \rightarrow \mathcal{C}^{k-1}(M, F)$ , che chiameremo ancora *bordo*.

Osserviamo che, per qualsiasi catena,  $c \in \mathcal{C}^k(M, F)$ , si ha  $\partial(\partial c) = 0$  ed è sufficiente verificarlo per un  $k$ -cubo,  $\gamma$ . Dalla definizione (cf. VI.2.1) si deducono con un calcolo diretto le relazioni

$$\varepsilon_{j,\beta} \circ \varepsilon_{i,\alpha} = \begin{cases} \varepsilon_{i+1,\alpha} \circ \varepsilon_{j,\beta} & \text{se } i \geq j \\ \varepsilon_{i,\alpha} \circ \varepsilon_{j-1,\beta} & \text{se } i < j \end{cases}.$$

e da ciò si deduce

$$\begin{aligned}
\partial(\partial\gamma) &= \partial\left(\sum_{j,\beta}(-1)^{j+\beta}\gamma\circ\varepsilon_{j,\beta}\right) = \\
&= \sum_{i,j,\alpha,\beta}(-1)^{i+j+\beta+\alpha}\gamma\circ\varepsilon_{j,\beta}\circ\varepsilon_{i,\alpha} = \\
&= \sum_{i<j,\alpha,\beta}(-1)^{i+j+\beta+\alpha}\gamma\circ\varepsilon_{j,\beta}\circ\varepsilon_{i,\alpha} + \sum_{i\geq j,\alpha,\beta}(-1)^{i+j+\beta+\alpha}\gamma\circ\varepsilon_{i+1,\alpha}\circ\varepsilon_{j,\beta} = \\
&= \sum_{i<j,\alpha,\beta}(-1)^{i+j+\beta+\alpha}\gamma\circ\varepsilon_{j,\beta}\circ\varepsilon_{i,\alpha} + \sum_{k>h,\alpha,\beta}(-1)^{h+k+\beta+\alpha-1}\gamma\circ\varepsilon_{k,\beta}\circ\varepsilon_{h,\alpha} = 0,
\end{aligned}$$

ove nell'ultima somma si è fatto il cambio di variabili  $h = j$ ,  $k = i + 1$  e si sono scambiati i nomi di  $\alpha$  e  $\beta$  per rendere evidente il fatto che la seconda somma è l'opposto della prima.

Se  $f : M \rightarrow N$  è un'applicazione liscia e  $\gamma$  è un  $k$ -cubo singolare su  $M$ , possiamo considerare il  $k$ -cubo su  $N$ ,  $f_*(\gamma) = f \circ \gamma$ . Tale applicazione si estende per linearità ad un omomorfismo  $f_* : \mathcal{C}^k(M, F) \rightarrow \mathcal{C}^k(N, F)$ . In particolare, si ha  $\partial(f_*c) = f_*(\partial c)$  e  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ .

Data una  $k$ -forma differenziale,  $\omega$ , su  $M$  ed una  $k$ -catena,  $\gamma = \sum_{i=1}^n r_i \gamma_i$ , possiamo considerare l'integrale di  $\omega$  su  $\gamma$ , ovvero

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=1}^n r_i \int_{I^k} \gamma_i^* \omega. \quad (2.3)$$

Se  $f : M \rightarrow N$  è un'applicazione liscia, per ogni  $c \in \mathcal{C}^k(M, F)$  e per ogni  $k$ -forma  $\eta$  su  $N$ , si ha

$$\int_c f^* \eta = \int_{f_*c} \eta.$$

**2.4 Osservazione.** Siano  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $n$  e  $\gamma : I^n \rightarrow M$  la restrizione al cubo  $I^n$  di un diffeomorfismo tra un intorno di  $I^n$  in  $\mathbb{R}^n$  ed un aperto  $X \subseteq M$  e sia  $K = \gamma(I^n)$ . Il bordo topologico di  $K$  (ovvero la sua frontiera, cf. Osservazione II.3.2) è l'unione dei sottoinsiemi  $K_{i,\alpha} = \gamma \circ \varepsilon_{i,\alpha}(I^{n-1})$  ciascuno orientato in modo che, se  $v_1, \dots, v_{n-1}$  è una base orientata di  $T_P K_{i,\alpha}$  ed  $N$  è il vettore normale a questo spazio, orientato verso l'esterno, allora la base  $N, v_1, \dots, v_{n-1}$  di  $T_P X$  è concorde con l'orientamento. Quindi, se  $\eta$  è una  $(n-1)$ -forma su  $X$ , si ha

$$\int_{K_{i,\alpha}} \eta = (-1)^{i+\alpha} \int_{(\gamma \circ \varepsilon_{i,\alpha})^* I^{n-1}} \eta = (-1)^{i+\alpha} \int_{I^{n-1}} (\gamma \circ \varepsilon_{i,\alpha})^* \eta$$

e quindi si hanno segni opposti sulle facce opposte del cubo, che tengono conto dell'orientazione naturale del suo bordo.

Possiamo quindi enunciare il risultato annunciato

**2.5 Teorema.** [Formula di Stokes] Sia  $\eta$  una  $(k-1)$ -forma (liscia) su una varietà differenziabile  $M$  e sia  $c$  una  $k$ -catena singolare (liscia) a coefficienti reali su  $M$ , allora

$$\int_c d\eta = \int_{\partial c} \eta.$$

*dim.* È sufficiente dimostrarlo nel caso in cui  $c$  è un  $k$ -cubo singolare e possiamo supporre che  $M$  sia un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^k$  ed il cubo sia l'inclusione  $I^k \rightarrow A$ . Sia  $\eta$  una  $(k-1)$ -forma in un intorno di  $I^k$  in  $A$  e verifichiamo che si ha

$$\int_{I^k} d\eta = \sum_{i,\alpha} (-1)^{i+\alpha} \int_{I^{k-1}} \varepsilon_{i,\alpha}^* \eta. \quad (2.6)$$

Se  $x_1, \dots, x_k$  sono coordinate su  $A$ , una  $(k-1)$ -forma si scrive come

$$\sum_{h=1}^k f_h dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_h} \wedge \dots \wedge dx_k,$$

ove il cappuccio  $\widehat{\phantom{x}}$  sta ad indicare che il fattore sottostante è omissso dal prodotto esterno. È chiaro che è sufficiente dimostrare la formula (VI.2.6) per uno qualsiasi degli addendi ovvero che possiamo supporre

$$\eta = f dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_h} \wedge \dots \wedge dx_k.$$

Dunque,

$$d\eta = (-1)^{h-1} \frac{\partial f}{\partial x_h} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$$

e, applicando il Teorema di Fubini ed il Teorema fondamentale del calcolo, si ha

$$\begin{aligned} \int_{I_k} d\eta &= (-1)^{h-1} \int_{I_k} \frac{\partial f}{\partial x_h} dx_1 \dots dx_k = \\ &= (-1)^{h-1} \int_{I^{k-1}} \left( \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_h} dx_h \right) dx_1 \dots \widehat{dx_h} \dots dx_k = \\ &= (-1)^{h-1} \int_{I^{k-1}} f(x_1 \dots x_{h-1}, 1, x_{h+1} \dots x_k) dx_1 \dots \widehat{dx_h} \dots dx_k - \\ &\quad - (-1)^{h-1} \int_{I^{k-1}} f(x_1 \dots x_{h-1}, 0, x_{h+1} \dots x_k) dx_1 \dots \widehat{dx_h} \dots dx_k. \end{aligned}$$

D'altra parte, se  $y_1, \dots, y_{k-1}$  sono le coordinate di  $\mathbb{R}^{k-1}$ , si ha

$$\varepsilon_{i,\alpha}^* \eta = \begin{cases} f(y_1 \dots y_{h-1}, \alpha, y_h \dots y_{k-1}) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{k-1} & \text{se } i = h \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi

$$\int_{\partial I^k} \eta = \sum_{i,\alpha} (-1)^{i+\alpha} \int_{I^{k-1}} \varepsilon_{i,\alpha}^* \eta = (-1)^{h+1} \int_{I^{k-1}} \varepsilon_{h,1}^* \eta + (-1)^h \int_{I^{k-1}} \varepsilon_{h,0}^* \eta$$

che coincide con  $\int_{I^k} d\eta$  calcolato sopra. **CVD**

□

### 3. Appendice. Orientamento

Richiamiamo la definizione di spazio vettoriale (reale) orientato. Due basi ordinate di uno spazio vettoriale (reale),  $V$ , di dimensione finita, si dicono *concordi* (o *equiorientate*) se il determinante della matrice di cambiamento di base è positivo. Si definisce in questo modo una relazione di equivalenza nell'insieme delle basi ordinate di  $V$  che viene suddiviso in due classi di equivalenza. Un *orientamento* su  $V$  è la scelta di una tra queste classi di equivalenza. Un isomorfismo di uno spazio vettoriale orientato in sé si dice *orientato* (o *diretto*) se trasforma una base ordinata in una base concorde, ovvero se ha determinante positivo.

**3.1 Definizione.** Un'orientazione su una varietà differenziabile  $M$ , è la scelta di un orientamento  $e_P$  sullo spazio tangente  $T_P M$ , per ogni  $P \in M$ , con la proprietà che, per ogni  $P$  in  $M$ , esista un intorno coordinato,  $U_P$ , di coordinate  $x_1, \dots, x_n$ , tale che la base  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$  sia concorde con l'orientamento  $e_Q$  per ogni punto  $Q$  di  $U_P$ .

Una varietà differenziabile  $M$  si dice *orientabile* se ammette un'orientazione, e si dice *orientata* se viene scelta su  $M$  un'orientazione.

Sia  $M$  una varietà orientata. Una carta locale  $U, (x_1, \dots, x_n)$  è *orientata* o *concorde* con l'orientamento fissato, se la base  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$  è concorde con l'orientamento fissato in  $T_P M$  per ogni  $P \in U$ . Parleremo di *atlante orientato* per indicare un atlante su  $M$  formato tutto da carte orientate (quindi i determinanti delle matrici di cambiamento di coordinate sono tutti positivi).

**3.2 Lemma.** *Su una varietà orientabile e connessa,  $M$ , vi sono al più due orientazioni.*

*dim.* Data un'orientazione,  $e = \{e_P \mid P \in M\}$ , su  $M$ , per ogni  $P$  in  $M$ , indichiamo con  $g_P$  l'orientamento opposto ad  $e_P$  sullo spazio vettoriale  $T_P M$ . Se  $x_1, \dots, x_n$  è un sistema di coordinate concorde con  $e$  in un opportuno intorno  $U$  di  $P$ , posto  $y_1 = -x_1, y_2 = x_2, \dots, y_n = x_n$ , si ottiene un sistema di coordinate concorde con  $g = \{g_P \mid P \in M\}$  nello stesso intorno. Dunque, anche  $g$  è un'orientazione.

Data un'orientazione  $f = \{f_P \mid P \in M\}$  consideriamo i due insiemi  $A = \{P \in M \mid f_P = e_P\}$  e  $B = \{P \in M \mid f_P = g_P\}$ . I due insiemi sono disgiunti,  $A \cup B = M$ , e sono entrambi aperti. Infatti, se in un punto  $P$ , le due basi  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$  e  $\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}$  sono concordi, allora la matrice jacobiana  $J = (\frac{\partial y_i}{\partial x_j})_{1 \leq i, j \leq n}$  ha determinante positivo in un intorno  $U$  di  $P$ . Poiché  $M$  è connesso la dimostrazione è conclusa. **CVD** □

**3.3 Esempio.** Dimostriamo la seguente proprietà delle superficie in  $\mathbb{R}^3$ . *Una superficie  $S$  in  $\mathbb{R}^3$  è orientabile se, e solo se, esiste un campo liscio di vettori unitari, normali ad  $S$ .* In particolare, osserviamo che ciò significa che una superficie orientabile ha 2 facce.

Fissiamo un orientamento su  $\mathbb{R}^3$ , supponiamo che  $S$  sia orientabile e fissiamo un orientamento su di essa. Per ogni punto  $P$  di  $S$  siano  $\{u_1, u_2\}$  delle coordinate concordi in un intorno di  $P$  e sia  $N_P$  il vettore normale e unitario tale che  $\{\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}, N_P\}$ , sia una base di  $\mathbb{R}^3$  concorde con l'orientamento fissato. Il vettore  $N_P$  è indipendente dalla scelta delle coordinate; infatti, se  $\{v_1, v_2\}$  è un altro sistema di coordinate concordi in un intorno di  $P$ , allora la matrice di cambiamento di base da  $\{\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}, N_P\}$  a  $\{\frac{\partial}{\partial v_1}, \frac{\partial}{\partial v_2}, N_P\}$  è  $\begin{pmatrix} J(u,v) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  il cui determinante è  $\det J(u,v) > 0$  perché i due sistemi di coordinate sono concordi. Osserviamo infine che, localmente, si ha  $N = \frac{\frac{\partial}{\partial u_1} \times \frac{\partial}{\partial u_2}}{\|\frac{\partial}{\partial u_1} \times \frac{\partial}{\partial u_2}\|}$  e quindi  $N$  è un campo liscio su  $M$ .

Viceversa, se esiste un campo normale unitario,  $N$ , si possono scegliere per ogni  $P$  le carte  $(u_1, u_2)$  tali che  $\{\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}, N_P\}$ , sia una base di  $\mathbb{R}^3$  concorde con l'orientamento fissato in un intorno di  $P$  e costruire così un atlante orientato su  $S$ , dato che le matrici di cambiamento di base hanno la forma vista sopra.

L'osservazione appena fatta per le superficie si generalizza a varietà di dimensione  $n > 2$  e ci fa introdurre la cosiddetta *forma-volume*.

**3.4 Proposizione.** Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $n$ .  $M$  è orientabile se, e solo se, esiste su  $M$  una  $n$ -forma differenziale ovunque non nulla.

*dim.* Sia  $\omega$  una  $n$ -forma non nulla su tutti i punti di  $M$  e sia  $(x_1, \dots, x_n)$  un sistema di coordinate locali su un aperto,  $U$ , di  $M$ . Allora, su questo aperto,  $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ , ove  $f$  è una funzione mai nulla. Dunque, a meno di cambiare il segno della coordinata  $x_1$ , possiamo supporre  $f(P) > 0$  in ogni punto  $P \in U$ . Per ogni punto  $P$  di  $M$ , possiamo scegliere delle coordinate locali in cui  $\omega$  si scriva nel modo detto e costruire così un atlante orientato su  $M$ . Infatti, se  $(x_1, \dots, x_n)$  ed  $(y_1, \dots, y_n)$  sono coordinate locali su un aperto  $U$ , con la proprietà descritta sopra, si ha

$$\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = g dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$$

e, d'altra parte, si ha

$$\begin{aligned} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n &= \sum_{j_1, \dots, j_n} \frac{\partial y_1}{\partial x_{j_1}} \dots \frac{\partial y_n}{\partial x_{j_n}} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_n} = \\ &= \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \frac{\partial y_1}{\partial x_{\sigma(1)}} \dots \frac{\partial y_n}{\partial x_{\sigma(n)}} dx_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\sigma(n)} = \det J(y, x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Quindi  $\det J(y, x) = f/g > 0$  e l'atlante è orientato.

Viceversa, se  $M$  è orientabile ed  $\{(U_i, \Phi_i) \mid i \in I\}$  è un atlante orientato, per ogni  $i \in I$ , poniamo  $\omega_i = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ , e, scelta una partizione dell'unità  $\{\chi_i \mid i \in I\}$ , subordinata al ricoprimento  $\{U_i \mid i \in I\}$  (cf. *Proposizione V.3.11*), si pone  $\omega = \sum_{i \in I} \chi_i \omega_i$  e si ottiene così una  $n$ -forma differenziale liscia su  $M$ . Dato un punto  $P$  di  $M$ ,  $\omega$  è somma di un numero finito di  $n$ -forme non negative, di cui almeno una positiva e quindi  $\omega$  non è nulla in  $P$ . **CVD** □

**3.5 Definizione.** Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $n$ . Si chiama *forma-volume* su  $M$  (se esiste) una  $n$ -forma differenziale mai nulla su  $M$ . Se  $M$  è una varietà riemanniana, si dice che la forma-volume  $\omega$  è *normalizzata* se, per ogni punto  $P$  esiste un riferimento ortonormale  $e_1, \dots, e_n$  in un intorno di  $P$  tale che  $\omega_P = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n$ , ove  $\omega_1, \dots, \omega_n$  è la base duale di  $e_1, \dots, e_n$ .

## VII

### Teorema dell'indice e teorema di Gauss-Bonnet

#### 1. Il teorema dell'indice

Come abbiamo osservato nel capitolo precedente, siano  $e_1, \dots, e_n$  dei campi linearmente indipendenti che formano una base di  $T_P M$  e sia  $\theta_1, \dots, \theta_n$  la base duale di  $T_P^* M$ . Una connessione su  $M$  [cf. *Connessioni VI.1.8*] è il dato delle 1-forme  $\vartheta_{ij}$  tali che  $D_X e_i = \sum_{j=1}^n \vartheta_{ij}(X) e_j$ , e soddisfacenti alle equazioni strutturali di Cartan [cf. VI.1.9, VI.1.10]. Se, in particolare, i campi  $e_1, \dots, e_n$  sono una base ortonormale, allora da  $e_i \cdot e_j = \text{costante}$ , per ogni  $i, j$ , si ricava che

$$0 = X(e_i \cdot e_j) = (D_X e_i) \cdot e_j + e_i \cdot (D_X e_j) = \vartheta_{ij}(X) + \vartheta_{ji}(X)$$

qualunque sia il campo  $X$ , e quindi  $\vartheta_{ij} + \vartheta_{ji} = 0$ .

Supponiamo ora che  $M = S$  sia una superficie ( $\dim S = 2$ ) e siano  $e_1, e_2$  due campi ortonormali su un aperto  $U$  di  $S$ . Sia  $\omega_1, \omega_2$  la base duale ed  $\omega_{12}$  la forma di connessione, ovvero si abbia

$$D_X e_1 = \omega_{12}(X) e_2 \quad \text{e} \quad D_X e_2 = -\omega_{12}(X) e_1,$$

per ogni campo  $X$ . Dalle equazioni strutturali di Cartan, si ricava

$$d\omega_1 = -\omega_2 \wedge \omega_{12} \quad \text{e} \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12}.$$

Infine osserviamo che  $\omega_1 \wedge \omega_2$  è una forma-volume su  $U$  [cf. *Definizione VI.3.5*]. Consideriamo ora la funzione [cf. *Proposizione V.1.8*]

$$\begin{aligned} K &= R(e_1, e_2) e_2 \cdot e_1 = (D_{e_1} D_{e_2} e_2 - D_{e_2} D_{e_1} e_2 - D_{[e_1, e_2]} e_2) \cdot e_1 = \\ &= D_{e_1}(\omega_{21}(e_2) e_1) \cdot e_1 - D_{e_2}(\omega_{21}(e_1) e_1) \cdot e_1 - \omega_{21}([e_1, e_2]) e_1 \cdot e_1 = \\ &= e_1(\omega_{21}(e_2)) - e_2(\omega_{21}(e_1)) - \omega_{21}([e_1, e_2]) = d\omega_{21}(e_1, e_2). \end{aligned}$$

Si conclude quindi che  $d\omega_{12} = -K \omega_1 \wedge \omega_2$  e che  $K$  è la curvatura gaussiana di  $S$ .

Consideriamo ora un'altra coppia di campi ortonormali  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , equiorientata con la coppia  $e_1, e_2$ . Si ha quindi

$$\varepsilon_1 = f e_1 + g e_2, \quad \varepsilon_2 = -g e_1 + f e_2, \quad f^2 + g^2 = 1,$$

da cui si ricava,

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{12}(X) &= (D_X \varepsilon_1) \cdot \varepsilon_2 = D_X(f e_1 + g e_2) \cdot (-g e_1 + f e_2) = \\ &= (X(f) e_1 + f D_X e_1 + X(g) e_2 + g D_X e_2) \cdot (-g e_1 + f e_2) = -g X(f) + f X(g) + (f^2 + g^2) \omega_{12}(X) \end{aligned}$$

qualunque sia il campo  $X$ , e quindi

$$\tilde{\omega}_{12} = \omega_{12} + \tau, \quad \text{ove} \quad \tau = f dg - g df.$$

Vogliamo mostrare che, localmente, la forma  $\tau$  coincide con il differenziale dell'angolo formato tra  $e_1$  ed  $\varepsilon_1$ . In particolare, da ciò discende che  $\tau$  è una forma chiusa, ovvero  $d\tau = 0$ <sup>(†)</sup>.

---

(†) Osserviamo che, indicata con  $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$  la base duale di  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , si ha  $\omega_1 \wedge \omega_2 = \tilde{\omega}_1 \wedge \tilde{\omega}_2$  e quindi  $d\omega_{12} = -K \omega_1 \wedge \omega_2 = -K \tilde{\omega}_1 \wedge \tilde{\omega}_2 = d\tilde{\omega}_{12}$ . Da ciò si conclude che  $d\tau = 0$ .

**1.1 Osservazione.** Notazioni come sopra. Siano inoltre  $P \in U$ ,  $\gamma$  una curva in  $U$  con  $\gamma(t_0) = P$  e  $\varphi_0$  l'angolo tra  $\varepsilon_1(P)$  ed  $e_1(P)$  (ovvero  $\varepsilon_1(P) = \cos \varphi_0 e_1 + \sin \varphi_0 e_2$ ). Allora, posto

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^t \gamma^*(\tau)$$

si ha  $f = \cos \varphi(t)$ ,  $g = \sin \varphi(t)$ .

*dim.* Siano  $f_0(t) = f(\gamma(t))$  e  $g_0(t) = g(\gamma(t))$ . Allora,  $\gamma^*\tau = \left( f_0 \frac{dg_0}{dt} - g_0 \frac{df_0}{dt} \right) dt$ . Osserviamo che

$$\frac{d}{dt}(f_0 \cos \varphi + g_0 \sin \varphi) = f_0' \cos \varphi - f_0 \varphi' \sin \varphi + g_0' \sin \varphi + g_0 \varphi' \cos \varphi;$$

e, ricordando che  $\varphi' = \gamma^*\tau = f_0 g_0' - g_0 f_0'$ , l'espressione trovata diventa

$$(f_0' + f_0 g_0 g_0' - g_0^2 f_0') \cos \varphi + (g_0' - f_0^2 g_0' + g_0 f_0 f_0') \sin \varphi = 0$$

perché  $g_0 g_0' = -f_0 f_0'$  e  $g_0^2 + f_0^2 = 1$ . Dunque,  $f_0 \cos \varphi + g_0 \sin \varphi$  è una costante e vale 1 in  $t_0$ , si deduce quindi che

$$(f_0 - \cos \varphi)^2 + (g_0 - \sin \varphi)^2 = f_0^2 + g_0^2 - 2(f_0 \cos \varphi + g_0 \sin \varphi) + 1 = 0$$

per ogni valore di  $t$  che è quanto volevamo. **CVD** □

Poiché la funzione angolo tra i due campi vettoriali,  $\varphi$ , esiste su aperti stellati [cf. *Lemma I.2.3*], si conclude che su tali aperti si ha  $\tau = d\varphi$  e quindi la forma  $\tau$  è chiusa, essendo localmente esatta.

**1.2 Definizione.** Sia  $X$  un campo vettoriale su  $S$ . Diremo che  $P$  è una *singolarità isolata* per  $X$  se esiste un intorno  $U$  di  $P$  tale che  $X_P = 0$  ed  $X_Q \neq 0$  per ogni  $Q \in U \setminus \{P\}$ .

Consideriamo ora un frame ortonormale  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  su  $U \setminus \{P\}$ , con  $\varepsilon_1 = \frac{X}{\|X\|}$  e definiamo una grandezza da chiamare l'*indice* di  $X$  in  $P$ . Fissiamo un frame ortonormale  $e_1, e_2$  su tutto  $U$  e siano  $\omega_{12}$  ed  $\tilde{\omega}_{12}$  le forme di connessione associate ad  $e_1, e_2$  ed  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  rispettivamente. Posto  $\tau = \tilde{\omega}_{12} - \omega_{12}$  in  $U \setminus \{P\}$ , e presa una curva chiusa e semplice,  $c$ , che delimiti un intorno compatto di  $P$  in  $U$ , il differenziale  $c^*(\tau)$  coincide col differenziale dell'angolo  $\varphi(t)$  tra  $\varepsilon_1$  ed  $e_1$  lungo  $c$  e quindi esiste un intero  $I$  [cf. Cap. I, §.2] tale che

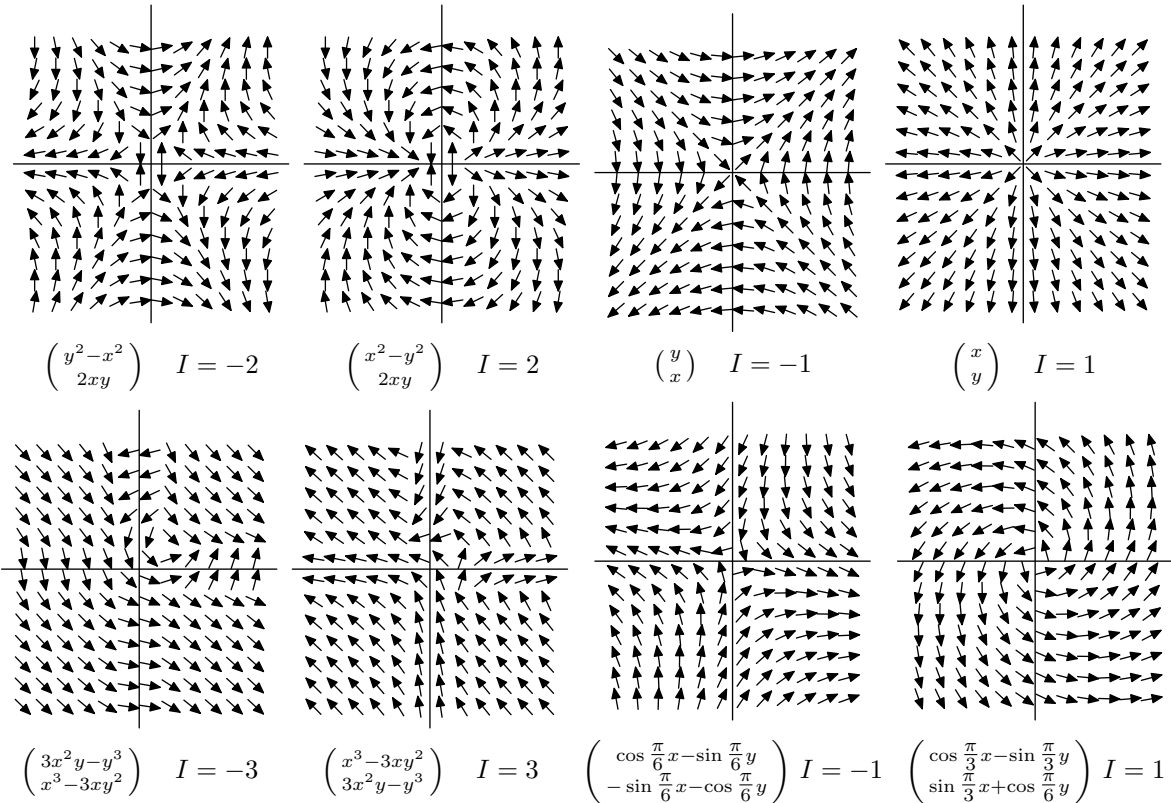
$$(1.3) \quad \int_c \tau = \int_c d\varphi = 2\pi I.$$

Chiameremo *indice* di  $X$  in  $P$  l'intero  $I$  e la definizione sarà ben posta se verificheremo che non dipende né dalla scelta del frame  $e_1, e_2$ , né dalla scelta della curva  $c$  (ovvero dell'intorno compatto di  $P$ ), né dalla metrica riemanniana posta su  $S$ .

Prima di passare alla dimostrazione, diamo qualche esempio di campo vettoriale,  $X(x, y)$  in  $\mathbb{R}^2$ , con

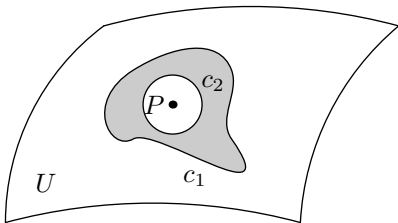


singolarità isolata nell'origine indicandone l'indice.



Dimostriamo quindi la buona definizione dell'indice.

**1.4 Lemma.** *La definizione dell'indice è indipendente dalla scelta della curva  $c$ .*



*dim.* Siano  $c_1$  e  $c_2$  due curve chiuse e semplici attorno a  $P$  e supponiamo che non vi siano punti di intersezione tra le due curve. Siano  $I_1$  ed  $I_2$  i due indici ed indichiamo con  $D$  la regione compresa tra  $c_1$  e  $c_2$ . Si ha

$$I_2 - I_1 = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{c_2} \tau - \int_{c_1} \tau \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \tau = \frac{1}{2\pi} \int_D d\tau = 0,$$

ove si è usata la formula di Stokes [cf. Teorema VI.2.5] ed il fatto che  $\tau$  è una forma chiusa ( $d\tau = 0$ ). Se le due curve avessero dei punti in comune, è sufficiente confrontare i singoli indici con l'indice calcolato su una curva  $c_3$  che non intersechi né  $c_1$  né  $c_2$ . **CVD**  $\square$

Possiamo ora mostrare che la definizione dell'indice è indipendente dalla scelta del frame  $e_1, e_2$  e precisamente mostriamo il lemma seguente

**1.5 Lemma.** *Sia  $B_r$  il disco di centro  $P$  e raggio  $r$  e sia  $S_r$  il suo bordo (orientato). Indicata con  $\tilde{\omega}_{12}$  la forma di connessione associata al riferimento ortonormale  $\varepsilon_1 = \frac{X}{\|X\|}, \varepsilon_2$ , definito sopra, e detto  $I$  l'indice del campo  $X$  nella singolarità isolata,  $P$ , si ha*

$$I = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{S_r} \tilde{\omega}_{12}.$$

*dim.* Siano  $S_{r_1}$  ed  $S_{r_2}$  due cerchi concentrici con  $r_2 < r_1$  e sia  $D$  la corona compresa tra i due cerchi ( $D = (B_{r_1} \setminus B_{r_2}) \cup S_{r_2}$ ). Per il Teorema di Stokes, si ha

$$\int_{S_{r_1}} \tilde{\omega}_{12} - \int_{S_{r_2}} \tilde{\omega}_{12} = \int_D d\tilde{\omega}_{12}$$

e quest'ultimo integrale tende a zero se  $r_1$  ed  $r_2$  tendono a zero. Infatti  $d\tilde{\omega}_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$  è una forma definita su tutto  $U$  e quindi limitata in un intorno (compatto) di  $P$ . Ciò significa che, fissata comunque una successione di raggi  $r_n \rightarrow 0$ , la successione degli integrali  $\int_{S_{r_n}} \tilde{\omega}_{12}$  è una successione di Cauchy e quindi esiste il limite proposto. Inoltre,

$$\int_{S_{r_n}} \tilde{\omega}_{12} - 2\pi I = \int_{S_{r_n}} \tilde{\omega}_{12} - \int_{S_{r_n}} \tau = \int_{S_{r_n}} \omega_{12} = \int_{B_{r_n}} d\omega_{12} = - \int_{B_{r_n}} K \omega_1 \wedge \omega_2$$

e quindi la differenza tende a zero al tendere di  $r_n$  a zero dando il risultato voluto. **CVD**  $\square$

Vediamo ora che la definizione dell'indice è indipendente dalla metrica riemanniana posta sulla varietà.

**1.6 Lemma.** *Siano date due metriche riemanniane sulla varietà, definite dai due prodotti scalari  $g_0$  e  $g_1$ , definiti positivi. Indicati con  $I_0$  ed  $I_1$  gli indici del campo  $X$  in  $P$ , calcolati usando  $g_0$  e  $g_1$ , rispettivamente, si ha  $I_0 = I_1$ .*

*dim.* Dati  $g_0$  e  $g_1$ , si definisca, per  $t \in [0, 1]$ ,  $g_t(X, Y) = tg_1(X, Y) + (1-t)g_0(X, Y)$ , al variare di  $X$  ed  $Y$  tra i vettori tangenti. L'applicazione  $g_t$  è ancora un prodotto scalare definito positivo e, in corrispondenza ad ogni  $t$ , possiamo definire il corrispondente indice  $I_t$ , che dipende in modo continuo da  $t$ . La funzione  $t \mapsto I_t$  è continua ed a valori in  $\mathbb{Z}$  e quindi è costante, e ciò permette di concludere che  $I_0 = I_1$ . **CVD**  $\square$

Possiamo quindi dimostrare una prima conseguenza dell'invarianza dell'indice.

**1.7 Teorema.** *Sia  $S$  una superficie compatta e orientabile ed  $X$  un campo liscio su  $S$  con singolarità isolate  $P_1, \dots, P_k$  ed indici  $I_1, \dots, I_k$ . Allora, qualunque sia la metrica riemanniana posta su  $S$  si ha*

$$\int_S K\omega_S = 2\pi \sum_{j=1}^k I_j,$$

ove  $K$  è la curvatura gaussiana di  $S$  ed  $\omega_S$  è una forma-volume normalizzata.

*dim.* In  $S \setminus \{P_1, \dots, P_k\}$  consideriamo il frame ortonormale  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  definito da  $\varepsilon_1 = \frac{X}{\|X\|}$ , e, per  $j = 1, \dots, k$ , sia  $B_j$  un disco chiuso di centro  $P_j$  che non contenga altre singolarità. Applicando la Formula di Stokes, si ha

$$\int_{S \setminus \cup_j B_j} K\tilde{\omega}_1 \wedge \tilde{\omega}_2 = - \int_{S \setminus \cup_j B_j} d\tilde{\omega}_{12} = \int_{\cup_j \partial B_j} \tilde{\omega}_{12} = \sum_{j=1}^k \int_{\partial B_j} \tilde{\omega}_{12}.$$

Passando al limite al tendere a zero dei raggi dei dischi  $B_j$  e ricordando il *Lemma VII.1.5*, si ottiene la tesi. **CVD**  $\square$

Vogliamo mettere in evidenza un aspetto importante di questo risultato: il membro di destra dell'uguaglianza nell'enunciato non dipende dalla metrica su  $S$  e, d'altra parte, il membro di sinistra è indipendente dal campo  $X$  e quindi le due grandezze che compaiono nell'uguaglianza non dipendono né dalla struttura di varietà riemanniana posta su  $S$  né dal campo vettoriale scelto su di essa, ma solo dalla superficie  $S$ . Vedremo come dal Teorema di Gauss-Bonnet discenderà che questa grandezza è un invariante topologico di  $S$  ovvero la *caratteristica di Eulero-Poincaré*,  $\chi(S)$ , della superficie  $S$ , moltiplicata per  $2\pi$ .

## 2. Il teorema di Gauss-Bonnet

Cominciamo con alcune definizioni che ci serviranno nel seguito.

**2.1 Definizione.** Sia  $F$  un sottoinsieme chiuso del piano, omeomorfo ad un disco ed il cui bordo,  $\partial F$ , sia una curva chiusa e semplice, liscia a tratti, con gli angoli esterni diversi da  $\pm\pi$  [cf. *Definizione I.2.4*]. Data una superficie,  $S$ , chiameremo *poligono singolare* su  $S$  un diffeomorfismo liscio  $P : F \rightarrow S$  ed indicheremo con  $\partial P$  la restrizione di  $P$  al bordo  $\partial F$ . A partire da una parametrizzazione della curva  $\partial F$  otteniamo una parametrizzazione di  $\partial P$ . Supporremo di aver scelto la parametrizzazione di  $\partial F$  di modo che il suo numero di rotazioni sia 1 [cf. *Teorema I.2.7*].

**2.2 Definizione.** Sia  $S$  una superficie compatta e orientata. Una *decomposizione poligonale* di  $S$  è una famiglia finita  $\mathcal{P} = \{ P_j : F_j \rightarrow S \mid 1 \leq j \leq k \}$  ove,

- per ogni  $j$ ,  $P_j$  è un poligono singolare che conserva l'orientamento,
- $\bigcup_{j=1}^k P_j(F_j) = S$ ,
- se  $i \neq j$ , l'intersezione  $P_i \cap P_j$  è vuota, oppure è un vertice o un lato di ciascuno dei due poligoni.

Osserviamo che, data una decomposizione poligonale di  $S$  ed una 2-forma  $\omega$  su tutta  $S$ , si ha

$$\int_S \omega = \sum_{j=1}^k \int_{P_j} \omega.$$

Possiamo dimostrare un primo risultato

**2.3 Teorema.** [Formula di Gauss-Bonnet per i poligoni] *Sia  $S$  una superficie orientata, dotata di una metrica riemanniana. Dato un poligono singolare  $P : F \rightarrow S$  siano  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  gli angoli esterni ai vertici del poligono  $P(F)$  e sia  $\kappa_g$  la curvatura geodetica sui lati del bordo  $\partial P$ . Allora si ha*

$$\int_{\partial P} \kappa_g = 2\pi - \sum_{i=1}^r \alpha_i - \int_P K \omega_S$$

ove  $\omega_S$  è una forma volume normalizzata su  $S$  [cf. *Definizione VI.3.5*].

*dim.* Supponiamo dapprima che  $P(F)$  sia contenuto in un aperto coordinato e sia  $e_1, e_2$  una base ortonormale orientata per le coordinate. Siano  $\gamma_1, \dots, \gamma_r$  i tratti lisci di  $\partial P$  che supponiamo parametrizzati dalla lunghezza d'arco su intervalli adiacenti ( $\gamma_i : [s_{i-1}, s_i] \rightarrow S$ , per  $i = 1 \rightarrow r$ , con  $\gamma_i(s_i) = \gamma_{i+1}(s_i)$  e  $\gamma_r(s_r) = \gamma_1(s_0)$ ). Sia  $t$  il versore tangente alla curva  $\gamma$  e supponiamo (a meno di ruotare i vettori  $e_1, e_2$ ) che  $t(s_0^+) = e_1$ . Definiamo l'angolo,  $\vartheta(s)$  tra il vettore  $t(s)$  ed  $e_1$  come nel capitolo I, ponendo  $\vartheta(s_0^+) = 0$  e la condizione  $t(s) = \cos \vartheta(s)e_1 + \sin \vartheta(s)e_2$ . La definizione è ben posta sull'intervallo  $[s_0, s_1]$  ed è ben definito  $\vartheta(s_1^-)$ . Posto  $\vartheta(s_1^+) = \vartheta(s_1^-) + \alpha_1$ , si può proseguire sull'intervallo  $[s_1, s_2]$  e così via su tutto il bordo  $\partial P$ . Il bordo è una curva chiusa semplice e quindi, per l'Umlaufsatz [cf. *Teorema I.2.7*] si ha  $\vartheta(s_r^-) + \alpha_r = \vartheta(s_0^+) + 2\pi = 2\pi$ . Indicato con  $n$  il versore normale a  $t$ ,  $n = -\sin \vartheta e_1 + \cos \vartheta e_2$ , tale che  $t, n$  sia un frame concorde con l'orientamento, la curvatura geodetica della curva  $\gamma$  è definita dalla condizione  $D_t t = \kappa_g n$ . D'altra parte, indicata con  $\omega_1, \omega_2$  la base duale di  $e_1, e_2$ , si ha  $-d\omega_{12} = K\omega_1 \wedge \omega_2$ , ove  $\omega_{12}$  è la forma di connessione associata al riferimento  $e_1, e_2$ , ovvero  $D_X e_1 = \omega_{12}(X)e_2$ , per ogni vettore tangente  $X$ . Si ha quindi

$$D_t t = D_t(\cos \vartheta e_1 + \sin \vartheta e_2) = \left( \frac{d\vartheta}{ds} + \omega_{12}(t) \right) n$$

da cui si deduce la *Formula di Cartan* per la curvatura geodetica

$$\kappa_g = \frac{d\vartheta}{ds} + \omega_{12}(t). \quad (2.4)$$

Da ciò si conclude che

$$\int_{\partial P} \kappa_g = \sum_{i=1}^r \int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{d\vartheta}{ds} ds + \int_{\partial P} \omega_{12} = \sum_{i=1}^r (\vartheta(s_i^-) - \vartheta(s_{i-1}^+)) + \int_P d\omega_{12} = 2\pi - \sum_{i=1}^r \alpha_i - \int_P K\omega_1 \wedge \omega_2.$$

Ora dobbiamo rimuovere l'ipotesi che il poligono sia contenuto in un aperto coordinato. Se  $P(F)$  non è contenuto in un aperto coordinato, possiamo considerare una decomposizione poligonale,  $\mathcal{P}$ , di  $P(F)$  tale che ognuno dei poligoni  $P_j$  sia contenuto in un aperto coordinato. Per ogni poligono  $P_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , si ha

$$(2.5) \quad \int_{\partial P_j} \kappa_g + \int_{P_j} K = 2\pi + \sum_{i_j=1}^{r_j} (\beta_{i_j} - \pi),$$

ove  $\beta_{i_j} = \pi - \alpha_{i_j}$ . Sia  $v$  il numero dei vertici della suddivisione poligonale,  $l$  il numero dei lati ed  $f$  il numero delle facce. Allora si ha  $v - l + f = 1$  come si verifica supponendo che  $\mathcal{P}$  sia una triangolazione (tutti i poligoni sono triangoli) ed osservando che aggiungere un triangolo ad una triangolazione non modifica la somma  $v - l + f$ . Sommando i membri dell'uguaglianza (VII.2.5) al variare di  $j$ , il membro di sinistra diventa  $\int_{\partial P} \kappa_g + \int_P K\omega_S$  perché l'integrale della curvatura geodetica lungo i bordi interni al poligono si annulla, venendo percorsi due volte in direzioni opposte. La somma dei membri di destra si può calcolare come segue. Dapprima c'è  $2\pi f$ . Inoltre,

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i_j=1}^{r_j} \beta_{i_j} = 2\pi v^0 + \sum_{i=1}^r \beta_i \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^k \sum_{i_j=1}^{r_j} (-\pi) = -2\pi l^0 + \sum_{i=1}^r (-\pi)$$

ove  $v^0$  indica il numero dei vertici interni al poligono  $P$  ed  $l^0$  indica il numero dei lati interni al poligono  $P$ . Il bordo di  $P$  contiene tanti vertici quanti sono i lati e quindi  $v^0 - l^0 = v - l$ . In conclusione, sommando i termini delle uguaglianze si ottiene

$$\int_{\partial P} \kappa_g + \int_P K\omega_S = 2\pi(f - l + v) + \sum_{i=1}^r (\beta_i - \pi) = 2\pi - \sum_{i=1}^r \alpha_i$$

che è quanto dovevamo dimostrare. **CVD** □

Prima di generalizzare il risultato alle superficie chiuse, scriviamo alcune conseguenze della Formula di Gauss-Bonnet.

**2.6 Corollario.** *Sia  $S$  una superficie e  $P$  un poligono in  $S$  [cf. Definizione VII.2.1].*

(a) *Indicati con  $\beta_i = \pi - \alpha_i$  gli angoli interni ai  $k$  vertici di  $P$ . Allora si ha*

$$\int_{\partial P} \kappa_g + \int_P K\omega_S = \sum_{i=1}^k \beta_i + (2 - k)\pi.$$

(b) [Gauss' Theorema Elegantissimum] *Se  $P$  è un triangolo i cui lati siano geodetiche di  $S$ , allora*

$$\sum_{i=1}^3 \beta_i = \pi + \int_P K\omega_S.$$

(c) *Se  $P$  è un triangolo geodetico e la curvatura di  $S$  è costante ( $K = K_0$ ), si ha  $\int_P K\omega_S = K_0 \text{Area}(P)$  e quindi*

$$\sum_{i=1}^3 \beta_i = \pi + K_0 \text{Area}(P).$$

Passiamo ad un'ultima definizione

**2.7 Definizione.** Sia  $S$  una superficie orientabile compatta e sia  $\mathcal{P}$  una decomposizione poligonale costituita da triangoli (triangolazione). Detti  $v$  il numero dei vertici,  $l$  il numero dei lati ed  $f$  il numero delle facce della decomposizione, si chiama *caratteristica di Eulero-Poincaré* della superficie  $S$  il numero  $\chi(S) = v - l + f$ . Si chiama *genere* della superficie (orientabile)  $S$  il numero  $g$  tale che  $\chi(s) = 2 - 2g$ .

Con ragionamenti elementari simili a quanto fatto nella dimostrazione del *Teorema VII.2.3* si può verificare che per ogni raffinamento della decomposizione  $\mathcal{P}$  il numero  $v - l + f$  non cambia e quindi osservando che ogni coppia di triangolazioni ammette un raffinamento comune, la definizione della caratteristica di Eulero-Poincaré non dipende dalla scelta di  $\mathcal{P}$ . Osserviamo inoltre che la definizione non cambia se prendiamo una decomposizione poligonale in luogo di una triangolazione della superficie  $S$ .

**2.8 Esempi.** (a) Osserviamo, ad esempio che la superficie di una sfera può essere triangolata dalla proiezione di un tetraedro inscritto nella stessa e quindi la sua caratteristica di Eulero-Poincaré è 2 ed il genere è uguale a 0.

(b) Si può ottenere una decomposizione poligonale della superficie del toro prendendo 3 meridiani e tre paralleli distinti [cf. *Esempi II.2.11*]. La decomposizione così ottenuta ha 9 vertici, 18 lati e 9 facce. Quindi la caratteristica di Eulero-Poincaré del toro è uguale a 0 ed il suo genere è 1.

(c) Consideriamo infine due superficie,  $S_1$  ed  $S_2$ , con caratteristica di Eulero-Poincaré  $\chi_1$  e  $\chi_2$  rispettivamente. Facciamo la *somma connessa* delle due superficie tagliando su ciascuna una curva chiusa e semplice ed identificando le due regioni all'interno di tali curve. Si può supporre di aver scelto delle triangolazioni delle superficie e di aver identificato un triangolo in ciascuna delle due triangolazioni. In questo modo, dalle due triangolazioni si ottiene una triangolazione della somma connessa e, dall'identificazione dei due triangoli, si ottiene che, nella triangolazione complessiva, compare la somma di vertici, lati e facce delle due triangolazioni meno tre lati, due facce e tre vertici dovuti all'identificazione dei due triangoli. In tal modo si conclude che la somma connessa ha caratteristica di Eulero-Poincaré  $\chi = \chi_1 + \chi_2 - 2$ . Si parla di *attaccare un manico* alla superficie  $S$  quando si considera la somma connessa tra  $S$  ed un toro. In particolare, il genere della superficie così ottenuta è  $g(s) + 1$ . Possiamo quindi ottenere una superficie di un qualsiasi genere  $g \geq 0$ , attaccando  $g$  manici ad una sfera.

Andiamo quindi concludere con il

**2.9 Teorema.** [Gauss-Bonnet] *Sia  $S$  una superficie compatta ed orientabile, dotata di una metrica riemanniana e sia  $\mathcal{P}$  una decomposizione poligonale di  $S$ . Allora*

$$\int_S K \omega_S = 2\pi\chi(S),$$

ove  $K$  è la curvatura gaussiana di  $S$  ed  $\omega_S$  è una forma volume normalizzata.

*dim.* Come nella dimostrazione precedente della formula di Gauss-Bonnet, possiamo considerare la formula (VII.2.5) per i poligoni di una decomposizione poligonale di  $S$ . Sommando su tutti i poligoni, il contributo della curvatura geodetica dei lati si cancella, perché tutti i lati vengono percorsi in due versi opposti e quindi il membro di sinistra viene a coincidere con l'integrale su  $S$  della curvatura gaussiana. Per quanto riguarda la somma dei membri di destra, possiamo osservare che si ha  $2\pi$  per il numero delle facce della decomposizione, a cui aggiungere due volte  $-\pi$  per ciascuno dei lati, dato che ogni lato compare due volte come bordo di un poligono; infine la somma su tutti i poligoni degli angoli interni,  $\beta_{ij}$ , coincide con  $2\pi$  per il numero dei vertici della decomposizione. In conclusione, la somma dei membri di destra è esattamente  $2\pi\chi(S)$ . **CVD** □

### 3. Appendice. Suggerimenti per ulteriori letture

Queste ultime righe non pretendono di dare né un quadro generale né una guida esauriente nel vasto mare degli sviluppi della Geometria Differenziale, ma sono solamente alcuni suggerimenti, parziali e limitati, per possibili approfondimenti.

Dato che l'inizio della Geometria Differenziale intrinseca viene unanimemente fatto risalire alla pubblicazione da parte di Carl Friedrich Gauss delle *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (Göttingen, 1828), suggerirei come prima lettura, soprattutto per chi abbia interessi storici o didattici, la ristampa di questo volumetto (una quarantina di pagine scritte in latino) con un'accurata traduzione in inglese curata dalla Société Mathématique de France [Astérisque 62, 1979] in occasione del 150 anniversario della pubblicazione e del bicentenario della nascita<sup>(\*)</sup>. Il lavoro di Gauss è accompagnato da un articolo di Peter Dombrowski sul lavoro di Gauss e sugli sviluppi nei successivi 150 anni.

Un altro argomento che può interessare per gli aspetti storici o didattici sono le geometrie delle superficie a curvatura costante, ovvero le classiche geometrie non-euclidee. Un'introduzione "operativa" all'argomento si può trovare nei primi capitoli del libro di John Ratcliffe *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Ogni capitolo è corredato da numerosi esercizi e da una nota storica.

Un'altra lettura, sempre di tipo generale, può essere l'articolo *From triangles to manifolds* di Shing-Shen Chern [Am Math Monthly 86 (1979) pp.339–349] in cui si presentano gli sviluppi e le prospettive di alcune idee fondamentali della Geometria. L'autore è tra i più rilevanti matematici cinesi del ventesimo secolo: a lui si deve la nozione di *classe di Chern* per i fibrati e la generalizzazione del Teorema di Gauss-Bonnet a varietà compatte, orientabili di dimensione,  $n$ , arbitraria, con l'introduzione della cosiddetta forma di Eulero.

Per chi sia interessato invece ad approfondire o sistematizzare in modo più completo gli argomenti presentati nel corso, si possono consigliare diversi manuali, dai testi di Manfredo Do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, e *Riemannian Geometry*, al testo di S. Kobayashi e K. Nomizu *Foundations of differential geometry* (2 vols) o la monumentale esposizione in 5 volumi di Michael Spivak *A comprehensive Introduction to Differential Geometry*.

Ci sono molti argomenti che non sono stati toccati o solamente sfiorati durante il corso. Tra questi, suggerirei la lettura di alcuni testi, quali *Differential Topology* di V. Guillemin e A. Pollack o *Topology from a differentiable viewpoint* di John Milnor. Dello stesso autore segnalo *Morse Theory* e il libro scritto in collaborazione con J. D. Stasheff *Characteristic Classes*. Tutti questi libri richiedono un notevole impegno da parte del lettore.

Un'altro argomento trascurato in queste note è la teoria dei Gruppi e delle Algebre di Lie. L'argomento è vastissimo e si potrebbe riempire una biblioteca sul soggetto, per cui mi limito a suggerire, in modo molto arbitrario, solo un paio di letture a riguardo. Il libro di Anthony W. Knap, *Lie Groups, beyond an introduction* (Birkhäuser 2002, circa 800 pagine), che sviluppa il precedente volume *Lie Groups, Lie Algebras and Cohomology* (Princeton University Press). Un riferimento completo ed esauriente sono i 9 capitoli del Bourbaki, apparsi sull'argomento (5 fascicoli nell'edizione francese, 3 volumi nella traduzione inglese). Un'introduzione, più limitata, ma accessibile senza bisogno di prerequisiti, può essere il libro di W. Rossmann *Lie Groups. An introduction through linear groups*, Oxford University Press.

Spero, in futuro, di poter arricchire questi suggerimenti con delle indicazioni più precise su singoli argomenti. A tale scopo accetto volentieri indicazioni e suggerimenti.

---

<sup>(\*)</sup> Per gli amanti delle date, Gauss è nato nel 1777 ed ha presentato questo lavoro nel 1827, anche se la pubblicazione è avvenuta solo l'anno successivo.