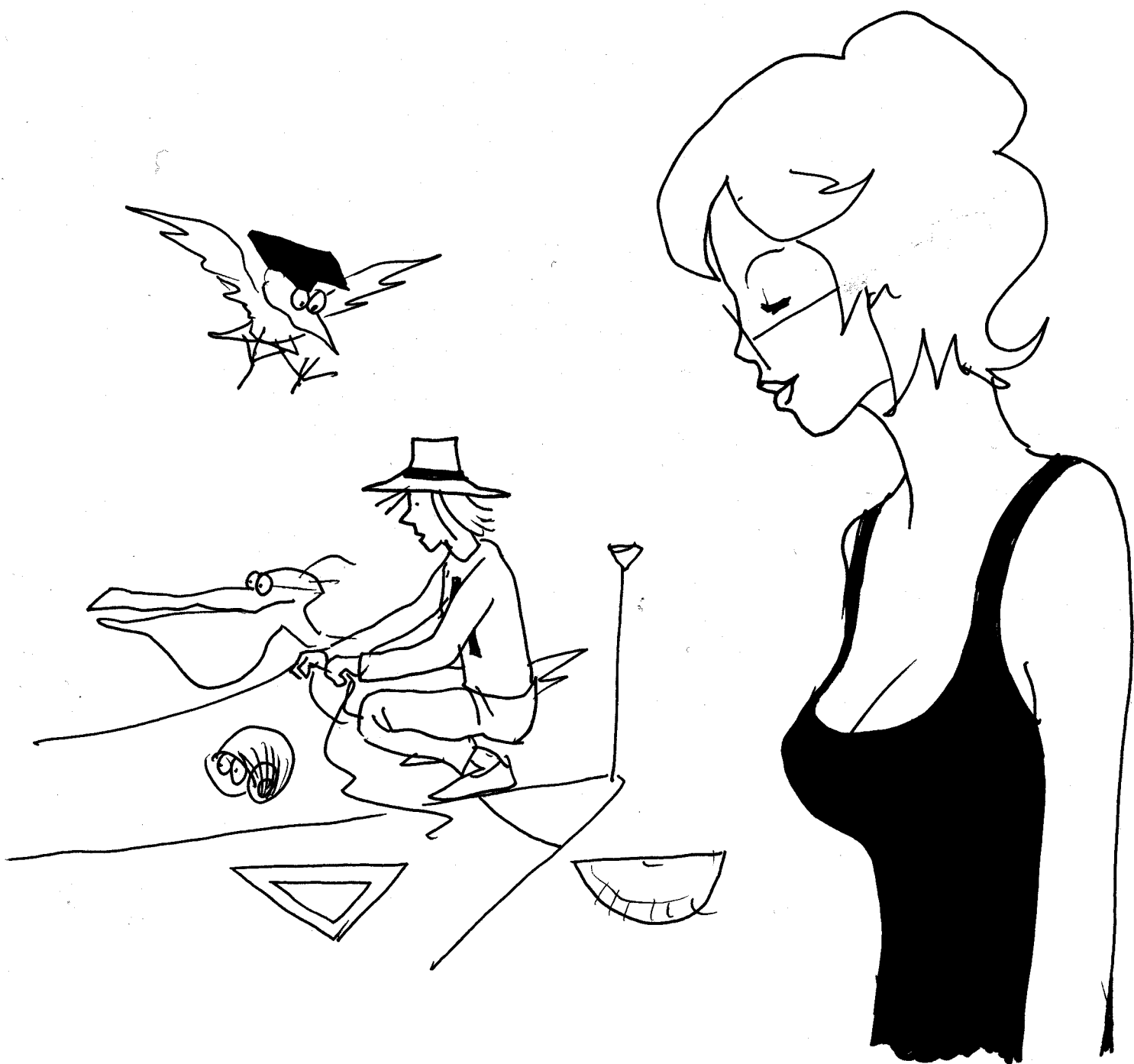


Jean pierre Petit

# IL GEOMETRICON

storia di un fantastico viaggio  
nei mondi delle geometrie



# L' autore

<http://www.savoir-sans-frontiere.com>



Jean-Pierre Petit, 68 anni, è un astrofisico in pensione (ma continua a produrre lavori scientifici), specializzato in teorie cosmologiche. Ha passato 29 anni all'Osservatorio di Marsiglia e ha scritto 32 libri, molti dei quali sono stati tradotti in varie lingue (otto in tutto).

Potete copiare questo file pdf e distribuirlo a chi volete. Potete anche inserirlo nel vostro sito internet, o mettere un link verso di esso. Lo scopo è di renderlo disponibile al maggior numero di persone possibile.

# AUVERTENZA

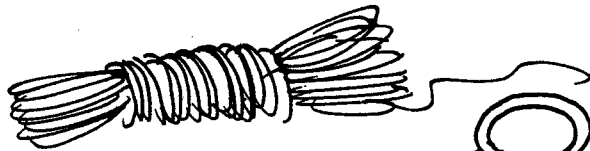
QUESTO NON E' UN TRATTATO, NE' UN CORSO:  
E' SEMPLICEMENTE LA STORIA DI ANSELMO  
E DI UNO DEI SUOI VIAGGI,  
NEL PAESE DELLA GEOMETRIA.

LEGGETELA PREFERIBILMENTE CON:

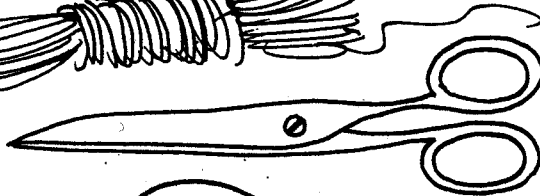
\* DELL'ASPIRINA, INNANZITUTTO



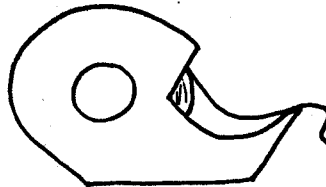
\* QUINDI UNA CORDA



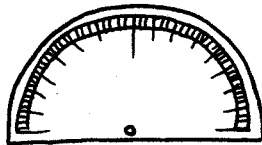
\* DELLE FORBICI



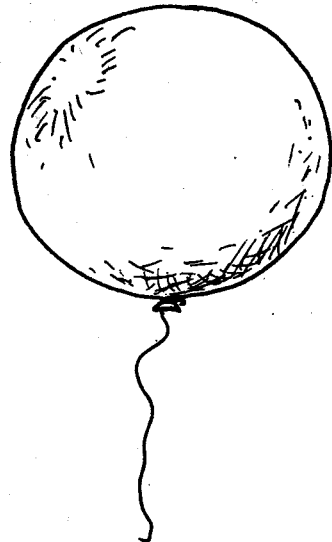
\* DEL NASTRO ADESIVO



\* UN GONIOMETRO



\* E UN BEL PALLONE



TONDO TONDO...

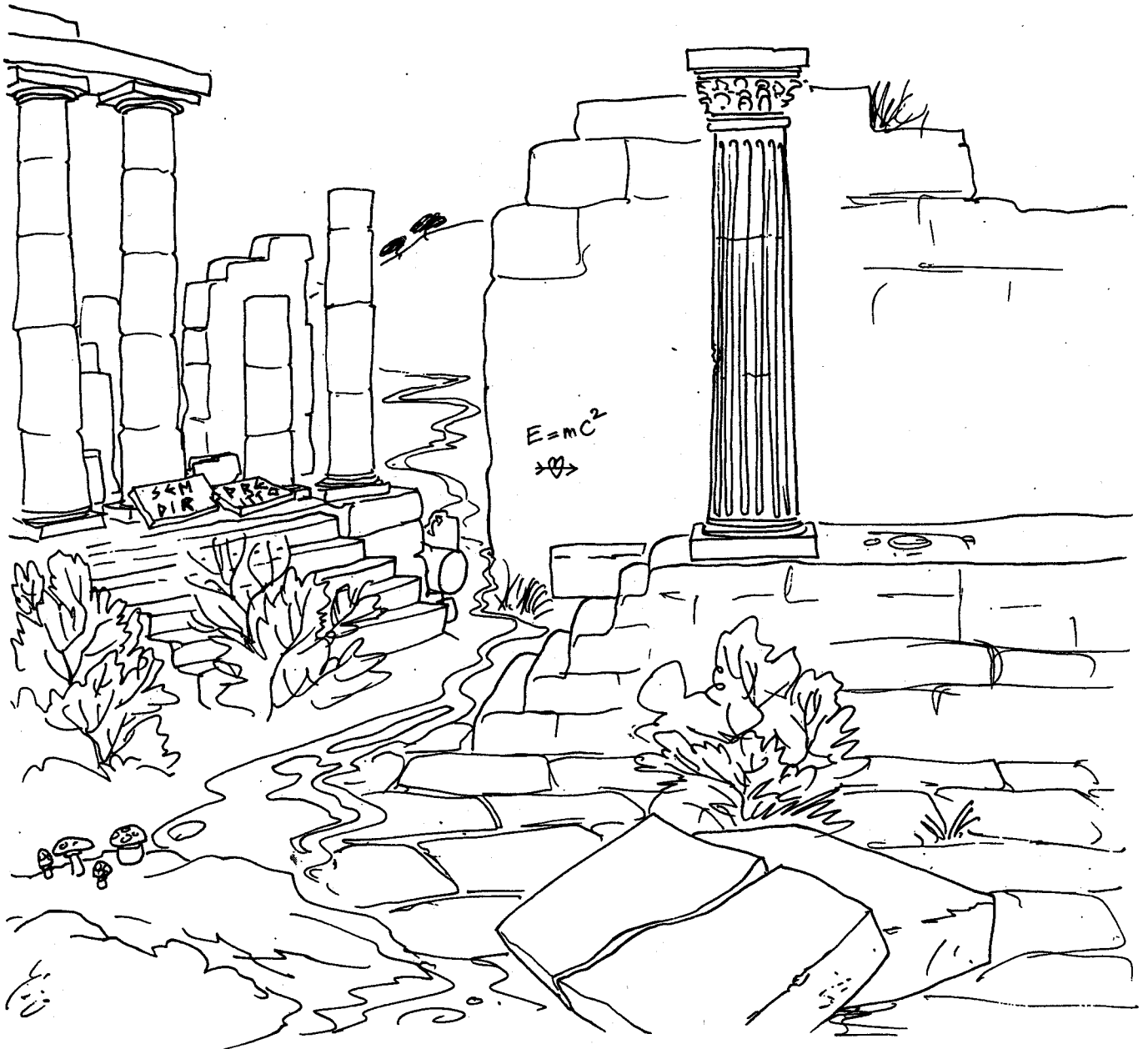
LA SOCIETA' EUCLIDE & C. NACQUE AD ALESSANDRIA, NEL TERZO SECOLO AVANTI CRISTO, E PER MILLEDUECENTO ANNI I SUOI AFFARI PROSPERARONO. I SUOI PRODOTTI ERANO APPREZZATI DA UNA CLIENTELA SODDISFATTA E FEDELE.



MA, A POCO A POCO, I GUSTI DEI CLIENTI CAMBIARONO. MENTRE IN PASSATO CI SI FIDAVA CIECAMENTE DELLA DITTA, DOPO QUALCHE CURIOSA ESPERIENZA QUALCUNO GIUNSE A CHIEDERSI:

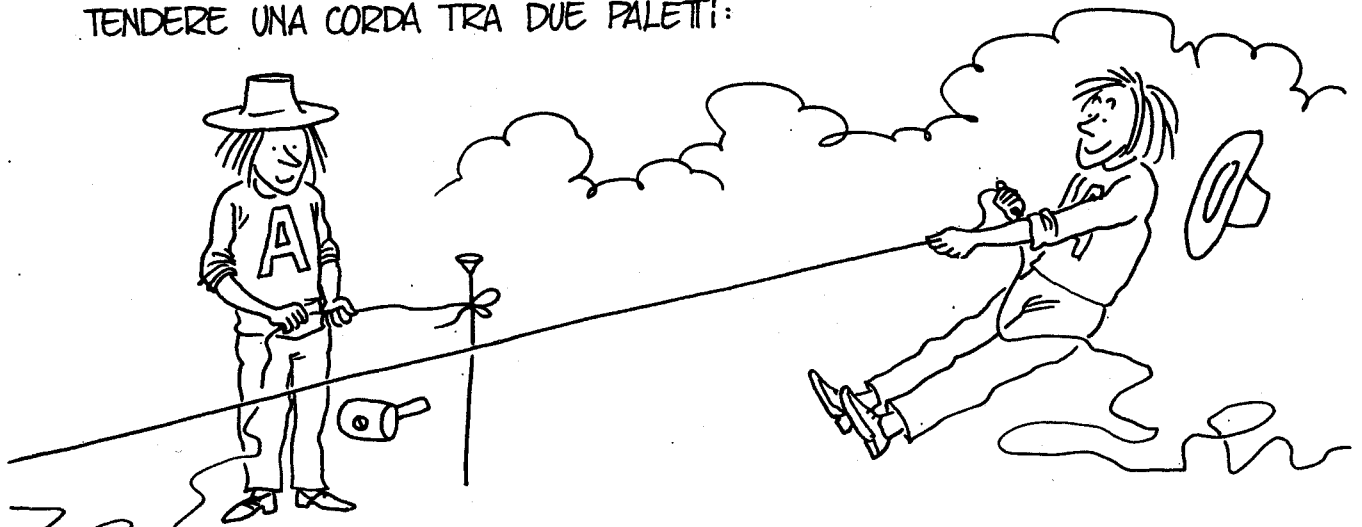
"MA, IN FONDO, EUCLIDE E' SEMPRE E DOVUNQUE IL MEGLIO?"

E' LA STORIA DI UNO DI COSTORO CHE STIAMO PER NARRARVI.



# PROLOGO:

UN BEL GIORNO ANSELMO DECISE DI  
TENDERE UNA CORDA TRA DUE PALETTI:



TI INTENDI DI SCIENZA?

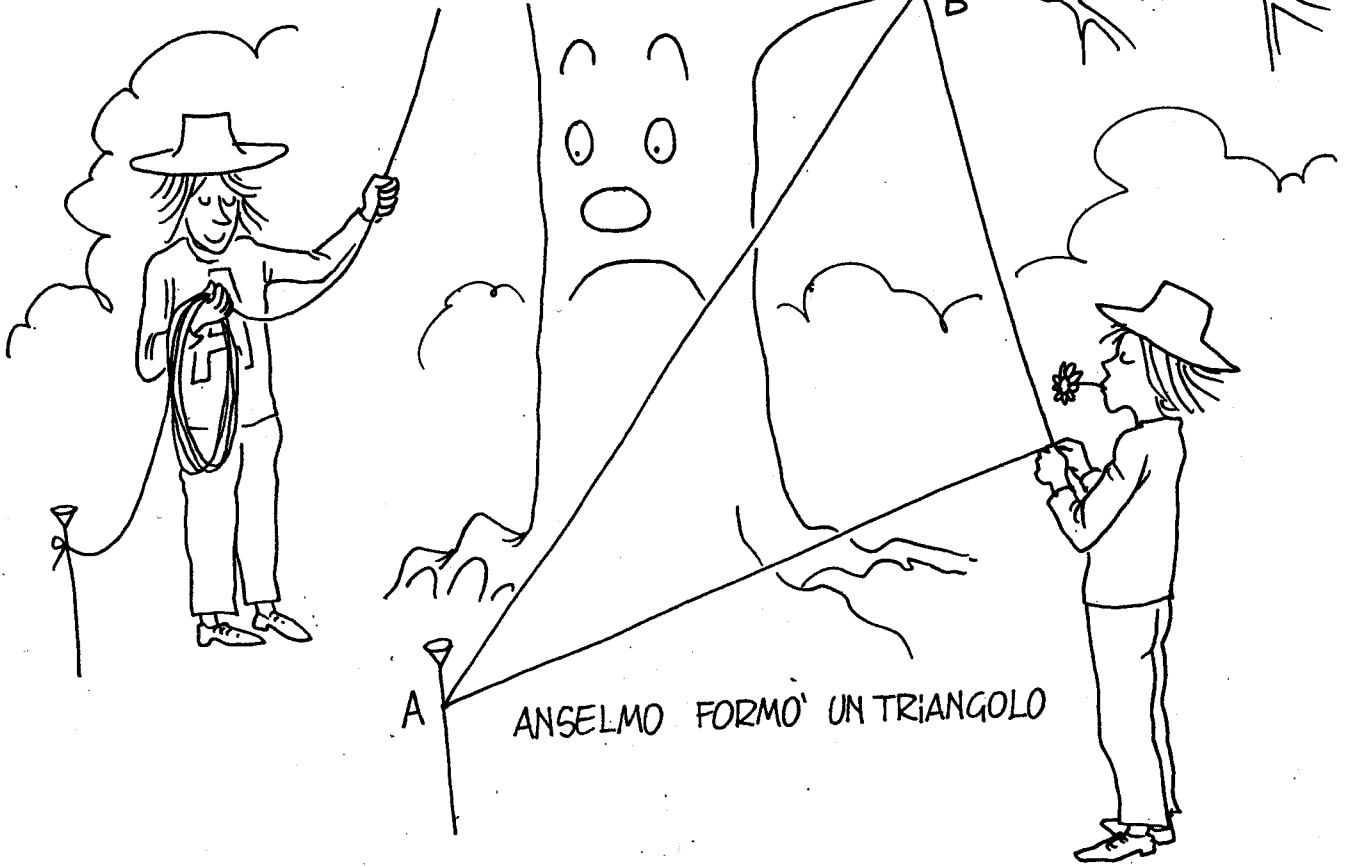
BOH...

QUESTA CORDA RAPPRESENTA  
LA PIU' BREVE DISTANZA TRA  
DUE PUNTI A E B

IN LINGUAGGIO SCIENTIFICO  
E' QUEL CHE CHIAMIAMO  
UNA GEODETICA



TENDENDO TRE FILI, CIOE' CON TRE  
GEODETICHE,



A ANSELMO FORMO' UN TRIANGOLO

PONENDO IL SUO GONIOMETRO SU CIASCUN VERTICE DEL  
TRIANGOLO, MISURO' GLI ANGOLI  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$ , E NE  
CALCOLO' LA SOMMA



SECONDO L'OTTIMO  
TEOREMA DELLA SOCIETA'  
EUCLIDE & C., LA SOMMA  
DEVE ESSERE  $180^\circ$ .  
BENE...

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \text{ euclide}$$

IL MONDO IN CUI VIVEVA ANSELMO ERA MALEDETTAMENTE NEBBIOSO,  
AL PUNTO CHE VI SARESTE SOFFIATI IL NASO DI UN ALTRO...



CHE SI TROVA LONTANO DA QUI?  
CHE NASCONDE TUTTA QUESTA NEBBIA?  
UNA GEODETICA E' UNA LINEA RETTA:  
E SE CAMMINASSI SEMPRE IN LINEA RETTA  
D'AVANTI A ME, IL PIU' LONTANO POSSIBILE?  
SE ESPLORASSI QUESTO SPAZIO, TANTO PER  
VEDERE?

DEVO TENDERLA BENE,  
LA MIA GEODETICA



ANSELMO CAMMINO' A LUNGO...  
ALLE SUE SPALLE LA CORDA SI  
SROTOLAVA COSI' BEN TESA DA  
ELIMINARE OGNI INCERTEZZA  
NELLA SUA MARCIA NELLA  
NEBBIA: ERA UNA  
GEODETICA PERFETTA.



MA VI SONO DEI GIORNI, L'AVRETE NOTATO, IN CUI TUTTO  
SEMBRA ANDAR STORTO...



ANSELMO, CHE AVEVA DELLA CORDA,  
DECISE DI CHIARIRE IL MI-  
STERO.



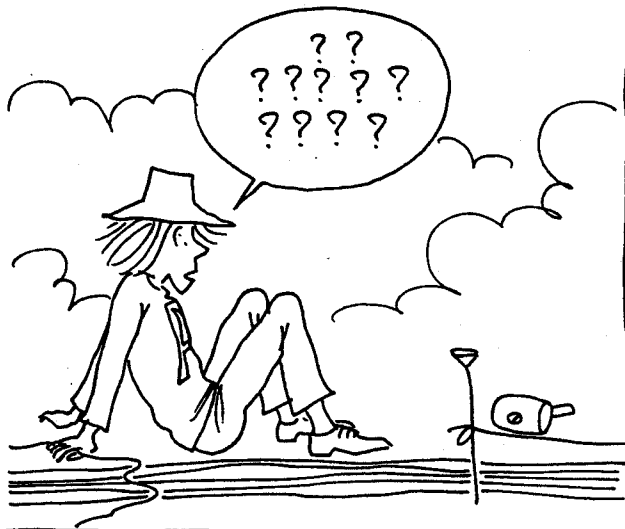
AHIMÈ!...

IMPURTURBABILE, CONTINUO'  
DUNQUE A TENDERE LA CORDA, PRO-  
SEGUENDO AVANTI SEMPRE IN LI-  
NEA RETTA, PIENO DI CURIOSITA'

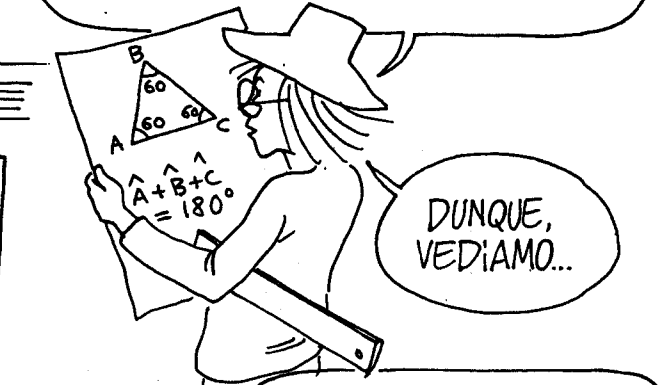
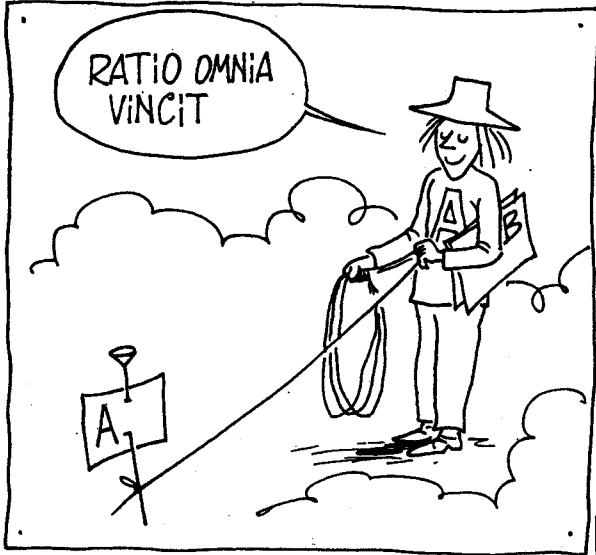


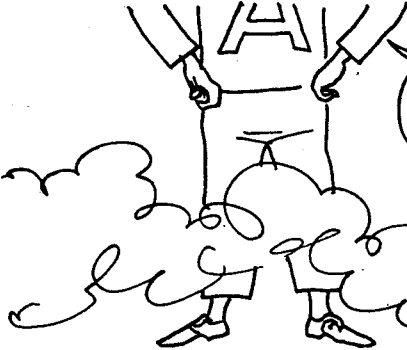
LA RETTA DI ANSELMO SI  
RICHIUDEVA SU SE STESSA!





PROVIAMO UN TEOREMA DELLA SOCIETA' EUCLIDE. TRACCIAMO TRE GEODETICHE DI UGUALE LUNGHEZZA: NE RICAVERO' UN TRIANGOLO CON TRE ANGOLI DI 60° CIASCUNO, E DUNQUE IN TOTALE 180°. E' SCRITTO SUL LIBRETTO DI ISTRUZIONI.






EPPURE, CON LA RIGA POGGIATA PER TERRA, HO POTUTO CONTROLLARE CHE QUEI FILI ERANO REALMENTE DELLE RETTE!

PRONTO, LA DITTA EUCLIDE?  
SENTA, HO DELLE NOIE CON IL  
VOSTRO MATERIALE.

UN ATTIMO, LE PASSO IL  
REPARTO TECNICO.



NOIE CON I NOSTRI TRIANGOLI?  
INCREDIBILE! PERCHE' NON PROVA I NOSTRI CERCHI?  
I NOSTRI CLIENTI NE SONO ENTUSIASMI.

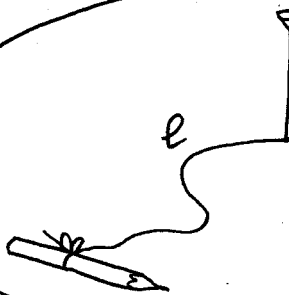


... UN CERCHIO E' DUNQUE L'INSIEME DEI PUNTI POSTI AD UNA DISTANZA  $\ell$  DA UN PUNTO FISSO.

DICE CHE IL PERIMETRO E'  $2\pi\ell$ , E L'AREA  $\pi\ell^2$ . NE PRENDO NOTA.



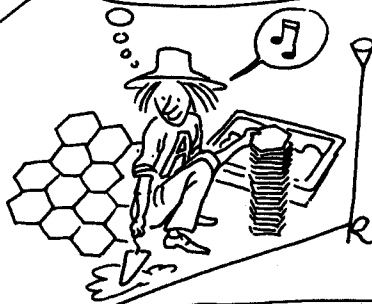
A SUA DISPOSIZIONE



PER MISURARE UN'AREA, USATE LA PAVIMENTAZIONE A PIASTRELLE EUCLIDE. PER UN PERIMETRO, LA RETE METALLICA EUCLIDE E' IL MIGLIOR MATERIALE IN COMMERCIO. I CLIENTI SODDISFATTI SONO LA NOSTRA PUBBLICITA' MIGLIORE.

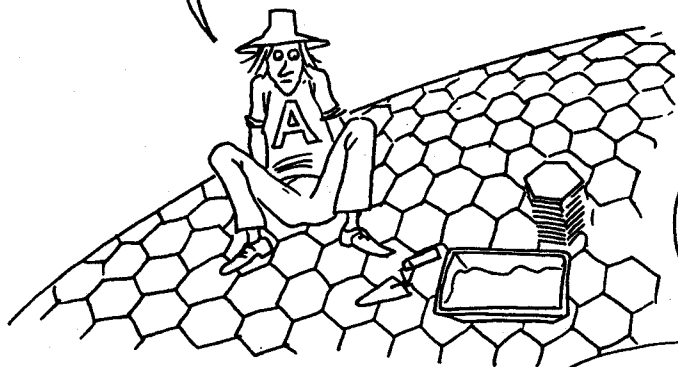


AREA  $\pi l^2$



COMINCIAMO BENE!  
MI AVANZANO DELLE  
PIASTRELLE!

QUI TUTTO E' ORDINE  
E BELLEZZA, LUSO, QUIETE  
E VOLUTTA'.



MISURERO' IL PERIMETRO  
CON LA LORO RETE  
METALLICA.

PERIMETRO:  $2\pi l$



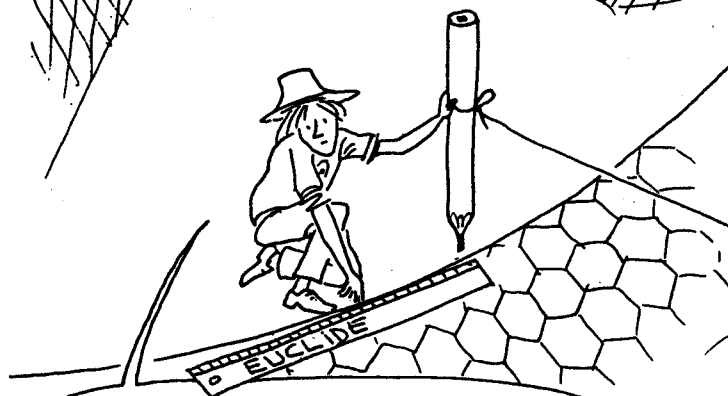
MA GUARDA, ORA HO PIÙ DEL 36%  
DI RETE DI TROPPO, E IL 19% DI PAVI-  
MENTAZIONE IN PIÙ! E IL CERCHIO CHE  
HO TRACCIATO È DIVENTATO...  
UNA RETTA!

STO SOGNANDO,  
O CHE ALTRO?

PER LO SPAZIO!  
EPPURE QUESTA RIGA  
È PROPRIO RETTA!

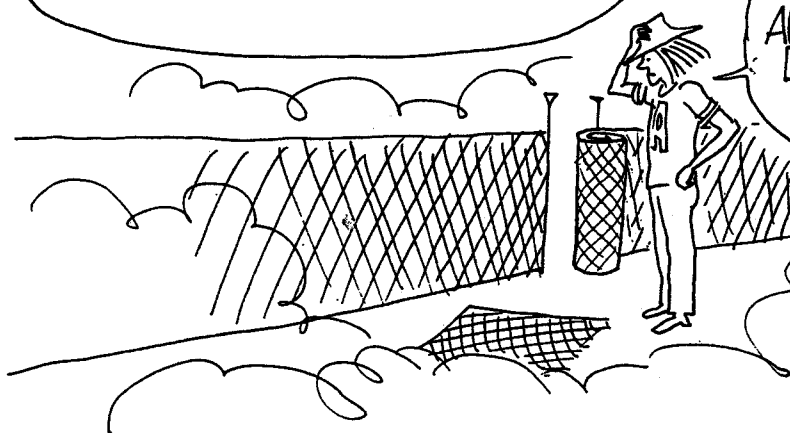


ANSELMO FA AUMENTARE ANCORA  
IL RAGGIO  $\ell$ , E QUESTA VOLTA...

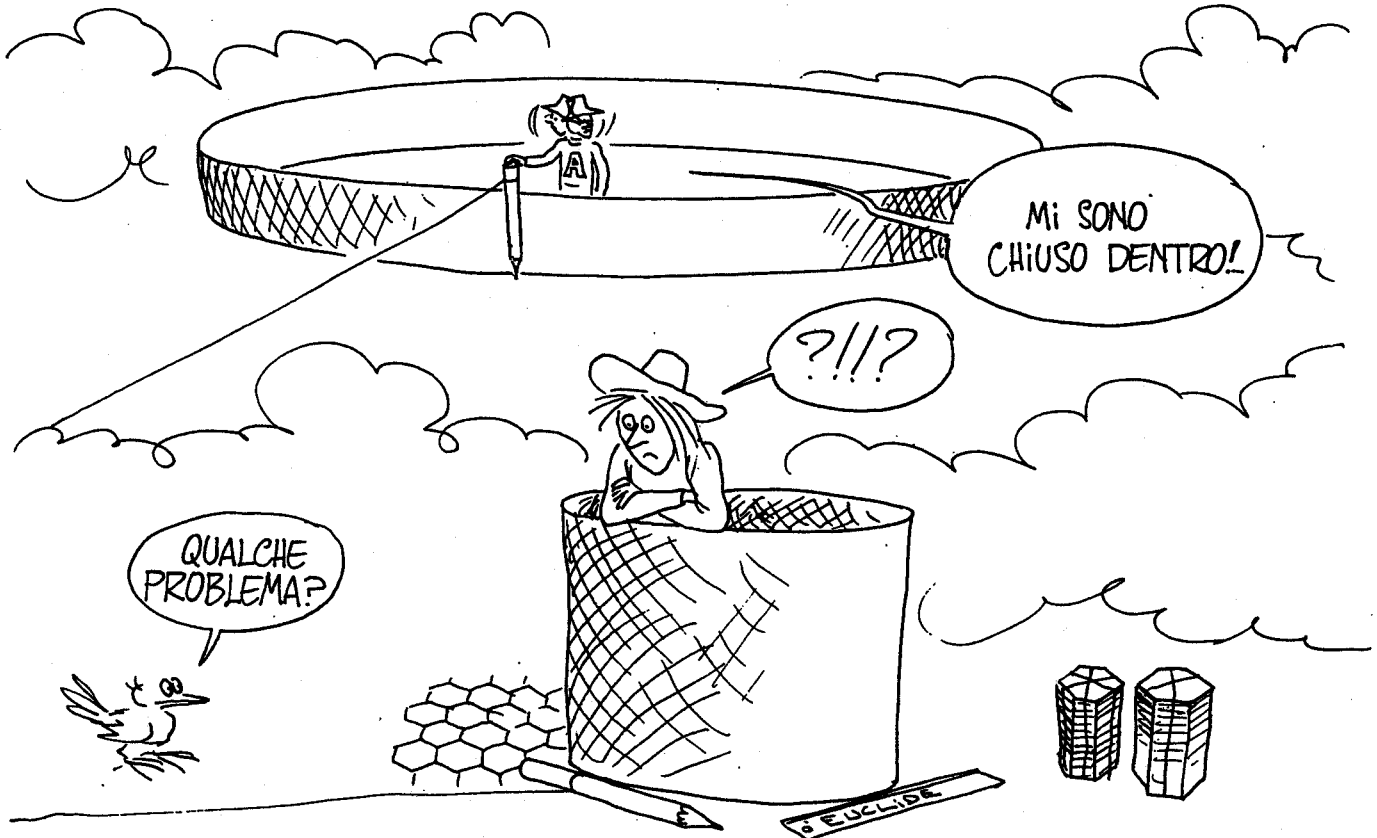


LA CURVATURA DEL MIO CERCHIO  
È PASSATA DALL'ALTRA PARTE!

E ORA, QUANDO FACCI  
AUMENTARE  $\ell$ , IL PERIMETRO  
DIMINUISCE! È ROBA  
DA MATTI!



DOPO UN'ULTIMA PROVA DI PAVIMENTAZIONE:



## CHE COSA E' ACCADUTO?

PER SAPERLO, DISPERDIAMO LE NUVOLE:



ANSELMO SI RENDE CONTO DI TROVARSI SU UNA SFERA,  
SULLA QUALE HA APPLICATO LE LEGGI DELLA  
GEOMETRIA DEI PIANI.

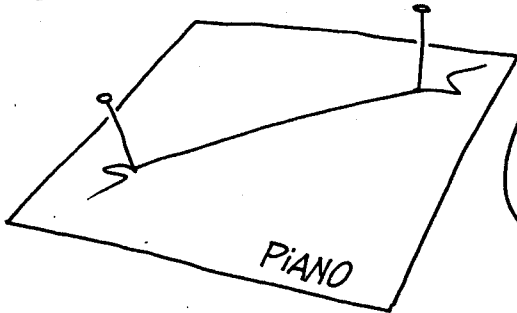


MA COME HA FATTO ANSELMO A TRACCIARE DELLE RETTE SU UNA SFERA?  
NON HA SENSO!

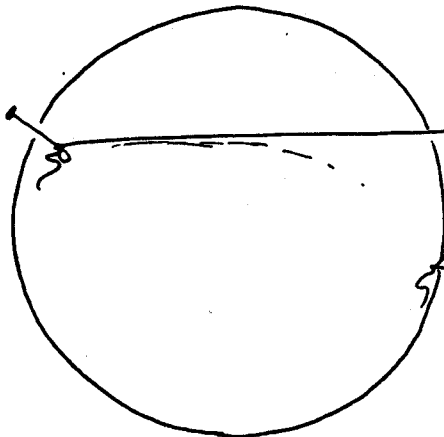
QUESTA DEVE ESSERE UNA TRAPPOLA!



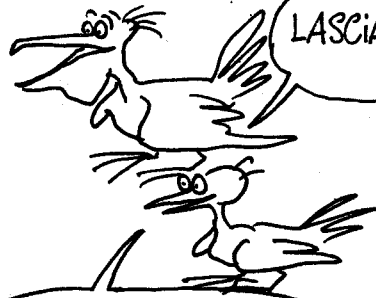
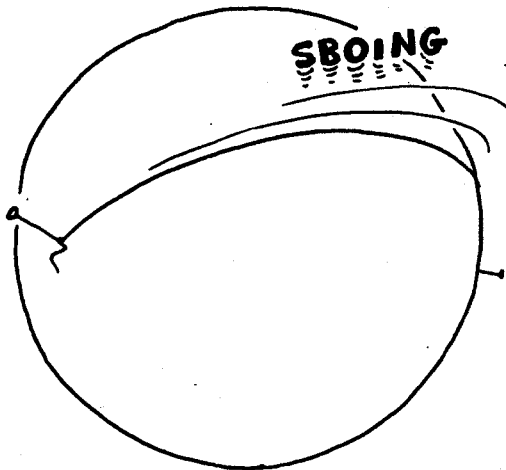
MIO CARO, COS'E' CHE CHIAMO UNA RETTA? SE E' LA DISTANZA PIU' BREVE TRA DUE PUNTI, ALLORA ESISTONO RETTE ANCHE SU UNA SFERA.



LA NOZIONE DI GEODETICA (OVERO LINEA PIU' BREVE) NON RIGUARDA SOLO I PIANI.



TENDETE UN ELASTICO TRA DUE PUNTI DI UNA SFERA.




LASCIATELO!

AVETE OTTENUTO UNA GEODETICA




CHE DIAVOLO MI RACCONTI? NON E' MICA UNA RETTA, QUESTA ROBA!



ALLORA TIENI QUESTA RIGA E VERIFICA TU STESSO!



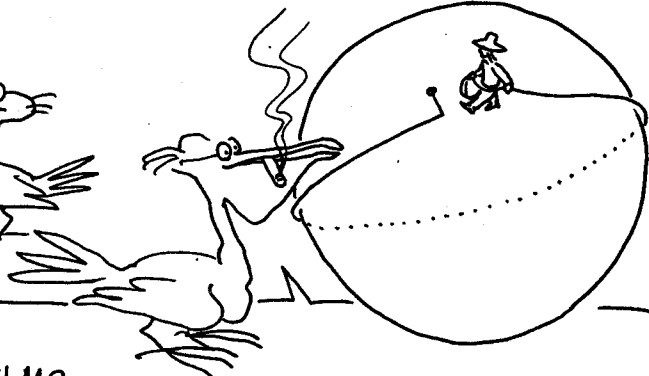
LA CHIAMI RIGA QUESTA?




E' UNA RIGA PER LE SUPERFICI. SUL PIANO, FUNZIONA BENISSIMO, GUARDA. PERMETTE DI NON SBANDARE NE' A DESTRA, NE' A SINISTRA.



E' PROPRIO UNA STRANA RIGA.



FATO STA CHE QUANDO ANSELMO TRACCIA LA SUA GEODETICA, QUESTA SI RICHIUDE SU SE STESSA. ALLORA SU UNA SFERA LE GEODETICHE NON SONO ALTRO CHE CERCHI?



TUTE LE LINEE PIU' BREVI TRA DUE PUNTI SU DI UNA SFERA SONO PARTI DI CURVE GEODETICHE CHIUSE, CIOE' CERCHI TRACCIATI SULLA SFERA. MA NON CERCHI QUALUNQUE!



!???

MA CHE DIAVOLO E' QUESTA STORIA?  
STAI GIOCANDO CON LE PAROLE. VUOI DIRE  
CHE SU UNA SFERA CI SONO DIVERSI TIPI DI  
CERCHI?

SANTO CIELO, CREDEVO DI CAPIRE, ED ECCO  
INVECE CHE NON CI CAPISCO PROPRIO NIENTE...

UN CERCHIO E' L'INSIEME DEI PUNTI CHE SI  
TROVANO AD UNA DISTANZA COSTANTE  $\ell$  DA UN  
PUNTO FISSO N, CHE CHIAMEREMO POLO

MMM...

ECCO IL COMPLESSO  
DI CERCHI DI UNO  
STESSO POLO N,  
CHE CHIAMEREMO  
PARALLELI.

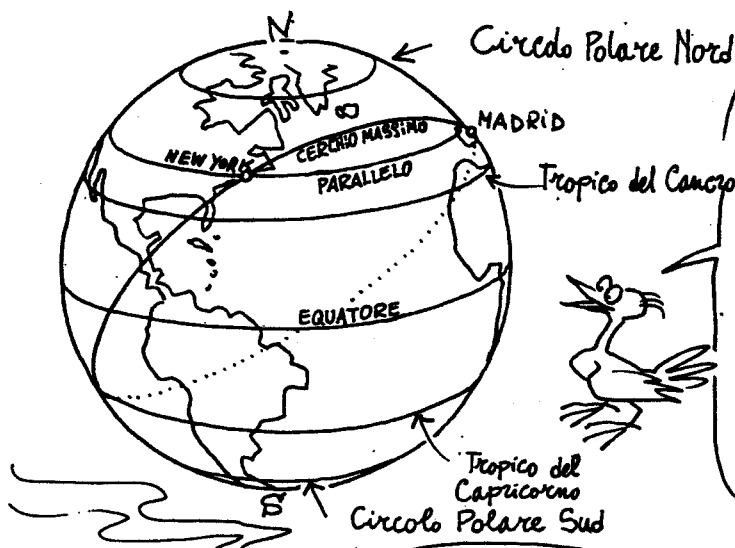
QUESTI CERCHI  
PARALLELI CO-  
STITUISCONO AN-  
CHE I PUNTI A UGUALE  
DISTANZA  $\ell'$  DAL PUNTO S  
"POLO SUD", ANTIPODE DEL  
"POLO NORD" N.

TRA QUESTI VE N'E' UNO MAGGIORE  
DEGLI ALTRI, CHE FA DA EQUATORE  
DELLA SFERA.

ORA CAPISCO PERCHE' UN CER-  
CHIO SU UNA SFERA, HA  
DUE CENTRI N E S!

CHIAMEREMO QUESTI "EQUATORI" CERCHI  
MASSIMI DELLA SFERA: SONO APPUNTO LE  
SUE GEODETICHE.

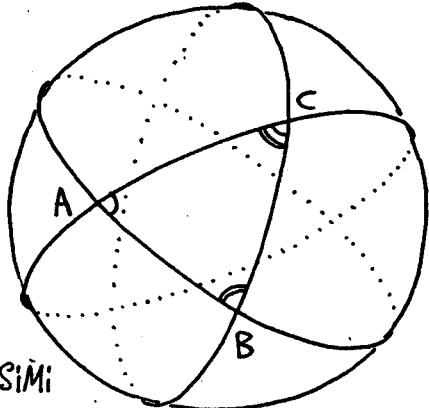
E' LA PRIMA VOLTA CHE VEDO UNA  
GEODETICA DA VICINO... MOLTO IMPRESSIONANTE!



SUL PIANETA TERRA i CIRCOLI POLARI, i TROPICI, SONO PARALLELI. MADRID E NEW YORK SI TROVANO SULLO STESSO PARALLELO. MA E' BEN NOTO CHE QUESTO ARCO DI PARALLELO CHE LE UNISCE NON E' LA LINEA PIU' BREVE, MENTRE LO E' IL CERCHIO MASSIMO!



AI MIEI TEMPI TUTTO QUESTO SI CHIAMAVA ORTODROMIA.



UN TRIANGOLO SARA' FORMATO DA TRE ARCHI INEVITABILMENTE TRATTI DA TRE CERCHI MASSIMI:

SI PUO' FORMARE QUESTI TRIANGOLI CON L'AIUTO DI NASTRO ADESIVO O DI ELASTICI E MISURARNE GLI ANGOLI PONENDO UN GONIOMETRO SU OGNI VERTICE DELLA SUPERFICIE DELLA SFERA.

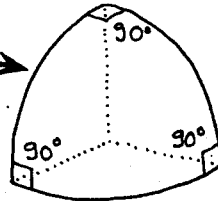
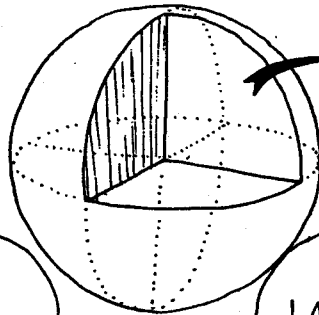
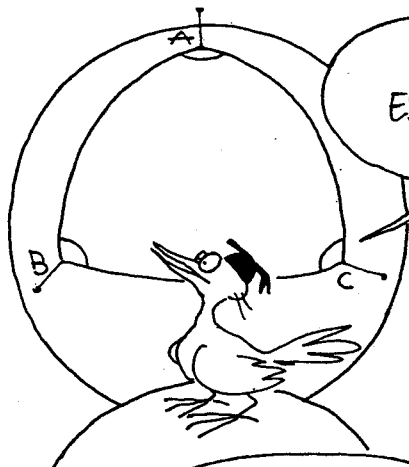
E QUANTO MISURA ALLORA LA SOMMA  $A+B+C$ ?

DIPENDE DALLA SUPERFICIE DEL TRIANGOLO. TRA  $180^\circ$  E  $900^\circ$ !

VISTA DA VICINO, LA SUPERFICIE DELLA SFERA E' POCO DIFFERENTE DA UN PIANO. IN QUESTO CASO, DUNQUE, LA SOMMA...

... E' MOLTO PIU' VICINA A  $180^\circ$

ECCO UN TRIANGOLO CHE SI PUO' COSTRUIRE, PER ESEMPIO, CON TRE PEZZETTI DI ELASTICO.



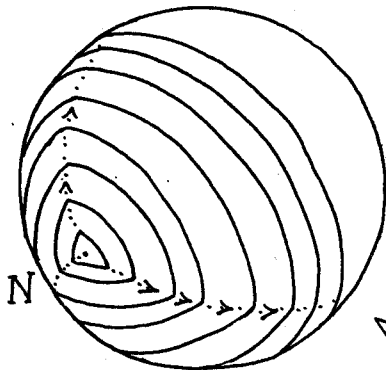
UN TRIANGOLO CHE RISULTA TRIRETTANGOLO ED EQUILATERO

UN TRIANGOLO UN PO' PARTICOLARE, POICHE' OCCUPA UN OTTAVO DELLA SUPERFICIE DELLA SFERA.

E LA SOMMA DEGLI ANGOLI  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$  E'  $270^\circ$

E NON HAI VISTO ANCORA TUTTO!

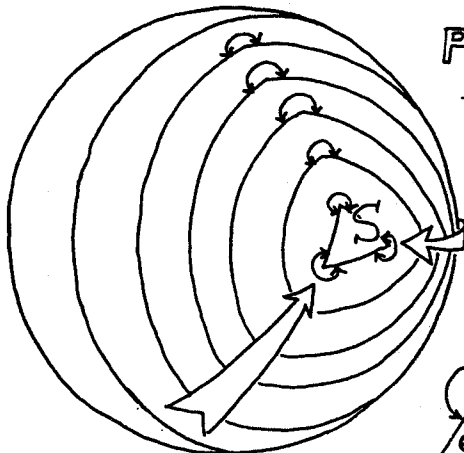
!!?!



IMMAGINIAMO ORA UN TRIANGOLO, SEMPRE COSTRUITO CON QUEGLI ELASTICI, DI CUI PROGRESSIVAMENTE ALLONTANIAMO I VERTICI. GLI ANGOLI IN QUESTI VERTICI ANDRANNO CRESCENDO, COME LA LORO SOMMA.

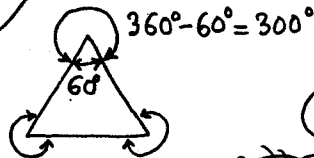
$180^\circ!$

INFINE, POSSIAMO FARE IN MODO CHE I TRE VERTICI SI ISCRIVANO SU UN EQUATORE DELLA SFERA. GLI ANGOLI  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  E  $\hat{C}$  SONO ALLORA PIATTI, MISURANO  $180^\circ$  E LA LORO SOMMA RAGGIUNGE  $540^\circ$ !!!!



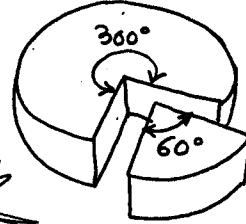
PROSEGUENDO CON L'ALLONTANAMENTO DEI VERTICI SINO ALL'ALTRO EMISFERO, IL TRIANGOLO GIUNGERA' A CONVERGERE VERSO IL PUNTO S, ANTIPODE DI N. SE SI CONSERVA AGLI ANGOLI DEI VERTICI LA LORO DEFINIZIONE DI PARTENZA, AVREMO ALLORA CHE CIASCUNO DI ESSI MISURERA' PIU' DI 180°! ANZI PER ESSERE PRECISI, CIASCUNO MISURERA'  $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$

TOTALE:  $300 \times 3 = 900^\circ$



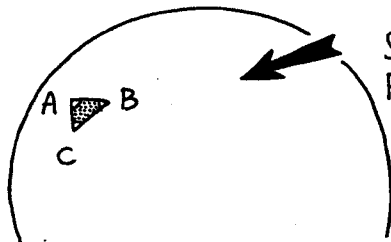
LA CIRCONFERENZA COMPLETA MISURA  $360^\circ$

COSI', SULLA SFERA, LA SOMMA DEGLI ANGOLI DI UN TRIANGOLO PUO' ANDARE DA  $180^\circ$  A  $900^\circ$ !



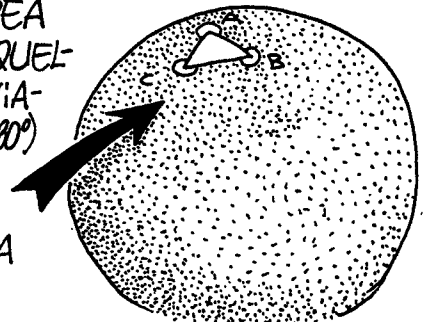
SECONDO IL TEOREMA DI GAUSS, LA SOMMA DEGLI ANGOLI DI UN TRIANGOLO COSTRUITO SU UNA SFERA MISURA:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \left(1 + \frac{A}{3,1416R^2}\right)$  GRADI, DOVE R E' IL RAGGIO DELLA SFERA E A L'AREA DEL TRIANGOLO.



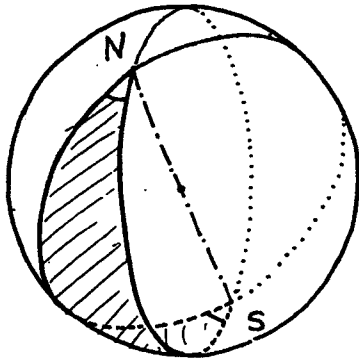
SE IL TRIANGOLO HA UN'AREA PICCOLA (IN RAPPORTO A QUELLA DELLA SFERA), RITROVIAMO INVECE EUCLIDE ( $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ )

SE, INVECE, HA QUASI LA SUPERFICIE DELLA SFERA ( $4 \times 3,1416 \times R^2$ ), RITORNIAMO VERSO I  $900^\circ$

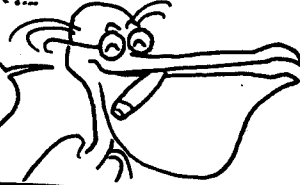


PRENDERE NOTA:

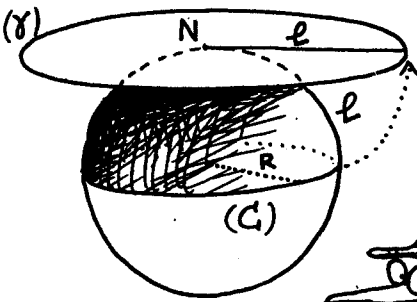
Due punti di una sfera possono essere uniti da due Archi Geodetici che formano un Cerchio Massimo. Ma se questi punti N e S sono agli antipodi, allora vi passa un'infinità di GEODETICHE! Due di queste "rette della sfera" determinano un BIANCOLO, i cui due lati e due angoli sono uguali. La somma degli angoli ha allora una misura... qualsiasi!



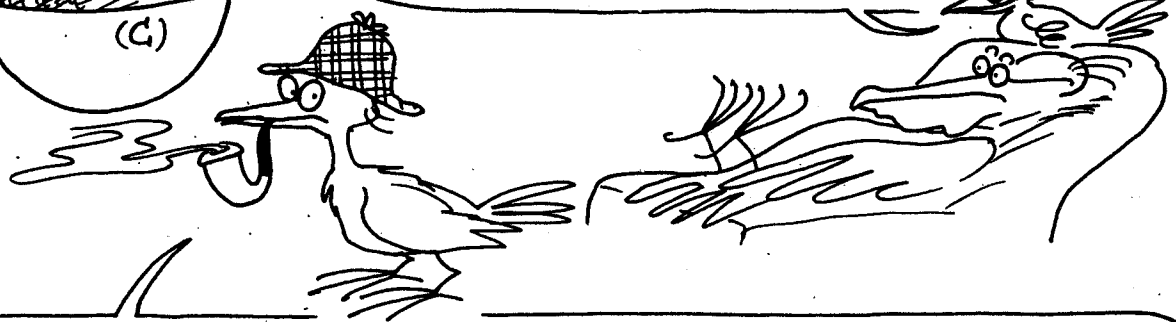
UNA NOTA PROPRIO FIACCA...



La Diverzione



VEDIAMO ORA DI CAPIRE PERCHE' PRIMA AD ANSELMO AVANZAVANO PIASTRELLE E RETE METALLICA.



(C) E' IL CERCHIO CHE TRACCIA E (8) IL CERCHIO CHE CREDE DI TRACCIARE. PER CALCOLARE L'AREA SI SERVE DELLA FORMULA DELLA GEOMETRIA PIANA  $\pi r^2$  ( $\pi = 3,1416$ ). L'AREA REALE E' META' DI QUELLA DELLA SFERA:  $2\pi R^2$ , E E' UN QUARTO DEL PERIMETRO, CIOE'  $\frac{1}{2}\pi R$ , E IL RAPPORTO TRA QUESTE DUE AREE E'  $\pi^3/8 = 1,233$ . IL RAPPORTO DEI PERIMETRI E'  $2\pi r/2\pi R$ , OSSIA  $\pi/2 = 1,57$ . ORA, SE SIETE SCETTICI, CERCATE DI AVVOLGERE UNA SFERA CON UN PIANO!

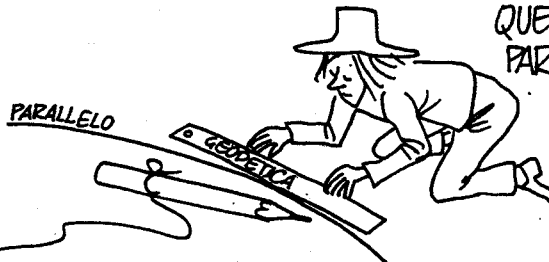
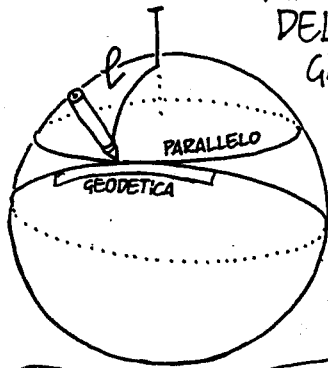


MACCHE', CI SONO SEMPRE DELLE PIEGHE!

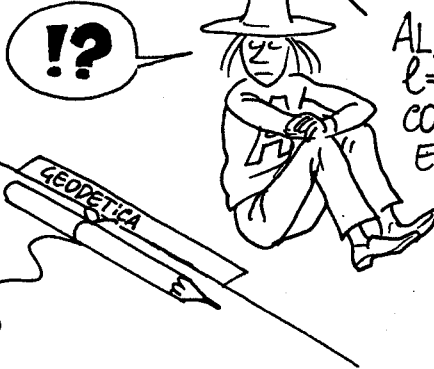
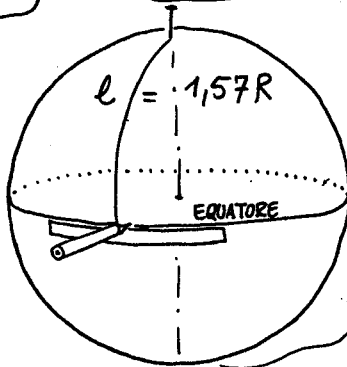
UN PIANO! CHE PIANO?!



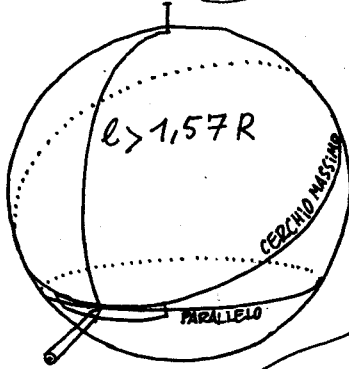
FINCHE' ANSELMO NON HA RAGGIUNTO L'EQUATORE DELLA SFERA, LA CONCAVITA' DEL SUO CERCHIO GLI SEMBRA NORMALE.



QUESTO CERCHIO E' UN PARALLELO, MENTRE LA SUA RIGA SEGUE UNA GEODETICA CIOE' UN CERCHIO MASSIMO DELLA SFERA.



ALL'EQUATORE, CIOE' QUANDO  $l = \pi/2R$ , IL PARALLELO SI CONFONDE CON LA GEODETICA, E IL CERCHIO GLI APPARE UNA "RETTA"

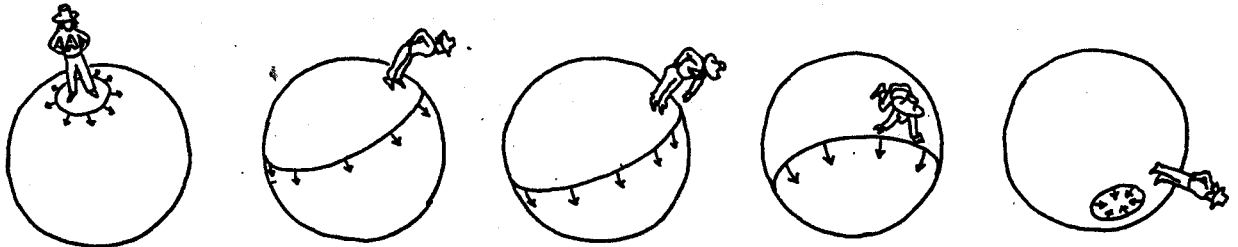


OLTRE L'EQUATORE LA CONCAVITA' DEL CERCHIO GLI SEMBRA CAPOVOLGERSI!



DOVE SONO?

QUESTA PROPRIETA' SPIEGA COME SI POSSA "ENTRARE" O "USCIRE" A VOLONTA' DA UN CERCHIO, SENZA SCAVALCARLO, QUANDO E' TRACCIATO SU UNA SFERA. OCCORRE IMMAGINARE QUESTO CERCHIO COME UN ANELLO ELASTICO CHE SI FA SCIVOLARE SU UNA PALLA DA BILIARDO!





ANSELMO CI MISE UN PO' DI TEMPO A DIGERIRE TUTTI QUESTI DATI, SCOPERTI DAL MATEMATICO GAUSS (1777-1855). POI DECISE DI PARTIRE ALLA SCOPERTA DEL MONDO DELLE SUPERFICIE.



BENE, HO TUTTO QUELLO CHE MI OCCORRE: UNA RIGA, UN CONIOMETRO, DELLA CORDA, IL MIO PALETTA. PARTIAMO...

A VOLTE LA SCIENZA PORTA AD AFFRONTARE DEI RISCHI.



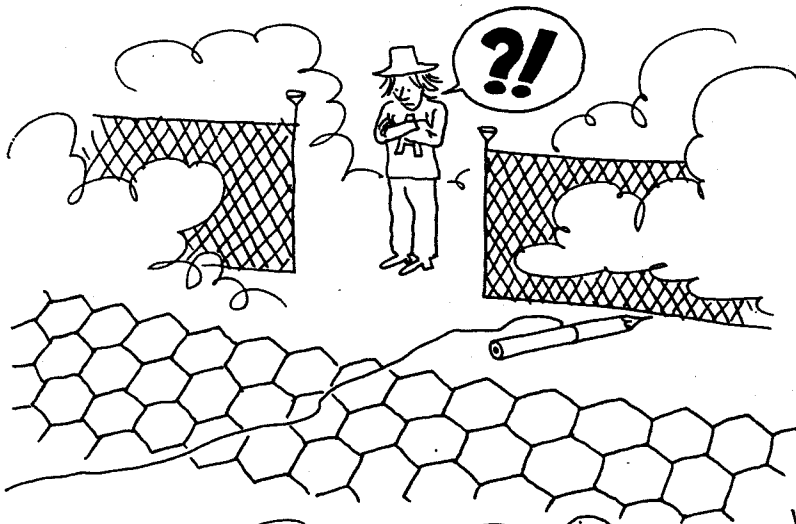
ATTERRATO SU UN NUOVO MONDO, ANSELMO SROTOLA ANCORA UNA GEODETICA; MA QUESTA VOLTA:



LA GEODETICA NON SI CHIUDE.

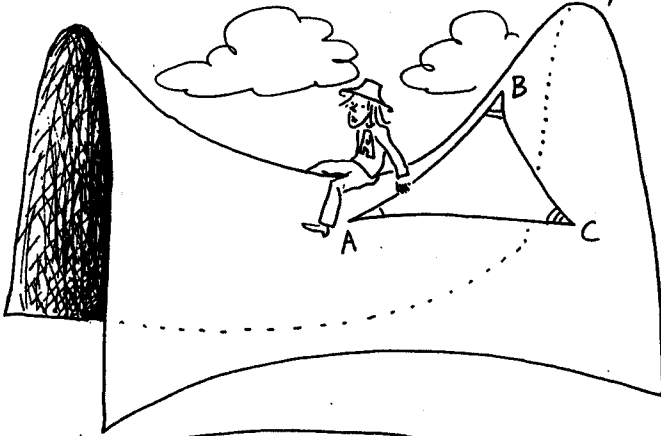


SERVENDOSI DI TRE FILI BEN TESI, ANSELMO COSTRUISCE UN TRIANGOLO, LA CUI SOMMA DEGLI ANGOLI AL VERTICE SI RIVELA, QUESTA VOLTA, INFERIORE A  $180^\circ$



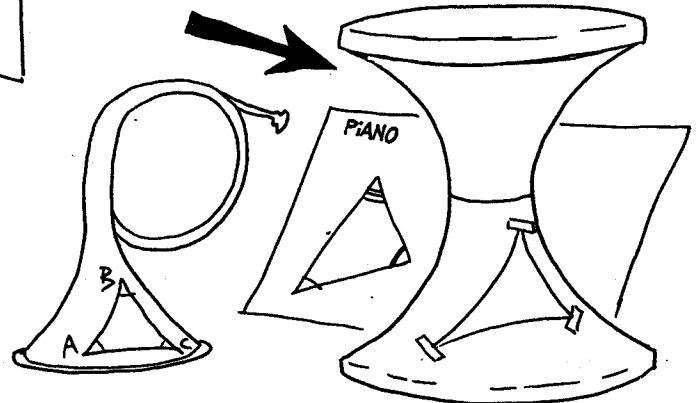
POICHE' UN CERCHIO E' SEMPRE L' INSIEME DEI PUNTI POSTI AD UNA STESSA DISTANZA E DA UN PUNTO DATO, ANSELMO CONSTATA CHE IL CERCHIO TRACCIATO SU QUESTA NUOVA SUPERFICIE HA UN PERIMETRO SUPERIORE A  $2\pi r$ , MENTRE LA SUA AREA SUPERA  $\pi r^2$ . DISSIPAMO LE NUVOLE:

LA SUPERFICIE PRESENTA, QUESTA VOLTA, LA FORMA DI UN PASSO DI MONTAGNA O DI UNA SELLA DA CAVALLO; O, PER CITARE OGGETTI DELLA VOSTRA VITA, D'OGNI GIORNO, DI UN CORNO DA CACCIA O DI QUESTO TIPO DI SGABELLO:

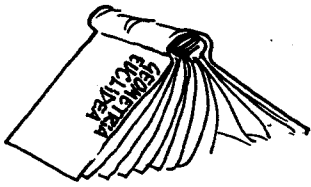


ECCO, MIO CARO, SONO A CAVALLO...

MA NO!...



PER CONOSCERE LA FINE DELLA STORIA, GIRATE LA PAGINA





# CURVATURA:

UNA SUPERFICIE CURVA E' UNA SUPERFICIE IN CUI I TEOREMI EUCLIDEI NON FUNZIONANO. LA CURVATURA PUO' ESSERE POSITIVA O NEGATIVA.

SU UNA SUPERFICIE A CURVATURA POSITIVA, LA SOMMA DEGLI ANGOLI DI UN TRIANGOLO E' SUPERIORE A  $180^\circ$ . SE SI COSTRUISCE UN CERCHIO DI RAGGIO  $l$ , LA SUA SUPERFICIE RISULTA INFERIORE A  $\pi l^2$ , E IL SUO PERIMETRO INFERIORE A  $2\pi l$ .

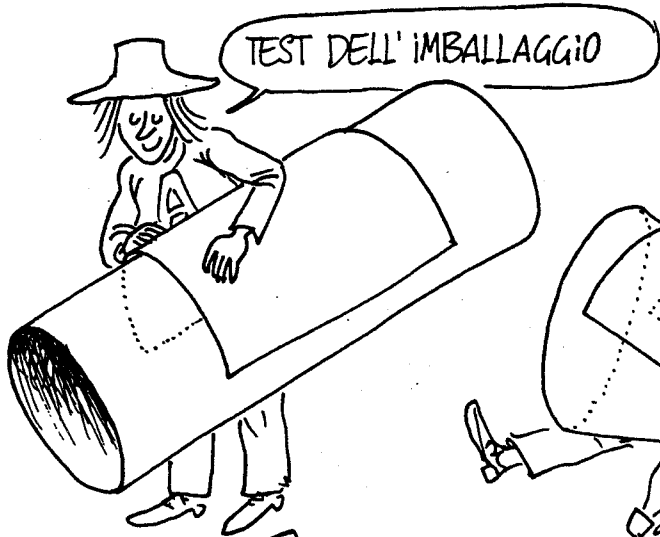
SU UNA SUPERFICIE A CURVATURA NEGATIVA, LA SOMMA DEGLI ANGOLI DI UN TRIANGOLO E' INFERIORE A  $180^\circ$ . SE SI COSTRUISCE UN CERCHIO DI RAGGIO  $l$ , LA SUA SUPERFICIE RISULTA SUPERIORE A  $\pi l^2$ , E IL SUO PERIMETRO SUPERIORE A  $2\pi l$ .

POCO PRIMA, ANSELMO AVEVA CONSTATATO, TENTANDO DI AVVOLGERE UNA SFERA, SUPERFICIE A CURVATURA POSITIVA, CON UN ELEMENTO PIANO, CHE SI FORMAVANO DELLE PIEGHE. ALLO STESSO MODO E' IMPOSSIBILE AVVOLGERE CON UN PIANO UNA SUPERFICIE A CURVATURA NEGATIVA: SI FORMANO IN QUESTO CASO DEGLI STRAPPI. QUESTO DELL'IMBALLAGGIO E' IL TEST PIU' SEMPLICE PER STABILIRE SE UNA CURVATURA E' POSITIVA O NEGATIVA.



COME SI PUO' VEDERE ALLA PAGINA PRECEDENTE, LE SUPERFICI POSSONO PRESENTARE ALCUNE ZONE A CURVATURA POSITIVA, ALTRE A CURVATURA NEGATIVA.

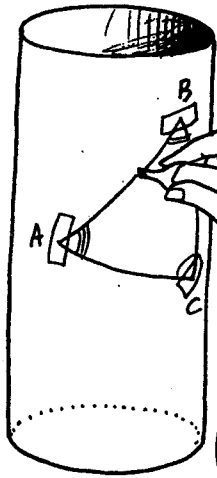




UN CILINDRO E UN CONO  
SI POSSONO RICOPRIRE  
CON UN PIANO!

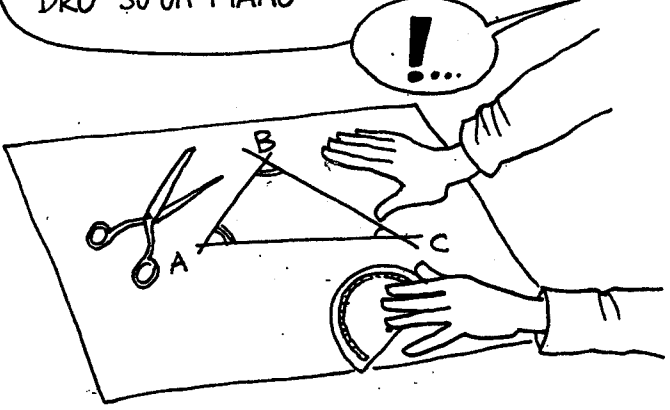


NIENTE PANICO. CON IL NASTRO  
ADESIVO, FISSO SUL CILINDRO TRE FILI  
ELASTICI, CIOE' TRE GEODETICHE...

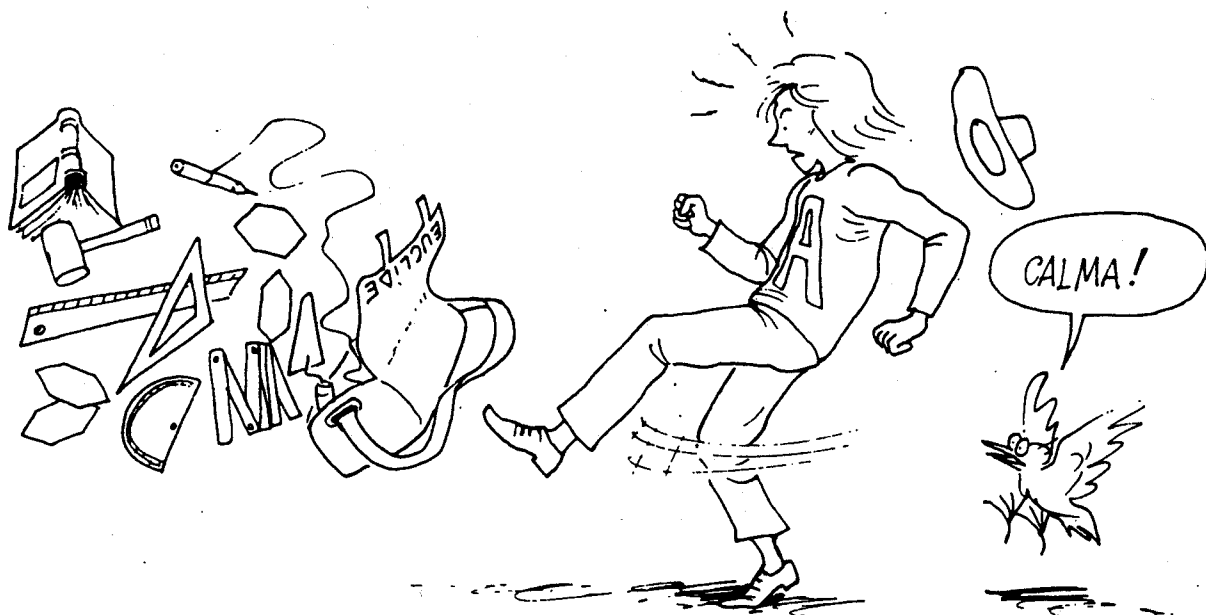


... ORA RICALCO LE  
GEODETICHE SULLA  
SUPERFICIE...

... QUINDI STENDO IL CILIN-  
DRO SU UN PIANO



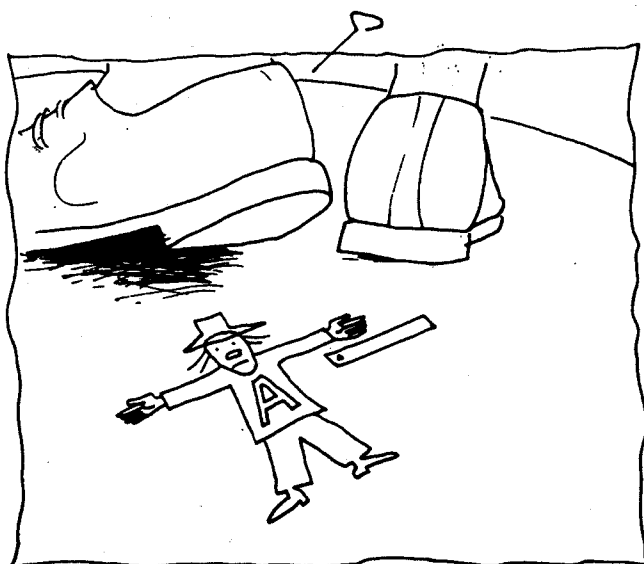
**S**ECONDO LA NOSTRA DEFINIZIONE,  
I CILINDRI E I CONI, CHE OBBEDISCO-  
NO ALLA GEOMETRIA EUCLIDEA,  
SONO  
SUPERFICI PIANE!!!



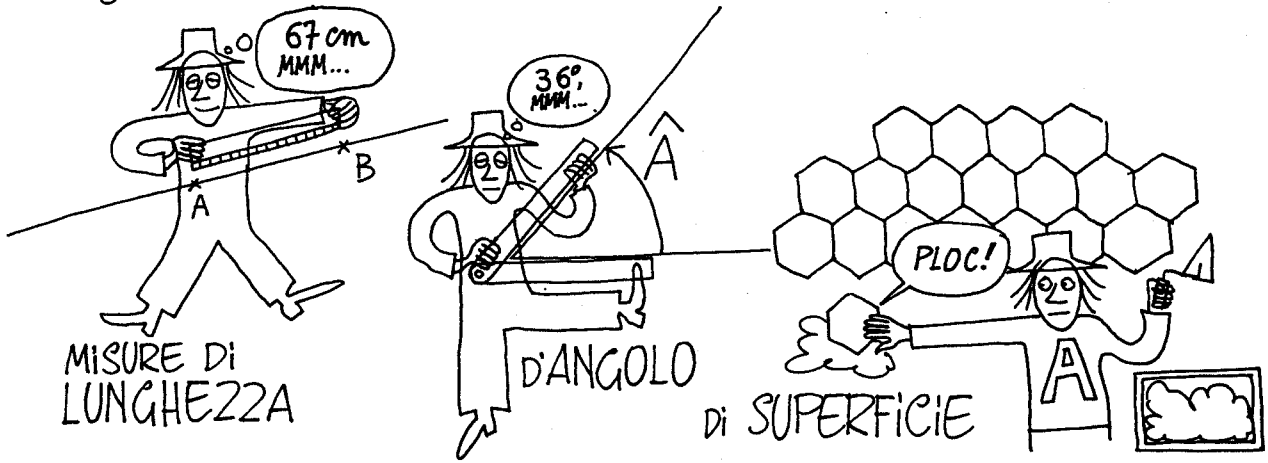
## LA NOZIONE DI SPAZIO:



POCO FA, LE NUVOLE IMPEDIVANO AD ANSELMO DI VEDERE OLTRE IL PROPRIO NASO... O QUASI. DIVERSAMENTE AVREBBE POTUTO RENDERSI CONTO DELLA CURVATURA DEL SUO SPAZIO SFERICO. C'E' UN ALTRO MODO DI IMPEDIRE AD ANSELMO DI VEDERE QUESTA CURVATURA: OVVERO, FARLO STARE SULLA SUPERFICIE, FARNE UNA PARTE ORGANICA DI QUEST'ULTIMA.



SI NOTI CHE QUESTA NUOVA SITUAZIONE NON IMPEDISCE IN ALCUN MODO LE



PUR CONFINATO NELLA SUPERFICIE, ANSELMO AVREBBE POTUTO BENISSIMO CONSTATARE LA CURVATURA, DEFINIRE IL SEGNO (POSITIVO O NEGATIVO), E PERSINO MISURARLA, SENZA PER QUESTO ESSERE IN GRADO DI VEDERLA. SE LA SOMMA DEGLI ANGOLI DI UN TRIANGOLO E'  $180^\circ$ , ALLORA QUESTA SUPERFICIE E' PIANA. SE LA SOMMA SUPERA  $180^\circ$ , LA CURVATURA E' POSITIVA, E ANSELMO PUO' CALCOLARE IL RAGGIO DI CURVATURA  $R$  SERVENDOSI DELLA FORMULA:  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \left(1 + \frac{A}{3,14R^2}\right)$  GRADI,

DOVE  $A$  E' L'AREA DEL TRIANGOLO.

SE LA SOMMA E' INFERIORE A  $180^\circ$ , SI PUO' DEFINIRNE UN RAGGIO DI CURVATURA  $R$ , DATO DA:  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \left(1 - \frac{A}{3,14R^2}\right)$  GRADI,

MA QUI NON STIAMO PIU' NELLA FISICA TRADIZIONALE.

SI NOTI CHE UN PIANO PUO' ESSERE ASSIMILATO A UNA SUPERFICIE CON UN RAGGIO DI CURVATURA  $R$  INFINITO.

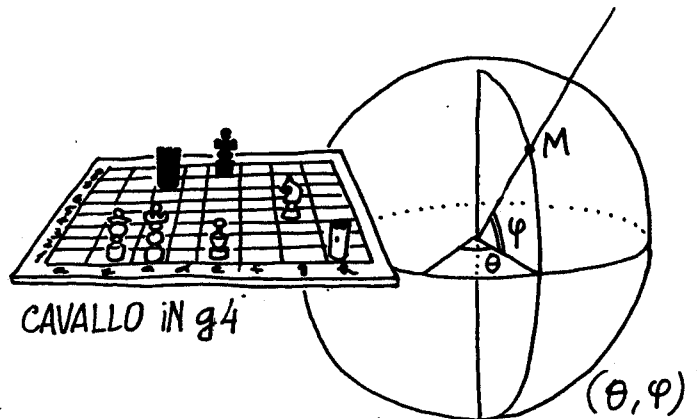
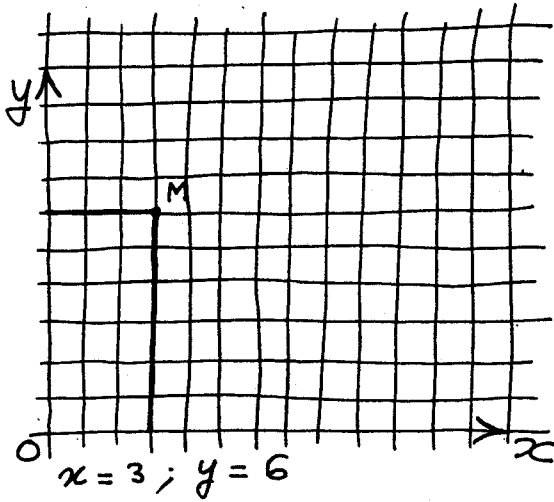
IN QUESTO CASO RITROVEREMO TUTTI I TEOREMI DI EUCLIDE.



# IL CONCETTO DI DIMENSIONE

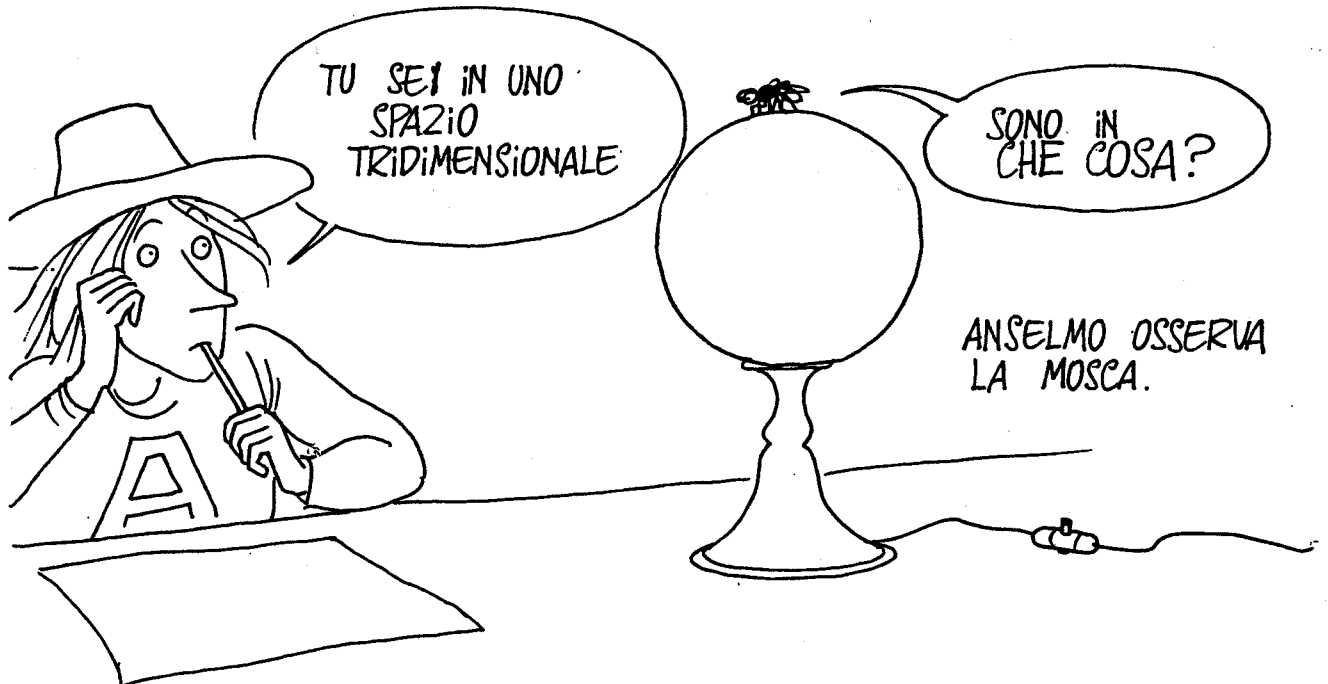
IL NUMERO DI DIMENSIONI E' SEMPLICEMENTE IL NUMERO DI QUANTITA' DI COORDINATE, NECESSARIE PER DEFINIRE UN PUNTO IN UN QUALSIASI SPAZIO.

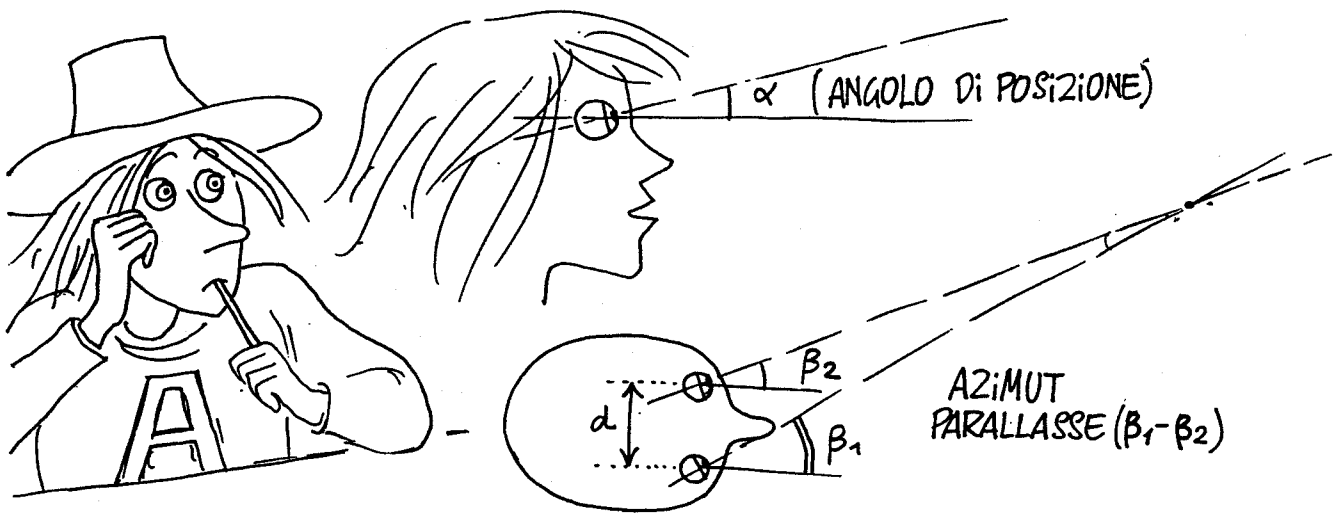
LE SUPERFICI SONO RAPPRESENTAZIONI DI SPAZI A DUE DIMENSIONI. LE QUANTITA' PER DEFINIRLE POSSONO ESSERE LUNGHEZZE, NUMERI, ANGOLI...



LONGITUDINE, LATITUDINE

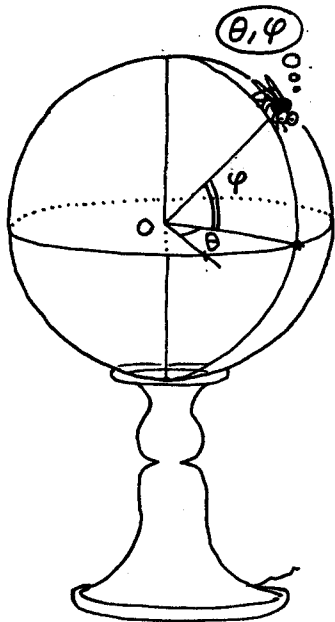
SI USA DIRE CHE IL NOSTRO SPAZIO, SE SI ESCLUDE IL TEMPO, HA TRE DIMENSIONI.





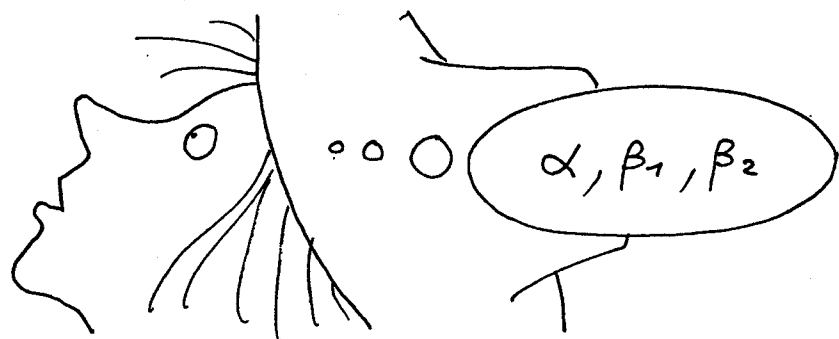
ANSELMO INDIVIDUA GLI OGGETTI IN RAPPORTO AL PROPRIO CORPO, ALLA PROPRIA SCATOLA CRANICA. LA POSIZIONE DI UN OGGETTO E' CONOSCIUTA ESATTAMENTE CON L'AUSILIO DI TRE ANGOLI: QUELLO DI POSIZIONE E QUELLI DI FASATURA AZIMUTALE DEI SUOI DUE OCCHI:  $\beta_1$  E  $\beta_2$ . LA DIFFERENZA ANGOLARE  $\beta_1 - \beta_2$  SI CHIAMA PARALLASSE. NEL CERVELLO DI ANSELMO SI SVOLGE UN'OPERAZIONE DI DECODIFICA CHE TRASFORMA QUESTA PARALLASSE IN DISTANZA.

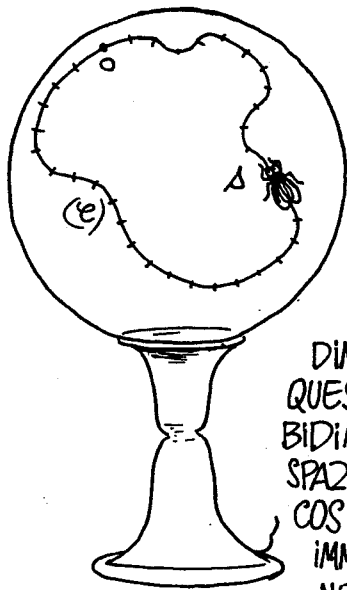
## L'IMMERSIONE:



MA LA MOSCA PUO' ANCHE MUOVERSI SUL GLOBO SFERICO DELLA LAMPADA: IN QUESTO SPAZIO BIDIMENSIONALE LA SUA POSIZIONE PUO' ESSERE INDIVIDUATA GRAZIE A DUE ANGOLI  $\theta$  E  $\varphi$  (LONGITUDINE E LATITUDINE)

DIREMO CHE QUESTO SPAZIO BIDIMENSIONALE E' IMMERSO NEL NOSTRO SPAZIO TRIDIMENSIONALE.



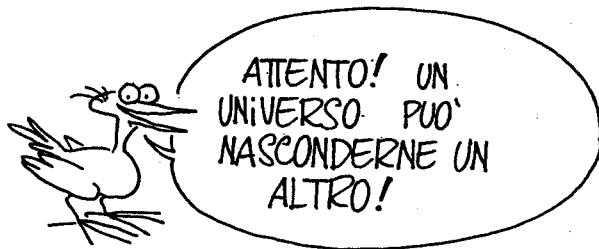


SUPPONIAMO CHE LA MOSCA SEGUA UNA CURVA ( $r$ ) TRACCIATA SULLA SFERA; SE NE POTRA' STABILIRE LA POSIZIONE CON UNA SOLA COORDINATA (LA SUA DISTANZA  $s$  DA UN PUNTO DI PARTENZA, CALCOLATA ALGEBRICAMENTE).

UNA CURVATURA E' UN'IMMAGINE DI UNO SPAZIO A UNA DIMENSIONE.

QUESTO SPAZIO UNIDIMENSIONALE E' IMMERSO IN UNO SPAZIO BIDIMENSIONALE (SFERA), A SUA VOLTA IMMERSO IN UNO SPAZIO TRIDIMENSIONALE.

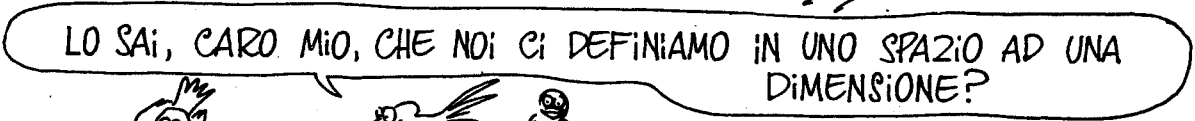
COSI' LO SPAZIO IN CUI CI MUOVIAMO POTREBBE ESSERE IMMERSO IN UNO SPAZIO DI DIMENSIONE SUPERIORE SENZA CHE NOI CE NE ACCORGIAMO.



ATTENTO! UN UNIVERSO PUO' NASCONDERNE UN ALTRO!



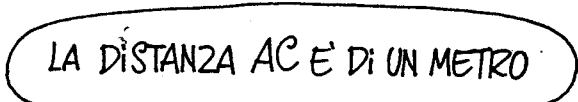
AH, NIENTE METAFISICA, PER PIACERE!



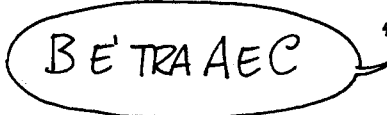
LO SAI, CARO MIO, CHE NOI CI DEFINIAMO IN UNO SPAZIO AD UNA DIMENSIONE?



OH, ACCIDENTI, GLI SPAZI UNIDIREZIONALI PROPRIO NON LI SOPPORTO!



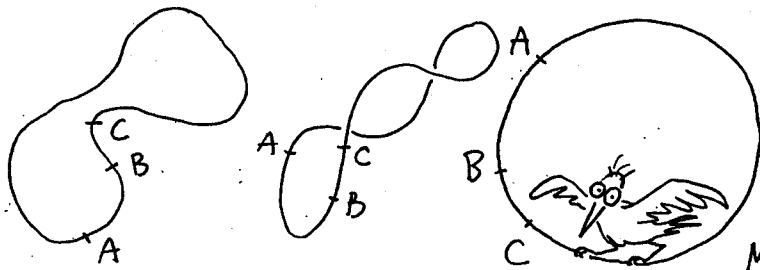
LA DISTANZA AC E' DI UN METRO



B E' TRA A E C



QUESTO SUGGERISCE CHE CERTE PROPRIETA' POSSONO ESSERE INDIPENDENTI DAL MODO IN CUI SI EFFETTUA L'IMMERSIONE. ECCO MODI DIVERSI DI IMMERSIONE DI UNA CURVA



CHIUSA NELLO SPAZIO NORMALE. QUESTA CHIUSURA E' UNA PROPRIETA' INDIPENDENTE DALL'IMMERSIONE.

MA CI SIAMO BEN GUARDATI DAL DISTENDERE O DAL CONTRARRE LA CORDA, PER NON MODIFICARE LE LUNGHEZZE TRA DUE PUNTI SUCCESSIVI. ORA IMMERGIAMO DELLE SUPERFICI NELLO SPAZIO ORDINARIO A TRE DIMENSIONI.

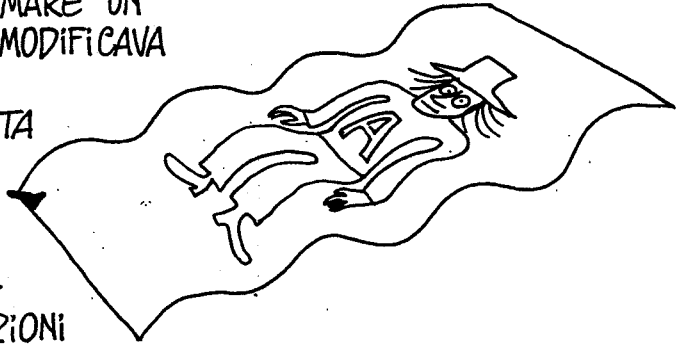


SE IMMERGIAMO UN PIANO NELLO SPAZIO ORDINARIO A TRE DIMENSIONI, POSSIAMO SPOSTARLO, FARLO RUOTARE, SENZA MODIFICARE LA SUA GEOMETRIA.



**A**BBIAMO VISTO CHE IL FATTO DI DEFORMARE UN PIANO, UN CILINDRO AD ESEMPIO, NON MODIFICAVA NE' LE GEODETICHE, NE' GLI ANGOLI.

IN QUEST'OTTICA, UNA LAMIERA ONDULATA HA SEMPRE UNA GEOMETRIA PIANA, EUCLIDEA. UN ABITANTE DI QUESTO TIPO DI SPAZIO BIDIMENSIONALE, EUCLIDEO, NON AVREBBE ALCUNA PERCEZIONE DELLE TRASLAZIONI, ROTAZIONI O ONDULAZIONI, CHE NON SAREBBERO ALTRO CHE VARIAZIONI DEL MODO DI IMMERSIONE NELLO SPAZIO TRIDIMENSIONALE.



ALLO STESSO MODO, IL NOSTRO SPAZIO TRIDIMENSIONALE POTREBBE ESSERE A SUA VOLTA IMMERSO IN UNO SPAZIO CON UN MAGGIOR NUMERO DI DIMENSIONI: SENZA CHE NOI CE NE POSSIAMO ACCORGERE.

IN EFFETTI, UNA TALE IMMERSIONE NON MODIFICHEREBBE LE GEODETICHE DEL NOSTRO SPAZIO, DUNQUE LA NOSTRA PERCEZIONE, BASATA SULLA LUCE, CHE SEQUE LE GEODETICHE DELLO SPAZIO.

SI POTREBBE COSI' IPOTIZZARE, TRA DUE PUNTI, UN PERCORSO PIU' BREVE DI QUELLO SEGUIDO DALLA LUCE.

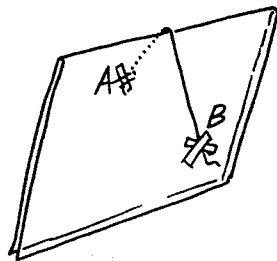
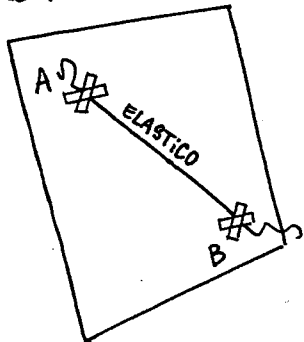
EHI, SENTI, TU...

CHE STAI FACENDO?

HO CAPITO DOVE VUOI ARRIVARE!  
STAI PER TRASCINARMI NELLA FANTASCIENZA!

ESPLORO IL FONDO DEL MIO GUSCIO!

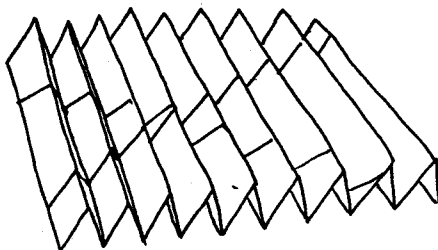
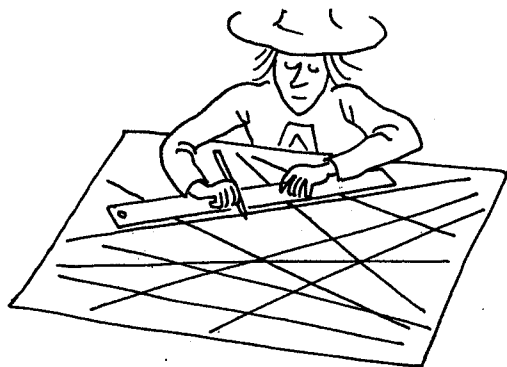
PRENDIAMO UN ELEMENTO DI UN PIANO E PIEGHIAMOLO:



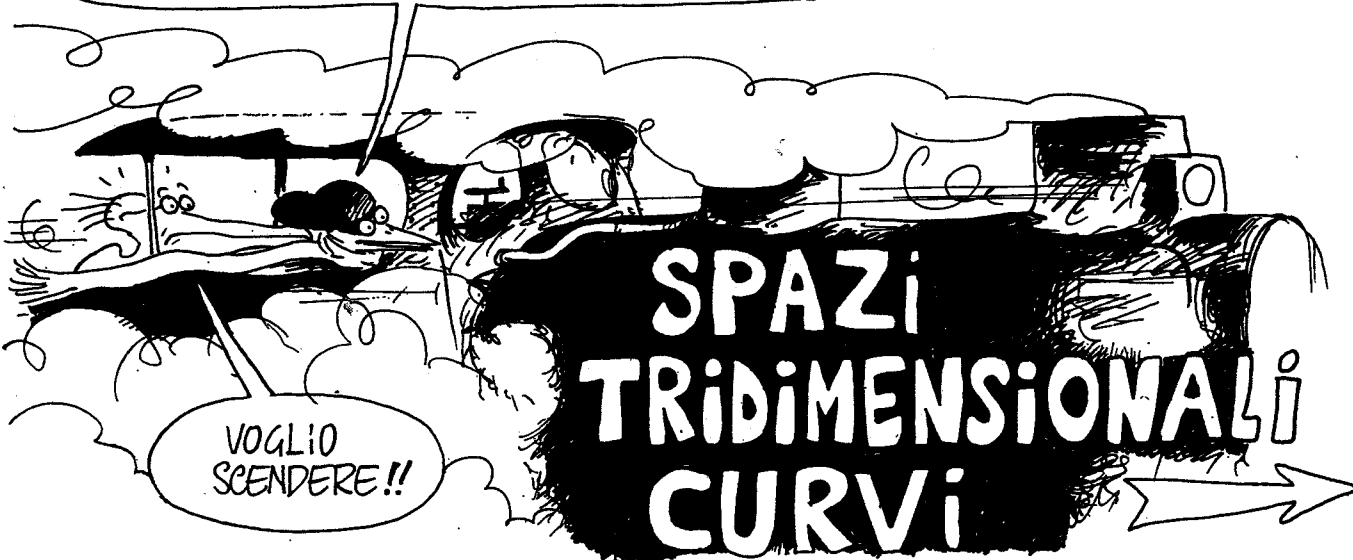
LA PIEGA NON MODIFICA ASSOLUTAMENTE IL TRACCIATO DELLA MIA GEODETICA.



SU UN FOGLIO DI CARTA, TRACCIATE CON UNA RIGA TUTTA UNA SERIE DI RETTE, DI GEODETICHE, POI SPIEGAZZATE IL FOGLIO. AVRETE SEMPRE SOTTO GLI OCCHI LE GEODETICHE DELLA SUPERFICIE, CON O SENZA PIEGHE.



QUESTA PRIMA PARTE DEL VIAGGIO NON ERA IN FONDO UN GRAN CHE: ORA PASSIAMO INVECE AGLI:





PER MISURARE LE SUPERFICI,  
C'E' QUESTA PITTURA. ESATTAMENTE  
CENTO GRAMMI PER METRO QUADRO.

PER MISURARE I VOLUMI,  
RIEMPIA QUESTA BOMBOLA DI GAS,  
POTRA' LEGGERE IL VALORE DIRETTAMENTE  
SUL FLUSSOMETRO DELLO SPAZIOTEST.

INGEGNOSO!


E SI RICORDI: SUPERFICIE DELLA  
SFERA:  $4\pi r^2$ ; VOLUME  $\frac{4}{3}\pi r^3$

D'ACCORDO

EUCLIDE &

CHE  
MESTIERE!

ANSELMO E' ATTERRATO QUESTA VOLTA SU UNO  
SPAZIO TRIDIMENSIONALE:  
SEGUIAMOLO NELLA SUA  
ESPLORAZIONE.



E' UN BUON MATERIALE.  
E QUESTE BARRE MISURANO  
ESATAMENTE UN METRO.


MA, DOPO AVER COLLOCATO UNA BUONA  
QUANTITA' DI BARRE...



ACCIDENTI! DI NUOVO  
COME PRIMA!


LA MIA GEODETICA  
SI RICHIUDE SU SE  
STESSA!

UNO SPAZIO TRIDIMENSIONALE CHIUSO?



E' LA FINE  
DI TUTTO!

ANSELMO, CHE S'ERA  
FERMATO SU UN ASTEROIDE  
PER FARE  
DECISE DI  
MISURA DEGLI  
ANGOLI.  
UNO SPUNTINO,  
PASSARE ALLA



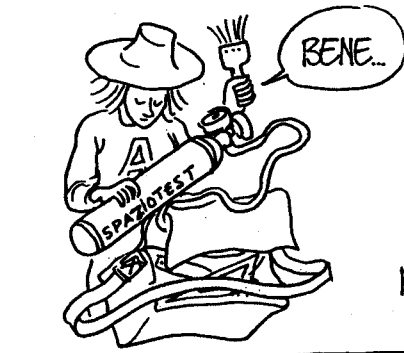
COME PRIMA,  
UTILIZZERO' TRE  
GEODETICHE  
PER COSTRUIRE  
UN TRIANGOLO

EUCLIDE & C.



?!?

LE MIE GEODETICHE SONO COSTRUITE A PUNTINO E TUTTAVIA LA SOMMA DI QUESTI TRE ANGOLI E' SUPERIORE A 180°!!...



BENE...

FSC HHHHHHHH



NE COSTUIRO' UNA E NE MISURERO' VOLUME E SUPERFICIE.

UNA SFERA DI RAGGIO  $l$  E' L' INSIEME DEI PUNTI SITUATI A UNA DISTANZA  $l$  DA UN DATO PUNTO, CHE CHIAMERO'  $N$ .

LA SUPERFICIE E' INFERIORE A  $4\pi l^2$



ED ECCO CHE IL VOLUME E' INFERIORE A  $\frac{4}{3}\pi l^3$ !



Mi SON FATTO FREGARE DI NUOVO!

ANSELMO AUMENTA ANCORA IL RAGGIO E DELLA SFERA.

FSSSCHHHH...

SPAZIOTEST

PIANO

ACCIDENTI, LA MIA SFERA E' DIVENTATA PIATTA!

E ANCORA, E POI ANCORA...

ORA LA SUA CONCAVITA' SI INVERTE!

C'E' DA PERDERCI LA TESTA!

PIANO

EUCLIDE & C.

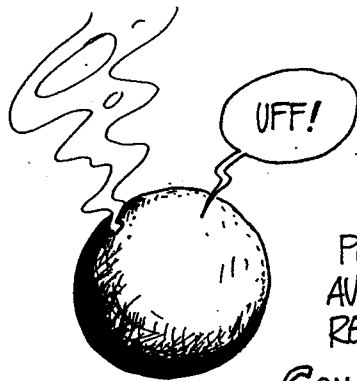
POCO PIU' TARDI:

MA... LA PARETE MI SI RICHIUDE SOPRA!

FSSCHHHHHH...

EUCLIDE

PRESTO, CHIUDERE LA BOMBOLA!



COSÌ, GONFIANDO UN COMUNISSIMO PALLONE IN UNO SPAZIO A TRE DIMENSIONI, ANSELMO C'È ANDATO A FINIRE... DENTRO!

SE NON AVESSSE CHIUSO IN TEMPO LA BOMBOLA, SAREBBE POTUTO RIMANERE SCHIACCIATO, ESATTAMENTE COME AVEVA FINITO COL RIMANERE IMPRIGIONATO NEL RECINTO, A PAGINA 13.

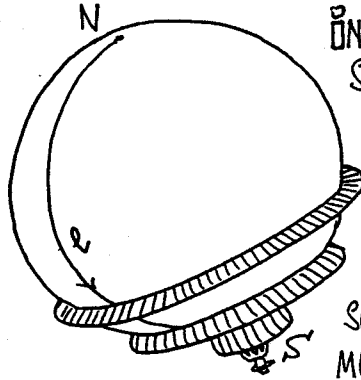
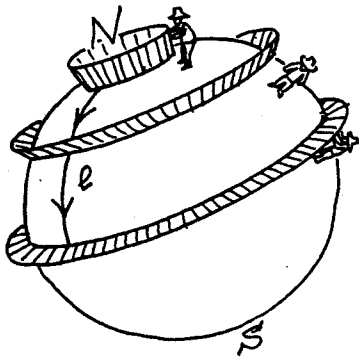
CON TUTTA LA BUONA VOLONTÀ DI QUESTO MONDO, NON È PIÙ POSSIBILE ORA VISUALIZZARE LA CURVATURA DI QUESTO SPAZIO TRIDIMENSIONALE. LE SUE GEODETICHE SI RICHIUDONO E IL SUO VOLUME NON RAPPRESENTA CHE UN NUMERO FINITO DI METRI CUBI, COSÌ COME LA SUPERFICIE DEL NOSTRO PIANETA, SUPERFICIE CHIUSA, NON OFFRE CHE UN NUMERO FINITO DI METRI QUADRI. LA SOMMA DEGLI ANGOLI DI UN TRIANGOLO DI QUESTO SPAZIO A TRE DIMENSIONI È SUPERIORE A  $180^\circ$ . PER "VEDERNE" LA CURVATURA, BISOGNEREBBE ESSERE CAPACI DI PERCEPIRE IN QUATTRO DIMENSIONI.



SI PUÒ SEMPRE Affermare CHE IL NOSTRO UNIVERSO A TRE DIMENSIONI È UN'IPERSUPERFICIE, IMMERSA IN UNO SPAZIO A QUATTRO DIMENSIONI, CHE A SUA VOLTA PUÒ ESSERE UNA IPERSUPERFICIE IMMERSA IN UNO SPAZIO A CINQUE DIMENSIONI, ECC... MA NON È MOLTO CHIC, AI GIORNI NOSTRI, SOSTENERE QUESTE COSE...







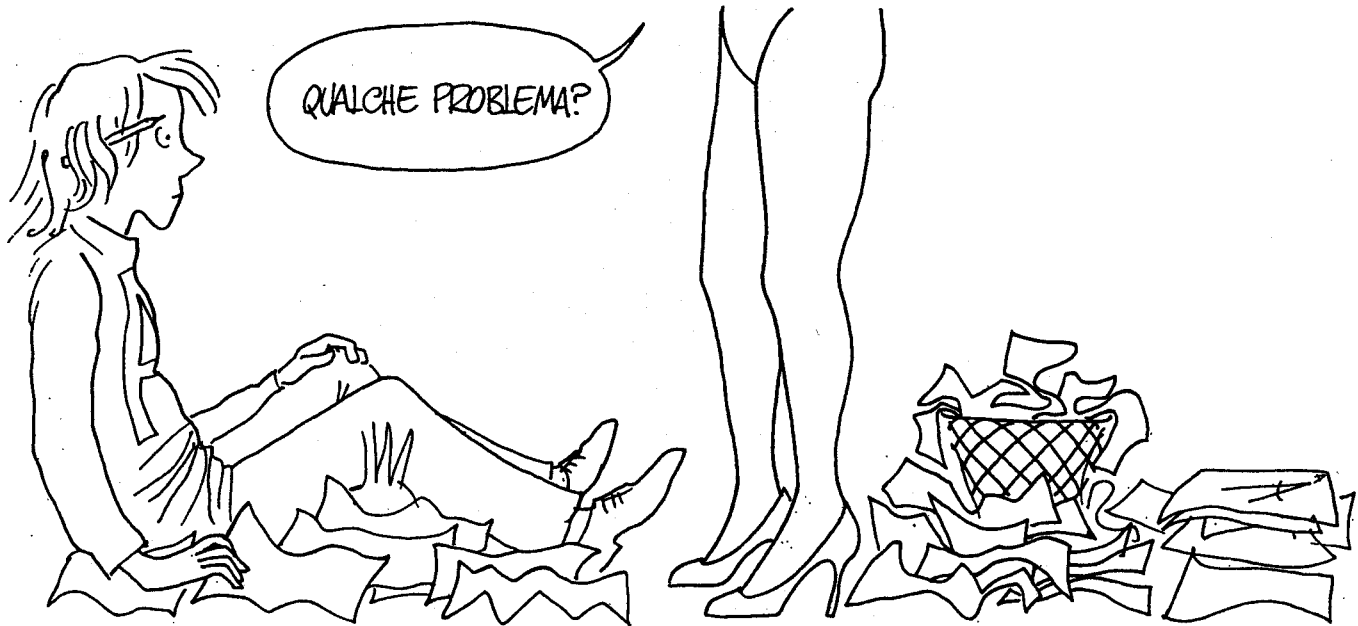
INGRANDENDO IL RAGGIO  $r$  DEL SUO TERRITORIO SULLA SFERA, ANSELMO AVEVA FINITO COL RITROVARSI AGLI ANTIPODI  $S$  DEL PUNTO  $N$ , CENTRO DEL SUO CERCHIO, E RINCHIUSO NEL SUO STESSO RECINTO. LO STESSO ACCADE NELLO SPAZIO TRIDIMENSIONALE A CURVATURA POSITIVA.

NELLO SPAZIO BIDIMENSIONALE DELLA SFERA, ANSELMO INCONTRA L'EQUATORE DOPO AVER RECINTATO LA META' DELLA SUPERFICIE DISPONIBILE. ALL'EQUATORE DELLO SPAZIO TRIDIMENSIONALE IPERSFERICO ANSELMO GIUNGE INVECE QUANDO IL SUO PALLONE OCCUPA LA META' DEL VOLUME DISPONIBILE. SULLA SFERA, IL CERCHIO EQUATORE GLI APPARIVA COME UNA RETTA; NELLO SPAZIO IPERSFERICO, IL "PALLONE EQUATORE" GLI SEMBRERA' INVECE UN PIANO.

OLTRE L'EQUATORE LA CONCAVITA' DEL PALLONE SI INVERTE E GIUNGE AUTOMATICAMENTE AD INCENTRARSÌ SUL PUNTO ANTIPODALE  $S$  DEL PUNTO  $N$ , CENTRO DEL PALLONE.

SU UNA SFERA, OGNI PUNTO AVEVA UN ANTIPODE. BENCHE' SIA DIFFICILE DA COMPRENDERE, LO STESSO ACCADE PER UNO SPAZIO IPERSFERICO A TRE DIMENSIONI.





QUALCHE PROBLEMA?

EHM... CIOÈ... HO UNA CONFUSIONE PAZZESCA NELLA TESTA...



TU SAI, ANSELMO, CHE DI CURVE IO ME NE INTENDO...

ALL' INIZIO, È SEMPRE UN PO' COMPLICATO DESTREGGIARSI NELLE IPERSFERE. BISOGNA EVITARE DI BLOCCARSI, E CAPIRE POCO ALLA VOLTA.

SI...

HO PERSO UN PO' IL FILO...





MA IL CENTRO DI QUESTA IPERSFERA, DOV'È?



SE DISEGNO UN CERCHIO SU UN PIANO, SIAMO D'ACCORDO CHE SI TRATTA DI UNA RAPPRESENTAZIONE DI UNO SPAZIO A UNA DIMENSIONE, CHIUSO, IMMERSO IN UNO SPAZIO A DUE DIMENSIONI: IL PIANO.

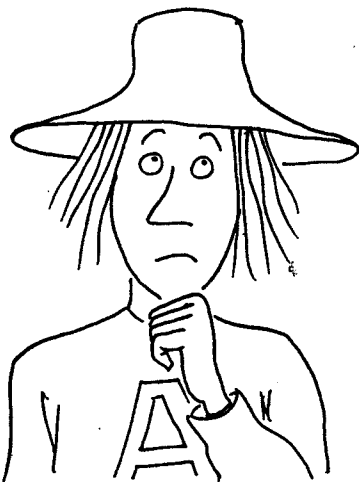
E IL CENTRO DEL CERCHIO NON È SUL CERCHIO



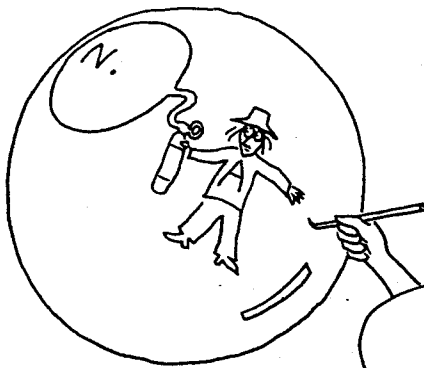
MMM...



UNA SFERA RAPPRESENTA UNO SPAZIO CHIUSO A DUE DIMENSIONI, IMMERSO IN UNO SPAZIO TRIDIMENSIONALE. NEMMENO IL CENTRO DI QUESTA SFERA È SULLA SFERA. SI TROVA INVECE NELLO SPAZIO A TRE DIMENSIONI.



IL CENTRO DI UNO SPAZIO IPERSFERICO A TRE DIMENSIONI POTREBBE SITUARSI IN UNO SPAZIO A QUATTRO SUPPONENDO CHE VI SIA IMMERSO. E COSÌ VIA... COSÌ, IL CENTRO DI UNO SPAZIO IPERSFERICO A QUATTRO DIMENSIONI SAREBBE IN UNO SPAZIO A CINQUE ECC...



GUARDA, ECCOTI NEL TUO MONDO A DUE DIMENSIONI, APPICCICATUVI SOPRA COME UNA DECALCOMANIA.



ORA COMINCI A GONFIARE IL TUO CERCHIO, CHE NON E' ALTRO CHE UNA SFERA A UNA DIMENSIONE.



IN UNO SPAZIO A DUE DIMENSIONI, UN CONFINO DELIMITA UNA SUPERFICIE, MENTRE, IN UNO SPAZIO A TRE DIMENSIONI, DELIMITA UN VOLUME.

QUI E' QUANDO ARRIVO A META' DELLO SPAZIO SFERICO.

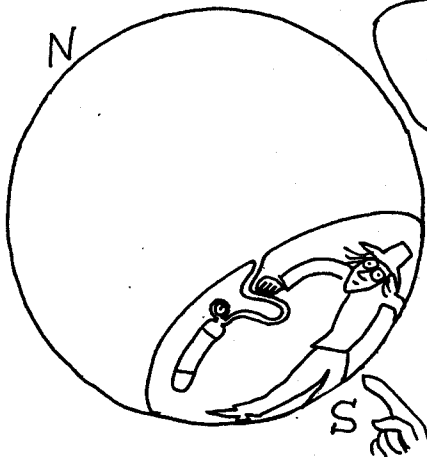


IN UNO SPAZIO A QUATTRO DIMENSIONI, UN CONFINO AUREBBE TRE DIMENSIONI, E DELIMITEREBBE UN IPERVOLUME A QUATTRO DIMENSIONI.

SANTO CIELO, RICOMINCIA!

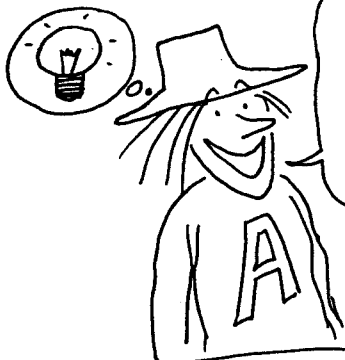


FILIAMO!



GUARDA, QUI IL TUO CERCHIO, CHE E' UN "PALLONE A UNA DIMENSIONE", COMINCIA A CONTENERE PIU' DI META' DELLO SPAZIO DISPONIBILE. COMINCIA A CHIUDERSI SU DI TE, CONVERGENDO VERSO IL PUNTO ANTIPODALE S.





ALLO STESSO MODO, NEL MIO SPAZIO A TRE DIMENSIONI, QUANDO INIETTO PIU' DELLA META' DEL VOLUME TOTALE, IL PALLONE SI RICHIUDE SU DI ME, CONVERGENDO VERSO IL PUNTO ANTIPODALE.



HO CAPITO!

INFATTI LA SFERA, IN QUESTO SPAZIO TRIDIMENSIONALE CURVO, HA EVIDENTEMENTE DUE CENTRI CHE SONO ANTIPODALI.



?!!?



IN REALTA' NON SO ESATTAMENTE CHE COSA, MA HO L'IMPRESSIONE DI AVER CAPITO QUALCOSA!



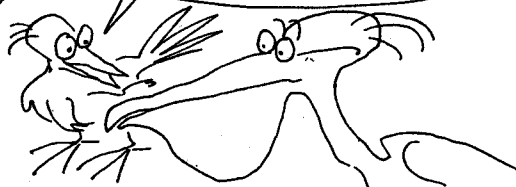
CHE ANGOSCIA!

MA NO, ANSELMO, QUANDO NON CI SONO PIU' DI TRE DIMENSIONI, CAPIRE E' ESTRAPOLARE, GENERALIZZARE.

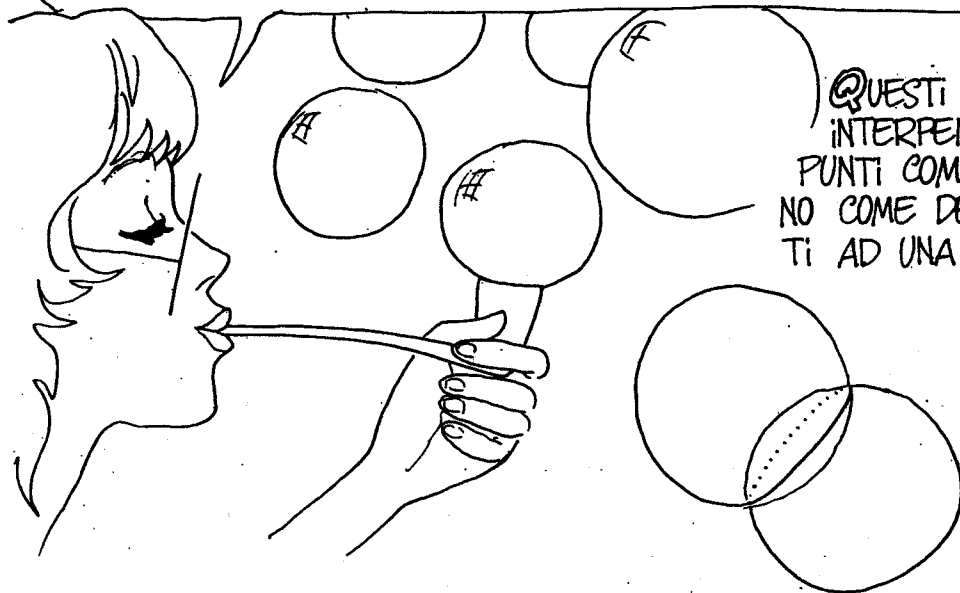


STO ESTRAPOLANDO SENZA SAPERLO!

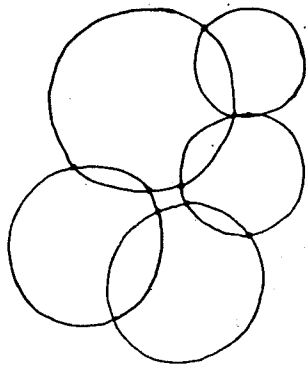
IL DISEGNO, SEI TU A FARLO... NELLA TUA TESTA!...



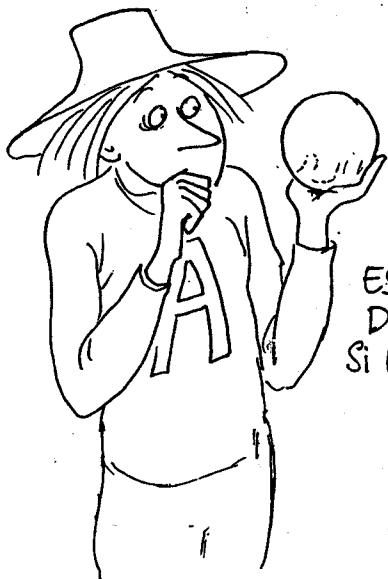
ORA, PRENDO UNO SPAZIO A TRE DIMENSIONI; E CI METTO DELLE SFERE A DUE DIMENSIONI, UN MUCCHIO DI PICCOLI UNIVERSI BIDIMENSIONALI.



QUESTI UNIVERSI POSSONO INTERPENETRARSI, I LORO PUNTI COMUNI SI DISTRIBUISCONO COME DEI CERCHI, OGGETTI AD UNA DIMENSIONE.



ALLO STESSO MODO DEI CERCHI, OGGETTI AD UNA DIMENSIONE, POSTI SU UN FOGLIO DI CARTA (DUE DIMENSIONI) SI INTERSECHEREBBERO IN ALCUNI PUNTI (SI USA DIRE CHE IL PUNTO HA DIMENSIONE ZERO).



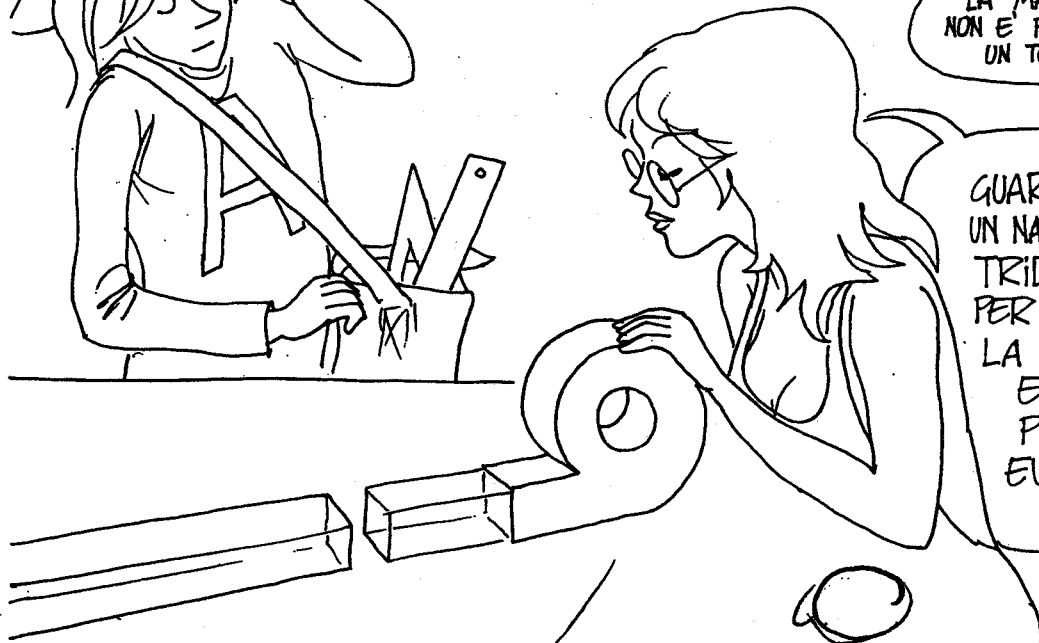
UNA SFERA POTRA' ALLORA ESSERE CONSIDERATA COME L'INTERSEZIONE DI DUE "BOLLE" TRIDIMENSIONALI, CHE SI EVOLVONO IN UNO SPAZIO A QUATTRO DIMENSIONI.

E COSI' VIA: UNO SPAZIO TRIDIMENSIONALE CURVO, IPERSFERICO, POTRA' A SUA VOLTA ESSERE CONSIDERATO COME L'INTERSEZIONE DI DUE BOLLE DI SAPONE A QUATTRO DIMENSIONI, CHE SI EVOLVONO IN UNO SPAZIO A CINQUE.

ANSELMO E SOFIA, DOPO AVER CONOSCIUTO LE VERTIGINI DELL'ESTRAPOLAZIONE, RIPRENDONO. AD ESPLORARE NUOVI MONDI TRIDIMENSIONALI.



LA MATEMATICA NON E' PIÙ QUELLA DI UN TEMPO!



GUARDA, QUESTO E' UN NASTRO ADESIVO TRIDIMENSIONALE, PER LE GEODETICHE. LA PARTE ADESIVA E' ALLA PUNTA... EVIDENTEMENTE.



SENTI, IN QUESTO SPAZIO NON MI SEMBRA CHE LE GEODETICHE SI RICHIEDANO. ED ORA QUANDO GONFIO IL FALLONE DELLO SPAZIOTEST, IL VOLUME PRODOTTO E' SUPERIORE A  $\frac{4}{3} \pi r^3$ , MENTRE LA SUPERFICIE E' SUPERIORE A  $4 \pi r^2$ . QUESTA VOLTA LA SOMMA DEGLI ANGOLI DI UN TRIANGOLO E' INFERIORE A  $180^\circ$ .



RICORDATI PAGINA 23: SEI DI NUOVO IN UNO SPAZIO A CURVATURA NEGATIVA

# RIASSUNTO:



NEGLI SPAZI A TRE DIMENSIONI, SAI, POSSONO ACCADERE MOLTE COSE. E' COME PER LE SUPERFICIE, CHE SONO SPAZI A DUE DIMENSIONI.

COSI' SE LA SOMMA DEGLI ANGOLI DI UN TRIANGOLO, IN UNO SPAZIO TRIDIMENSIONALE, SUPERA I  $180^\circ$ , DIREMO CHE LA CURVATURA E' POSITIVA.

COSTRUIENDOCI UNA SFERA DI RAGGIO  $l$ , TROVERAI CON LO SPAZIOTEST UN VOLUME INFERIORE A  $\frac{4}{3}\pi l^3$  E UNA SUPERFICIE INFERIORE A  $4\pi l^2$ . QUESTO SPAZIO, DETTO IPERSFERICO, SI RICHIUDERA' SU SE STESSO. SE LA SOMMA DEGLI ANGOLI DI UN TRIANGOLO, IN UNO SPAZIO TRIDIMENSIONALE, E' INFERIORE A  $180^\circ$ , ALLORA LA CURVATURA SARA' NEGATIVA. IL VOLUME DI UNA SFERA DI RAGGIO  $l$  SARA' SUPERIORE A  $\frac{4}{3}\pi l^3$ , E LA SUA SUPERFICIE SUPERIORE A  $4\pi l^2$ . QUESTO SPAZIO AVRA' UN'ESTENSIONE INFINITA.



MA SE LA SOMMA DEGLI ANGOLI E'  $180^\circ$ , ALLORA LO SPAZIO E' SEMPLICEMENTE EUCLIDEO.

ETUTTA 'STA ROBA PER DIRE QUESTO!...



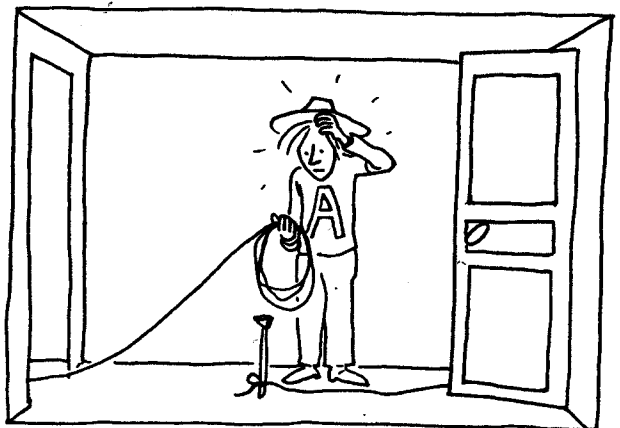
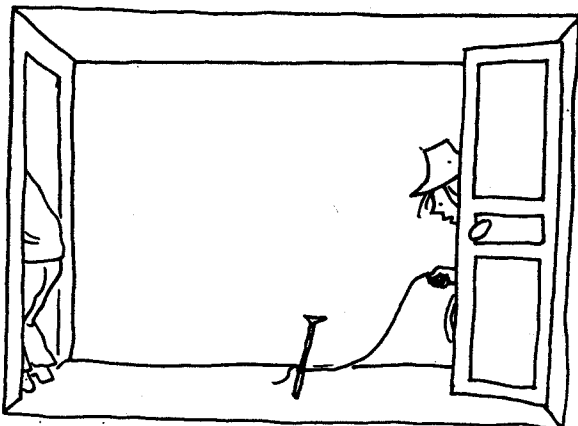
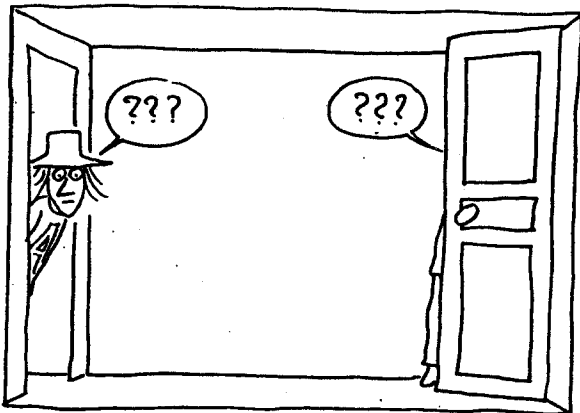
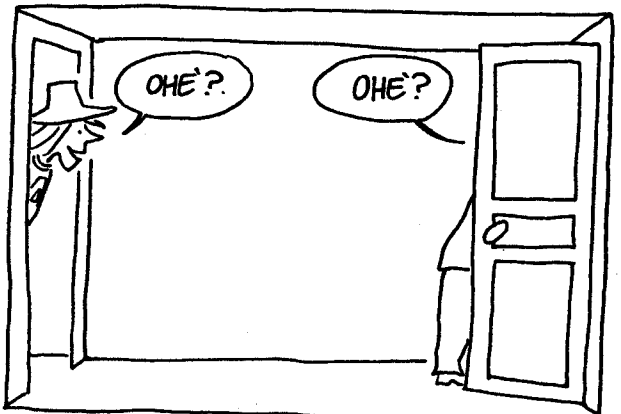
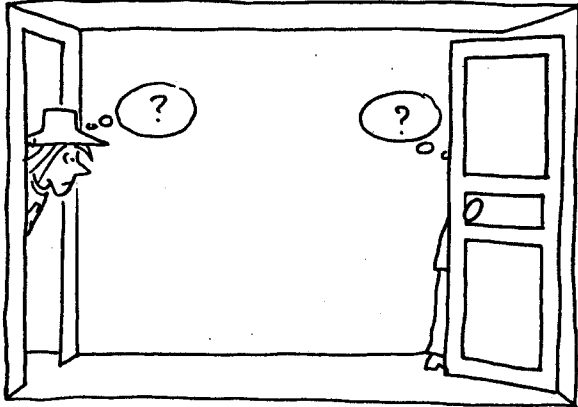
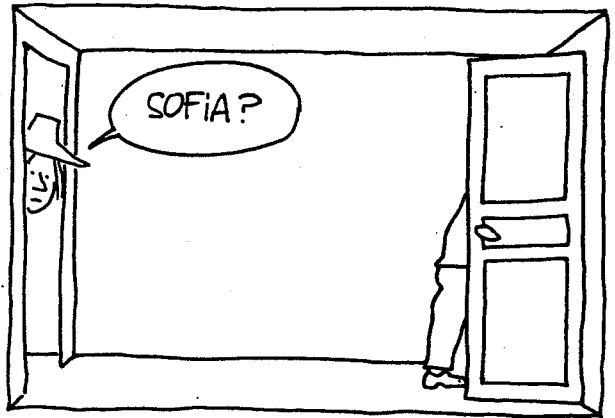
# UNO SPAZIO DEV'ESSERE APERTO O CHIUSO! ...

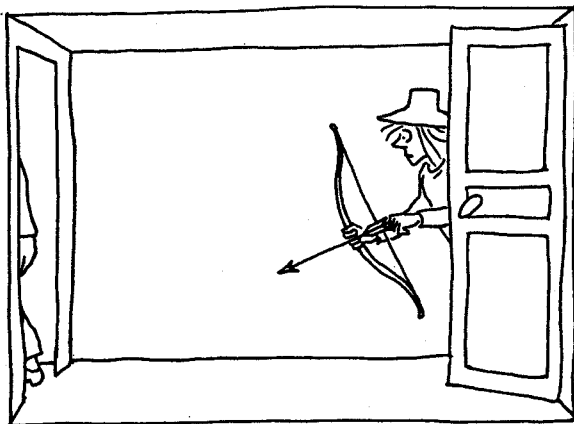
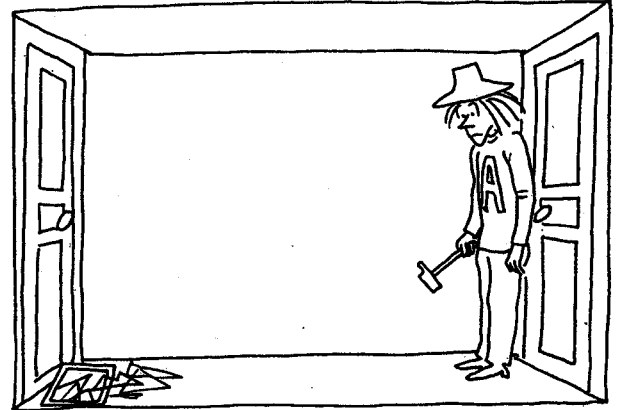
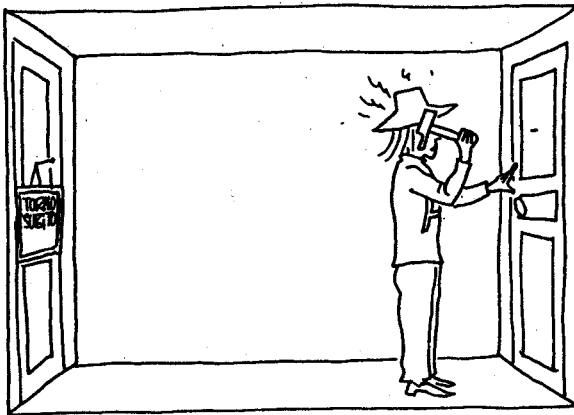
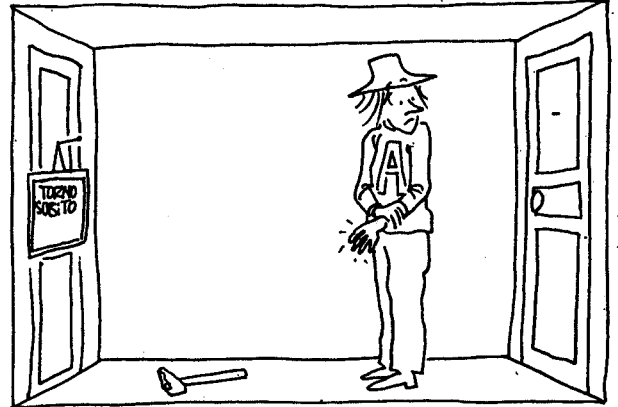
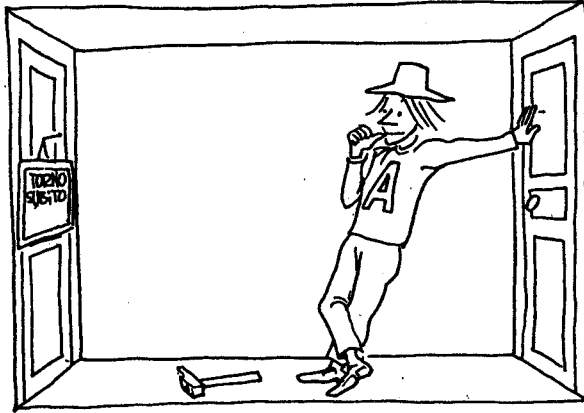
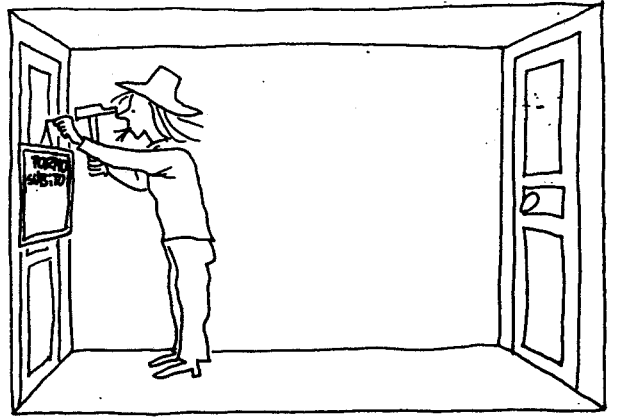
PENSO D' AVER CAPITO TUTTO, ORA: QUANDO LO SPAZIO HA UNA CURVATURA POSITIVA, SI CHIUDE SU SE STESSO.

QUANDO LA CURVATURA E' NEGATIVA, O QUANDO LO SPAZIO E' EUCLIDEO, LO SPAZIO NON SI RICHIUDE, E' INFINITO.

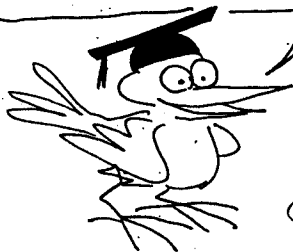
**NO!** IL MONDO DELLA GEOMETRIA E' PIU' RICCO DI QUEL CHE PENSI!







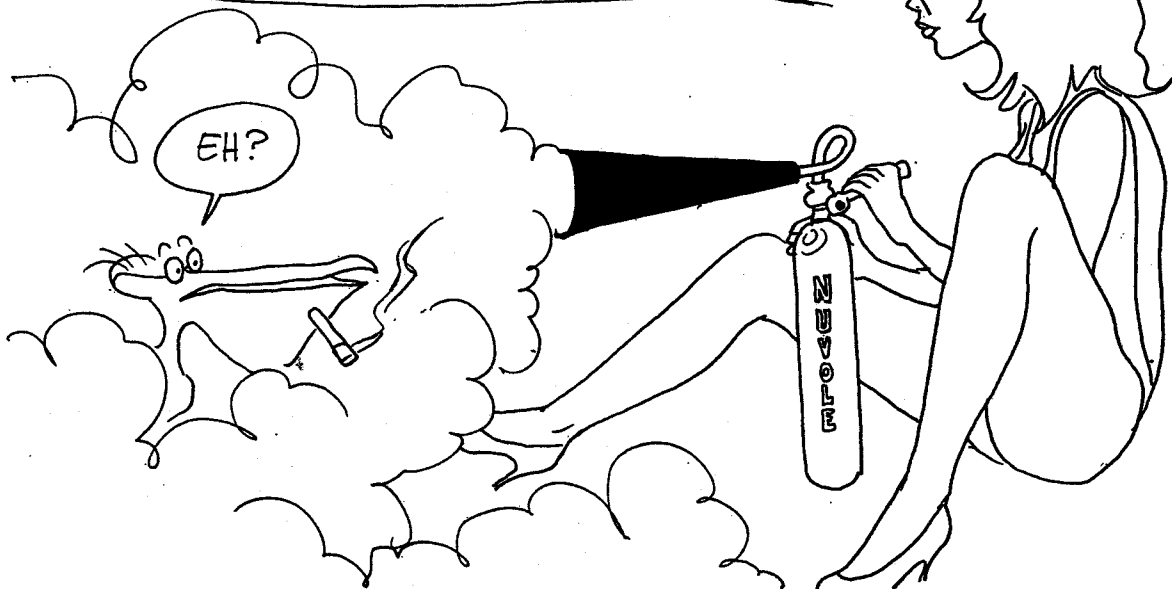
EH SÌ! ANSELMO ERA STATO PROIETTATO  
IN UNO SPAZIO CILINDRICO A TRE  
DIMENSIONI.  
SEBBENE EUCLIDEO, SENZA CURVATURA  
(LA SOMMA DEGLI ANGOLI DI UN TRIANGOLO  
VI E' UGUALE A  $180^\circ$ ), QUESTO MONDO SI  
RICHIUDE SU SE STESSO.



BENE, AMMETTIAMOLO...  
MONDI SFERICI, IPERBO-  
LICI, CILINDRICI: LI  
ABBIAMO GIRATI  
TUTTI, NO?

CREDI?

TORNIAMO UN ATTIMO NEL  
BIDIMENSIONALE.



# SENZA SOPRA NE' SOTTO:



Caro Anselmo,  
Eccoti una lumaca addomesticata.  
Bèndale gli occhi e fa' in modo che  
non veda né a destra né a sinistra.  
Così ti traccerà una perfetta GEODETICA.  
A presto

Sofia

IN MARCIA!



PUNTO DI  
PARTENZA  
DELLA  
GEODETICA

IN PRATICA, ANDARE  
SEMPRE DRITTO O SEGUIRE  
IL PERCORSO PIÙ BREVE TRA  
DUE PUNTI È LA STESSA COSA.

MA... DOV'È FINITA  
LA LUMACA?!

FERMATI!



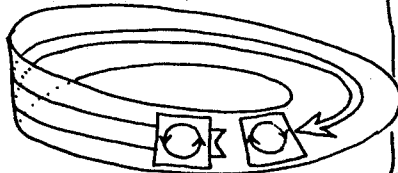
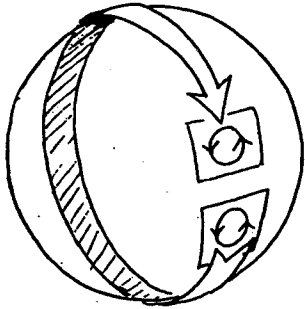
BEH, NON PROPRIO!...



TRACCIAMO UN CERCHIO SU UNA SUPERFICIE E CURVIAMO A PIACERE.

IMMAGINIAMO CHE QUESTO CERCHIO SIA UNA PICCOLA DECALCOMANIA CHE POSSIAMO FAR SCIVOLARE A VOLONTA' SULLA SUPERFICIE.

SE IL CERCHIO RISULTA UGUALE A SE STESSO, DIREMO CHE QUELLA SUPERFICIE E' ORIENTABILE (E' IL CASO DELLA SFERA, DEL CILINDRO, DEL PIANO, ECC...) MA SE LA DECALCOMANIA SCIOLA SUL NASTRO DI MOBIUS, LE COSE VANNO DIVERSAMENTE.



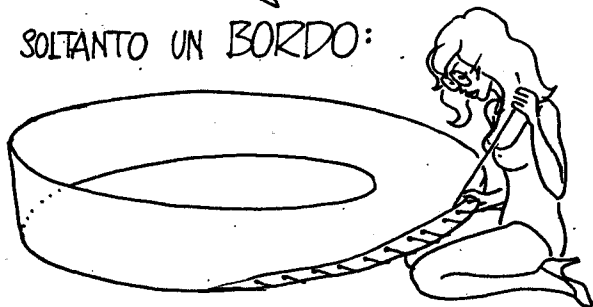
OGNI VOLTA CHE FA IL GIRO DI QUESTO UNIVERSO A DUE DIMENSIONI, IL CERCHIO MODIFICA IL SUO ORIENTAMENTO.

PROVATE E VEDRETE!



ALLO STESSO MODO NON SI PUO' DIPINGERE UN NASTRO DI MOBIUS CON DUE COLORI DIFFERENTI: ESSO HA UN SOLO LATO, E' UNILATERO.

HA SOLTANTO UN BORDO:

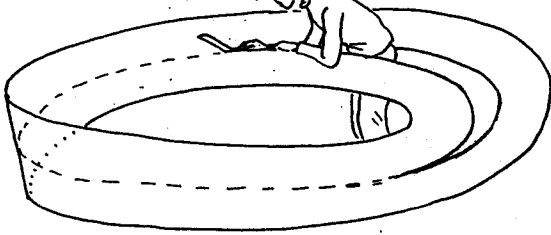


ANSELMO HA DECISO DI PIANTARE DEI CHIODI PER DISTINGUERE L'INTERNO DALL'ESTERNO

QUI SI PUO' FAR L'ORLO IN UNA SOLA VOLTA!



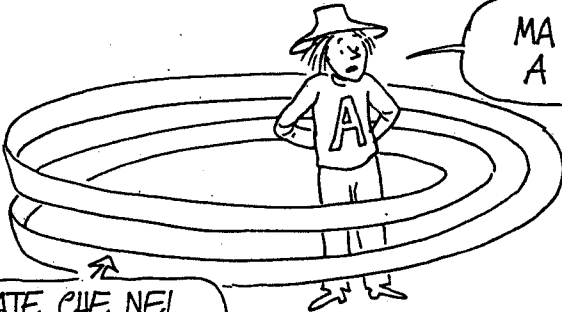
PROVIAMO A TAGLIARLO IN DUE.



PIU' FACILE A DIRSI CHE A FARSI, CARO IL MIO ANSELMO!

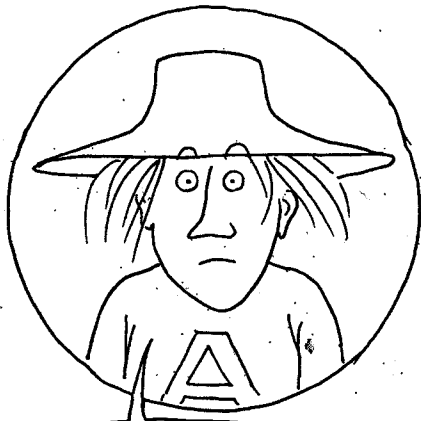
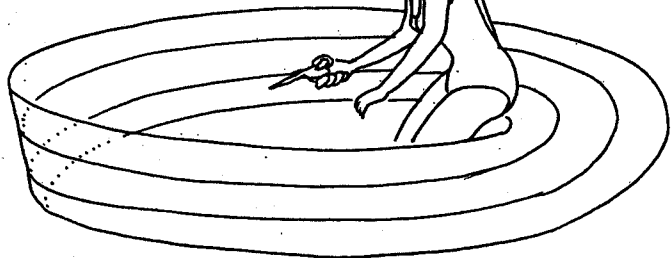


MA COSA DEVO FARE PER RIUSCIRE A TAGLIARLO IN DUE?

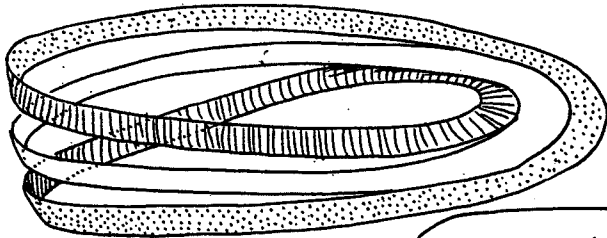


E' SEMPLICISSIMO: TAGLIALO IN TRE!

NOTATE CHE, NEL NEL CORSO DELL'OPERAZIONE, QUEST'AGGEGGIO E' DIVENTATO BILATERO



MI SENTO COMPLETAMENTE DISORIENTATO!



NOTATE CHE ORA CE' UN AGGEGGIO UNILATERO (BIANCO) ED UN ALTRO BILATERO (TRATTEGGIATO), LUNGO IL DOPPIO DEL PRIMO.





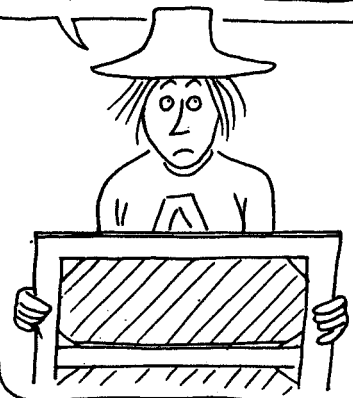
DOPO QUESTA PASSEGGIATA SUL NASTRO DI MÖBIUS, TORNIAMO NEGLI SPAZI EUCLIDEI (SENZA CURVATURA) A TRE DIMENSIONI.

# L'orientamento dello spazio:



QUANDO MI GUARDO ALLO SPECCHIO, LA MIA MANO SINISTRA DIVENTA LA DESTRA; PERCHÉ INVECE LA MIA TESTA NON CAMBIA POSTO CON I PIEDI?...

E POI COME SI FA AD ESSERE SICURI DEL SENSO BUONO?



LA DESTRA? E' DI FRONTE ALLA SINISTRA, E VICEVERSA...

E' UNA QUESTIONE DI BUON SENSO



PRONTO, PRONTO! TU COME FAI AD ESSERE SICURA CHE IN QUEL BUON SENSO SIA AVVITATO ANCHE IL TUO GUSCIO?

SENTI CHE MALIZIA! SE NON LO FOSSE IN QUEL SENSO, SAREBBE UN CONTROSENSO!

ACCOMPAGNIAMO ANSELMO NELL'ESPLORAZIONE DI UN NUOVO MONDO TRIDIMENSIONALE EUCLIDEO (SENZA CURVATURA).



CHE STA FACENDO SOFIA? AVEVAMO APPUNTAMENTO A PAGINA 57 PER UNO SPUNTINO!



C'È QUALCOSA DI STRANO IN QUESTO SPAZIO; NON MI DICE NULLA DI BUONO.



NELL'ATTESA BEVIAMOCI UN SORSO.



TOH, ANCORA QUELLE NUVOLE. ED IO CHE HO DIMENTICATO LA MIA ASPIRINA!

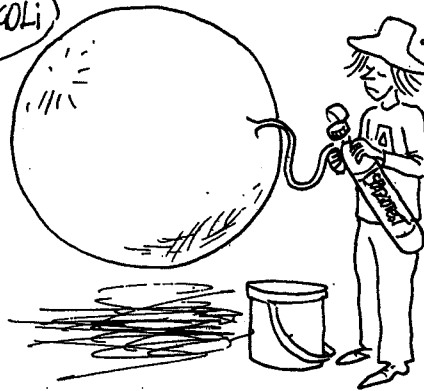
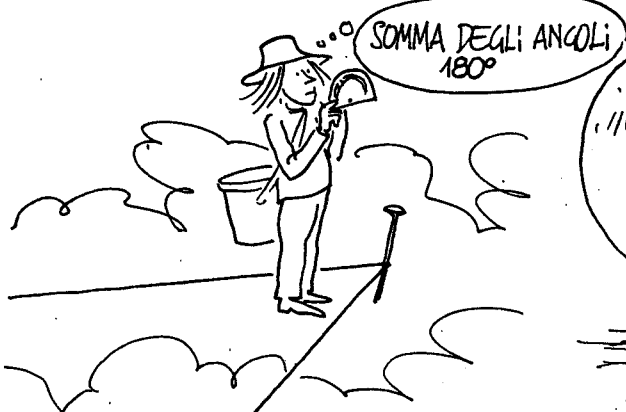


EH?

ÒÈ



DOVE SIETE? VENITE FUORI, IN NOME DI UN VETTORE!



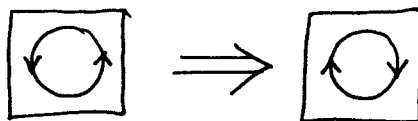
SUPERFICIE  $4\pi R^2$ ,  
VOLUME  $\frac{4}{3}\pi R^3$ ;  
BENE, A POSTO.  
E' EUCLIDEO



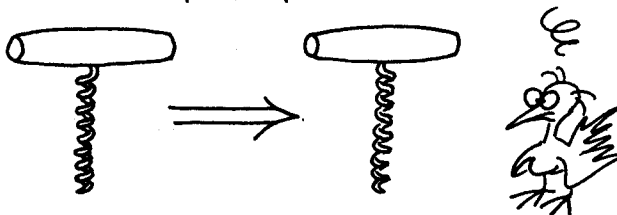




IL NASTRO DI MOBIUS (SPAZIO INORIENTABILE A DUE DIMENSIONI) HA DUNQUE UN EQUIVALENTE TRIDIMENSIONALE. QUANDO IL CERCHIO-DECALCOMANIA FACEVA IL "GIRO" DI QUELLO SPAZIO EUCLIDEO SUL NASTRO DI MOBIUS, IL SUO ORIENTAMENTO CAMBIAVA:



VEDI PAGINA 54



SI PUO' NOTARE CHE QUESTI OGGETTI SONO INVERTITI "A SPECCHIO". IL CAVATAPPI E LO STESSO ANSELMO POSSONO ESSERE CONSIDERATI "DECALCOMANIE A TRE DIMENSIONI". OGNI VOLTA CHE UN OGGETTO COMPIE IL "GIRO" DI QUESTO SPAZIO TRIDIMENSIONALE, IL SUO ORIENTAMENTO SI INVERTE. POICHE' ABBIAMO PENSATO DI ACCOMPAGNARE ANSELMO NEL SUO PERIPLO CIRCUMSPAZIALE, E' LOGICO CHE ANCHE NOI COME LUI RITROVIAMO LA BOTTIGLIA "A SPECCHIO" E IL CAVATAPPI AVVITATO IN SENSO INUSUALE. UN SECONDO "GIRO" DI QUESTO UNIVERSO CI RESTITUIREBBE L'ASPETTO INIZIALE DELLE COSE (A FATTO CHE LASCIAMO GLI OGGETTI AL LORO POSTO).



ANSELMO E IL CANGURO (UNA SPECIE DEGLI ANTIPODI) SI TROVANO NELLO STESSO SPAZIO; MA CON LA DIFFERENZA CHE 'CIO' CHE E' "NEL VERSO GIUSTO" PER IL CANGURO E' "AL ROVESCIO" PER ANSELMO, E VICEVERSA.

# EPiLOGO:



VA TUTTO STORTO. NON C'E' PIU' NE' DESTRA NE' SINISTRA, NE' DRITTO NE' ROVESCIO. DOVE PORTA TUTTO QUESTO? E CHE STRADA DEVO SEGUIRE?

DEVI SEGUIRE LE GEODETICHE, ANSELMO, LE GEODETICHE DELLA TUA VITA. !!!

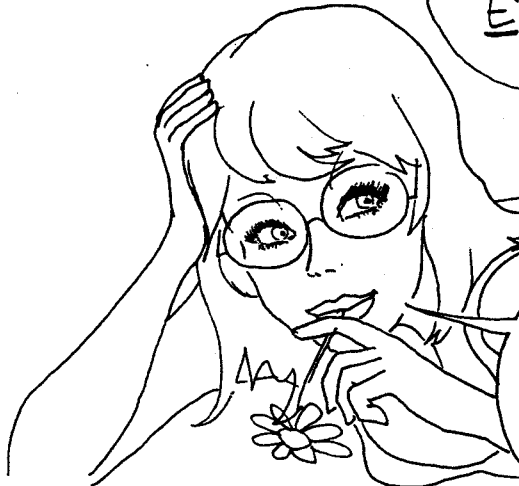


NESSUNO MI FARA' MAI CREDERE CHE L'UNIVERSO E' COSI' STRAMPALATO. QUESTE SONO SOLTANTO FARNETICAZIONI DI MATEMATICI.



E' ROBA DA FUMETTI!

PERCHE' PREOCCUPARSI DI TUTTO QUESTO? E' EVIDENTE CHE LO SPAZIO E' EUCLIDEO (\*)

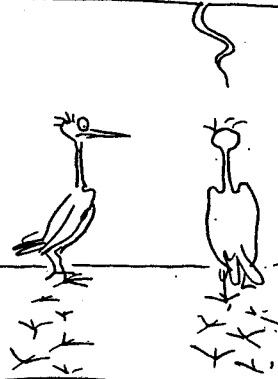


(\*) PAROLE PRONUNCIATE NEL 1830 DA OSTROGRADSKY, TITOLARE DELLA CATTEDRA DI MATEMATICHE A PIETROGRADO; DOPO AVER LETTO LE OPERE DI RIEMANN E LOBACEVSKIJ.

AMMETTIAMO PURE CHE L'UNIVERSO  
NON SOMIGLI A CIÒ CHE È. TE L'IMMAGI-  
NI QUESTA ROBA, INSEGNATA NELLE  
SCUOLE?



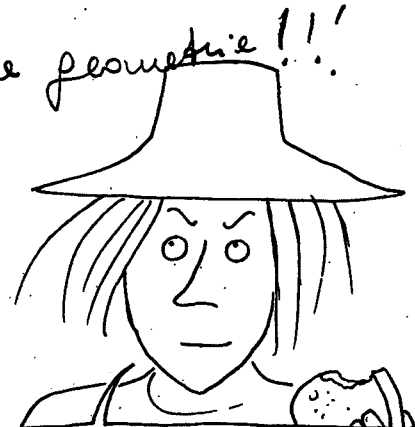
E POI, QUEL CHE CONTA,  
DOPO TUTTO, È LA VITA. E, NELLA  
VITA QUOTIDIANA, CONCORDERAI CON  
ME CHE...



ALLORA, CHE C'È D'IE-  
TRO A TUTTO QUESTO?



*e non le geometrie!!!*



VOGLIO METTERLO IN CHIARO!

E AVANTI VERSO  
IL CONCRETO



C'È QUALCUNO?







C'E' UN  
MATEMATICO  
IN SALA ?

