Esame di Geometria (laurea in Fisica)

prova scritta del 19 marzo 2009

ESERCIZIO 1. *Nello spazio euclideo E^4, si considerino le sottovarietà lineari*

$$\mathbb{L}_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \textit{ed} \qquad \mathbb{L}_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}.$$

(a) Si determinino le dimensioni di $\mathbb{L}_1$, ed $\mathbb{L}_2$, e si dica se sono incidenti, parallele, sghembe o altro.
(b) Si determinino le equazioni cartesiane e la distanza dall'origine della sottovarietà lineare $\mathbb{L}_1 \vee \mathbb{L}_2$.

Svolgimento. (a) $\mathbb{L}_1$, ed $\mathbb{L}_2$ sono due rette (dim 1) parallele. La seconda passa per $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(*b*) La sottovarietà $\mathbb{L}_1 \vee \mathbb{L}_2$ è quindi il piano contenente $\mathbb{L}_2$ ed un punto di $\mathbb{L}_1$. Dunque

$$\mathbb{L}_1 \vee \mathbb{L}_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases}.$$

La distanza è il rapporto tra il volume del parallelepipedo di spigoli $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e l'area della sua faccia parallela ad $\mathbb{L}_1 \vee \mathbb{L}_2$. Dunque la distanza è uguale ad 1. □

ESERCIZIO 2. *Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi*

$$U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \text{e} \qquad U_2 : \begin{cases} 7x_2 - 4x_4 = 0 \\ 2x_2 + 5x_4 = 0 \\ 3x_2 - 17x_4 = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare le equazioni cartesiane ed una base di U_1 ed U_2. Si determini, se esiste, una base $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $U_1 = \langle u_1, u_2 \rangle$ ed $U_2 = \langle u_3, u_4 \rangle$.
(b) Detta $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$, si determinino le matrici di cambiamento di base $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{E}}(1)$ e $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{U}}(1)$, ove $\mathcal{U}$ è la base definita al punto precedente. Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi)$, ove $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ è la proiezione su U_2 parallelamente ad U_1.
(c) Sia $\sigma : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la simmetria di asse U_2 e direzione U_1. Si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma)$. Si determini la dimensione del sottospazio

$$\mathscr{C}_\sigma = \left\{ \phi \in Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4) \mid \phi \circ \sigma = \sigma \circ \phi \right\}$$

Svolgimento. (a) I tre generatori di U_1 sono linearmente dipendenti. Infatti, se li indichiamo ordinatamente con u_1, u_2, u, si ha $2u_1 + 2u_2 - u = 0$. Una base di U è quindi data dai vettori u_1 ed u_2, che sono linearmente indipendenti. Una base di U_2 è data dai vettori $u_3 = e_1$ ed $u_4 = e_3$ ed i quattro vettori formano una base, $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$, di $\mathbb{R}^4$. Equazioni cartesiane di U_1 e di U_2 sono, ad esempio,

$$U_1 : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad U_2 : \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

(b) Le matrici di cambiamento di base sono

$$P = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P^{-1} = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{U}}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre,

$$A = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{E}}(1)\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\pi)\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{U}}(1) = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è la matrice della proiezione su U_2, parallelamente ad U_1.

(c) $\sigma = 2\pi - 1$, quindi $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma) = 2A - \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Per determinare $\mathscr{C}_\sigma$ conviene usare la base $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$, perché

$$\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\sigma) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \phi \in \mathscr{C}_\sigma \iff \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\phi) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix}.$$

Dunque $\dim \mathscr{C}_\sigma = 8$. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, di $\mathbb{R}^4$.

(a) Si determini il polinomio caratteristico di ϕ e si dica se ϕ è invertibile.

(b) Si determinino gli autovalori, i relativi spazi di autovettori per ϕ e si dica se ϕ è diagonalizzabile. In caso affermativo, si determinino una matrice diagonale, D, ed una matrice invertibile, P, tali che $P^{-1}AP = D$.

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}) = (x+3)^2(x-2)^2$ ed ha il termine di grado 0 uguale a 36; quindi $\det A = 36$ e ϕ è invertibile.

(b) Le caratteristiche salienti di ϕ sono

Autovalori	2	-3
molteplicità algebrica	2	2
molteplicità geometrica	2	2
Autospazi	$\langle 8e_1 - 3e_3, 5e_1 + 9e_2 + 6e_4 \rangle$	$\langle e_1 - e_3, e_2 - e_4 \rangle$

Quindi ϕ è diagonalizzabile e, indicata con $\mathcal{V}$ la base formata dagli autovettori scritti sopra, le matrici cercate sono

$$D = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

ESERCIZIO 4. *Sia V uno spazio vettoriale reale e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una sua base. Si consideri la forma quadratica $q : V \to \mathbb{R}$, definita da*

$$q(x_1v_1 + \cdots + x_4v_4) = 6x_1x_2 - 4x_1x_3 - 12x_1x_4 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 - 6x_2x_4 - 4x_3^2 - 12x_3x_4.$$

(a) Si scriva la matrice nella base $\mathcal{V}$ dell'applicazione bilineare simmetrica, $g : V \times V \to \mathbb{R}$, tale che $g(v, v) = q(v)$, per ogni $v \in V$. Si determinino nucleo e segnatura di g.
(b) Si dica se i sottospazi $W_1 = \langle v_1, v_2\rangle$ e $W_2 = \langle v_3, v_4\rangle$ sono complementari del nucleo, N. In caso affermativo si scriva la matrice, nelle basi date, dell'applicazione $\phi : W_1 \to W_2$, che manda ogni vettore $w \in W_1$ nella sua proiezione su W_2, parallelamente ad N. Si verifichi se ϕ è un'isometria.

Svolgimento. (a) La matrice di g è

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & -6 \\ 3 & 3 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -4 & -6 \\ -6 & -3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

che è degenere ($\mathrm{rk}\, G = 2$). Il nucleo è il sottospazio $N = \langle 3v_1 - 3v_3 + v_4, 6v_2 - 3v_3 + 4v_4\rangle$. Sulla diagonale di G ci sono elementi di segno opposto, quindi la segnatura di g è $(1, 1)$.

(b) Si ha $V = N \oplus W_1 = N \oplus W_2$, come si verifica facilmente esaminando i generatori dei sottospazi in questione. Osserviamo che

$$v_1 = (v_3 - \tfrac{1}{3}v_4) + (v_1 - v_3 + \tfrac{1}{3}v_4) \qquad v_2 = (\tfrac{1}{2}v_3 - \tfrac{2}{3}v_4) + (v_2 - \tfrac{1}{2}v_3 + \tfrac{2}{3}v_4),$$

ove, in ognuna delle somme, il primo addendo sta in W_2 ed il secondo sta in N, quindi la matrice di ϕ nelle basi date è $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$. Dunque ϕ è un'isometria, perché

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ 1/2 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1/3 & -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$

come si doveva verificare. □

ESERCIZIO 5. [NUOVO ORDINAMENTO (DM270/04)] *Studiare la conica $\mathscr{C}$ di equazione*

$$4x^2 - 10xy + 4y^2 + 12x - 6y + 1 = 0 .$$

In particolare determinare se è degenere, qual è il suo tipo, un'equazione canonica e l'opportuna trasformazione di coordinate, gli eventuali assi, asintoti, centro, fuochi. Se ne tracci infine un disegno approssimativo.

Svolgimento. Una matrice della conica $\mathscr{C}$ è $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 6 & 4 & -5 \\ -3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$. Poiché $\det A = -9 = \det A'$ (A' è la sottomatrice quadrata di A che si ottiene cancellando prima riga e prima colonna) si tratta di un'iperbole. Le direzioni degli asintoti sono $w_1 = \binom{2}{1}$ e $w_2 = \binom{1}{2}$. Il centro, C, è la soluzione del sistema

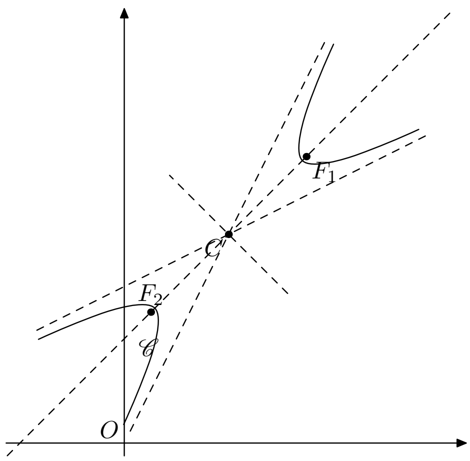
$$\begin{cases} 4x - 5y = -6 \\ 5x - 4y = -3 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad C = \binom{1}{2}.$$

La matrice A' ha autovalori -1 e 9 a cui corrispondono gli autovettori $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, direzioni degli assi. Il coefficiente $\rho = -1$ e l'equazione canonica di $\mathscr{C}$, in un opportuno sistema di riferimento ortonormale, è $X^2 - 9Y^2 = 1$. La matrice dell'isometria che porta l'equazione in forma canonica è $S = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 2 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$, come si può verificare calcolando la matrice $-{}^tSAS$. Gli assi hanno quindi equazioni:

$$h_1 : x - y + 1 = 0 \text{ (asse focale)}, \quad h_2 : x + y - 3 = 0.$$

e gli asintoti sono le rette

$$a_1 : x - 2y + 3 = 0, \quad a_2 : 2x - y = 0.$$



Infine, i fuochi si trovano sull'asse focale, a distanza $\sqrt{\frac{10}{9}}$ dal centro. Ovvero $F_{1,2} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \pm \frac{\sqrt{5}}{3}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. □

ESERCIZIO 6. [VECCHIO ORDINAMENTO (DM509/99)] *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 6 & -1\\ 0 & 3 & 0 & -1\\ -3 & 1 & -4 & 1\\ 0 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, di $\mathbb{R}^4$.

(a) *Si determini il polinomio caratteristico di ϕ e si dica se ϕ è invertibile.*

(b) *Si determinino gli autovalori, i relativi spazi di autovettori per ϕ ed il polinomio minimo. Si determini una matrice di Jordan, J, di ϕ, ed una matrice invertibile, P, tali che $P^{-1}AP = J$.*

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}) = (x-2)^2(x+1)^2$, che ha il termine di grado zero uguale a $\det A = 4$, quindi ϕ è invertibile.

(b) L'endomorfismo ϕ ha gli autovalori, 2 e -1, entrambi di molteplicità algebrica 2 e di molteplicità geometrica 2 e 1, rispettivamente; quindi non è diagonalizzabile. Infatti, si ha

$$A + 1 = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 6 & -1\\ 0 & 4 & 0 & -1\\ -3 & 1 & -3 & 1\\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A - 2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ -3 & 1 & -6 & 1\\ 0 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

Se ne deduce che il polinomio minimo di ϕ è $(x+1)^2(x-2)$. Gli spazi di autovettori di ϕ sono $\ker(\phi + 1) = \langle e_1 - e_3\rangle$ e $\ker(\phi - 2) = \langle 2e_1 - e_3, 3e_2 + e_3 + 3e_4\rangle$.

La matrice di Jordan ha quindi un blocco di ordine 2, relativo all'autovalore -1, e due blocchi di ordine 1 relativi all'autovalore 2. Un autovettore generalizzato di periodo massimo per l'autovalore -1 è $e_2 + 4e_4 \in \operatorname{im}(\phi - 2) = \ker(\phi + 1)^2$ (perché?). Una base, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, rispetto a cui ϕ ha forma di Jordan è costituita dai vettori $v_4 = e_2 + 4e_4$, $v_3 = (\phi + 1)(v_4) = -5e_1 + 5e_3$, $v_2 = 3e_2 + e_3 + 3e_4$ e $v_1 = 2e_1 - e_3$. Perciò possiamo scrivere

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 5 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ciò risponde alle richieste. □