Esame di Geometria (laurea in Fisica)

prova scritta del 31 marzo 2009

ESERCIZIO 1. *Nello spazio euclideo E^4, si considerino le sottovarietà lineari*

$$\mathbb{L}: \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \qquad ed \qquad \mathbb{M}: \begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}.$$

(a) Si determinino le dimensioni di $\mathbb{L}$, ed $\mathbb{M}$, e si dica se sono incidenti, parallele, sghembe o altro.
(b) Si scelgano un punto, P_0, di $\mathbb{L}$ ed un punto, Q_0, di $\mathbb{M}$ e si determini il punto medio, M, del segmento P_0Q_0. Si determinino le equazioni cartesiane di un iperpiano, $\mathbb{U}$, passante per M e parallelo sia ad $\mathbb{L}$ che ad $\mathbb{M}$. È vero che, per ogni punto, P, di $\mathbb{L}$ ed ogni punto, Q, di $\mathbb{M}$, il punto medio del segmento PQ appartiene ad $\mathbb{U}$?

Svolgimento. (a) $\mathbb{L}$ è un piano ed $\mathbb{M}$ è la retta $\begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$. Le due sottovarietà sono sghembe.

(b) Presi i due punti indicati sopra, si ha $M = \begin{pmatrix}1/2\\1\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$, e l'iperpiano cercato ha equazione $\mathbb{U}: x_1 - x_2 - 2x_4 = -3/2$. La verifica dell'ultima affermazione è lasciata al lettore. □

ESERCIZIO 2. *Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi*

$$U_1 = \left\langle \begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\\0\end{pmatrix} \right\rangle, \qquad e \qquad U_2: \begin{cases} x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare le equazioni cartesiane ed una base di U_1 ed U_2. Si determini, se esiste, una base $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $U_1 = \langle u_1, u_2 \rangle$ ed $U_2 = \langle u_3, u_4 \rangle$.
(b) Si determinino le matrici $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi)$ ed $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma)$, ove $\pi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ è la proiezione su U_1 parallelamente ad U_2 e $\sigma: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ è la simmetria di asse U_2 e direzione U_1.
(c) Si dica se l'insieme

$$\mathscr{U} = \left\{ \phi \in Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4) \mid \pi \circ \phi \circ \pi = \phi \right\}$$

è un sottospazio e se ne determini la dimensione.

Svolgimento. (a) I tre vettori dati, v_1, v_2, v_3, sono una base di U_1 e gli elementi di questo sottospazio soddisfano l'equazione $x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$. $U_2 = \langle v_4 \rangle$, ove $v_4 = e_1 - e_2 - e_3 - e_4$ ($\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$). Non può quindi esistere una base del tipo richiesto.

(b) $A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. $S = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma) = 1 - 2A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(c) Usando la base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, si ha $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi) = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$ e quindi, per ogni $\phi \in \mathscr{U}$, si ha $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} a&b&c&0 \\ d&e&f&0 \\ g&h&i&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$, e perciò $\mathscr{U}$ è un sottospazio di dimensione 9 di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -1/4 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, di $\mathbb{R}^4$.

(a) *Si determini il polinomio caratteristico di ϕ e si dica se ϕ è invertibile.*

(b) *Si determinino gli autovalori, i relativi spazi di autovettori per ϕ e si dica se ϕ è diagonalizzabile. In caso affermativo, si determinino una matrice diagonale, D, ed una matrice invertibile, P, tali che $P^{-1}AP = D$.*

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}) = x(x-1)(x+2)^2$ ed ha il termine noto uguale a 0; quindi $\det A = 0$ e ϕ non è invertibile.

(b) Le caratteristiche salienti di ϕ sono

Autovalori	0	1	-2
molteplicità algebrica	1	1	2
molteplicità geometrica	1	1	2
Autospazi	$\langle 4e_1 - 3e_3 \rangle$	$\langle e_1 - e_2 - e_3 + 4e_4 \rangle$	$\langle 2e_1 - e_3, e_1 + 4e_2 - 4e_4 \rangle$

Quindi ϕ è diagonalizzabile e, indicata con $\mathcal{V}$ la base formata dagli autovettori scritti sopra, le matrici cercate sono

$$D = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

□

ESERCIZIO 4. *Sia V uno spazio vettoriale reale e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una sua base. Si consideri la forma quadratica $q : V \to \mathbb{R}$, definita da*

$$q(x_1v_1 + \cdots + x_4v_4) = X_1^2 + 4X_1X_3 - 3X_2^2 + 2X_2X_4 + 5X_3^2 + X_4^2.$$

(a) *Si scriva la matrice nella base $\mathcal{V}$ dell'applicazione bilineare simmetrica, $g : V \times V \to \mathbb{R}$, tale che $g(v, v) = q(v)$, per ogni $v \in V$. Detta G la matrice di g rispetto alla base data, si determinino una matrice invertibile, P, ed una matrice diagonale, D, tali che $D = {}^tPGP$. Qual è la segnatura di g?*

(b) *Si fissi un sottospazio isotropo, $H \neq \langle 0 \rangle$, di V e sia $H^\perp = H \oplus T$. Si verifichi che $H = T^\perp \cap H^\perp$ e si deduca che la restrizione di g a T è non degenere. L'affermazione resta vera per ogni spazio vettoriale, V, di dimensione finita ed ogni applicazione bilineare $g : V \times V \to \mathbb{R}$ non degenere e non definita?*

Svolgimento. (a) La matrice di g è

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che è non-degenere ($\det G = -4$). Una base ortogonale, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$, è data dai vettori $w_1 = v_1$, $w_2 = v_2$, $w_3 = 2v_1 - v_3$ e $w_4 = v_2 + 3v_4$. La segnatura di g è $(3, 1)$ e, posto

$$P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{si ha} \quad {}^tPGP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

(*b*) Siano H e T come sopra e sia $t_0 \in T^\perp \cap H^\perp$. Allora, per ogni $t \in T$ ed ogni $v \in H$, si ha $g(t_0, t+h) = g(t_0, t) + g(t_0, h) = 0$ e quindi $t_0 \in (H^\perp)^\perp = H$. Come si vede il ragionamento non dipende dalla dimensione di V o dalla segnatura di g, ma solo dal fatto che g è non degenere (e quindi $(H^\perp)^\perp = H$). □

ESERCIZIO 5. [NUOVO ORDINAMENTO (DM270/04)] *Studiare la conica $\mathscr{C}$ di equazione*

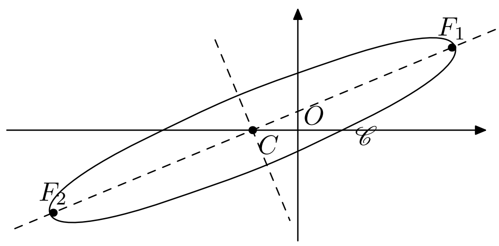
$$x^2 - 4xy + 5y^2 + 2x - 4y - 3 = 0 \ .$$

In particolare determinare se è degenere, qual è il suo tipo, un'equazione canonica e l'opportuna trasformazione di coordinate, gli eventuali assi, asintoti, centro, fuochi. Se ne tracci infine un disegno approssimativo.

Svolgimento. Una matrice della conica $\mathscr{C}$ è $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Poiché $\det A = -4$ e $\det A' = 1$ (A' è la sottomatrice quadrata di A che si ottiene cancellando prima riga e prima colonna) si tratta di un'ellisse. Il centro, C, è la soluzione del sistema

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ -2x + 5y = 2 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A' ha autovalori $3 - 2\sqrt{2}$ e $3 + 2\sqrt{2}$ a cui corrispondono gli autovettori $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, direzioni degli assi. Il coefficiente $\rho = 1/4$ e l'equazione canonica di $\mathscr{C}$, in un opportuno sistema di riferimento ortonormale, è $\frac{3-2\sqrt{2}}{4}X^2 + \frac{3+2\sqrt{2}}{4}Y^2 = 1$. La matrice dell'isometria che porta l'equazione in forma canonica è $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & (1+\sqrt{2})/\sqrt{4+2\sqrt{2}} & (1-\sqrt{2})/\sqrt{4-2\sqrt{2}} \\ 0 & 1/\sqrt{4+2\sqrt{2}} & 1/\sqrt{4-2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, come si può verificare calcolando la matrice $(1/4)\,{}^tSAS$.



Gli assi sono le rette $h_1 : (1 - \sqrt{2})(x+1) + y = 0$ (asse focale) ed $h_2 : (1 + \sqrt{2})(x+1) + y = 0$; ed i fuochi si trovano sull'asse focale, a distanza $4\sqrt[4]{2}$ dal centro. □

ESERCIZIO 6. [VECCHIO ORDINAMENTO (DM509/99)] *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, di $\mathbb{R}^4$.

(a) *Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ. Si determinino una matrice di Jordan, J, di ϕ, ed una matrice invertibile, P, tali che $P^{-1}AP = J$.*
(b) *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 7. Si determinino gli endomorfismi $\psi : V \to V$ il cui polinomio minimo coincide con quello di ϕ e si indichino in ogni caso le dimensioni dei sottospazi di autovettori generalizzati relativi a ψ.*

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}) = (x+1)^4$, e quindi l'unico autovalore è uguale a -1. Si ha

$$A + 1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad (A+1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{ed} \quad (A+1)^3 = \mathbf{0}.$$

Se ne deduce che il polinomio minimo di ϕ è $(x+1)^3$.

La matrice di Jordan ha quindi un blocco di ordine 3 ed uno di ordine 1, relativi all'autovalore -1. Una base, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, rispetto a cui ϕ ha forma di Jordan è costituita dai vettori $v_4 = e_2$, $v_3 = (\phi+1)(v_4) = e_1 + 4e_2 - 4e_4$, $v_2(\phi+1)^2(v_4) = e_1 + e_3$ e $v_1 = e_1 + 3e_2 - 3e_4$. Perciò possiamo scrivere

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Il polinomio minimo è $\lambda_\psi(x) = (x+1)^3$ e quindi l'unico autovalore è -1; ψ non è diagonalizzabile e il massimo periodo per un autovettore generalizzato è uguale a 3. Vi sono quindi quattro possibili forme di Jordan (non simili tra loro) per la matrice di ψ, ovvero

$$J_1 = \begin{pmatrix} -1 &&&&&& \\ & -1 &&&&& \\ && -1 &&&& \\ &&& -1 &&& \\ &&&& -1 & 1 & 0 \\ &&&& 0 & -1 & 1 \\ &&&& 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad J_2 = \begin{pmatrix} -1 &&&&&& \\ & -1 &&&&& \\ && -1 & 1 &&& \\ && 0 & -1 &&& \\ &&&& -1 & 1 & 0 \\ &&&& 0 & -1 & 1 \\ &&&& 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 &&&&& \\ 0 & -1 &&&&& \\ && -1 & 1 &&& \\ && 0 & -1 &&& \\ &&&& -1 & 1 & 0 \\ &&&& 0 & -1 & 1 \\ &&&& 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad J_4 = \begin{pmatrix} -1 &&&&&& \\ & -1 & 1 & 0 &&& \\ & 0 & -1 & 1 &&& \\ & 0 & 0 & -1 &&& \\ &&&& -1 & 1 & 0 \\ &&&& 0 & -1 & 1 \\ &&&& 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

In particolare, nei vari casi, si ha

	$\dim\ker(\phi+1)$	$\dim\ker(\phi+1)^2$	$\dim\ker(\phi+1)^3$
J_1	5	6	7
J_2	4	6	7
J_3	3	6	7
J_4	3	5	7

Fine della discussione. $\square$