# Esame di Geometria (laurea in Fisica)

prova scritta del 16 luglio 2009

**ESERCIZIO 1**. *Nello spazio euclideo $E^4$, si considerino le sottovarietà lineari*

$$\mathbb{L} : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad ed \qquad \mathbb{M} : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 6 \end{cases} .$$

*(a) Si determinino le dimensioni di $\mathbb{L}$, ed $\mathbb{M}$, e si dica se sono incidenti, parallele, sghembe o altro.*
*(b) Si scelgano un punto, $P_0$, di $\mathbb{L}$ ed un punto, $Q_0$, di $\mathbb{M}$ e si determini il punto medio, $M$, del segmento $P_0Q_0$. Si determinino le equazioni cartesiane di un iperpiano, $\mathbb{U}$, passante per $M$ e parallelo sia ad $\mathbb{L}$ che ad $\mathbb{M}$. È vero che, per ogni punto, $P$, di $\mathbb{L}$ ed ogni punto, $Q$, di $\mathbb{M}$, il punto medio del segmento $PQ$ appartiene ad $\mathbb{U}$?*

*Svolgimento.* (a) $\mathbb{L}$ è un piano ed $\mathbb{M}$ è la retta $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$. Le due sottovarietà sono incidenti (in un punto).

$(b)$ Presi i due punti indicati sopra, si ha $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$ e l'iperpiano cercato ha equazione $\mathbb{U} : 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 12$. Il lettore può verificare agevolmente l'ultima affermazione. □

**ESERCIZIO 2**. *Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi*

$$U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad e \qquad U_2 : \begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases} .$$

*(a) Determinare una base ed un sistema di equazioni cartesiane minimale per $U_1$ ed $U_2$. Si determini, se esiste, una base $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $U_1 = \langle u_1, u_2 \rangle$ ed $U_2 = \langle u_3, u_4 \rangle$.*
*(b) Si determinino le matrici $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi)$ e $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma)$, ove $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ è la proiezione su $U_1$ parallelamente ad $U_2$ e $\sigma : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ è la simmetria di asse $U_2$ e direzione $U_1$.*
*(c) Si dica se l'insieme*

$$\mathscr{U} = \left\{ \phi \in Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4) \mid \sigma \circ \phi \circ \sigma = \phi \right\}$$

*è un sottospazio e se ne determini la dimensione. È vero che $\phi, \psi \in \mathscr{U} \Rightarrow \phi \circ \psi \in \mathscr{U}$?*

*Svolgimento.* (a) Una base di $U_1$ è data da $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (il terzo generatore è $u_1 - u_2$) ed il sottospazio soddisfa alle equazioni cartesiane $U_1 : \begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$.

Una base di $U_2$ è data da $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed $u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ed il sottospazio soddisfa alle equazioni cartesiane $U_2 : \begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ (la terza equazione è la somma delle prime due).

I quattro vettori, $u_1, \dots, u_4$, scritti sopra formano una base del tipo richiesto.

$(b)$ Le matrici cercate sono

$$A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ed} \qquad S = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$(c)$ $\mathscr{U}$ è un sottospazio di dimensione 8. □

**ESERCIZIO 3**. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

*rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, di $\mathbb{R}^4$.*

(a) *Si determini il polinomio caratteristico di $\phi$ e si dica se $\phi$ è invertibile.*

(b) *Si determinino gli autovalori, i relativi spazi di autovettori per $\phi$ e si dica se $\phi$ è diagonalizzabile. In caso affermativo, si determinino una matrice diagonale, $D$, ed una matrice invertibile, $P$, tali che $P^{-1}AP = D$.*

*Svolgimento.* (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}) = (x-2)^2(x+4)^2$ ed ha il termine noto uguale a 64; quindi $\det A \neq 0$ e $\phi$ è invertibile.

$(b)$ Le caratteristiche salienti di $\phi$ sono

| Autovalori | $2$ | $-4$ |
|---|---|---|
| molteplicità algebrica | 2 | 2 |
| molteplicità geometrica | 2 | 2 |
| Autospazi | $\langle e_2 - e_4, e_3 - e_4 \rangle$ | $\langle e_1 + e_2, e_2 + e_4 \rangle$ |

Quindi $\phi$ è diagonalizzabile e, indicata con $\mathcal{V}$ la base formata dagli autovettori scritti sopra, possiamo scrivere

$$D = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

**ESERCIZIO 4**. *Sia $V$ uno spazio vettoriale reale e $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$ una sua base. Si consideri la forma quadratica $q : V \to \mathbb{R}$, definita da*

$$q(X_1e_1 + \cdots + X_4e_4) = X_1^2 + 4x_1x_2 - 2X_1X_4 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 - 8X_2X_4 - 5x_3^2.$$

(a) *Si scriva la matrice nella base $\mathcal{E}$ dell'applicazione bilineare simmetrica, $g : V \times V \to \mathbb{R}$, tale che $g(v, v) = q(v)$, per ogni $v \in V$. Si dica se $g$ è non-degenere e si determini la segnatura di $g$. Si determini, se esiste, una base ortogonale, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, tale che $v_i \in \langle e_1, \dots, e_i \rangle$ per $i = 1, \dots, 4$ e si scriva la matrice di $g$ rispetto a tale base.*

(b) *Si dica se esiste una base, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$, di $V$ per cui $g$ abbia matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0&0&2&0 \\ 0&0&0&2 \\ 2&0&0&0 \\ 0&2&0&0 \end{smallmatrix}\right)$ e, in caso affermativo, si determini una tale base. Sia $\psi : \langle w_1, w_2 \rangle \to \langle w_3, w_4 \rangle$ un isomorfismo di spazi vettoriali e sia $B$ la sua matrice nelle basi date. È vero che l'applicazione lineare $\phi : V \to V$ di matrice $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & {}^tB^{-1} \\ B & 0 \end{smallmatrix}\right)$ è un'isometria?*

*Svolgimento.* (a) La matrice di $g$ è

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che è non-degenere, perchédet $G = 16$. Poiché vi sono vettori isotropi per $g$, deve aversi sgn$g = (2, 2)$. Una base ortogonale dwel tipo richiesto è $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, con $v_1 = e_1$, $v_2 = 2e_1 - e_2$, $v_3 = e_1 - \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3$ e $v_4 = 3e_1 - \frac{5}{4}e_2 - \frac{1}{4}e_3 + \frac{1}{2}e_4$. Quindi posto

$$P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1/2 & -5/4 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad \text{si ha} \quad {}^tPGP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(*b*) Basta porre $w_1 = v_1 + v_2$, $w_2 = v_3 + v_4$, $w_3 = v_1 - v_2$ $w_4 = v_3 - v_4$. L'ultima affermazione si verifica con un calcolo diretto. □

**ESERCIZIO 5**. [NUOVO ORDINAMENTO (DM270/04)] *Studiare la conica $\mathscr{C}$ di equazione*

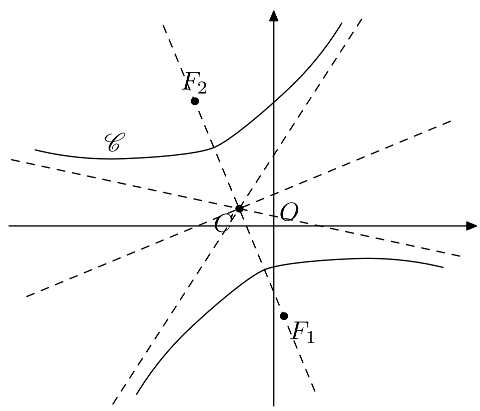
$$x^2 + 4xy - 3y^2 + 2y + 1 = 0 .$$

*In particolare determinare se è degenere, qual è il suo tipo, un'equazione canonica e l'opportuna trasformazione di coordinate, gli eventuali assi, asintoti, centro, fuochi. Se ne tracci infine un disegno approssimativo.*

*Svolgimento.* Una matrice della conica $\mathscr{C}$ è $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Poiché $\det A = -8$ e $\det A' = -7$ ($A'$ è la sottomatrice quadrata di $A$ che si ottiene cancellando prima riga e prima colonna) si tratta di un'iperbole.

Le direzioni degli asintoti sono $w_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{7}-2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $w_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{7}+2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Il centro, $C$, è la soluzione del sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad C = \begin{pmatrix} -2/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}.$$




La matrice $A'$ ha autovalori $-1 - 2\sqrt{2}$ e $-1 + 2\sqrt{2}$ a cui corrispondono gli autovettori $\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ 1 \end{pmatrix}$, direzioni degli assi. Il coefficiente $\rho = -7/8$ e l'equazione canonica di $\mathscr{C}$, in un opportuno sistema di riferimento ortonormale, è

$$\frac{7(2\sqrt{2}+1)}{8}X^2 - \frac{7(2\sqrt{2}-1)}{8}Y^2 = 1.$$

La matrice dell'isometria che porta l'equazione in forma canonica è

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/7 & (\sqrt{2}-1)/\sqrt{4-2\sqrt{2}} & (\sqrt{2}+1)/\sqrt{4+2\sqrt{2}} \\ 1/7 & -1/\sqrt{4-2\sqrt{2}} & 1/\sqrt{4+2\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

come si può verificare calcolando la matrice $(-7/8)\,{}^tSAS$.

Gli assi hanno quindi equazioni:

$$h_1 : (\sqrt{2}+1)(x + 2/7) + (y - 1/7) = 0 \ \text{(asse focale)}, \qquad h_2 : (\sqrt{2}-1)(x + 2/7) - (y - 1/7) = 0,$$

e gli asintoti sono le rette

$$a_1 : \sqrt{7}x + (2\sqrt{7} - 7)y + 1 = 0, \quad a_2 : \sqrt{7}x + (2\sqrt{7} + 7)y - 1 = 0.$$

ed i fuochi si trovano sull'asse focale, a distanza $\frac{8}{7\sqrt[4]{2}}$ dal centro. $\square$

**ESERCIZIO 6**. [VECCHIO ORDINAMENTO (DM509/99)] *Si consideri l'endomorfismo* $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, *di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

*rispetto alla base canonica,* $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, *di* $\mathbb{R}^4$.

(a) *Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di* $\phi$. *Si determinino una matrice di Jordan,* $J$, *di* $\phi$, *ed una matrice invertibile,* $P$, *tali che* $P^{-1}AP = J$.

(b) *Si ricorda che una matrice,* $M$, *si dice idempotente se* $M^2 = M$ *ed una matrice,* $N$, *si dice nilpotente se esiste un numero naturale* $k$ *tale che* $N^k = 0$. *È vero che due matrici idempotenti,* $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, *sono simili se, e solo se, hanno lo stesso rango? È vero che due matrici nilpotenti,* $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, *sono simili se, e solo se, hanno lo stesso rango?*

*Svolgimento.* (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}) = (x + 1)^4$, e quindi l'unico autovalore è uguale a $-1$. Si ha

$$A + 1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (A + 1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad \text{ed} \quad (A + 1)^3 = \mathbf{0}.$$

Se ne deduce che il polinomio minimo di $\phi$ è $(x + 1)^3$.

La matrice di Jordan ha quindi un blocco di ordine 3 ed uno di ordine 1, relativi all'autovalore $-1$. Una base, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, rispetto a cui $\phi$ ha forma di Jordan è costituita dai vettori $v_4 = e_2$, $v_3 = (\phi+1)(v_4) = -e_2 + e_3 + e_4$, $v_2(\phi + 1)^2(v_4) = e_2 - e_4$ e $v_1 = e_1 + 2e_3$. Perciò possiamo scrivere

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

($b$) Sia $M$ una matrice idempotente. Il polinomio minimo di $M$ divide $X^2 - X = X(X - 1)$ quindi è prodotto di fattori lineari distinti per cui $M$ è diagonalizzabile con autovalori uguali a 0 o 1. Il numero di autovalori uguali ad 1 è proprio il rango di $M$ e quindi la risposta è affermativa.

L'affermazione è falsa per le matrici nilpotenti. Ad esempio

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono entrambe nilpotenti e di rango 2, ma hanno due diversi polinomi minimi ($X^3$ per la prima ed $X^2$ per la seconda). Quindi non possono essere simili. $\square$