
Esame di Geometria (laurea in Fisica)

prova scritta del 14 settembre 2009

ESERCIZIO 1. Nello spazio euclideo E^4 , si considerino le sottovarietà lineari

$$\mathbb{L}_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{ed} \quad \mathbb{L}_2 : \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

- (a) Si determinino le dimensioni di $\mathbb{L}_1$, ed $\mathbb{L}_2$, e si dica se sono incidenti, parallele, sghembe o altro.
- (b) Si determini la distanza di $\mathbb{L}_1$ da $\mathbb{L}_2$.

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi

$$U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \text{e} \quad U_2 : \begin{cases} 4x_2 - 7x_4 = 0 \\ 2x_4 + 5x_2 = 0 \\ 3x_4 - 17x_2 = 0 \end{cases}.$$

- (a) Determinare le equazioni cartesiane ed una base di U_1 ed U_2 . Si determini, se esiste, una base $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $U_1 = \langle u_1, u_2 \rangle$ ed $U_2 = \langle u_3, u_4 \rangle$.
- (b) Detta $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$, si determinino le matrici $\alpha_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}(\pi)$, ove $\pi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ è la proiezione su U_2 parallelamente ad U_1 e la matrice $\alpha_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}(\sigma)$, ove $\sigma : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la simmetria di asse U_2 e direzione U_1 .
- (c) Si determinino le dimensioni dei sottospazi

$$\mathcal{C} = \{ \phi \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4) \mid \phi \circ \sigma = \phi \} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \{ \phi \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4) \mid \sigma \circ \phi = \phi \}.$$

Che dire di $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$?

ESERCIZIO 3. Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, di $\mathbb{R}^4$.

- (a) Si determini il polinomio caratteristico di ϕ . Si determinino gli autovalori, i relativi spazi di autovettori per ϕ e si dica se ϕ è diagonalizzabile
- (b) . In caso affermativo, si determinino una matrice diagonale, D , ed una matrice invertibile, P , tali che $P^{-1}AP = D$. Si calcoli A^{100}

ESERCIZIO 4. Sia V uno spazio vettoriale reale e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una sua base. Si consideri la forma quadratica $q : V \rightarrow \mathbb{R}$, definita da

$$q(x_1v_1 + \dots + x_4v_4) = -12x_1x_2 - 6x_1x_3 - 12x_1x_4 - 4x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_2x_4 + 3x_3^2 - 6x_3x_4.$$

- (a) Si scriva la matrice nella base $\mathcal{V}$ dell'applicazione bilineare simmetrica, $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, tale che $g(v, v) = q(v)$, per ogni $v \in V$. Si determinino nucleo e segnatura di g .

- (b) Si dica se i sottospazi $W_1 = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $W_2 = \langle v_3, v_4 \rangle$ sono complementari del nucleo, N . In caso affermativo si scriva la matrice, nelle basi date, dell'applicazione $\phi : W_1 \rightarrow W_2$, che manda ogni vettore $w \in W_1$ nella sua proiezione su W_2 , parallelamente ad N . Si verifichi se ϕ è un'isometria.

ESERCIZIO 5. [NUOVO ORDINAMENTO (DM270/04)] Studiare la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$4x^2 - 10xy + 4y^2 - 6x + 12y + 1 = 0 .$$

In particolare determinare se è degenere, qual è il suo tipo, un'equazione canonica e l'opportuna trasformazione di coordinate, gli eventuali assi, asintoti, centro, fuochi. Se ne tracci infine un disegno approssimativo.

ESERCIZIO 6. [VECCHIO ORDINAMENTO (DM509/99)] Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, di matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, di $\mathbb{R}^4$.

- (a) Si determini il polinomio caratteristico di ϕ e si dica se ϕ è invertibile.
(b) Si determinino gli autovalori, i relativi spazi di autovettori per ϕ ed il polinomio minimo. Si determini una matrice di Jordan, J , di ϕ , ed una matrice invertibile, P , tali che $P^{-1}AP = J$.