Autovalori e Autovettori

Forma Canonica di Jordan

Esercizio 1. Determinare la forma canonica di Jordan dell'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -3 & -6 & -8 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Si determini inoltre una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto a cui la matrice di ϕ è la forma canonica trovata.

Esercizio 2. Determinare la forma canonica di Jordan dell'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si determini inoltre una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto a cui la matrice di ϕ è la forma canonica trovata.

Esercizio 3. Determinare la forma canonica di Jordan dell'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -4 & -3 \\ 4 & 0 & 5 & 3 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si determini inoltre una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto a cui la matrice di ϕ è la forma canonica trovata.

Esercizio 4. Determinare la forma canonica di Jordan dell'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si determini inoltre una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto a cui la matrice di ϕ è la forma canonica trovata.

Esercizio 5. Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti reali tale che $A^2 = A$. Si dimostri che A è diagonalizzabile e che i suoi autovalori sono solo 0 oppure 1.

Si dimostri inoltre che, se anche B è una matrice tale che $B^2 = B$, allora A e B sono simili se e solo se hanno lo stesso rango.

Esercizio 6. Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti reali, non-degenere e antisimmetrica. Si dimostri che tutti gli autovalori di A sono puramente immaginari.

Polinomio Minimo e Polinomio Caratteristico

Esercizio 7. Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione 9. Si determinino tutti gli endomorfismi ϕ di V che soddisfano alle seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} &\dim \mathrm{Ker}(\phi - 2) = 1, \quad \dim \mathrm{Ker}(\phi - 2)^3 = 3, \\ &\dim \mathrm{Ker}(\phi - 3) = 2, \quad \dim \mathrm{Ker}(\phi - 3)^2 = 4, \\ &\dim \mathrm{Im}(\phi^2) = 7. \end{aligned}$$

Esercizio 8. Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione 6. Si determinino tutti gli endomorfismi ϕ di V che hanno rango ≥ 4 ed il cui polinomio minimo è $x^4 - 6x^3 + 9x^2$.

Esercizi Vari

Esercizio 9. I *numeri di Fibonacci* sono i termini della successione definita ponendo $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, per $n \geq 3$ (i primi termini sono 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, etc.).

Si determini una formula per calcolare l'ennesimo numero di Fibonacci x_n, per ogni $n > 0$.