Autovalori e Autovettori

Forma Canonica di Jordan

Svolgimento Esercizio 1. Determiniamo gli autovalori di A:

$$\begin{aligned}
\det(\lambda - A) &= \det \begin{pmatrix} \lambda-3 & -4 & -4 \\ 3 & \lambda+6 & 8 \\ -3 & -7 & \lambda-9 \end{pmatrix} \\
&= (\lambda-3) \begin{vmatrix} \lambda+6 & 8 \\ -7 & \lambda-9 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ -3 & \lambda-9 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 3 & \lambda+6 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} \\
&= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0,
\end{aligned}$$

le cui soluzioni sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 3$. La matrice A ha quindi 3 autovalori distinti e, di conseguenza, la sua forma canonica di Jordan è

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di ϕ è J è costituita dagli autovettori relativi agli autovalori 1, 2 e 3 di A.

Determiniamo ora gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_1 = 1$; essi sono le soluzioni del sistema

$$(A - \lambda_1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Sviluppando i calcoli si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ -3x_1 - 7x_2 - 8x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date da $x_1 = 2x_3$ e $x_2 = -2x_3$. Un autovettore relativo all'autovalore $\lambda_1 = 1$ è, ad esempio, il vettore $v_1 = {}^t(2, -2, 1)$. Questo sarà il primo vettore di una base di Jordan.

Per l'autovalore $\lambda_2 = 2$ si ottiene il sistema

$$(A - \lambda_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

che fornisce

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ -3x_1 - 8x_2 - 8x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $x_1 = 0$ e $x_2 = -x_3$. Un autovettore relativo all'autovalore $\lambda_2 = 2$ è, ad esempio, il vettore $v_2 = {}^t(0, -1, 1)$. Questo sarà il secondo vettore di una base di Jordan.

Finalmente, per l'autovalore $\lambda_3 = 3$ si ottiene il sistema

$$(A - \lambda_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

che fornisce

$$\begin{cases} 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ -3x_1 - 9x_2 - 8x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $x_1 = \frac{1}{3}x_3$ e $x_2 = -x_3$. Un autovettore relativo all'autovalore $\lambda_3 = 3$ è, ad esempio, il vettore $v_3 = {}^t(1, -3, 3)$. Questo sarà il terzo vettore di una base di Jordan.

Se indichiamo con S la matrice le cui colonne sono costituite dalle componenti dei vettori della base di Jordan trovata,

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

si ha dunque $AS = SJ$, da cui si deduce che $A = SJS^{-1}$ (come esercizio, si può verificare questa uguaglianza con un calcolo diretto).

Svolgimento Esercizio 2. Determiniamo gli autovalori di A:

$$\begin{aligned} \det(\lambda - A) &= \det \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda+1) \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+1)^2(\lambda-1)^2. \end{aligned}$$

Gli autovalori di A sono quindi $\lambda_1 = -1$, con molteplicità 2, e $\lambda_2 = 1$, anch'esso con molteplicità 2.

Determiniamo ora gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_1 = -1$; essi sono le soluzioni del sistema

$$(A - \lambda_1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Sviluppando i calcoli si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 2x_2 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - x_4 = 0 \\ -2x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date da $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ e x_3 qualunque. L'insieme delle soluzioni costituisce quindi un sottospazio vettoriale di dimensione 1, che è precisamente l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = -1$. Una sua base è data, ad esempio, dal vettore $v_1 = e_3 = {}^t(0, 0, 1, 0)$. Questo sarà il primo vettore di una base di Jordan.

Si può ora dedurre che nella forma canonica di Jordan di A comparirà un blocco di Jordan della forma

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

perché l'autovalore -1 ha molteplicità 2, però c'è un solo autovettore linearmente indipendente relativo a tale autovalore.

Di conseguenza, come secondo vettore v_2 di una base di Jordan, dovremo prendere un vettore che soddisfi la condizione seguente:

$$Av_2 = -v_2 + v_1,$$

ossia

$$(A + 1)v_2 = v_1.$$

Si ottiene così un sistema di equazioni lineari che è uguale al sistema precedente in cui abbiamo sostituito la colonna di zeri a destra dell'uguale con la colonna delle componenti del vettore v_1.

Sviluppando i calcoli si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 2x_2 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - x_4 = 1 \\ -2x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date da $x_1 = 1$, $x_2 = x_4 = 0$ e x_3 qualunque. Possiamo quindi prendere come secondo vettore di una base di Jordan il vettore $v_2 = {}^t(1, 0, 0, 0)$.

Passiamo ora a considerare l'autovalore $\lambda_2 = 1$. Gli autovettori corrispondenti si trovano risolvendo il sistema

$$(A - \lambda_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Sviluppando i calcoli si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -2x_1 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_2 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date da $x_1 = x_2 = 0$ e $x_4 = -2x_3$. L'insieme delle soluzioni costituisce quindi un sottospazio vettoriale di dimensione 1, che è precisamente l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = 1$. Una sua base è data, ad esempio, dal vettore $v_3 = {}^t(0, 0, 1, -2)$. Questo sarà il terzo vettore di una base di Jordan.

Si può ora dedurre che nella forma canonica di Jordan di A comparirà un blocco di Jordan della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

perché l'autovalore 1 ha molteplicità 2, ma c'è un solo autovettore linearmente indipendente relativo a tale autovalore.

Di conseguenza, come quarto vettore v_4 di una base di Jordan, dovremo prendere un vettore che soddisfi l'equazione seguente:

$$Av_4 = v_4 + v_3,$$

ossia

$$(A - 1)v_4 = v_3.$$

Si ottiene così un sistema di equazioni lineari che è uguale al sistema precedente in cui abbiamo sostituito la colonna di zeri a destra dell'uguale con la colonna delle componenti del vettore v_3.

Sviluppando i calcoli si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -2x_1 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \\ -2x_2 = -2 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date da $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $x_4 = -2x_3 - 4$. Possiamo quindi prendere come quarto vettore di una base di Jordan il vettore $v_4 = {}^t(0, 1, 0, -4)$.

Si conclude pertanto che i vettori v_1, v_2, v_3 e v_4 costituiscono una base di Jordan, rispetto alla quale l'endomorfismo ϕ ha matrice di Jordan

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se indichiamo con S la matrice le cui colonne sono costituite dalle componenti dei vettori della base di Jordan trovata,

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix},$$

si ha dunque $AS = SJ$, da cui si deduce che $A = SJS^{-1}$ (come esercizio, si può verificare questa uguaglianza con un calcolo diretto).

Svolgimento Esercizio 3. Determiniamo gli autovalori di A:

$$\begin{aligned} \det(\lambda - A) &= \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda - 2 & 4 & 3 \\ -4 & 0 & \lambda - 5 & -3 \\ 3 & 0 & 2 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - 2)^2 \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -3 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 2)^2(\lambda^2 - 5\lambda + 6) \\ &= (\lambda - 2)^3(\lambda - 3). \end{aligned}$$

Gli autovalori di A sono quindi $\lambda_1 = 2$, con molteplicità 3, e $\lambda_2 = 3$, con molteplicità 1.

Determiniamo ora gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_1 = 2$; essi sono le soluzioni del sistema

$$(A - \lambda_1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Sviluppando i calcoli si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -4x_1 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ -3x_1 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date da $x_1 = x_3 = x_4 = 0$ e x_2 qualunque. L'insieme delle soluzioni costituisce quindi un sottospazio vettoriale di dimensione 1, che è precisamente l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 2$. Una sua base è data, ad esempio, dal vettore $v_1 = e_2 = {}^t(0, 1, 0, 0)$. Questo sarà il primo vettore di una base di Jordan.

Si può ora dedurre che nella forma canonica di Jordan di A comparirà un blocco di Jordan della forma

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

perché l'autovalore 2 ha molteplicità 3, però c'è un solo autovettore linearmente indipendente relativo a tale autovalore.

Di conseguenza, come secondo vettore v_2 di una base di Jordan, dovremo prendere un vettore che soddisfi la condizione seguente:

$$Av_2 = 2v_2 + v_1,$$

ossia

$$(A - 2)v_2 = v_1.$$

Si ottiene così un sistema di equazioni lineari che è uguale al sistema precedente in cui abbiamo sostituito la colonna di zeri a destra dell'uguale con la colonna delle componenti del vettore v_1.

Le soluzioni di tale sistema sono date da $x_1 = 0$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$ e x_2 qualunque. Possiamo quindi prendere come secondo vettore di una base di Jordan il vettore $v_2 = {}^t(0, 0, -1, 1)$.

Analogamente, come terzo vettore v_3 di una base di Jordan, dovremo prendere un vettore che soddisfi la condizione seguente:

$$Av_3 = 2v_3 + v_2,$$

ossia

$$(A - 2)v_3 = v_2.$$

Si ottiene così un sistema di equazioni lineari che è uguale al sistema precedente in cui abbiamo sostituito la colonna dei termini noti con la colonna delle componenti del vettore v_2.

Le soluzioni di tale sistema sono date da $x_1 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ e x_2 qualunque. Possiamo quindi prendere come terzo vettore di una base di Jordan il vettore $v_3 = {}^t(-1, 0, 1, 0)$.

Passiamo ora a considerare l'autovalore $\lambda_2 = 3$. Gli autovettori corrispondenti si trovano risolvendo il sistema

$$(A - \lambda_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Sviluppando i calcoli si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -x_1 = 0 \\ -4x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date da $x_1 = 0$, $x_2 = -2x_3$ e $x_4 = -\frac{2}{3}x_3$. L'insieme delle soluzioni costituisce quindi un sottospazio vettoriale di dimensione 1, che è precisamente l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = 3$. Una sua base è data, ad esempio, dal vettore $v_4 = {}^t(0, -6, 3, -2)$. Questo sarà il quarto vettore di una base di Jordan.

Si conclude pertanto che i vettori v_1, v_2, v_3 e v_4 costituiscono una base di Jordan, rispetto alla quale l'endomorfismo ϕ ha matrice di Jordan

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se indichiamo con S la matrice le cui colonne sono costituite dalle componenti dei vettori della base di Jordan trovata,

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

si ha dunque $AS = SJ$, da cui si deduce che $A = SJS^{-1}$. Si verifichi ora, per esercizio, che

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 6 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

e si verifichi l'uguaglianza $A = SJS^{-1}$ con un calcolo diretto.

Svolgimento Esercizio 4. Determiniamo gli autovalori di A:

$$
\begin{aligned}
\det(\lambda - A) &= \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -2 & 4 \\ -1 & \lambda - 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \lambda - 4 \end{pmatrix} \\
&= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 4 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - 2)^2 \begin{vmatrix} \lambda & 4 \\ -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - 2)^4.
\end{aligned}
$$

Quindi A ha un unico autovalore $\lambda = 2$, con molteplicità 4.

Determiniamo ora gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda = 2$; essi sono le soluzioni del sistema

$$
(A - \lambda) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0.
$$

Sviluppando i calcoli si ottiene il sistema

$$
\begin{cases} -2x_1 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}
$$

le cui soluzioni sono date da $x_1 = x_3 - 2x_4$ e x_2, x_3, x_4 qualunque. L'insieme delle soluzioni costituisce quindi un sottospazio vettoriale di dimensione 3, che è precisamente l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 2$. Una sua base è data, ad esempio, dai vettori $v_1 = {}^t(0, 1, 0, 0)$, $v_2 = {}^t(1, 0, 1, 0)$ e $v_3 = {}^t(-2, 0, 0, 1)$.

Da quanto visto si deduce che la forma canonica di Jordan di A è (a meno di un riordinamento dei blocchi di Jordan)

$$
J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
$$

In questo caso non è più possibile applicare il metodo descritto nei due esercizi precedenti per determinare una base di Jordan. Infatti bisognerebbe ora determinare un autovettore generalizzato v_4 relativo all'autovalore $\lambda = 2$, cioè v_4 deve soddisfare l'equazione

$$
Av_4 = 2v_4 + v,
$$

dove v è un autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 2$. Ora però esiste uno spazio di dimensione 3 di autovettori, quindi non si sa come scegliere in nostro v! (Si verifichi per esercizio che nessuno dei tre sistemi $Av_4 = 2v_4 + v_1$, $Av_4 = 2v_4 + v_2$ e $Av_4 = 2v_4 + v_3$ ha soluzioni. Non è quindi possibile trovare una base di Jordan utilizzando i tre vettori

v_1, v_2 e v_3 determinati in precedenza; il che è abbastanza naturale, visto che i vettori v_1, v_2 e v_3 sono stati presi *a caso* dentro uno spazio di dimensione 3).

Utilizziamo quindi un altro procedimento. Indichiamo con w_1 e w_2 i primi due vettori della base di Jordan (che vogliamo determinare). Osservando la matrice di Jordan J scritta in precedenza, si deduce che w_1 è un autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 2$, cioè si deve avere

$$(A-2)w_1 = 0,$$

mentre w_2 è un autovettore generalizzato relativo all'autovalore $\lambda = 2$, cioè si deve avere

$$(A-2)w_2 = w_1.$$

Moltiplicando quest'ultima equazione a sinistra per $A-2$, si ottiene

$$(A-2)^2 w_2 = (A-2)w_1 = 0,$$

quindi w_2 è un vettore che appartiene al nucleo di $(\phi-2)^2$ (cioè $(A-2)^2 w_2 = 0$) ma non appartiene al nucleo di $\phi - 2$ (cioè $(A-2)w_2 \neq 0$). Per determinare w_2 prendiamo quindi un qualunque vettore tale che $(A-2)^2 w_2 = 0$ e $(A-2)w_2 \neq 0$. Dato che il nucleo di $A-2$ lo abbiamo determinato in precedenza, e visto che $(A-2)^2 = 0$ (come si vede osservando la matrice di Jordan J, o come si verifica con un calcolo diretto), è facile trovare un vettore w_2 che soddisfi le condizioni richieste: ad esempio il vettore $w_2 = {}^t(2,1,1,1)$. Conoscendo w_2 si determina immediatamente w_1; basta ricordare che $(A-2)w_2 = w_1$. Si ha quindi

$$w_1 = (A-2)w_2 = {}^t(-6,3,0,3).$$

Questi sono i primi due vettori di una base di Jordan. I due vettori rimanenti, w_3 e w_4, devono ora soddisfare le due condizioni seguenti: devono essere due autovettori relativi all'autovalore $\lambda = 2$ e devono essere tali che $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ sia una base di $\mathbb{R}^4$. Si verifica immediatamente che i vettori $w_3 = {}^t(1,0,1,0)$ e $w_4 = {}^t(0,1,0,0)$ soddisfano le condizioni richieste.

In conclusione: i vettori w_1, w_2, w_3 e w_4 costituiscono, nell'ordine, una base di Jordan, rispetto alla quale l'endomorfismo ϕ ha matrice di Jordan

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se indichiamo con S la matrice le cui colonne sono costituite dalle componenti dei vettori della base di Jordan trovata,

$$S = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

si ha dunque $AS = SJ$, da cui si deduce che $A = SJS^{-1}$. Si verifichi ora, per esercizio, che

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e si verifichi l'uguaglianza $A = SJS^{-1}$ con un calcolo diretto.

Svolgimento Esercizio 5. Lavoriamo nel corpo complesso $\mathbb{C}$. In questo modo esiste una forma canonica di Jordan J per la matrice A, e si ha $A = SJS^{-1}$, per una qualche matrice invertibile S (a coefficienti complessi). Da ciò segue che $A^2 = SJS^{-1}SJS^{-1} = SJ^2S^{-1}$, e dunque l'uguaglianza $A^2 = A$ equivale a $J^2 = J$. Ricordando la forma della matrice di Jordan J, si vede subito che $J^2 = J$ è possibile se e solo se J è diagonale (e quindi A è diagonalizzabile) e, in tal caso, per ogni autovalore λ di A si deve avere $\lambda^2 = \lambda$, da cui segue che $\lambda = 0$ oppure $\lambda = 1$. In conclusione, la matrice A è simile alla matrice

$$J = \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix},$$

ove 1_r indica la matrice identità di ordine r e 0_{n-r} è la matrice nulla di ordine $n-r$.

Si noti a questo punto che l'intero r coincide con il rango di A, pertanto, se B è un'altra matrice con le stesse proprietà di A, essa sarà simile a J (e quindi ad A) se e solo se il suo rango coincide con r.

Svolgimento Esercizio 6. La matrice A è antisimmetrica, cioè si ha ${}^tA = -A$. Da ciò segue che la matrice A^2 è simmetrica:

$${}^t(A^2) = ({}^tA)^2 = (-A)^2 = A^2.$$

Ricordiamo che ogni matrice simmetrica a coefficienti reali è diagonalizzabile e tutti i suoi autovalori sono reali. Pertanto tutti gli autovalori di A^2 sono reali. Dimostriamo ora che sono tutti negativi.

Sia $v \in \mathbb{R}^n$ un vettore non nullo; si ha allora

$${}^tv(A^2)v = ({}^tvA)(Av) = (-{}^tv\,{}^tA)(Av) = -{}^t(Av)(Av) = -w \cdot w < 0,$$

ove si è posto $w = Av$ e si è usato il fatto che il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$ è definito positivo (si noti che $w \neq 0$ perché A è supposta non-degenere).

Questo significa che la matrice A^2 è definita negativa, e quindi tutti i suoi autovalori sono strettamente negativi. Di conseguenza, gli autovalori di A, essendo le radici quadrate degli autovalori di A^2, sono puramente immaginari.

Polinomio Minimo e Polinomio Caratteristico

Svolgimento Esercizio 7. Premettiamo la seguente osservazione. Sia

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

un blocco di Jordan di ordine r, relativo ad un autovalore λ. Si verifica immediatamente che in queste condizioni si ha: $\dim \operatorname{Ker}(J-\lambda) = 1$, $\dim \operatorname{Ker}(J-\lambda)^2 = 2$, $\dim \operatorname{Ker}(J-\lambda)^3 = 3$, etc., fino a $\dim \operatorname{Ker}(J-\lambda)^r = r$.

Ritorniamo ora al problema in questione. La condizione $\dim \operatorname{Ker}(\phi - 2) = 1$ equivale a dire che 2 è un autovalore di ϕ e che l'autospazio ad esso relativo ha dimensione 1, cioè esiste un solo autovettore linearmente indipendente relativo all'autovalore 2. Nella matrice di Jordan di ϕ comparirà quindi un blocco di Jordan relativo all'autovalore 2, di cui non conosciamo la dimensione, dato che non conosciamo la molteplicità dell'autovalore 2. Tuttavia, ricordando l'osservazione iniziale, si deduce dalla condizione $\dim \operatorname{Ker}(\phi - 2)^3 = 3$ che il blocco di Jordan relativo all'autovalore 2 deve avere almeno ordine 3.

In modo analogo, la condizione $\dim \operatorname{Ker}(\phi - 3) = 2$ significa che ci sono due autovettori linearmente indipendenti relativi all'autovalore 3, e quindi ci sono due blocchi di Jordan relativi all'autovalore 3. Di questi blocchi non conosciamo la dimensione, dato che non conosciamo la molteplicità dell'autovalore 3, tuttavia, con un attimo di riflessione, ci si convince che la condizione $\dim \operatorname{Ker}(\phi - 3)^2 = 4$ asserisce che questi blocchi di Jordan devono avere entrambi ordine maggiore o uguale a 2.

Per terminare, la condizione $\dim \operatorname{Im}(\phi^2) = 7$ equivale a $\dim \operatorname{Ker}(\phi^2) = \dim V - \dim \operatorname{Im}(\phi^2) = 2$, che afferma quindi che 0 è un autovettore di ϕ la cui molteplicità è almeno 2. Si noti però che in questo caso non conosciamo $\dim \operatorname{Ker}(\phi)$, cioè il numero di autovettori linearmente indipendenti relativi all'autovalore 0.

Dalle informazioni sulle dimensioni dei blocchi di Jordan ottenute in precedenza, e ricordando che $\dim V = 9$, si deduce che il blocco di Jordan relativo all'autovalore 2 ha esattamente ordine 3, che i due blocchi di Jordan relativi all'autovalore 3 hanno entrambi esattamente ordine 2 e che la molteplicità dell'autovalore 0 è esattamente 2 (e inoltre che non ci sono altri autovalori). Rimangono dunque solo due possibilità, che corrispondono rispettivamente a $\dim \operatorname{Ker}(\phi) = 1$ e $\dim \operatorname{Ker}(\phi) = 2$, cioè all'esistenza di due blocchi di Jordan di ordine 1 oppure di un solo blocco di Jordan di ordine 2, relativi all'autovalore 0.

Riunendo tutte queste informazioni, si deduce che ci sono solo due matrici di Jordan possibili per l'endomorfismo ϕ. Esse sono

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dato che la forma canonica di Jordan di una matrice è unica, a meno di una permutazione dei singoli blocchi di Jordan, si deduce che ci sono (essenzialmente) solo due endomorfismi ϕ di V soddisfacenti alle condizioni richieste.

Svolgimento Esercizio 8. Il polinomio minimo di ϕ si fattorizza come segue:

$$x^4 - 6x^3 + 9x^2 = x^2(x-3)^2.$$

Se ne deduce che gli unici autovalori di ϕ sono 0 e 3, ed entrambi hanno molteplicità almeno 2 (la molteplicità di un autovalore è l'ordine con cui questo annulla il polinomio caratteristico, e si ricordi che il polinomio minimo divide il polinomio caratteristico). Ricordando poi che il polinomio minimo di un blocco di Jordan di ordine r del tipo

$$J_r = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

è precisamente $(x-\lambda)^r$, si deduce che la matrice di Jordan dell'endomorfismo ϕ deve essere del tipo

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

dove la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ può essere una qualunque delle seguenti: $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Si vede ora immediatamente che se $A = J_0$ il rango di J è 3, se $A = J_1$ oppure $A = J_4$ il rango di J è 4, mentre per $A = J_2$ oppure $A = J_3$ si ha rango$(J) = 5$.

Abbiamo così determinato tutti gli endomorfismi (più precisamente, le loro forme canoniche di Jordan) che soddisfano alle condizioni richieste.

Esercizi Vari

Svolgimento Esercizio 9. Poniamo $v_n = {}^t(x_{n+1}, x_n)$. Si ha $v_1 = {}^t(1,1)$ e, da $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ segue che, per ogni $n > 1$, si ha $v_n = Av_{n-1}$, dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si ha dunque: $v_2 = Av_1$, $v_3 = Av_2 = A^2 v_1$, $v_4 = Av_3 = A^3 v_1$ e, in generale, $v_n = A^{n-1} v_1$. Quindi il calcolo dei numeri di Fibonacci si riduce al calcolo delle potenze di una matrice quadrata.

Il polinomio caratteristico di A è $\lambda^2 - \lambda - 1$, quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ e $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. Gli autovettori corrispondenti sono rispettivamente $w_1 = {}^t(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}), 1)$ e $w_2 = {}^t(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), 1)$. Si ha quindi

$$A = SJS^{-1},$$

ove

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) & \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e
$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \end{pmatrix}.$$
Si calcola inoltre facilmente che
$$S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \\ 1 & -\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \end{pmatrix}.$$

Si ha quindi
$$\begin{aligned} v_n = A^{n-1} v_1 = (SJS^{-1})^{n-1} v_1 = SJ^{n-1}S^{-1} v_1 = \\ = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{n+1}}((1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}) \\ \frac{1}{2^n}((1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

da cui si ottiene la seguente formula per l'ennesimo numero di Fibonacci:
$$x_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}((1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n).$$

Si noti che, anche se non è evidente dalla formula trovata, questi numeri sono sicuramenti interi.