Determinanti

Regola di Laplace

Esercizio 1. Si calcoli

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Si calcoli

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Inversione di Matrici

Esercizio 3. Si calcoli l'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Formule Ricorsive

Esercizio 4. Si indichi con A_n la seguente matrice $n \times n$:

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinare una formula ricorsiva per calcolare $\det A_n$, per ogni intero $n \geq 1$.

Esercizio 5. Si indichi con A_n la seguente matrice $n \times n$:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1+a_{n-1} & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1+a_n \end{pmatrix}$$

ove $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Si dimostri che, per ogni intero $n \geq 2$, si ha

$$\det A_n = a_1 a_2 \cdots a_n + \sum_{i=1}^{n} a_1 a_2 \cdots \hat{a}_i \cdots a_n,$$

dove $\hat{a}_i$ significa che l'elemento a_i non compare nel prodotto.

Determinanti

Esercizio 6. Sia X la matrice a blocchi

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

dove A è una matrice $n \times n$ e C è una matrice $m \times m$.

Si dimostri che $\det X = \det A \cdot \det C$.

Esercizio 7. (Determinante di Vandermonde). Si dimostri che, per ogni $n \geq 2$, si ha

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j} (\lambda_j - \lambda_i).$$