Determinanti

Regola di Laplace

Svolgimento Esercizio 1. Utilizzando la regola di Laplace, e precisamente sviluppando il determinante secondo la terza riga, si ha:

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} &= -3\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= -3\left[-\det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\right] - \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\
&= -3(-4+8)+2 = -10.
\end{aligned}$$

Svolgimento Esercizio 2. In questo caso non conviene applicare subito la regola di Laplace, data la mole dei calcoli necessari. Ricordando invece le proprietà dei determinanti possiamo cercare di ridurre la matrice ad una forma più semplice: ciò significa, in pratica, cercare di far comparire parecchi zeri tra gli elementi della matrice. Ciò si può fare, ad esempio, sottraendo alla prima riga la seconda, e ricordando che con tale operazione non si modifica il determinante. Si ha dunque:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

e sviluppando ora secondo la prima riga, si ottiene

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ancora una volta risulta conveniente trasformare quest'ultima matrice, ad esempio sottraendo alla prima riga la seconda. Si ha così:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

e, sviluppando il determinante secondo la prima riga, si ottiene

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ancora una volta possiamo far comparire degli zeri in queste ultime due matrici sottraendo, ad esempio, la seconda riga alla prima. Si ottiene così:

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}2&3&4&-1\\2&3&5&1\\2&1&1&1\\1&2&-1&2\end{pmatrix} &= -\det\begin{pmatrix}0&2&0\\2&1&1\\1&2&2\end{pmatrix}+2\det\begin{pmatrix}0&2&4\\2&1&1\\1&2&-1\end{pmatrix}\\ &= 2\det\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}+2\left[-2\det\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}+4\det\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\right]\\ &= 6+2(6+12)=42.\end{aligned}$$

Inversione di Matrici

Svolgimento Esercizio 3. Ricordiamo che, data una matrice $A=(a_{ij})$, si chiama *complemento algebrico* dell'elemento a_{ij} l'elemento A_{ji} che è uguale al prodotto di $(-1)^{i+j}$ per il determinante della matrice ottenuta dalla matrice A cancellando la i-esima *riga* e la j-esima *colonna*. Se indichiamo con $A^*=(A_{ij})$ la matrice dei compementi algebrici di A, si ha $A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*$.

Calcoliamo allora il determinante di A, sviluppando secondo la prima riga:

$$\begin{aligned}\det A &= 2\begin{vmatrix}-1&-3\\-3&-1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}2&-3\\1&-1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&-1\\1&-3\end{vmatrix}\\ &= 2(1-9)+3(-2+3)-(-6+1)=-8.\end{aligned}$$

Calcoliamo ora la matrice dei complementi algebrici:

$$A^*=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}-1&-3\\-3&-1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-3&-1\\-3&-1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-3&-1\\-1&-3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2&-3\\1&-1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2&-1\\1&-1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2&-1\\2&-3\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}2&-1\\1&-3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2&-3\\1&-3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2&-3\\2&-1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&0&8\\-1&-1&4\\-5&3&4\end{pmatrix}$$

La matrice inversa di A è dunque

$$A^{-1}=-\frac{1}{8}A^*=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1/8&1/8&-1/2\\5/8&-3/8&-1/2\end{pmatrix}.$$

Formule Ricorsive

Svolgimento Esercizio 4. Sviluppando il determinante secondo la prima riga si ha:

$$\begin{aligned}\det A_n &= 2\det A_{n-1}-\det\begin{pmatrix}3&1&0&0&\dots&0\\0&2&1&0&\dots&0\\0&3&2&1&\dots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\dots&\vdots\\0&\dots&0&3&2&1\\0&\dots&0&0&3&2\end{pmatrix}\\ &= 2\det A_{n-1}-3\det A_{n-2}.\end{aligned}$$

(La seconda matrice a destra dell'uguale è una matrice $(n-1) \times (n-1)$, e si è sviluppato il suo determinante secondo la prima colonna. Si è inoltre supposto, nel calcolo precedente, che $n \geq 3$).

Rimangono ora da calcolare i determinanti per $n = 1$ e $n = 2$:

$$\det A_1 = \det(2) = 2,$$
$$\det A_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 1.$$

In questo modo si possono calcolare, successivamente tutti gli altri determinanti; ad esempio, si ha:

$$\det A_3 = 2 \det A_2 - 3 \det A_1 = -4,$$
$$\det A_4 = 2 \det A_3 - 3 \det A_2 = -11.$$

Osservazione: La formula ricorsiva precedente permette il calcolo di tutti i $\det A_n$, tuttavia per poter calcolare $\det A_n$ per un particolare valore di n è necessario calcolare prima tutti i vari $\det A_i$, per ogni intero $i < n$. Per trovare una formula che permetta il calcolo diretto di $\det A_n$ si può procedere come segue. Poniamo $d_n = \det A_n$; si ha dunque $d_1 = 2$, $d_2 = 1$ e $d_n = 2d_{n-1} - 3d_{n-2}$, per ogni $n \geq 3$. Allora si ha anche $d_{n+1} = 2d_n - 3d_{n-1} = 2(2d_{n-1} - 3d_{n-2}) - 3d_{n-1} = d_{n-1} - 6d_{n-2}$. Si ottiene dunque la seguente equazione:

$$\begin{pmatrix} d_{n+1} \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{n-1} \\ d_{n-2} \end{pmatrix}$$

ovvero, ponendo $v_n = \begin{pmatrix} d_{n+1} \\ d_n \end{pmatrix}$ e indicando con B la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$,

$$v_n = Bv_{n-2}.$$

Si ottiene quindi $v_3 = Bv_1$, $v_5 = Bv_3 = B^2 v_1$, $v_7 = Bv_5 = B^3 v_1$ e, in generale,

$$v_{2n+1} = B^n v_1.$$

Ricordando che $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, si scopre allora che il problema del calcolo diretto dei vari d_n è ridotto al problema del calcolo delle potenze di una matrice. Ovviamente il calcolo di B^n si può effettuare moltiplicando la matrice B per se stessa n volte, ma ciò equivale a calcolare tutti i vari d_i, per ogni $i < n$. Tuttavia, come vedremo in seguito, c'è un modo di calcolare direttamente B^n senza dover calcolare tutte le varie potenze B^i, $i = 2, \ldots, n-1$.

Svolgimento Esercizio 5. Poniamo $d_n(a_1, \ldots, a_n) = \det A_n$. Verifichiamo la formula data per $n = 2$:

$$d_2(a_1, a_2) = \det \begin{pmatrix} 1 + a_1 & 1 \\ 1 & 1 + a_2 \end{pmatrix} = a_1 a_2 + a_1 + a_2.$$

Quindi, per $n = 2$, la formula è corretta. Procediamo quindi per induzione, supponendo che la formula sia corretta per A_{n-1} e cercando di dimostrare che allora la formula data è corretta anche per A_n. Per calcolare il determinante $d_n(a_1,\ldots,a_n)$, conviene sottrarre alla prima colonna la seconda (così facendo il determinante non cambia), ottenendo

$$d_n(a_1,\ldots,a_n) = \det\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -a_2 & 1+a_2 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_3 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ldots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 1 & 1+a_{n-1} & 1 \\ 0 & \ldots & 1 & 1 & 1 & 1+a_n \end{pmatrix}$$

Ora si può sviluppare secondo la prima colonna, ottenendo

$$\begin{aligned} d_n(a_1,\ldots,a_n) &= a_1 \det\begin{pmatrix} 1+a_2 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1+a_3 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_4 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ldots & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 & 1 & 1+a_{n-1} & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & 1+a_n \end{pmatrix} \\ &+ a_2 \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1+a_3 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_4 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ldots & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 & 1 & 1+a_{n-1} & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & 1+a_n \end{pmatrix} \\ &= a_1 d_{n-1}(a_2,a_3,\ldots,a_n) + a_2 d_{n-1}(0,a_3,\ldots,a_n). \end{aligned}$$

Usando l'ipotesi induttiva, si ha

$$d_{n-1}(a_2,a_3,\ldots,a_n) = a_2a_3\cdots a_n + \sum_{i=2}^{n} a_2a_3\cdots\hat{a}_i\cdots a_n,$$

e quindi

$$d_{n-1}(0,a_3,\ldots,a_n) = 0 + \sum_{i=2}^{n} 0\cdot a_3\cdots\hat{a}_i\cdots a_n = a_3\cdots a_n.$$

Sostituendo nell'espressione precedentemente trovata, si ha:

$$\begin{aligned} d_n(a_1,\ldots,a_n) &= a_1(a_2a_3\cdots a_n + \sum_{i=2}^{n} a_2a_3\cdots\hat{a}_i\cdots a_n) + a_2(a_3\cdots a_n) \\ &= a_1a_2\cdots a_n + \sum_{i=2}^{n} a_1a_2\cdots\hat{a}_i\cdots a_n + a_2a_3\cdots a_n \\ &= a_1a_2\cdots a_n + \sum_{i=1}^{n} a_1a_2\cdots\hat{a}_i\cdots a_n, \end{aligned}$$

che è proprio ciò che si voleva dimostrare.

Determinanti

Svolgimento Esercizio 6. Utilizziamo la definizione del determinante:

$$\det X = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) x_{1,\sigma(1)} x_{2,\sigma(2)} \cdots x_{n,\sigma(n)} x_{n+1,\sigma(n+1)} \cdots x_{n+m,\sigma(n+m)},$$

ove si è posto $X = (x_{i,j})$ e ove la somma è effettuata al variare di σ tra tutte le permutazioni di $n+m$ oggetti.

In base alla struttura a blocchi della matrice X, si deduce che $x_{i,j} = 0$ se $i > n$ e $j \leq n$, quindi nel prodotto

$$x_{n+1,\sigma(n+1)} \cdots x_{n+m,\sigma(n+m)}$$

compare uno zero ogni volta che $\sigma(n+1) \leq n$, oppure $\sigma(n+2) \leq n$, ..., oppure $\sigma(n+m) \leq n$. Ciò significa che gli addendi che compaiono effettivamente nell'espressione del determinante di X corrispondono alle permutazioni σ tali che

$$\sigma(n+1), \sigma(n+2), \ldots, \sigma(n+m) \in \{n+1, \ldots, n+m\}.$$

Di conseguenza si deve avere anche

$$\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n) \in \{1, \ldots, n\}.$$

Ciò significa che gli unici addenti che compaiono effettivamente nell'espressione del determinante di X corrispondono alle permutazioni σ che si spezzano nel prodotto di due permutazioni $\sigma = \sigma_1 \sigma_2$, ove $\sigma_1 : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ e $\sigma_2 : \{n+1, \ldots, n+m\} \to \{n+1, \ldots, n+m\}$. Si ricordi allora che si ha anche $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma_1) \operatorname{sgn}(\sigma_2)$. Si ottiene dunque

$$\begin{aligned}
\det X &= \sum_{\sigma_1, \sigma_2} (\operatorname{sgn} \sigma_1)(\operatorname{sgn} \sigma_2) x_{1,\sigma_1(1)} x_{2,\sigma_1(2)} \cdots x_{n,\sigma_1(n)} x_{n+1,\sigma_2(n+1)} \cdots x_{n+m,\sigma_2(n+m)} \\
&= \left(\sum_{\sigma_1} (\operatorname{sgn} \sigma_1) x_{1,\sigma_1(1)} x_{2,\sigma_1(2)} \cdots x_{n,\sigma_1(n)} \right) \times \\
&\quad \left(\sum_{\sigma_2} (\operatorname{sgn} \sigma_2) x_{n+1,\sigma_2(n+1)} x_{n+2,\sigma_2(n+2)} \cdots x_{n+m,\sigma_2(n+m)} \right) \\
&= \det A \cdot \det C.
\end{aligned}$$

Svolgimento Esercizio 7. Verifichiamo la formula data nel caso $n = 2$:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1.$$

Quindi la formula è corretta.

Procediamo allora per induzione, supponendo che la formula sia corretta per $n-1$ e cercando di dimostrare che in tal caso è corretta anche per n. Per calcolare

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

modifichiamo la matrice sottraendo ad ogni riga, a partire dalla seconda, la riga precedente moltiplicata per λ_1 (facendo quanto detto il determinante non cambia). Si ottiene allora

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_3 - \lambda_1 & \cdots & \lambda_n - \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2 & \lambda_3^2 - \lambda_1\lambda_3 & \cdots & \lambda_n^2 - \lambda_1\lambda_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \lambda_2^{n-1} - \lambda_1\lambda_2^{n-2} & \lambda_3^{n-1} - \lambda_1\lambda_3^{n-2} & \cdots & \lambda_n^{n-1} - \lambda_1\lambda_n^{n-2} \end{pmatrix}.$$

Sviluppando secondo la prima colonna si ha dunque

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_3 - \lambda_1 & \cdots & \lambda_n - \lambda_1 \\ \lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2 & \lambda_3^2 - \lambda_1\lambda_3 & \cdots & \lambda_n^2 - \lambda_1\lambda_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_2^{n-1} - \lambda_1\lambda_2^{n-2} & \lambda_3^{n-1} - \lambda_1\lambda_3^{n-2} & \cdots & \lambda_n^{n-1} - \lambda_1\lambda_n^{n-2} \end{pmatrix}.$$

A questo punto si può raccogliere a fattore dalla colonna j-esima (per ogni $j = 1, \dots, n-1$) il fattore $\lambda_j - \lambda_1$. Si ottiene pertanto

$$\Delta = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \cdots (\lambda_n - \lambda_1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_2^{n-2} & \lambda_3^{n-2} & \cdots & \lambda_n^{n-2} \end{pmatrix}.$$

In quest'ultima espressione compare un determinante di Vandermonde di ordine $n-1$. Si può dunque applicare l'ipotesi induttiva, ottenendo finalmente

$$\begin{aligned} \Delta &= (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \cdots (\lambda_n - \lambda_1) \prod_{2 \le i < j} (\lambda_j - \lambda_i) \\ &= \prod_{i<j} (\lambda_j - \lambda_i). \end{aligned}$$