Dualità e Applicazioni Bilineari

Dualità

Esercizio 1. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali e sia $f^* : W^* \to V^*$ l'applicazione trasposta. Si dimostri che, se A è la matrice di f rispetto alle basi $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V e $\{w_1, \dots, w_m\}$ di W, allora la matrice di f^*, rispetto alle basi duali, è la trasposta di A.

Esercizio 2. Siano $f : V \to W$ e $g : W \to Z$ due applicazioni lineari tra spazi vettoriali e siano $f^* : W^* \to V^*$ e $g^* : Z^* \to W^*$ le applicazioni duali. Si dimostri che $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale e sia $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una sua base. Sia $\phi : V \to V$ l'applicazione lineare definita ponendo $\phi(v_1) = 2v_1 - 3v_3$, $\phi(v_2) = v_1 - v_3 + 2v_4$, $\phi(v_3 + v_4) = v_1 - v_3 + 2v_4$ e $\phi(v_3 - v_4) = 3v_1 + 2v_2 + v_3$. Si determini la matrice di ϕ rispetto alla base data ed il suo rango. Si determini inoltre una base di $\operatorname{Ker} \phi^*$, ove $\phi^* : V^* \to V^*$ è l'applicazione trasposta di ϕ.

Applicazioni Bilineari Alternanti

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $\{v_1, \dots, v_4\}$ una sua base. Sia $g : V \times V \to \mathbb{R}$ l'applicazione bilineare alternante di matrice

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & -1 \\ -3 & 0 & 5 & 2 \\ -4 & -5 & 0 & -6 \\ 1 & -2 & 6 & 0 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base data.

Si determini una base $\{w_1, \dots, w_4\}$ di V tale che la matrice di g rispetto a questa nuova base sia

$$G' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita. Siano $v^*, w^* \in V^*$ e definiamo

$$v^* \wedge w^* : V \times V \to \mathbb{R}$$

ponendo

$$v^* \wedge w^*(x, y) = v^*(x)w^*(y) - w^*(x)v^*(y).$$

(1) Si dimostri che $v^* \wedge w^*$ è un'applicazione bilineare alternante e si verifichi che, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha

$$(\lambda v^*) \wedge w^* = v^* \wedge (\lambda w^*) = \lambda(v^* \wedge w^*),$$

e

$$v^* \wedge w^* = -w^* \wedge v^*.$$

(2) Dati $v_1^*, w_1^*, v_2^*, w_2^* \in V^*$ tali che $v_1^* \wedge w_1^* \neq 0$ e $v_2^* \wedge w_2^* \neq 0$, le due applicazioni bilineari $v_1^* \wedge w_1^*$ e $v_2^* \wedge w_2^*$ sono proporzionali se e solo se $L\{v_1^*, w_1^*\} = L\{v_2^*, w_2^*\}$.

(3) Supponiamo che $\dim V = 4$. Sia $\{v_1, \ldots, v_4\}$ una base di V e $\{v_1^*, \ldots, v_4^*\}$ la base duale di V^*. Si scriva la matrice di $v^* \wedge w^*$ (rispetto alla base data di V), ove $v^* = 2v_1^* - v_3^* + v_4^*$ e $w^* = v_1^* - 3v_2^* - v_3^*$.

Applicazioni Bilineari Simmetriche

Esercizio 6. Sia V uno spazio vettoriale sul corpo complesso $\mathbb{C}$ con base $\{v_1, v_2, v_3\}$ e sia g la forma bilineare simmetrica di matrice, rispetto alla base data,

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si determini una matrice invertibile P tale che ${}^tPGP = 1$.

Esercizio 7. Sia V uno spazio vettoriale sul corpo dei numeri reali, con base $\{v_1, v_2, v_3\}$, e sia g la forma bilineare simmetrica di matrice, rispetto alla base data,

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si determini una base di V rispetto alla quale la matrice di g sia diagonale, con soli elementi 1 e -1 sulla diagonale.

Esercizio 8. Sia V uno spazio vettoriale sul corpo dei numeri reali, con base $\{v_1, v_2, v_3\}$, e sia g la forma bilineare simmetrica di matrice, rispetto alla base data,

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si determini una base di V rispetto alla quale la matrice di g sia diagonale, con soli elementi 1 e -1 sulla diagonale.

Esercizio 9. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3, e sia $\{v_1, v_2, v_3\}$ una sua base. Si consideri l'applicazione bilineare simmetrica g di matrice

$$G = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base data.

(1) Si verifichi che g è non-degenere e si determini una base ortogonale di V relativamente a g.

(2) Si calcoli l'indice d'inerzia $i(g)$.

(3) Si dica se esistono vettori isotropi non nulli relativamente a g e, in caso affermativo, si determini un sottospazio isotropo di dimensione massima.

Esercizio 10. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e sia g l'applicazione bilineare simmetrica di matrice

$$G = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica.

(1) Si verifichi che g è non-degenere, se ne calcoli l'indice d'inerzia e si determini una base ortogonale di V relativamente a g.
(2) $(\mathbb{R}^4, g)$ è isometrico allo spazio $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale? E allo spazio di Minkowski?

Esercizio 11. Sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si consideri l'applicazione bilineare simmetrica g di matrice

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

(1) Si determini l'indice d'inerzia di g.
(2) Si determini, se esiste, una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto a cui g ha matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) Si determini, se esiste, una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto a cui g ha matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) Si determini, se esiste, una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto a cui g ha matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Isometrie

Esercizio 12. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e sia $g : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica definita positiva. Se $\phi : V \to V$ è una isometria, si dimostri che si ha

$$\mathrm{Im}(\phi - 1) = \mathrm{Ker}(\phi - 1)^{\perp}.$$

Altri esercizi

Esercizio 13. Si consideri $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e si ponga su di esso l'applicazione bilineare $g : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(z_1, z_2) = 2\,\mathrm{Re}(z_1 z_2),$$

ove $\mathrm{Re}(z)$ indica la parte reale del numero complesso z.

(1) Si dimostri che g è bilineare e non-degenere.
(2) Si determini la matrice di g rispetto alla base $\{1, i\}$ di $\mathbb{C}$.
(3) Siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$ (cioè z_1 e z_2 sono una base di $\mathbb{C}$, visto come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale). Si determini la matrice G di g rispetto alla base $\{z_1, z_2\}$ e si dimostri che

$$\det G = \left[\det \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{pmatrix}\right]^2,$$

ove $\bar{z}$ indica il numero complesso coniugato di $z \in \mathbb{C}$.

Esercizio 14. Sia A una matrice simmetrica ad elementi in $\mathbb{R}$. È vero o falso che la matrice $1 + A^2$ è invertibile? (1 indica la matrice identità).