Dualità e Applicazioni Bilineari

Dualità

Svolgimento Esercizio 1. Sia $A = (a_{ij})$. Dire che A è la matrice di f rispetto alle basi $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V e $\{w_1, \dots, w_m\}$ di W significa che

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i,$$

per ogni $j = 1, \dots, n$.

Siano $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ e $\{w_1^*, \dots, w_m^*\}$ le basi duali, rispettivamente di V e W. Per determinare la matrice di f^* è sufficiente calcolare $f^*(w_j^*)$, per ogni $j = 1, \dots, m$. Poniamo allora

$$(*) \qquad f^*(w_j^*) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} v_i^*,$$

ove $B = (b_{ij})$ è la matrice di f^*, rispetto alle basi duali.

Ricordando la definizione dell'applicazione trasposta, si ha:

$$\begin{aligned} f^*(w_j^*) \circ v_i &= w_j^* \circ f(v_i) \\ &= w_j^* \circ \left(\sum_{h=1}^{m} a_{hi} w_h \right) \\ &= \sum_{h=1}^{m} a_{hi} w_j^* \circ w_h \\ &= a_{ji}, \end{aligned}$$

dato che $w_j^* \circ w_h$ è 0 se $h \neq j$ e 1 se $h = j$.

D'altra parte, utilizzando $(*)$, si ha:

$$\begin{aligned} f^*(w_j^*) \circ v_i &= \left(\sum_{h=1}^{n} b_{hj} v_h^* \right) \circ v_i \\ &= \sum_{h=1}^{n} b_{hj} v_h^* \circ v_i \\ &= b_{ij}. \end{aligned}$$

Si ottiene quindi $b_{ij} = a_{ji}$. Ciò significa che la matrice B è precisamente la trasposta di A.

Svolgimento Esercizio 2. Per ogni $v \in V$ ed ogni $z^* \in Z^*$, si ha:

$$\begin{aligned}(g \circ f)^*(z^*) \circ v &= z^* \circ (g \circ f)(v) \\ &= z^* \circ g(f(v)) \\ &= g^*(z^*) \circ f(v) \\ &= f^*(g^*(z^*)) \circ v \\ &= (f^* \circ g^*)(z^*) \circ v,\end{aligned}$$

da cui si deduce appunto che $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.
Osservazione: se A e B sono le matrici (rispetto a delle basi di V, W e Z) di f e g rispettivamente, allora BA è la matrice dell'applicazione composta $g \circ f$. L'uguaglianza $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ si traduce allora in termini di matrici nell'uguaglianza

$$^t(BA) = {}^tA\,{}^tB,$$

ossia la trasposta del prodotto di due matrici è il prodotto delle trasposte, in ordini inverso.

Svolgimento Esercizio 3. Per determinare la matrice di ϕ dobbiamo conoscere le immagini di tutti i vettori della base di V. Calcoliamo quindi $\phi(v_3)$ e $\phi(v_4)$:

$$\phi(v_3) = \frac{1}{2}(\phi(v_3 + v_4) + \phi(v_3 - v_4)) = 2v_1 + v_2 + v_4,$$

e

$$\phi(v_4) = \frac{1}{2}(\phi(v_3 + v_4) - \phi(v_3 - v_4)) = -v_1 - v_2 - v_3 + v_4.$$

La matrice di ϕ è dunque

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il rango di questa matrice (e quindi il rango di ϕ) è 3, come si vede facilmente osservando che c'è almeno un minore di ordine tre diverso da zero, ad esempio

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

mentre $\det A = 0$.

Passiamo ora al calcolo di $\operatorname{Ker} \phi^*$; ci sono essenzialmente due metodi. Il primo si basa sull'osservazione del fatto che la matrice di ϕ^*, rispetto alla base duale di V^* è la trasposta di A. Di conseguenza il nucleo di ϕ^* è costituito dai vettori $\lambda_1 v_1^* + \cdots + \lambda_4 v_4^*$ tali che

$$^tA \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Si ottiene così il sistema
$$\begin{cases} 2\lambda_1 - 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0, \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date, ad esempio, da

$$\begin{cases} \lambda_1 = -6\lambda_4 \\ \lambda_2 = 11\lambda_4 \\ \lambda_3 = -4\lambda_4. \end{cases}$$

Si scopre così che $\operatorname{Ker}\phi^*$ ha dimensione 1 ed è generato, ad esempio, dal vettore $-6v_1^* + 11v_2^* - 4v_3^* + v_4^*$.

Il secondo metodo per determinare $\operatorname{Ker}\phi^*$ si basa sul fatto che $\operatorname{Ker}\phi^* = (\operatorname{Im}\phi)^\perp$. L'immagine di ϕ è generata dai vettori $\phi(v_1), \ldots, \phi(v_4)$ (anzi, visto che $\operatorname{Im}\phi$ ha dimensione pari al rango della matrici di ϕ, cioè 3, si vede che una sua base è costituita dai vettori $\phi(v_1)$, $\phi(v_2)$ e $\phi(v_3)$. Pertanto $(\operatorname{Im}\phi)^\perp$ è costituito da tutti quei vettori $\lambda_1 v_1^* + \cdots + \lambda_4 v_4^* \in V^*$ che sono ortogonali ai generatori di $\operatorname{Im}\phi$. Si deve pertanto avere:
$$\begin{cases} (\lambda_1 v_1^* + \cdots + \lambda_4 v_4^*) \circ (2v_1 - 3v_3) = 0 \\ (\lambda_1 v_1^* + \cdots + \lambda_4 v_4^*) \circ (v_1 - v_3 + 2v_4) = 0 \\ (\lambda_1 v_1^* + \cdots + \lambda_4 v_4^*) \circ (2v_1 + v_2 + v_4) = 0 \\ (\lambda_1 v_1^* + \cdots + \lambda_4 v_4^*) \circ (-v_1 - v_2 - v_3 + v_4) = 0, \end{cases}$$

che, dopo aver sviluppato i calcoli, diventa

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0, \end{cases}$$

che è il sistema ottenuto in precedenza.

Applicazioni Bilineari Alternanti

Svolgimento Esercizio 4. Come primo vettore possiamo certo prendere $w_1 = v_1$. Si tratta ora di determinare un vettore w_2 tale che $g(w_1, w_2) = 1$ (il fatto che $g(w_2, w_2) = 0$ è ovvio, dato che g è alternante). Osservando che $g(w_1, v_2) = g(v_1, v_2) = 3$, si vede che basta porre $w_2 = \frac{1}{3}v_2$ per ottenere $g(w_1, w_2) = 1$. Per determinare w_3 poniamo ora $w_3 = aw_1 + bw_2 + cv_3$. Imponendo le condizioni $g(w_1, w_3) = 0$ e $g(w_2, w_3) = 0$, otteniamo il sistema
$$\begin{cases} b + 4c = 0 \\ -a + \dfrac{5}{3}c = 0. \end{cases}$$

Ponendo, ad esempio, $c = 3$, si trova $b = -12$ e $a = 5$. Di conseguenza si ha $w_3 = 5w_1 - 12w_2 + 3v_3 = 5v_1 - 4v_2 + 3v_3$.

Infine per determinare w_4 poniamo $w_4 = aw_1 + bw_2 + cw_3 + dv_4$ ed imponiamo le condizioni $g(w_1, w_4) = 0$, $g(w_2, w_4) = 0$ e $g(w_3, w_4) = 1$. Si ottiene così il sistema

$$\begin{cases} b - d = 0 \\ -a + \dfrac{2}{3}d = 0 \\ -31d = 1, \end{cases}$$

che ha come soluzione $a = -\frac{2}{93}$, $b = d = -\frac{1}{31}$ (e c qualunque). Prendendo $c = 0$ si ottiene allora il vettore $w_4 = -\frac{2}{93}w_1 - \frac{1}{31}w_2 - \frac{1}{31}v_4 = -\frac{2}{93}v_1 - \frac{1}{93}v_2 - \frac{1}{31}v_4$.
Osservazione: possiamo ora scrivere anche la matrice P di cambiamento di base. Si ha infatti

$$(w_1, \dots, w_4) = (v_1, \dots, v_4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -2/93 \\ 0 & 1/3 & -4 & -1/93 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/31 \end{pmatrix},$$

e quindi

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -2/93 \\ 0 & 1/3 & -4 & -1/93 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/31 \end{pmatrix}.$$

Si può allora controllare che vale la nota formula $G' = {}^tPAP$.

Svolgimento Esercizio 5. (1) Le verifiche sono immediate. A titolo di esempio verifichiamo che $v^* \wedge w^*$ è lineare nel primo argomento:

$$\begin{aligned} v^* \wedge w^*(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x^2, y) &= v^*(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x^2)w^*(y) - w^*(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x^2)v^*(y) \\ &= (\lambda_1 v^*(x_1) + \lambda_2 v^*(x^2))w^*(y) - (\lambda_1 w^*(x_1) + \lambda_2 w^*(x^2))v^*(y) \\ &= \lambda_1(v^* \wedge w^*)(x_1, y) + \lambda_2(v^* \wedge w^*)(x_2, y), \end{aligned}$$

per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ed ogni $x, y \in V$.
(2) Se $L\{v_1^*, w_1^*\} = L\{v_2^*, w_2^*\}$ si ha

$$\begin{aligned} v_2^* &= av_1^* + bw_1^* \\ w_2^* &= cv_1^* + dw_1^*, \end{aligned}$$

con $ad - bc \neq 0$ (in quanto è il determinante di una matrice di cambiamento di base). Utilizzando le proprietà dimostrate al punto precedente, si ottiene:

$$v_2^* \wedge w_2^*(x, y) = (av_1^* + bw_1^*) \wedge (cv_1^* + dw_1^*)(x, y) = (ad - bc)(v_1^* \wedge w_1^*)(x, y),$$

quindi $v_1^* \wedge w_1^*$ e $v_2^* \wedge w_2^*$ sono proporzionali.

Viceversa, supponiamo che $L\{v_1^*, w_1^*\} \neq L\{v_2^*, w_2^*\}$. Possiamo allora supporre (a meno di scambiare tra di loro v_2^* e w_2^*) che $v_2^* \notin L\{v_1^*, w_1^*\}$. I vettori v_1^*, w_1^* e v_2^* sono allora linearmente indipendenti e possono quindi essere completati ad una base di V^*. Siano allora v_1, w_1 e v_2 i corrispondenti vettori della base duale di V. Si ha quindi:

$$v_1^* \wedge w_1^*(v_1, w_1) = 1,$$

mentre

$$v_2^* \wedge w_2^*(v_1, w_1) = 0.$$

Dato che, per ipotesi, $v_2^* \wedge w_2^* \neq 0$, si vede così che $v_1^* \wedge w_1^*$ e $v_2^* \wedge w_2^*$ non possono essere proporzionali.

(3) L'elemento di posto (i,j) della matrice di $v^* \wedge w^*$ è dato da $v^* \wedge w^*(v_i, v_j)$. Questo si calcola facilmente ricordando le proprietà viste al punto (1). Tuttavia, ricordando la definizione di $v^* \wedge w^*$, con un attimo di riflessione si scopre che la matrice A di $v^* \wedge w^*$ si può ottenere direttamente come segue:

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -3, -1, 0) - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} (2, 0, -1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -1 & -1 \\ 6 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Applicazioni Bilineari Simmetriche

Svolgimento Esercizio 6. Dato che ${}^tPGP$ è la matrice della forma bilineare g rispetto ad una nuova base $\{v'_1, v'_2, v'_3\}$, ottenuta dalla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ per mezzo della matrice di cambiamento di base P, cioè

$$(v'_1, v'_2, v'_3) = (v_1, v_2, v_3)P,$$

il problema si riduce alla determinazione di una base $\{v'_1, v'_2, v'_3\}$ rispetto alla quale la matrice di g sia l'identità, ossia alla determinazione di una base ortonormale. Utilizziamo a tal fine il procedimento di Gram-Schmidt. Dato che $g(v_1, v_1) = 2$, poniamo $v'_1 = v_1/\sqrt{2}$. Si ha così $g(v'_1, v'_1) = 1$. Un vettore v''_2 ortogonale a v'_1 si trova nel modo seguente: si ponga $v''_2 = av'_1 + v_2$ e si richieda che $g(v'_1, v''_2) = 0$. Si ottiene in questo modo $a = -g(v'_1, v_2)$ e dunque si ha:

$$\begin{aligned} v''_2 &= v_2 - g(v'_1, v_2)v'_1 \\ &= v_2 - g(v_1/\sqrt{2}, v_2)v_1/\sqrt{2} \\ &= v_2 - \frac{3}{2}v_1. \end{aligned}$$

A questo punto bisogna normalizzare questo vettore. Si calcola $g(v''_2, v''_2) = g(v_2 - \frac{3}{2}v_1, v_2 - \frac{3}{2}v_1) = -\frac{1}{2}$, e si pone di conseguenza $v'_2 = v''_2/\sqrt{-\frac{1}{2}} = -i\sqrt{2}v''_2 = \frac{3}{2}i\sqrt{2}v_1 - i\sqrt{2}v_2$.

Rimane solo da determinare un vettore w''_3 ortogonale a w'_1 e w'_2. Ripetendo il ragionamento fatto in precedenza si scopre che si ha

$$\begin{aligned} v''_3 &= v_3 - g(v'_1, v_3)v'_1 - g(v'_2, v_3)v'_2 \\ &= v_3 - g(v_1/\sqrt{2}, v_3)v_1/\sqrt{2} - g(\frac{3}{2}i\sqrt{2}v_1 - i\sqrt{2}v_2, v_3)(\frac{3}{2}i\sqrt{2}v_1 - i\sqrt{2}v_2) \\ &= v_3 - 4v_1 + 3v_2. \end{aligned}$$

Anche quest'ultimo vettore deve essere normalizzato. Si ha $g(v''_3, v''_3) = g(v_3 - 4v_1 + 3v_2, v_3 - 4v_1 + 3v_2) = 5$, e si pone di conseguenza $v'_3 = v''_3/\sqrt{5} = -\frac{4}{\sqrt{5}}v_1 + \frac{3}{\sqrt{5}}v_2 + \frac{1}{\sqrt{5}}v_3$.

Si trova allora che la matrice di cambiamento di base è

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{2}i\sqrt{2} & -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ 0 & -i\sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Si verifichi che si ha effettivamente ${}^tPGP = 1$.

Svolgimento Esercizio 7. Utilizziamo il procedimento di Gram-Schmidt. Dato però che il vettore v_1 è isotropo, non possiamo prendere come primo vettore v_1' della nuova base un suo multiplo. Per ovviare a questo inconveniente è sufficiente scambiare tra loro i vettori v_1 e v_2 della base data ed applicare il procedimento di Gram-Schmidt partendo dunque da v_2. Dato che $g(v_2, v_2) = 3$, bisognerà porre $v_1' = v_2/\sqrt{3}$. Si ha così $g(v_1', v_1') = 1$. Continuando, poniamo $v_2'' = av_1' + v_1$ ed imponiamo che sia $g(v_1', v_2'') = 0$. Si trova allora $a = -g(v_1', v_1) = -2/\sqrt{3}$, e quindi $v_2'' = -2/\sqrt{3}v_1' + v_1 = -\frac{2}{3}v_2 + v_1$. Dato che si ha $g(v_2'', v_2'') = -\frac{4}{3}$, e dato che $\sqrt{-\frac{4}{3}}$ non esiste in $\mathbb{R}$, dovremo porre $v_2' = v_2''/\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}v_2'' = -\frac{\sqrt{3}}{2}v_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}v_1$, ottenendo però $g(v_2', v_2') = -1$.

Per trovare il terzo e ultimo vettore della base, poniamo $v_3'' = av_1' + bv_2' + v_3$ ed imponiamo che $g(v_1', v_3'') = 0$ e $g(v_2', v_3'') = 0$. Si ottiene così $a = -g(v_1', v_3) = 1/\sqrt{3}$ e $b = g(v_2', v_3) = 5\sqrt{3}/6$ (attenzione che in questo caso si ha $g(v_2', v_2') = -1$). Si ha dunque $v_3'' = \frac{1}{\sqrt{3}}v_1' + \frac{5\sqrt{3}}{6}v_2' + v_3 = -\frac{1}{2}v_2 + \frac{5}{4}v_1 + v_3$. Si ha allora $g(v_3'', v_3'') = 15/4$ e quindi si deve porre $v_3' = \frac{2}{\sqrt{15}}v_3''$, ottenendo così $g(v_3', v_3') = 1$.

La matrice di g nella base $\{v_1', v_2', v_3'\}$ è dunque

$$G' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento Esercizio 8. Dato che tutti i vettori della base data sono isotropi non è possibile prendere un loro multiplo come vettore della nuova base. In questo caso si dovranno invece considerare, ad esempio, i vettori $v_1'' = v_1 + v_2$ e $v_2'' = v_1 - v_2$. Questi due vettori sono ortogonali, dato che $g(v_1'', v_2'') = g(v_1, v_1) - g(v_2, v_2) = 0$, e non sono isotropi. Infatti si ha $g(v_1'', v_1'') = 4$ e $g(v_2'', v_2'') = -4$. Si prendono quindi come vettori per la nuova base i vettori $v_1' = \frac{1}{2}v_1''$ e $v_2' = \frac{1}{2}v_2''$, ottenendo $g(v_1', v_1') = 1$ e $g(v_2', v_2') = -1$. A questo punto v_3' si potrà determinare nel modo usuale. Poniamo dunque $v_3'' = av_1' + bv_2' + v_3$ ed imponiamo che $g(v_1', v_3'') = 0$ e $g(v_2', v_3'') = 0$. Si ottiene allora $a = -g(v_1', v_3) = -1$ e $b = g(v_2', v_3) = -2$. Di conseguenza si ha $v_3'' = -v_1' - 2v_2' + v_3$ e, dato che $g(v_3'', v_3'') = 3$, si porrà $v_3' = v_3''/\sqrt{3}$, ottenendo $g(v_3', v_3') = 1$.

La matrice di g nella base $\{v_1', v_2', v_3'\}$ è dunque

$$G' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento Esercizio 9. (1) Si ha

$$\det G = -3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 10,$$

quindi g è non-degenere.

Procediamo quindi alla determinazione di una base ortogonale. Poniamo $w_1 = v_1$; si ha $g(w_1, w_1) = -3 \neq 0$. Si noti che non è necessario normalizzare i vettori della nuova base, perché è richiesta una base ortogonale e non una base ortonormale.

Osservando la matrice G si nota che il vettore v_3 è ortogonale a w_1, quindi come secondo vettore della base ortogonale possiamo prendere $w_2 = v_3$; si ha quindi $g(w_2, w_2) = -1$.

Rimane ora solo da determinare un terzo vettore w_3 ortogonale ai due precedenti. Poniamo $w_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ ed imponiamo a w_3 di essere ortogonale a w_1 e w_2. Si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} g(w_1, w_3) = -3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ g(w_2, w_3) = -\lambda_2 - \lambda_3 = 0, \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{1}{3}\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3. \end{cases}$$

Ponendo, ad esempio, $\lambda_3 = 3$, si ottiene il vettore $w_3 = -v_1 - 3v_2 + 3v_3$. Si trova ora $g(w_3, w_3) = 30$, da cui si deduce che la matrice di g rispetto alla base ortogonale $\{w_1, w_2, w_3\}$ è

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}.$$

(2) Osservando la matrice appena trovata si scopre che la restrizione di g al sottospazio $L\{w_1, w_2\}$, generato da w_1 e w_2, è definita negativa, mentre la restrizione di g al sottospazio generato da w_3 è definita positiva. Si deduce quindi che l'indice d'inerzia di g è dato da $i(g) = 1 - 2 = -1$.

(3) Dato che g non è definita, esistono sicuramente dei vettori isotropi non nulli. Ad esempio, se consideriamo un vettore $w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3$, la condizione che w sia isotropo è

$$g(w, w) = -3\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + 30\lambda_3^2 = 0,$$

che ha ovviamente soluzioni reali non nulle.

Sia dunque U un sottospazio isotropo. Dato che, per definizione, si ha $U \subset U^\perp$, e $\dim U^\perp = 3 - \dim U$, se ne deduce che U può avere al più dimensione 1. Quindi per determinare un sottospazio isotropo di dimensione massima è sufficiente determinare un vettore isotropo non nullo; ad esempio il vettore $w = \sqrt{30}w_2 + w_3$. Il sottospazio $U = L\{w\}$ è pertanto un sottospazio isotropo di dimensione massima (ovviamente tale sottospazio non è unico).

Svolgimento Esercizio 10. (1) Per dimostrare che g è non-degenere basta dimostrare che $\det G \neq 0$, oppure che esiste una base ortogonale di V. Visto che, in ogni caso, dobbiamo determinare una base ortogonale, possiamo evitare di calcolare il determinante di G; quando avremo calcolato una base ortogonale avremo anche dimostrato che essa esiste, e quindi che g è non-degenere.

Indichiamo con $\{e_1, \ldots, e_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Come primo elemento di una base ortogonale possiamo prendere $v_1 = e_1$; si ha $g(v_1, v_1) = 3$. Cerchiamo ora un secondo vettore v_2 ortogonale a v_1: possiamo prendere v_2 della forma seguente

$$v_2 = \lambda_1 v_1 + e_2,$$

ed imporre che sia $g(v_1, v_2) = 0$. Si trova allora $\lambda_1 = \frac{2}{3}$ e quindi

$$v_2 = \frac{2}{3}v_1 + e_2 = \frac{2}{3}e_1 + e_2;$$

si calcola facilmente che $g(v_2, v_2) = -\frac{1}{3}$.

Per determinare il terzo vettore v_3 della base ortogonale il procedimento è analogo. Sia

$$v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + e_3,$$

ed imponiamo che $g(v_1, v_3) = 0$ e $g(v_2, v_3) = 0$. Si ottengono le seguenti due equazioni:

$$\begin{cases} g(v_1, v_3) = 3\lambda_1 + 1 = 0 \\ g(v_2, v_3) = -\dfrac{1}{3}\lambda_2 - \dfrac{1}{3} = 0, \end{cases}$$

che hanno come soluzione $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$ e $\lambda_2 = -1$. Si ha quindi

$$v_3 = -\frac{1}{3}v_1 - v_2 + e_3 = -e_1 - e_2 + e_3,$$

da cui si ottiene $g(v_3, v_3) = 1$.

Analogamente, ponendo

$$v_4 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + e_4,$$

ed imponendo che $g(v_1, v_4) = 0$, $g(v_2, v_4) = 0$ e $g(v_3, v_4) = 0$, si trova che $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -4$, da cui si ottiene

$$v_4 = -\frac{1}{3}v_1 - v_2 - 4v_3 + e_4 = 3e_1 + 3e_2 - 4e_3 + e_4,$$

e $g(v_4, v_4) = -14$.

In conclusione, abbiamo visto che esiste una base ortogonale, data da $\{v_1, \dots, v_4\}$; ciò dimostra che g è non-degenere. Inoltre abbiamo visto che la matrice di g rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_4\}$ è

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che l'indice d'inerzia di g è $i(g) = 0$.

(2) Il prodotto scalare usuale su $\mathbb{R}^4$ ha indice d'inerzia 4. Pertanto $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale non è isometrico allo spazio V dotato della forma bilineare simmetrica g, che ha indice d'inerzia 0 (si ricordi il teorema di Sylvester). Analogamente, (V, g) non è isometrico allo spazio di Minkowski, perché quest'ultimo è $\mathbb{R}^4$ dotato della forma bilineare di matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha indice d'inerzia 2.

Svolgimento Esercizio 11. (1) Per determinare l'indice d'inerzia cerchiamo innanzitutto una base ortogonale (dato che sarà utile anche nel seguito). Indichiamo con $\{e_1, \ldots, e_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$. In questo caso tutti e quattro i vettori della base canonica sono isotropi, quindi non possiamo prendere nessuno di questi come primo vettore di una base ortogonale. Prendiamo allora $v_1 = e_1 + e_2$; questo vettore non è isotropo, dato che si ha $g(v_1, v_1) = 2g(e_1, e_2) = 4$.

Come secondo vettore si vede immediatamente che si può prendere $v_2 = e_1 - e_2$, dato che esso è ortogonale a v_1: $g(v_1, v_2) = 0$. Si ha poi $g(v_2, v_2) = -4$.

A questo punto possiamo prendere

$$v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + e_3,$$

ed imporre che $g(v_1, v_3) = g(v_2, v_3) = 0$. Si trova allora $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ e $\lambda_2 = -\frac{3}{4}$. Si ha quindi

$$v_3 = \frac{1}{4}v_1 - \frac{3}{4}v_2 + e_3 = -\frac{1}{2}e_1 + e_2 + e_3,$$

da cui si ottiene $g(v_3, v_3) = 2$.

Analogamente, ponendo

$$v_4 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + e_4,$$

ed imponendo che $g(v_1, v_4) = g(v_2, v_4) = g(v_3, v_4) = 0$, si trova $\lambda_1 = \frac{3}{4}$, $\lambda_2 = \frac{3}{4}$ e $\lambda_3 = 2$, da cui si ottiene

$$v_4 = \frac{3}{4}v_1 + \frac{3}{4}v_2 + 2v_3 + e_4 = \frac{1}{2}e_1 + 2e_2 + 2e_3 + e_4,$$

e $g(v_4, v_4) = -8$.

La matrice di g rispetto alla base $\{v_1, \ldots, v_4\}$ è quindi

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che l'indice d'inerzia di g è $i(g) = 0$.

(2) Dato che, come si verifica immediatamente, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha indice d'inerzia 0, si deduce che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha indice d'inerzia $2 + 0 = 2$, che è diverso dall'indice d'inerzia di g. Dal teorema di Sylvester segue allora che non esiste una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto a cui g abbia la matrice indicata.

(3) Da quanto detto sopra segue che la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha indice d'inerzia $0 + 0 = 0$, che coincide con l'indice d'inerzia di g. Il teorema di Sylvester afferma allora che esiste una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto a cui g abbia la matrice indicata. Ricordando la matrice di g rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_4\}$ trovata in precedenza, è facile vedere che ponendo, ad esempio, $w_1 = v_1 + v_2$, $w_2 = \frac{1}{4}(v_1 - v_2)$, $w_3 = v_3 + \frac{1}{2}v_4$ e $w_4 = \frac{1}{4}(v_3 - \frac{1}{2}v_4)$, si ottiene una base rispetto alla quale la matrice di g coincide con la matrice in questione.

(4) Da quanto visto in precedenza segue che la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ha indice d'inerzia $0 - 2 = -2$, che è diverso dall'indice d'inerzia di g. Dal teorema di Sylvester segue allora che non esiste una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto a cui g abbia la matrice indicata.

Isometrie

Svolgimento Esercizio 12. Dimostriamo che $\mathrm{Im}(\phi - 1) \subset \mathrm{Ker}(\phi - 1)^\perp$. Sia $v \in V$ e $w \in \mathrm{Ker}(\phi - 1)$; bisogna dimostrare che $(\phi - 1)(v)$ è ortogonale a w, cioè che $g((\phi - 1)(v), w) = 0$. Osserviamo che si ha $\phi(w) = w$, dato che $(\phi - 1)(w) = 0$. Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned} g((\phi - 1)(v), w) &= g(\phi(v), w) - g(v, w) \\ &= g(\phi(v), \phi(w)) - g(v, w) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ove si è usato il fatto che $g(\phi(v), \phi(w)) = g(v, w)$, cioè che ϕ è una isometria.

Dato che la dimostrazione precedente è valida per ogni v ed ogni w, si è così provato che $\mathrm{Im}(\phi - 1) \subset \mathrm{Ker}(\phi - 1)^\perp$. D'altra parte, ricordiamo che

$$\dim \mathrm{Im}(\phi - 1) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}(\phi - 1)$$

e

$$\dim \mathrm{Ker}(\phi - 1)^\perp = \dim V - \dim \mathrm{Ker}(\phi - 1).$$

Quindi $\mathrm{Im}(\phi - 1)$ e $\mathrm{Ker}(\phi - 1)^\perp$ hanno la stessa dimensione e pertanto devono essere uguali.

Altri esercizi

Svolgimento Esercizio 13. (1) Dalla definizione è ovvio che g è simmetrica. Per dimostrare che è bilineare basta allora dimostrare che è lineare nel primo argomento. Si ha:

$$\begin{aligned} g(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2, z_3) &= 2\,\mathrm{Re}((\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)z_3) \\ &= 2\,\mathrm{Re}(\lambda_1 z_1 z_3 + \lambda_2 z_2 z_3) \\ &= 2\lambda_1\,\mathrm{Re}(z_1 z_3) + 2\lambda_2\,\mathrm{Re}(z_2 z_3) \\ &= \lambda_1 g(z_1 z_3) + \lambda_2 g(z_2 z_3), \end{aligned}$$

per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ e ogni $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Per dimostrare che g è non-degenere bisogna dimostrare che, per ogni $z \neq 0$ esiste $w \in \mathbb{C}$ tale che $g(z, w) \neq 0$. Ora, se $z = a + ib \neq 0$, deve essere $a \neq 0$ oppure $b \neq 0$. Nel primo caso si ha $g(z, 1) = 2a \neq 0$, mentre nel secondo si ha $g(z, i) = -2b \neq 0$. Quindi g è non-degenere.

(2) Gli elementi della matrice di g rispetto alla base $\{1, i\}$ sono, per definizione, $g(1, 1)$, $g(1, i)$, $g(i, 1)$ e $g(i, i)$. La matrice in questione è quindi

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(3) Come nel caso precedente, l'elemento di posto (i, j) della matrice di g rispetto alla base $\{z_1, z_2\}$ è dato da $g(z_i, z_j)$. Si verifica che $g(z_1, z_1) = 2\,\mathrm{Re}(z_1^2) = z_1^2 + \bar{z}_1^2$, $g(z_1, z_2) = g(z_2, z_1) = 2\,\mathrm{Re}(z_1 z_2) = z_1 z_2 + \bar{z}_1 \bar{z}_2$ e $g(z_2, z_2) = 2\,\mathrm{Re}(z_2^2) = z_2^2 + \bar{z}_2^2$. Si ha pertanto

$$G = \begin{pmatrix} z_1^2 + \bar{z}_1^2 & z_1 z_2 + \bar{z}_1 \bar{z}_2 \\ z_1 z_2 + \bar{z}_1 \bar{z}_2 & z_2^2 + \bar{z}_2^2 \end{pmatrix}.$$

È ora immediato calcolare il determinante di G e verificare che vale l'uguaglianza in questione.

Svolgimento Esercizio 14. Dato che la matrice A è simmetrica anche A^2 lo è, e quindi rappresenta un'applicazione bilineare simmetrica (ad esempio sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, ove n è l'ordine di A^2, rispetto alla base canonica). L'applicazione bilineare simmetrica definita da A^2 è semidefinita positiva; infatti, per ogni vettore colonna v, si ha:

$${}^t v A^2 v = ({}^t v A)(Av) = {}^t(Av)(Av) = {}^t w w \geq 0,$$

ove si è posto $w = Av$ e si è osservato che ${}^t w w$ non è altro che il prodotto scalare usuale di w per sé stesso.

La matrice $1 + A^2$ rappresenta quindi la somma di una applicazione bilineare simmetrica definita positiva (di matrice 1) con una semidefinita positiva, ed è pertanto definita positiva e quindi non-degenere. Da ciò segue che $\det(1 + A^2) \neq 0$ e quindi $1 + A^2$ è una matrice invertibile.