Applicazioni Lineari e Matrici

Applicazioni Lineari

Svolgimento Esercizio 1. Ricordando la definizione di funzione lineare, si tratta solo di controllare se $f(v+w)=f(v)+f(w)$ e se $f(\lambda v)=\lambda f(v)$, per ogni scelta di vettori v e w e per ogni scalare λ. Si verifica così immediatamente che solo la funzione al punto (2) è lineare.

Svolgimento Esercizio 2. Procedendo come nell'esercizio precedente si scopre che l'unico valore di t che rende lineare questa funzione è $t=0$.

Svolgimento Esercizio 3. Si verifica immediatamente che $f({}^t(x_1,y_1)+{}^t(x_2,y_2)) = f({}^t(x_1,y_1))+f({}^t(x_2,y_2))$, quindi f è additiva. Tuttavia $f(\lambda {}^t(x,y)) = \lambda x+\overline{\lambda y} = \lambda x+\bar{\lambda}\bar{y}$, mentre $\lambda f({}^t(x,y)) = \lambda x+\lambda\bar{y}$, e $\lambda \neq \bar{\lambda}$ per $\lambda \in \mathbb{C}$. Quindi f non è lineare.

Svolgimento Esercizio 4. Ricordiamo che il grafico di f è il sottoinsieme Γ_f di $V\times W$ definito da

$$\Gamma_f = \{(v,w) \mid w=f(v)\}.$$

Dire che Γ_f è un sottospazio vettoriale equivale a dire che è chiuso rispetto alle operazioni di somma e di prodotto scalare, cioè, per ogni (v_1,w_1), $(v_2,w_2)\in\Gamma_f$ e per ogni scalare λ, si deve avere $(v_1,w_1)+(v_2,w_2)\in\Gamma_f$ e $\lambda(v_1,w_1)\in\Gamma_f$. Ma $(v_1,w_1)+(v_2,w_2) = (v_1+v_2,w_1+w_2)$ e questo elemento appartiene a Γ_f se e solo se $w_1+w_2=f(v_1+v_2)$ cioè se e solo se $f(v_1)+f(v_2)=f(v_1+v_2)$, dato che, per definizione, si ha $w_1=f(v_1)$ e $w_2=f(v_2)$. Analogamente si scopre che $\lambda(v_1,w_1)\in\Gamma_f$ se e solo se $\lambda w_1 = f(\lambda v_1)$, cioè se e solo se $\lambda f(v_1)=f(\lambda v_1)$.

Svolgimento Esercizio 5. Indichiamo con A la matrice di f. Ricordiamo che se $v=\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\lambda_3v_3$ (cioè se v ha coordinate ${}^t(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ rispetto alla base di V) e se $f(v)=\mu_1w_1+\cdots+\mu_4w_4$ (cioè se $f(v)$ ha coordinate ${}^t(\mu_1,\ldots,\mu_4)$ rispetto alla base di W), si deve avere

$${}^t(\mu_1,\ldots,\mu_4) = A\,{}^t(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3).$$

Dalle ipotesi sappiamo che l'immagine $f(v_1)$ del vettore v_1, che ha evidentemente coordinate $(1,0,0)$, ha coordinate $(2,-3,0,1)$. Si deve quindi avere

$${}^t(2,-3,0,1) = A\,{}^t(1,0,0),$$

da cui si deduce che le coordinate dell'immagine del primo vettore di base costituiscono la prima colonna della matrice A. Lo stesso discorso si può ripetere per i rimanenti vettori di base, concludendo che le colonne della matrice A sono costituite dalla coordinate delle immagini dei vettori della base di V. Si ha dunque

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento Esercizio 6. Dalle ipotesi sappiamo che $f(v_1)=2w_1+3w_2$, $f(v_2) = -w_1+2w_2$, $f(v_3)=w_1-3w_2$.

(1) Sappiamo che le colonne della matrice A' sono costituite dalle coordinate, rispetto alla base $\{w_1, w_2\}$, delle immagini dei vettori della base $\{v_1', v_2', v_3'\}$. Basta allora calcolare $f(v_1')$, $f(v_2')$ e $f(v_3')$. Per la linearità di f si ha:

$$\begin{aligned} f(v_1') &= f(v_2) + f(v_3) = -w_2, \\ f(v_2') &= f(v_1) + f(v_3) = 3w_1, \\ f(v_3') &= f(v_1) + f(v_2) = w_1 + 5w_2, \end{aligned}$$

da cui si deduce che

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(2) In modo del tutto analogo, le colonne della matrice A'' sono costituite dalle coordinate, rispetto alla base $\{w_1', w_2'\}$, delle immagini dei vettori della base $\{v_1', v_2', v_3'\}$. Si tratta dunque di esprimere i vettori $f(v_1')$, $f(v_2')$ e $f(v_3')$ in funzione dei vettori w_1' e w_2'. Bisognerà pertanto esprimere i vettori w_1 e w_2 come combinazione lineare dei vettori della nuova base. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(w_1 + w_2) = w_1' \\ \frac{1}{2}(w_1 - w_2) = w_2' \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{cases} w_1 = w_1' + w_2' \\ w_2 = w_1' - w_2' \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} f(v_1') &= -w_2 = -w_1' + w_2', \\ f(v_2') &= 3w_1 = 3w_1' + 3w_2', \\ f(v_3') &= w_1 + 5w_2 = 6w_1' - 4w_2'. \end{aligned}$$

La matrice A'' è quindi data da

$$A'' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento Esercizio 7. Supponiamo che sia $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$. Ciò equivale a dire che la funzione

$$\lambda_1 e^{2x} + (\lambda_1 + \lambda_2)\cos x + (\lambda_2 + \lambda_3)\sin x$$

è identicamente nulla. Considerando allora il limite per $x \to +\infty$, e ricordando che $\sin x$ e $\cos x$ sono due funzioni limitate, si deduce che deve essere $\lambda_1 = 0$. Si rimane allora con la funzione

$$\lambda_2 \cos x + (\lambda_2 + \lambda_3)\sin x,$$

che deve essere identicamente nulla. Se poniamo, ad esempio, $x = 0$ si ottiene allora $\lambda_2 = 0$, da cui segue che anche $\lambda_3 = 0$, dovendo essere la funzione $\lambda_3 \sin x$ identicamente nulla. In conclusione, le tre funzioni in questione sono linearmente indipendenti e quindi sono una base del sottospazio V.

Sia ora $D : V \to V$ l'endomorfismo dato da $D(f) = f'$. Si ha:

$$\begin{aligned} D(f_1) &= 2e^{2x} - \sin x = 2f_1 - 2f_2 + f_3, \\ D(f_2) &= -\sin x + \cos x = f_2 - 2f_3, \\ D(f_3) &= \cos x = f_2 - f_3. \end{aligned}$$

Da ciò si deduce che la matrice di D rispetto alla base $\{f_1, f_2, f_3\}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento Esercizio 8. Iniziamo ponendo $v_1 = {}^t(1,2,-1)$, $v_2 = {}^t(3,-1,2)$, $v_3 = {}^t(-1,5,-4)$, $w_1 = {}^t(0,1,0,1)$, $w_2 = {}^t(1,2,0,-1)$, $w_3 = {}^t(2,0,3,2)$.

Dato che una applicazione lineare è determinata, in modo unico, dalle immagini dei vettori di una base, si deduce che, se i tre vettori v_1, v_2 e v_3 sono una base di $\mathbb{R}^3$ allora tale applicazione esiste ed è unica. Controlliamo allora se questi tre vettori sono linearmente indipendenti:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

equivale a

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

che, risolto, fornisce

$$\begin{cases} \lambda_1 = -3\lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_2 = \lambda_3 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Si scopre così che esistono soluzioni non nulle e, di conseguenza, i tre vettori sono linearmente dipendenti. Ponendo, ad esempio, $\lambda_3 = 1$, si ottiene $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_1 = -2$, e quindi una relazione di dipendenza lineare fra i tre vettori è la seguente

$$-2v_1 + v_2 + v_3 = 0.$$

Se una tale f esiste, per linearità si deve avere

$$0 = f(-2v_1 + v_2 + v_3) = -2f(v_1) + f(v_2) + f(v_3) = -2w_1 + w_2 + w_3,$$

ma tale relazione non è soddisfatta dai vettori w_1, w_2 e w_3. Si conclude così che non esiste nessuna applicazione lineare con le proprietà richieste.

Svolgimento Esercizio 9. Iniziamo ponendo $v_1 = {}^t(0,-2,1)$, $v_2 = {}^t(1,1,-2)$, $v_3 = {}^t(2,-4,-1)$, $w_1 = {}^t(3,-1)$, $w_2 = {}^t(1,2)$, $w_3 = {}^t(11,1)$.

Dato che una applicazione lineare è determinata, in modo unico, dalle immagini dei vettori di una base, si deduce che, se i tre vettori v_1, v_2 e v_3 sono una base di $\mathbb{R}^3$

allora tale applicazione esiste ed è unica. Controlliamo allora se questi tre vettori sono linearmente indipendenti:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

equivale a

$$\begin{cases} \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

che, risolto, fornisce

$$\begin{cases} \lambda_2 = -2\lambda_3 \\ \lambda_1 = -3\lambda_3 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Si scopre così che esistono soluzioni non nulle e, di conseguenza, i tre vettori sono linearmente dipendenti. Ponendo, ad esempio, $\lambda_3 = 1$, si ottiene $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = -2$, e quindi una relazione di dipendenza lineare fra i tre vettori è la seguente

$$-3v_1 - 2v_2 + v_3 = 0.$$

Se una tale f esiste, per linearità si deve avere

$$0 = f(-3v_1 - 2v_2 + v_3) = -3f(v_1) - 2f(v_2) + f(v_3) = -3w_1 - 2w_2 + w_3,$$

e tale relazione è effettivamente soddisfatta.

Consideriamo allora v_1 e v_2 e completiamoli ad una base di $\mathbb{R}^3$ aggiungendo, ad esempio, il vettore $e_3 = {}^t(0,0,1)$ (si controlli che v_1, v_2 ed e_3 sono linearmente indipendenti). Dato che f è determinata dalle immagini dei vettori di una base, basta dire chi sono le immagini di v_1, v_2 ed e_3. Ma mentre le immagini di v_1 e v_2 sono fissate, l'immagine di e_3 non è soggetta ad alcuna condizione ed è dunque arbitraria, poniamo allora $f(e_3) = {}^t(a, b)$. Da quanto detto si deduce allora che esistono infinite applicazioni lineari che soddisfano alle condizioni richieste, ed inoltre che tali applicazioni lineari dipendono da due parametri reali (che noi abbiamo indicato con a e b). Per determinare le matrici di tali applicazioni rispetto alle basi canoniche dobbiamo conoscere le immagini dei vettori di base e_1, e_2 ed e_3. Dobbiamo quindi determinare i vettori della base canonica in funzione dei vettori della base $\{v_1, v_2, e_3\}$. Dalle equazioni

$$\begin{cases} v_1 = -2e_2 + e_3 \\ v_2 = e_1 + e_2 - 2e_3 \end{cases}$$

si ricava

$$\begin{cases} e_1 = \dfrac{1}{2}v_1 + v_2 + \dfrac{3}{2}e_3 \\ e_2 = -\dfrac{1}{2}v_1 + \dfrac{1}{2}e_3 \end{cases}$$

e si ha quindi

$$f(e_1) = \frac{1}{2}f(v_1) + f(v_2) + \frac{3}{2}f(e_3) = {}^t(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}a, \frac{3}{2} + \frac{3}{2}b),$$
$$f(e_2) = -\frac{1}{2}f(v_1) + \frac{1}{2}f(e_3) = {}^t(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}a, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}b).$$

 Francesco Bottacin, bottacin@math.unipd.it

Le matrici richieste sono dunque tutte le matrici

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} + \frac{3}{2}a & -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}a & a \\ \frac{3}{2} + \frac{3}{2}b & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}b & b \end{pmatrix}$$

al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.

Osservazione: un altro modo per risolvere questo esercizio consiste nel considerare una matrice incognita

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

e nell'imporre le condizioni $Av_1 = w_1$ e $Av_2 = w_2$ (si noti che la condizione $Av_3 = w_3$ è allora automaticamente soddisfatta). Si ottengono così 4 equazioni nelle 6 incognite a_{ij} che, una volta risolte, forniranno tutte le matrici richieste.

Svolgimento Esercizio 10. (1) Gli elementi di V sono i polinomi della forma $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ tali che $f(0) = f(1) = 0$, il che equivale a richiedere che $a_0 = 0$ e $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$. Si ottiene quindi

$$V = \{-(a_2 + a_3 + a_4)x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \mid a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\},$$

che si verifica subito essere uno spazio vettoriale (cioè chiuso rispetto alle operazioni di somma e di prodotto per uno scalare). Inoltre, attribuendo ad a_2, a_3, a_4 i valori successivamente 1, 0, 0, poi 0, 1, 0, etc., si ottengono i polinomi $f_1(x) = x^2 - x$, $f_2(x) = x^3 - x$, $f^3(x) = x^4 - x$, che sono dunque una base di V.

Gli elementi di W sono invece i polinomi della forma $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$ tali che

$$\int_0^1 (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3)\, dx = 0,$$

che equivale a richiedere che

$$b_0 + \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{3}b_2 + \frac{1}{4}b_3 = 0.$$

Si ha dunque

$$W = \left\{ -\left(\frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{3}b_2 + \frac{1}{4}b_3\right) + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \mid b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R} \right\},$$

che si verifica facilmente essere uno spazio vettoriale. Ancora, attribuendo a b_1, b_2, b_3 i valori successivamente 1, 0, 0, poi 0, 1, 0, etc., si ottengono i polinomi $g_1(x) = x - \frac{1}{2}$, $g_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$, $g^3(x) = x^3 - \frac{1}{4}$, che sono dunque una base di W.

(2) Se $f(x) \in V$, si ha

$$\int_0^1 D(f(x))\, dx = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = 0,$$

quindi $D(f(x)) \in W$, e dunque D è ben definita. Per determinare la matrice di D basta calcolare le immagini dei vettori della base di V:

$$D(f_1(x)) = 2x - 1 = 2g_1(x),$$
$$D(f_2(x)) = 3x^2 - 1 = 3g_2(x),$$
$$D(f_3(x)) = 4x^3 - 1 = 4g_3(x),$$

da cui si deduce che la matrice cercata è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento Esercizio 11. (1) Se $\psi \circ \phi_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è suriettivo, allora è anche iniettivo (e viceversa), ma questo implica che anche ϕ_λ è iniettivo, e ciò deve valere per ogni λ. Osserviamo però che l'immagine di ϕ_λ è generata dai vettori ${}^t(1, 0, 1, 0)$, ${}^t(\lambda, \lambda, 0, 0)$ e ${}^t(0, 0, 1, 0)$, e quindi ha dimensione 2 se $\lambda = 0$. Di conseguenza, almeno nel caso $\lambda = 0$, ϕ_λ non è iniettivo, quindi se ne deduce che non esiste un omomorfismo ψ con le caratteristiche richieste.

(2) Calcolando il prodotto, si ottiene:

$$BA_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda(1+x) & 0 \\ 0 & \lambda y & 0 \\ 0 & \lambda(z-1) & 1 \end{pmatrix}$$

che è la matrice identità se e solo se

$$\begin{cases} \lambda(1+x) = 0 \\ \lambda y = 1 \\ \lambda(z-1) = 0 \end{cases}$$

che ammette soluzioni se e solo se $\lambda \neq 0$. (Si noti che B è la matrice di un omomorfismo $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e che BA_λ è la matrice dell'applicazione composta $\psi \circ \phi_\lambda$. Da quanto appena visto si deduce allora che, se $\lambda \neq 0$, esiste ψ tale che $\psi \circ \phi_\lambda$ sia l'identità).

Nucleo e Immagine

Svolgimento Esercizio 12. Ricordando che le colonne della matrice di ϕ sono costituite dalle coordinate, rispetto alla base $\{w_1, w_2, w_3\}$, delle immagini dei vettori della base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, si deduce che la matrice in questione è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

$\operatorname{Im}\phi$ è il sottospazio di W generato dai vettori $\phi(v_1)$, $\phi(v_2)$, $\phi(v_3)$ e $\phi(v_4)$. Tra questi si troverà dunque una base. In effetti, basta osservare che $\phi(v_3) = -2\phi(v_1)$ e $\phi(v_2) = 2\phi(v_4)$, mentre $\phi(v_1)$ e $\phi(v_4)$ sono linearmente indipendenti, per concludere che una base di $\operatorname{Im}\phi$ è costituita, ad esempio, dai vettori $\phi(v_1)$ e $\phi(v_4)$. Si ha dunque $\dim(\operatorname{Im}\phi) = 2$ e, di conseguenza, $\dim(\operatorname{Ker}\phi) = \dim(V) - \dim(\operatorname{Im}\phi) = 2$. Per determinare una base di $\operatorname{Ker}\phi$ basta allora trovare due vettori linearmente indipendenti che appartengano al nucleo di ϕ. Dalle relazioni tra i vettori $\phi(v_i)$ trovate precedentemente, e dalla linearità di ϕ, si deduce che $\phi(2v_1 + v_3) = 0$ e $\phi(v_2 - 2v_4) = 0$, quindi i due vettori $2v_1 + v_3$ e $v_2 - 2v_4$ appartengono a $\operatorname{Ker}\phi$, ed essendo linearmente indipendenti, ne costituiscono una base. Infine il vettore $w_1 + w_2 + w_3$ appartiene all'immagine di ϕ se e solo se è combinazione lineare dei vettori che costituiscono una base di $\operatorname{Im}\phi$. Si tratta allora di vedere se esistono due scalari λ_1 e λ_2 tali che

$$w_1 + w_2 + w_3 = \lambda_1\phi(v_1) + \lambda_2\phi(v_4) = \lambda_1(w_1 - w_2) + \lambda_2(w_2 - 3w_3).$$

Si ottiene così il sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ -3\lambda_2 = 1, \end{cases}$$

che non ammette soluzioni. Si può dunque concludere che $w_1 + w_2 + w_3 \notin \operatorname{Im}\phi$.

Svolgimento Esercizio 13. Si noti che f è un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$, cioè un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in sé. Da ciò segue che f è iniettivo se e solo se è suriettivo e cioè, per esempio, se e solo se $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. Determiniamo dunque il nucleo di f: $f({}^t(x,y,z)) = 0$ se e solo se

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ y + z = 0 \\ 2z - x = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} x = -2y \\ z = -y. \end{cases}$$

Si scopre così che il nucleo di f contiene dei vettori non nulli, che ha dimensione 1 (nel sistema precedente c'è una sola variabile libera) e che il vettore ${}^t(-2,1,-1)$ (corrispondente alla scelta $y = 1$) ne è una base (f non è dunque né iniettivo né suriettivo). La dimensione dell'immagine di f è allora data da

$$\dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\operatorname{Ker} f) = 2,$$

e dato che $\operatorname{Im} f$ è generato dall'immagine dei vettori di un base di $\mathbb{R}^3$, per esempio la base canonica, per trovare una base di $\operatorname{Im} f$ basterà trovare, fra questi, due vettori linearmente indipendenti. Calcolando $f({}^t(1,0,0)) = {}^t(1,0,-1)$ e $f({}^t(0,1,0)) = {}^t(2,1,0)$ ci accorgiamo che questi sono linearmente indipendenti; possiamo dunque concludere che i vettori ${}^t(1,0,-1)$ e ${}^t(2,1,0)$ sono una base di $\operatorname{Im} f$. Finalmente, ricordiamo che richiedere che la somma di due sottospazi sia diretta equivale a richiedere che la loro intersezione sia nulla (nel senso di $\{0\}$, non di $\emptyset$!). Basta allora controllare se il vettore ${}^t(-2,1,-1)$, che genera $\operatorname{Ker} f$, si può scrivere come combinazione lineare dei vettori che costituiscono una base di $\operatorname{Im} f$:

$${}^t(-2,1,-1) = \lambda_1 {}^t(1,0,-1) + \lambda_2 {}^t(2,1,0).$$

Si ottiene così un sistema lineare che non ha soluzioni. Di conseguenza la somma di $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ è diretta e, dal computo delle dimensioni, si deduce che $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

Svolgimento Esercizio 14. Le immagini dei vettori ${}^t(1,0,0)$ e ${}^t(0,1,0)$ costituiscono rispettivamente la prima e seconda colonna della matrice cercata. La terza colonna è data dall'immagine del vettore ${}^t(0,0,1)$. Dato che ${}^t(0,0,1) = {}^t(0,1,0) - {}^t(0,1,-1)$, dalla linearità di f segue che $f({}^t(0,0,1)) = {}^t(1,-1,1) - {}^t(0,2,2) = {}^t(1,-3,-1)$. La matrice cercata è quindi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si vede ora facilmente che $\operatorname{Ker} f = 0$, e pertanto $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$. Come base di $\operatorname{Im} f$ si può allora prendere la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Svolgimento Esercizio 15. Osservando la matrice A si vede immediatamente che $\text{rango}(f) = \dim \text{Im}(f) = \text{rango}(A) = 2$. Di conseguenza, si ha $\dim \text{Ker}(f) = 1$. Una base del nucleo di f è allora data dal vettore ${}^t(-1, 2, -1)$, mentre come base dell'immagine di f si possono prendere, ad esempio, i vettori che costituiscono le prime due colonne della matrice A.

Svolgimento Esercizio 16. Ricordiamo che le dimensioni del nucleo e dell'immagine di una applicazione lineare sono legate dalla formula

$$\dim V = \dim(\text{Ker}\,\phi) + \dim(\text{Im}\,\phi).$$

Pertanto, se esiste $\phi : V \to V$ tale che $\text{Ker}\,\phi = \text{Im}\,\phi$ si deve avere necessariamente $\dim V = 2\dim(\text{Ker}\,\phi)$, cioè la dimensione di V deve essere pari.

Viceversa, ci chiediamo se il fatto che V abbia dimensione pari sia anche sufficiente a garantire l'esistenza di un endomorfismo ϕ con le caratteristiche richieste. Sia dunque V uno spazio vettoriale di dimensione $2n$ e fissiamo una sua base $\{v_1, v_2, \ldots, v_{2n}\}$. Cerchiamo ora di costruire un'applicazione lineare ϕ tale che $\text{Ker}\,\phi = \text{Im}\,\phi$. Ricordiamo che un'applicazione lineare è determinata dalle immagini degli elementi di una base quindi, per costruire ϕ, basta dire chi sono $\phi(v_1), \phi(v_2), \ldots, \phi(v_{2n})$. Poniamo allora $\phi(v_1) = \phi(v_2) = \cdots = \phi(v_n) = 0$, in modo da ottenere che il nucleo sia il sottospazio di V generato dai primi n vettori della base. Ora che conosciamo il nucleo basterà fare in modo che anche l'immagine di ϕ sia generata dai vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Dato che l'immagine è generata dall'immagine dei vettori della base di V, e dato che l'immagine dei primi n vettori è zero, basterà allora porre $\phi(v_{n+1}) = v_1, \phi(v_{n+2}) = v_2, \ldots, \phi(v_{2n}) = v_n$. Questo prova che un tale ϕ esiste e quindi che la condizione che V abbia dimensione pari è anche sufficiente.

Rango di una Matrice

Svolgimento Esercizio 17. Ricordando che il rango di una matrice è il numero di righe (o colonne) linearmente indipendenti, è chiaro che sommando ad una riga (o colonna) una combinazione lineare delle righe (colonne) rimanenti, oppure scambiando fra loro due righe (o colonne), il rango non cambia. Effettuando quindi questo tipo di operazioni (dette operazioni elementari) sulle righe (o sulle colonne), possiamo ridurre la matrice A ad una forma più semplice, in cui la determinazione del rango risulti immediata. In dettaglio, le operazioni da fare sono, ad esempio, le seguenti: scambiamo la prima con la seconda riga di A, ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Ora sottraiamo alla quarta riga la prima, ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ora aggiungiamo alla terza riga la seconda, ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Infine sottraiamo alla quarta riga la terza, ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si noti come l'obiettivo da raggiungere sia quello di fare in modo che tutti gli elementi situati al di sotto della diagonale principale siano 0. A questo punto è immediato contare quante sono le righe linearmente indipendenti: nel nostro caso 3. Questo è dunque il rango di A.

Osservazione: In modo del tutto analogo si possono effettuare delle operazioni elementari sulle colonne in modo da ottenere alla fine una matrice in cui tutti gli elementi situati a destra della diagonale principale siano nulli. Tuttavia è bene non mescolare operazioni elementari sulle righe con operazioni elementari sulle colonne.

Svolgimento Esercizio 18. Con operazioni elementari sulle righe (vedi esercizio precedente) si ottiene, alla fine, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-a & 0 \end{pmatrix}$$

Si vede allora che, se $a = 0$ si ha rango$(A) = 2$, se $a = 1$ si ha rango$(A) = 3$, mentre per tutti gli altri valori di a si ha rango$(A) = 4$.

Inversione di Matrici

Svolgimento Esercizio 19. Un metodo molto semplice per calcolare l'inversa di una matrice (quando questa esiste) consiste nell'affiancare alla matrice A la matrice identità, ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

A questo punto, con delle operazioni elementari sulle righe, cerchiamo di far apparire la matrice identità a sinistra: alla fine la matrice che troveremo a destra sarà proprio la matrice inversa di A (perché?). In dettaglio le operazioni da fare sono, ad esempio, le seguenti: sottraiamo alla seconda riga la prima, e alla terza riga la prima, ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ora sommiamo alla seconda riga la terza, mentre alla prima sottraiamo la terza, ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ora sommiamo alla prima riga la seconda moltiplicata per -2, ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

In conclusione, si ha

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$